HÜTTE

DES INGENIEURS TASCHENBUCH I

Berlin
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

S

ne



„HÜTTE"

DES INGENIEURS TASCHENBUCH.

„HÜTTE"

DES INGENIEURS TASCHENBUCH.

HERAUSGEGEBEN

VOM

AKADEMISCHEN VEREIN HÜTTE.

ZWANZIGSTE AUFLAGE.

ABTEILUNG I.

BERLIN 1908.
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN.

DEM

VEREINE DEUTSCHER INGENIEURE

GEWIDMET.

Vorwort

zur zwanzigsten Auflage.

Als im Jahre 1857 die „Hütte“, des Ingenieurs Taschenbuch, den ersten Schritt in die Welt wagte, bestand sie — und wir glauben, gerade jetzt daran erinnern zu sollen — aus drei getrennten Teilen. In der Vorrede zur ersten Auflage heißt es:

„Da sich bei der Ausdehnung des zu behandelnden Stoffs ein gröfseres Volumen des Werks voraussetzen liefs, als zum bequemen Gebrauch desselben als Taschenbuch rathsam erschien, so ist es in drei Theile getheilt, von denen der erste die Mathematik und Mechanik, der zweite die Maschinenbaukunde und in einem Anhange die Eisenhüttenkunde*) und Gasfabrikation, der dritte die Bauwissenschaft enthält. Da jeder Theil für sich ein abgeschlossenes Ganze bildet, so ist jedem Techniker durch diese Anordnung die Gelegenheit geboten, nur den ihn interessirenden Theil zu benutzen; für die größere Zahl wird indessen der erste Theil ein nothwendiges Supplement zu jedem der beiden folgenden Theile bilden.“

Die bei der dritten Auflage vorgenommene Verschmelzung der drei Teile zu einem Bande konnte von der vierzehnten Auflage an wegen der immer mehr anwachsenden Menge des Stoffes nicht mehr aufrecht erhalten werden, so daß man zur Zweiteilung schreiten mußte. Trotzdem wuchs der für ein Taschenbuch besonders fühlbare Übelstand der Unhandlichkeit von Auflage zu Auflage und heischte dringend Abhülfe.

So sahen wir uns bei der 18. und 19. Auflage zu einer recht unerwünschten Beschneidung des Stoffes gezwungen, nachdem schon in früheren Auflagen Abschnitte aus dem Gebiete der Technologie der Vollständigkeit der für den Ingenieur wichtigsten Kapitel zuliebe ganz gestrichen waren. Jetzt, bei Bearbeitung der 20. Auflage, glaubten wir, dieses Vorgehen mit den Grundsätzen des Taschenbuches nicht mehr vereinbaren zu können, und beschlossen wieder die Dreiteilung in derselben Anordnung, wie sie die erste Auflage gezeigt hatte, für die wir also auch die oben genannten Vorteile in Anspruch nehmen dürfen.

---

*) In ausführlicher Form wird im Frühjahr 1909 dieser Abschnitt als „Taschenbuch für Eisenhüttenleute“ im gleichen Verlage vom Akademischen Verein Hütte herausgegeben.

Wir glauben, daß es dem Maschineningenieur und Schiffbauer willkommen sein wird, seine Fachwissenschaft in den ersten beiden Bänden geschlossen behandelt zu sehen, und haben es trotz wesentlich erweiterten Umfanges im Verein mit der Verlagsbuchhandlung ermöglicht, daß die ersten beiden Bände ohne den dritten im Buchhandel zu geringerem Preise als die frühere Auflage erhältlich sind.

Doch auch dem Bauingenieur hoffen wir durch die Dreiteilung entgegengekommen zu sein. Erst durch Zusammenfassung der Gebiete seiner engeren Fachwissenschaft in einem besonderen Bande war es möglich, diese so zu erweitern und ergänzen, daß wir überzeugt sind, nunmehr auch dem Bauingenieur ein für die wichtigsten Fälle der Praxis ausreichendes Handbuch bieten zu können.

Der Zusammenhang zwischen der ersten und zweiten Abteilung einerseits und der dritten Abteilung anderseits ist demgemäß nicht so eng, daß wir uns hätten für berechtigt halten dürfen, unseren Wunsch, die „Hütte" nur als Ganzes herauszubringen, dem dringenden Bedürfnis nach Herausgabe der beiden ersten Bände entgegenzustellen, jetzt, wo die 19. Auflage nahezu vergriffen ist und zu Beginn des neuen Studienhalbjahres nur nach der neuen „Hütte" verlangt wird.

In diesen beiden Bänden sind sämtliche Abschnitte aufs sorgfältigste durchgearbeitet worden, wobei sich für wichtige Kapitel umfangreiche Erweiterungen und teilweise Neubearbeitung notwendig erwiesen haben. Stets war dabei das Augenmerk darauf gerichtet, mit der führenden Praxis in enger Fühlung zu bleiben und unbeschadet aller Wissenschaftlichkeit in Wort und Bild nur für die Praxis brauchbare Angaben aufzunehmen. Die zahlreichen Zusätze, vor allem auch die große Zahl neuer Abbildungen lassen es erklärlich erscheinen, daß der Umfang gegen die letzte Auflage wieder bedeutend gestiegen ist, wodurch die Erhöhung des Gesamtpreises gerechtfertigt erscheint.

Wie immer, so haben wir uns auch diesmal des Rates und der Unterstützung zahlreicher hervorragender Fachleute zu erfreuen gehabt, denen wir an dieser Stelle unseren wärmsten Dank aussprechen.

Besonders fühlen wir uns folgenden Herren gegenüber verpflichtet, die die Bearbeitung einzelner Abschnitte der beiden ersten Abteilungen übernommen haben:

H. Bolstorff, Regierungsbaumeister, Wilmersdorf (Reibungswiderstände).

M. Buhle, Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden (Förder- und Lagermittel für körnige, stückige und mehlfeine Stoffe).

R. Doerfel, k. k. Hofrat, Professor an der Technischen Hochschule zu Prag (Dampfmaschinen, Dampfturbinen).

C. Feldmann, Professor an der Technischen Hochschule zu Delft (Elektrotechnik).

G. Forner, Ingenieur der A. E. G., Turbinenfabrik, Berlin (Dampfturbinen).

F. Geuerlich, Ingenieur, Berlin (Dampfkessel).

Dr. **E. Glinzer,** Professor, Oberlehrer der staatlichen Baugewerkschule zu Hamburg (Stoffkunde).

H. Güldner, Direktor der Güldner-Motoren-Gesellschaft, Aschaffenburg (Verbrennungsmotoren).

Dr. **H. Hoffmann,** Lehrer an der Bergschule zu Bochum (Hebewerke für flüssige Körper, Gebläse und Kompressoren).

M. Holtschmidt, Ingenieur, Charlottenburg (Regelnde Maschinenteile).

J. Hrabák, k. k. Oberbergrat, Professor an der Berg-Akademie zu Příbram (Dampfmaschinen).

H. Idelberger, Dipl. Ing., Oberingenieur der Siemens-Schuckert Werke, Berlin (elektrische Bahnen).

O. Kammerer, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin (Hebemaschinen).

P. Kesten, Civilingenieur, Frankfurt a. M. (Mechanik starrer Körper, Elektrotechnik).

K. Körner, Professor an der Technischen Hochschule zu Prag (Dampfmaschinen).

H. Lang, Regierungs- und Baurat, Bromberg (Mechanik tropfbar flüssiger Körper).

A. Laskus, Kaiserl. Regierungsrat, Friedenau (Festigkeitslehre).

F. Ludloff, Ingenieur, Berlin (Anhang, Sachverzeichnis).

H. Martens, Ingenieur des Dampfkessel-Revisionsvereins Berlin (Dampfkessel).

E. Metzeltin, Regierungsbaumeister, Direktor der Hannov. Maschinenbau-A.-G. vormals G. Egestorff, Hannover (Eisenbahnbetriebsmittel).

F. Meyer, Schiffbauingenieur, Assistent an der Technischen Hochschule zu Berlin (Schiffbau).

Dr. **R. Mollier,** Hofrat, Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden (Wärme).

A. Pfarr, Geh. Baurat, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt (Turbinenbau).

W. Philippi, Oberingenieur und Privatdozent an der Bergakademie zu Berlin (Elektrotechnik).

R. Rahusen, Dipl. Ing. (Schiffsmaschinenbau).

O. Rambuscheck, Konstruktionsingenieur an der Technischen Hochschule zu Berlin (Werkzeugmaschinen).

M. Schellewald, Dipl. Ing., Dahlbruch (Fördermaschinen).

W. Schrader, Direktor bei Carl Flohr, Berlin (Aufzüge).

W. Treptow, Kaiserl. Regierungsrat, Charlottenburg (Maschinenteile).

R. Vogdt, Regierungsbaumeister, Posen (Wasserräder und Windräder).

Dr. **H. Wedding** †, Geh. Bergrat, Professor an der Technischen Hochschule und an der Bergakademie zu Berlin (Eisenhüttenkunde).

M. Wentzel, Ingenieur, Berlin (Dampfkessel).

W. Will, Ingenieur, Berlin (Stoffkunde).

Schließlich wenden wir uns mit der Bitte um weitere Mitarbeit und Förderung an alle diejenigen Freunde unseres Leserkreises, die uns Unrichtigkeiten und Abänderungsvorschläge freundlichst mit-

geteilt haben. Wir verhehlen uns nicht, daß trotz besten Willens und größter Sorgfalt doch nicht allen Wünschen gerecht geworden ist, nicht alle Anforderungen erfüllt sind. Es bedarf daher nicht besonderer Versicherung, daß wir auch in Zukunft jede einsichtsvolle Beurteilung, jede Mitteilung von Fehlern und Verbesserungsvorschlägen dankbar anerkennen und benutzen werden.

Ist es nötig, noch über Druck und Ausstattung, die von der ersten Auflage an von der Verlagsbuchhandlung mit besonderer Sorgfalt bedacht wurden, ein Wort zu sagen, so sei es der Dank für die Mühe, die sie dem schwierigen Satz mit seinen unzähligen, bis zum letzten Augenblick eintreffenden Korrekturen gewidmet hat, und für die stete Bereitwilligkeit, mit der sie unseren Wünschen bei Anfertigung der Hunderte neuer Abbildungen entgegengekommen ist.

Als der Verein deutscher Ingenieure im Sommer 1906 sein 50. Stiftungsfest in den Räumen des Deutschen Reichstages feierte, waren auch just 50 Jahre verflossen, seit am 26. April 1856 auf Antrag Stühlen der erste Beschluß zur Herausgabe des Taschenbuches gefaßt war, und eingedenk der gemeinschaftlichen Ziele und alter freundschaftlicher Ueberlieferungen erschien uns die Widmung der im Sommer 1906 bereits in Arbeit befindlichen 20. Auflage ein schickliches Angebinde für den Verein deutscher Ingenieure zu seinem Jubelfeste.

Wie die Begründer und ersten bedeutenden Mitglieder des Vereins deutscher Ingenieure aus der Hütte hervorgegangen sind, so mögen die deutschen Ingenieure stets zur „Hütte" zurückkehren und in ihr ihr geistiges Rüstzeug blank und scharf zum friedlichen Kampfe um die Weltherrschaft suchen und finden. Mit diesem Wunsche übergeben wir das Werk der Oeffentlichkeit.

Berlin NW 23, Bachstr. 9 im September 1908.

Die Taschenbuchkommission des Akademischen Vereins Hütte.

I. A.: Der Vorsitzende:

M. Seyffert.

INHALTSVERZEICHNIS

der ersten Abteilung.

ERSTER ABSCHNITT.

Mathematik.

ZWEITER ABSCHNITT.

A. Mechanik starrer Körper.

B. Mechanik tropfbar flüssiger Körper.

C. Wärme. (Einschliefslich der Mechanik der Gase und Dämpfe.)

DRITTER ABSCHNITT.

Festigkeitslehre.

VIERTER ABSCHNITT.

Stoffkunde.

FÜNFTER ABSCHNITT.

Eisenhüttenkunde.

SECHSTER ABSCHNITT.

Maschinenteile.

Anhang.

Abkürzungen.

Aufser den vom Bundesrat festgesetzten Mafs- und Gewichtsbezeichnungen (vrgl. Abteil. I S. 128 u. f.) sowie den Bezeichnungen der elektrischen Mafseinheiten (Vrgl. Abteil. II S. 813 u. 814) sind in der Hütte folgende Abkürzungen angewendet worden.

sk = Sekunde(n).
min = Minute(n).
st = Stunde(n).
ℳ = Mark.
₰ = Pfennig.
PS = Pferdestärke(n).
at = Atmosphäre(n).
WE = Wärmeeinheit(en).
HK = Hefner-Kerze(n).
Uml./sk (min, st) = Umdrehungen in der Sekunde (Minute, Stunde).
R.-T. = Raumteil(e).
G.-T. = Gewichtsteil(e).
Z. d. B. = Zentralblatt der Bauverwaltung.
D. B. = Deutsche Bauzeitung.
El. Z. = Elektrotechnische Zeitschrift.
Gl. A. = Glasers Annalen.
H. d. B. = Handbuch der Baukunde.
H. d. I. W. = Handbuch der Ingenieur-Wissenschaften.
J. G. W. = Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung.
O. f. F. = Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens.
Z. d. V. d. I. = Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.
Z. f. B. = Zeitschrift für Bauwesen.
H. d. A. = Handbuch der Architektur.
Z. ö. I. u. A. V. = Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins.

Berichtigungen.

Abt. I S. 15 in Spalte $\frac{\pi n^2}{4}$ unter 659 lies: 341 083 statt: 341 084.

„ I S. 55 in der Zahlentafel der Abschreibungssumme unter 4 vH und 15 Jahre lies: 4,994 statt: 4,993.

„ I S. 211 Z. 9 v. o. in der Formel für J_c lies: 364,76 statt: 36476.

„ I S. 257 Z. 2 v. o. lies: $Q = b\sqrt{2g}\,[(\quad) + \mu_2(\quad)]$
statt: $Q = b\sqrt{2g}\,[(\quad) + \mu_2 b(\quad)]$.

„ I S. 406 Z. 6 v. o. lies: k_b statt: b_b.

„ I S. 513 ist die Fußnote zu streichen (die Bezeichnung „Halbmilch“ ist polizeilich verboten).

„ I S. 668 in der Tafel der Gewinde für Gasrohre unter d lies: 59 statt: 59,70.

„ I S. 740 in Abb. 128 lies: $e^{\mu\omega}$ statt: $e^{\mu\alpha}$.

„ I S. 744 in Abb. 131 lies: kv statt: pv.

„ I S. 919 unter China lies: 1 Haikuan = Taël Silber schwankend, z. Z. . . . . 2,77 statt: 1 Haikuan = Taël Silber (amtlich) . . . . . . 6,41.

„ II S. 497 in der Tafel zu Abb. 245 zweite Spalte lies: „Ausladung des Drehkranes“ statt: „Ausladung A des Kranes“.

1. ABSCHNITT.

MATHEMATIK.

I. TAFELN.

(Die Anmerkungen hierzu auf S. 44 sind zu beachten.)

A. Tafel der Potenzen, Wurzeln, natürlichen Logarithmen, reziproken Werte, Kreisumfänge und Kreisflächen.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1000,000	3,142	0, 78 54	1
2	4	8	1,4142	1,2599	0,69315	500,000	6,283	3, 14 16	2
3	9	27	1,7321	1,4422	1,09861	333,333	9,425	7, 06 86	3
4	16	64	2,0000	1,5874	1,38629	250,000	12,566	12, 56 64	4
5	25	125	2,2361	1,7100	1,60944	200,000	15,708	19, 63 50	5
6	36	216	2,4495	1,8171	1,79176	166,667	18,850	28, 27 43	6
7	49	343	2,6458	1,9129	1,94591	142,857	21,991	38, 48 45	7
8	64	512	2,8284	2,0000	2,07944	125,000	25,133	50, 26 55	8
9	81	729	3,0000	2,0801	2,19722	111,111	28,274	63, 61 73	9
10	1 00	1 000	3,1623	2,1544	2,30259	100,000	31,416	78, 53 98	**10**
11	1 21	1 331	3,3166	2,2240	2,39790	90,9091	34,558	95, 03 32	11
12	1 44	1 728	3,4641	2,2894	2,48491	83,3333	37,699	1 13, 09 7	12
13	1 69	2 197	3,6056	2,3513	2,56495	76,9231	40,841	1 32, 73 2	13
14	1 96	2 744	3,7417	2,4101	2,63906	71,4286	43,982	1 53, 93 8	14
15	2 25	3 375	3,8730	2,4662	2,70805	66,6667	47,124	1 76, 71 5	15
16	2 56	4 096	4,0000	2,5198	2,77259	62,5000	50,265	2 01, 06 2	16
17	2 89	4 913	4,1231	2,5713	2,83321	58,8235	53,407	2 26, 98 0	17
18	3 24	5 832	4,2426	2,6207	2,89037	55,5556	56,549	2 54, 46 9	18
19	3 61	6 859	4,3589	2,6684	2,94444	52,6316	59,690	2 83, 52 9	19
20	4 00	8 000	4,4721	2,7144	2,99573	50,0000	62,832	3 14, 15 9	**20**
21	4 41	9 261	4,5826	2,7589	3,04452	47,6190	65,973	3 46, 36 1	21
22	4 84	10 648	4,6904	2,8020	3,09104	45,4545	69,115	3 80, 13 3	22
23	5 29	12 167	4,7958	2,8439	3,13549	43,4783	72,257	4 15, 47 6	23
24	5 76	13 824	4,8990	2,8845	3,17805	41,6667	75,398	4 52, 38 9	24
25	6 25	15 625	5,0000	2,9240	3,21888	40,0000	78,540	4 90, 87 4	25
26	6 76	17 576	5,0990	2,9625	3,25810	38,4615	81,681	5 30, 92 9	26
27	7 29	19 683	5,1962	3,0000	3,29584	37,0370	84,823	5 72, 55 5	27
28	7 84	21 952	5,2915	3,0366	3,33220	35,7143	87,965	6 15, 75 2	28
29	8 41	24 389	5,3852	3,0723	3,36730	34,4828	91,106	6 60, 52 0	29
30	9 00	27 000	5,4772	3,1072	3,40120	33,3333	94,248	7 06, 85 8	**30**
31	9 61	29 791	5,5678	3,1414	3,43399	32,2581	97,389	7 54, 76 8	31
32	10 24	32 768	5,6569	3,1748	3,46574	31,2500	100,531	8 04, 24 8	32
33	10 89	35 937	5,7446	3,2075	3,49651	30,3030	103,673	8 55, 29 9	33
34	11 56	39 304	5,8310	3,2396	3,52636	29,4118	106,814	9 07, 92 0	34
35	12 25	42 875	5,9161	3,2711	3,55535	28,5714	109,956	9 62, 11 3	35
36	12 96	46 656	6,0000	3,3019	3,58352	27,7778	113,097	10 17, 88	36
37	13 69	50 653	6,0828	3,3322	3,61092	27,0270	116,239	10 75, 21	37
38	14 44	54 872	6,1644	3,3620	3,63759	26,3158	119,381	11 34, 11	38
39	15 21	59 319	6,2450	3,3912	3,66356	25,6410	122,522	11 94, 59	39
40	16 00	64 000	6,3246	3,4200	3,68888	25,0000	125,66	12 56, 64	**40**
41	16 81	68 921	6,4031	3,4482	3,71357	24,3902	128,81	13 20, 25	41
42	17 64	74 088	6,4807	3,4760	3,73767	23,8095	131,95	13 85, 44	42
43	18 49	79 507	6,5574	3,5034	3,76120	23,2558	135,09	14 52, 20	43
44	19 36	85 184	6,6332	3,5303	3,78419	22,7273	138,23	15 20, 53	44
45	20 25	91 125	6,7082	3,5569	3,80666	22,2222	141,37	15 90, 43	45
46	21 16	97 336	6,7823	3,5830	3,82864	21,7391	144,51	16 61, 90	46
47	22 09	103 823	6,8557	3,6088	3,85015	21,2766	147,65	17 34, 94	47
48	23 04	110 592	6,9282	3,6342	3,87120	20,8333	150,80	18 09, 56	48
49	24 01	117 649	7,0000	3,6593	3,89182	20,4082	153,94	18 85, 74	49
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	3,91202	20,0000	157,08	19 63, 50	**50**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	3,91202	20,0000	157,08	19 63,50	**50**
51	26 01	132 651	7,1414	3,7084	3,93183	19,6078	160,22	20 42,82	51
52	27 04	140 608	7,2111	3,7325	3,95124	19,2308	163,36	21 23,72	52
53	28 09	148 877	7,2801	3,7563	3,97029	18,8679	166,50	22 06,18	53
54	29 16	157 464	7,3485	3,7798	3,98898	18,5185	169,65	22 90,22	54
55	30 25	166 375	7,4162	3,8030	4,00733	18,1818	172,79	23 75,83	55
56	31 36	175 616	7,4833	3,8259	4,02535	17,8571	175,93	24 63,01	56
57	32 49	185 193	7,5498	3,8485	4,04305	17,5439	179,07	25 51,76	57
58	33 64	195 112	7,6158	3,8709	4,06044	17,2414	182,21	26 42,08	58
59	34 81	205 379	7,6811	3,8930	4,07754	16,9492	185,35	27 33,97	59
60	36 00	216 000	7,7460	3,9149	4,09434	16,6667	188,50	28 27,43	**60**
61	37 21	226 981	7,8102	3,9365	4,11087	16,3934	191,64	29 22,47	61
62	38 44	238 328	7,8740	3,9579	4,12713	16,1290	194,78	30 19,07	62
63	39 69	250 047	7,9373	3,9791	4,14313	15,8730	197,92	31 17,25	63
64	40 96	262 144	8,0000	4,0000	4,15888	15,6250	201,06	32 16,99	64
65	42 25	274 625	8,0623	4,0207	4,17439	15,3846	204,20	33 18,31	65
66	43 56	287 496	8,1240	4,0412	4,18965	15,1515	207,35	34 21,19	66
67	44 89	300 763	8,1854	4,0615	4,20469	14,9254	210,49	35 25,65	67
68	46 24	314 432	8,2462	4,0817	4,21951	14,7059	213,63	36 31,68	68
69	47 61	328 509	8,3066	4,1016	4,23411	14,4928	216,77	37 39,28	69
70	49 00	343 000	8,3666	4,1213	4,24850	14,2857	219,91	38 48,45	**70**
71	50 41	357 911	8,4261	4,1408	4,26268	14,0845	223,05	39 59,19	71
72	51 84	373 248	8,4853	4,1602	4,27667	13,8889	226,19	40 71,50	72
73	53 29	389 017	8,5440	4,1793	4,29046	13,6986	229,34	41 85,39	73
74	54 76	405 224	8,6023	4,1983	4,30407	13,5135	232,48	43 00,84	74
75	56 25	421 875	8,6603	4,2172	4,31749	13,3333	235,62	44 17,86	75
76	57 76	438 976	8,7178	4,2358	4,33073	13,1579	238,76	45 36,46	76
77	59 29	456 533	8,7750	4,2543	4,34381	12,9870	241,90	46 56,63	77
78	60 84	474 552	8,8318	4,2727	4,35671	12,8205	245,04	47 78,36	78
79	62 41	493 039	8,8882	4,2908	4,36945	12,6582	248,19	49 01,67	79
80	64 00	512 000	8,9443	4,3089	4,38203	12,5000	251,33	50 26,55	**80**
81	65 61	531 441	9,0000	4,3267	4,39445	12,3457	254,47	51 53,00	81
82	67 24	551 368	9,0554	4,3445	4,40672	12,1951	257,61	52 81,02	82
83	68 89	571 787	9,1104	4,3621	4,41884	12,0482	260,75	54 10,61	83
84	70 56	592 704	9,1652	4,3795	4,43082	11,9048	263,89	55 41,77	84
85	72 25	614 125	9,2195	4,3968	4,44265	11,7647	267,04	56 74,50	85
86	73 96	636 056	9,2736	4,4140	4,45435	11,6279	270,18	58 08,80	86
87	75 69	658 503	9,3274	4,4310	4,46591	11,4943	273,32	59 44,68	87
88	77 44	681 472	9,3808	4,4480	4,47734	11,3636	276,46	60 82,12	88
89	79 21	704 969	9,4340	4,4647	4,48864	11,2360	279,60	62 21,14	89
90	81 00	729 000	9,4868	4,4814	4,49981	11,1111	282,74	63 61,73	**90**
91	82 81	753 571	9,5394	4,4979	4,51086	10,9890	285,88	65 03,88	91
92	84 64	778 688	9,5917	4,5144	4,52179	10,8696	289,03	66 47,61	92
93	86 49	804 357	9,6437	4,5307	4,53260	10,7527	292,17	67 92,91	93
94	88 36	830 584	9,6954	4,5468	4,54329	10,6383	295,31	69 39,78	94
95	90 25	857 375	9,7468	4,5629	4,55388	10,5263	298,45	70 88,22	95
96	92 16	884 736	9,7980	4,5789	4,56435	10,4167	301,59	72 38,23	96
97	94 09	912 673	9,8489	4,5947	4,57471	10,3093	304,73	73 89,81	97
98	96 04	941 192	9,8995	4,6104	4,58497	10,2041	307,88	75 42,96	98
99	98 01	970 299	9,9499	4,6261	4,59512	10,1010	311,02	76 97,69	99
100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416	4,60517	10,0000	314,16	78 53,98	**100**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416	4,60517	10,0000	314,16	78 53, 98	**100**
101	1 02 01	1 030 301	10,0499	4,6570	4,61512	9,90099	317,30	80 11, 85	101
102	1 04 04	1 061 208	10,0995	4,6723	4,62497	9,80392	320,44	81 71, 28	102
103	1 06 09	1 092 727	10,1489	4,6875	4,63473	9,70874	323,58	83 32, 29	103
104	1 08 16	1 124 864	10,1980	4,7027	4,64439	9,61538	326,73	84 94, 87	104
105	1 10 25	1 157 625	10,2470	4,7177	4,65396	9,52381	329,87	86 59, 01	105
106	1 12 36	1 191 016	10,2956	4,7326	4,66344	9,43396	333,01	88 24, 73	106
107	1 14 49	1 225 043	10,3441	4,7475	4,67283	9,34579	336,15	89 92, 02	107
108	1 16 64	1 259 712	10,3923	4,7622	4,68213	9,25926	339,29	91 60, 88	108
109	1 18 81	1 295 029	10,4403	4,7769	4,69135	9,17431	342,43	93 31, 32	109
110	1 21 00	1 331 000	10,4881	4,7914	4,70048	9,09091	345,58	95 03, 32	**110**
111	1 23 21	1 367 631	10,5357	4,8059	4,70953	9,00901	348,72	96 76, 89	111
112	1 25 44	1 404 928	10,5830	4,8203	4,71850	8,92857	351,86	98 52, 03	112
113	1 27 69	1 442 897	10,6301	4,8346	4,72739	8,84956	355,00	1 00 28,7	113
114	1 29 96	1 481 544	10,6771	4,8488	4,73620	8,77193	358,14	1 02 07,0	114
115	1 32 25	1 520 875	10,7238	4,8629	4,74493	8,69565	361,28	1 03 86,9	115
116	1 34 56	1 560 896	10,7703	4,8770	4,75359	8,62069	364,42	1 05 68,3	116
117	1 36 89	1 601 613	10,8167	4,8910	4,76217	8,54701	367,57	1 07 51,3	117
118	1 39 24	1 643 032	10,8628	4,9049	4,77068	8,47458	370,71	1 09 35,9	118
119	1 41 61	1 685 159	10,9087	4,9187	4,77912	8,40336	373,85	1 11 22,0	119
120	1 44 00	1 728 000	10,9545	4,9324	4,78749	8,33333	376,99	1 13 09,7	**120**
121	1 46 41	1 771 561	11,0000	4,9461	4,79579	8,26446	380,13	1 14 99,0	121
122	1 48 84	1 815 848	11,0454	4,9597	4,80402	8,19672	383,27	1 16 89,9	122
123	1 51 29	1 860 867	11,0905	4,9732	4,81218	8,13008	386,42	1 18 82,3	123
124	1 53 76	1 906 624	11,1355	4,9866	4,82028	8,06452	389,56	1 20 76,3	124
125	1 56 25	1 953 125	11,1803	5,0000	4,82831	8,00000	392,70	1 22 71,8	125
126	1 58 76	2 000 376	11,2250	5,0133	4,83628	7,93651	395,84	1 24 69,0	126
127	1 61 29	2 048 383	11,2694	5,0265	4,84419	7,87402	398,98	1 26 67,7	127
128	1 63 84	2 097 152	11,3137	5,0397	4,85203	7,81250	402,12	1 28 68,0	128
129	1 66 41	2 146 689	11,3578	5,0528	4,85981	7,75194	405,27	1 30 69,8	129
130	1 69 00	2 197 000	11,4018	5,0658	4,86753	7,69231	408,41	1 32 73,2	**130**
131	1 71 61	2 248 091	11,4455	5,0788	4,87520	7,63359	411,55	1 34 78,2	131
132	1 74 24	2 299 968	11,4891	5,0916	4,88280	7,57576	414,69	1 36 84,8	132
133	1 76 89	2 352 637	11,5326	5,1045	4,89035	7,51880	417,83	1 38 92,9	133
134	1 79 56	2 406 104	11,5758	5,1172	4,89784	7,46269	420,97	1 41 02,6	134
135	1 82 25	2 460 375	11,6190	5,1299	4,90527	7,40741	424,12	1 43 13,9	135
136	1 84 96	2 515 456	11,6619	5,1426	4,91265	7,35294	427,26	1 45 26,7	136
137	1 87 69	2 571 353	11,7047	5,1551	4,91998	7,29927	430,40	1 47 41,1	137
138	1 90 44	2 628 072	11,7473	5,1676	4,92725	7,24638	433,54	1 49 57,1	138
139	1 93 21	2 685 619	11,7898	5,1801	4,93447	7,19424	436,68	1 51 74,7	139
140	1 96 00	2 744 000	11,8322	5,1925	4,94164	7,14286	439,82	1 53 93,8	**140**
141	1 98 81	2 803 221	11,8743	5,2048	4,94876	7,09220	442,96	1 56 14,5	141
142	2 01 64	2 863 288	11,9164	5,2171	4,95583	7,04225	446,11	1 58 36,8	142
143	2 04 49	2 924 207	11,9583	5,2293	4,96284	6,99301	449,25	1 60 60,6	143
144	2 07 36	2 985 984	12,0000	5,2415	4,96981	6,94444	452,39	1 62 86,0	144
145	2 10 25	3 048 625	12,0416	5,2536	4,97673	6,89655	455,53	1 65 13,0	145
146	2 13 16	3 112 136	12,0830	5,2656	4,98361	6,84932	458,67	1 67 41,5	146
147	2 16 09	3 176 523	12,1244	5,2776	4,99043	6,80272	461,81	1 69 71,7	147
148	2 19 04	3 241 792	12,1655	5,2896	4,99721	6,75676	464,96	1 72 03,4	148
149	2 22 01	3 307 949	12,2066	5,3015	5,00395	6,71141	468,10	1 74 36,6	149
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	5,3133	5,01064	6,66667	471,24	1 76 71,5	**150**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	5,3133	5,01064	6,66667	471,24	1 76 71,5	150
151	2 28 01	3 442 951	12,2882	5,3251	5,01728	6,62252	474,38	1 79 07,9	151
152	2 31 04	3 511 808	12,3288	5,3368	5,02388	6,57895	477,52	1 81 45,8	152
153	2 34 09	3 581 577	12,3693	5,3485	5,03044	6,53595	480,66	1 83 85,4	153
154	2 37 16	3 652 264	12,4097	5,3601	5,03695	6,49351	483,81	1 86 26,5	154
155	2 40 25	3 723 875	12,4499	5,3717	5,04343	6,45161	486,95	1 88 69,2	155
156	2 43 36	3 796 416	12,4900	5,3832	5,04986	6,41026	490,09	1 91 13,4	156
157	2 46 49	3 869 893	12,5300	5,3947	5,05625	6,36943	493,23	1 93 59,3	157
158	2 49 64	3 944 312	12,5698	5,4061	5,06260	6,32911	496,37	1 96 06,7	158
159	2 52 81	4 019 679	12,6095	5,4175	5,06890	6,28931	499,51	1 98 55,7	159
160	2 56 00	4 096 000	12,6491	5,4288	5,07517	6,25000	502,65	2 01 06,2	160
161	2 59 21	4 173 281	12,6886	5,4401	5,08140	6,21118	505,80	2 03 58,3	161
162	2 62 44	4 251 528	12,7279	5,4514	5,08760	6,17284	508,94	2 06 12,0	162
163	2 65 69	4 330 747	12,7671	5,4626	5,09375	6,13497	512,08	2 08 67,2	163
164	2 68 96	4 410 944	12,8062	5,4737	5,09987	6,09756	515,22	2 11 24,1	164
165	2 72 25	4 492 125	12,8452	5,4848	5,10595	6,06061	518,36	2 13 82,5	165
166	2 75 56	4 574 296	12,8841	5,4959	5,11199	6,02410	521,50	2 16 42,4	166
167	2 78 89	4 657 463	12,9228	5,5069	5,11799	5,98802	524,65	2 19 04,0	167
168	2 82 24	4 741 632	12,9615	5,5178	5,12396	5,95238	527,79	2 21 67,1	168
169	2 85 61	4 826 809	13,0000	5,5288	5,12990	5,91716	530,93	2 24 31,8	169
170	2 89 00	4 913 000	13,0384	5,5397	5,13580	5,88235	534,07	2 26 98,0	170
171	2 92 41	5 000 211	13,0767	5,5505	5,14166	5,84795	537,21	2 29 65,8	171
172	2 95 84	5 088 448	13,1149	5,5613	5,14749	5,81395	540,35	2 32 35,2	172
173	2 99 29	5 177 717	13,1529	5,5721	5,15329	5,78035	543,50	2 35 06,2	173
174	3 02 76	5 268 024	13,1909	5,5828	5,15906	5,74713	546,64	2 37 78,7	174
175	3 06 25	5 359 375	13,2288	5,5934	5,16479	5,71429	549,78	2 40 52,8	175
176	3 09 76	5 451 776	13,2665	5,6041	5,17048	5,68182	552,92	2 43 28,5	176
177	3 13 29	5 545 233	13,3041	5,6147	5,17615	5,64972	556,06	2 46 05,7	177
178	3 16 84	5 639 752	13,3417	5,6252	5,18178	5,61798	559,20	2 48 84,6	178
179	3 20 41	5 735 339	13,3791	5,6357	5,18739	5,58659	562,35	2 51 64,9	179
180	3 24 00	5 832 000	13,4164	5,6462	5,19296	5,55556	565,49	2 54 46,9	180
181	3 27 61	5 929 741	13,4536	5,6567	5,19850	5,52486	568,63	2 57 30,4	181
182	3 31 24	6 028 568	13,4907	5,6671	5,20401	5,49451	571,77	2 60 15,5	182
183	3 34 89	6 128 487	13,5277	5,6774	5,20949	5,46448	574,91	2 63 02,2	183
184	3 38 56	6 229 504	13,5647	5,6877	5,21494	5,43478	578,05	2 65 90,4	184
185	3 42 25	6 331 625	13,6015	5,6980	5,22036	5,40541	581,19	2 68 80,3	185
186	3 45 96	6 434 856	13,6382	5,7083	5,22575	5,37634	584,34	2 71 71,6	186
187	3 49 69	6 539 203	13,6748	5,7185	5,23111	5,34759	587,48	2 74 64,6	187
188	3 53 44	6 644 672	13,7113	5,7287	5,23644	5,31915	590,62	2 77 59,1	188
189	3 57 21	6 751 269	13,7477	5,7388	5,24175	5,29101	593,76	2 80 55,2	189
190	3 61 00	6 859 000	13,7840	5,7489	5,24702	5,26316	596,90	2 83 52,9	190
191	3 64 81	6 967 871	13,8203	5,7590	5,25227	5,23560	600,04	2 86 52,1	191
192	3 68 64	7 077 888	13,8564	5,7690	5,25750	5,20833	603,19	2 89 52,9	192
193	3 72 49	7 189 057	13,8924	5,7790	5,26269	5,18135	606,33	2 92 55,3	193
194	3 76 36	7 301 384	13,9284	5,7890	5,26786	5,15464	609,47	2 95 59,2	194
195	3 80 25	7 414 875	13,9642	5,7989	5,27300	5,12821	612,61	2 98 64,8	195
196	3 84 16	7 529 536	14,0000	5,8088	5,27811	5,10204	615,75	3 01 71,9	196
197	3 88 09	7 645 373	14,0357	5,8186	5,28320	5,07614	618,89	3 04 80,5	197
198	3 92 04	7 762 392	14,0712	5,8285	5,28827	5,05051	622,04	3 07 90,7	198
199	3 96 01	7 880 599	14,1067	5,8383	5,29330	5,02513	625,18	3 11 02,6	199
200	4 00 00	8 000 000	14,1421	5,8480	5,29832	5,00000	628,32	3 14 15,9	200

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
200	4 00 00	8 000 000	14,1421	5,8480	5,29832	5,00000	628,32	3 14 15,9	**200**
201	4 04 01	8 120 601	14,1774	5,8578	5,30330	4,97512	631,46	3 17 30,9	201
202	4 08 04	8 242 408	14,2127	5,8675	5,30827	4,95050	634,60	3 20 47,4	202
203	4 12 09	8 365 427	14,2478	5,8771	5,31321	4,92611	637,74	3 23 65,5	203
204	4 16 16	8 489 664	14,2829	5,8868	5,31812	4,90196	640,88	3 26 85,1	204
205	4 20 25	8 615 125	14,3178	5,8964	5,32301	4,87805	644,03	3 30 06,4	205
206	4 24 36	8 741 816	14,3527	5,9059	5,32788	4,85437	647,17	3 33 29,2	206
207	4 28 49	8 869 743	14,3875	5,9155	5,33272	4,83092	650,31	3 36 53,5	207
208	4 32 64	8 998 912	14,4222	5,9250	5,33754	4,80769	653,45	3 39 79,5	208
209	4 36 81	9 129 329	14,4568	5,9345	5,34233	4,78469	656,59	3 43 07,0	209
210	4 41 00	9 261 000	14,4914	5,9439	5,34711	4,76190	659,73	3 46 36,1	**210**
211	4 45 21	9 393 931	14,5258	5,9533	5,35186	4,73934	662,88	3 49 66,7	211
212	4 49 44	9 528 128	14,5602	5,9627	5,35659	4,71698	666,02	3 52 98,9	212
213	4 53 69	9 663 597	14,5945	5,9721	5,36129	4,69484	669,16	3 56 32,7	213
214	4 57 96	9 800 344	14,6287	5,9814	5,36598	4,67290	672,30	3 59 68,1	214
215	4 62 25	9 938 375	14,6629	5,9907	5,37064	4,65116	675,44	3 63 05,0	215
216	4 66 56	10 077 696	14,6969	6,0000	5,37528	4,62963	678,58	3 66 43,5	216
217	4 70 89	10 218 313	14,7309	6,0092	5,37990	4,60829	681,73	3 69 83,6	217
218	4 75 24	10 360 232	14,7648	6,0185	5,38450	4,58716	684,87	3 73 25,3	218
219	4 79 61	10 503 459	14,7986	6,0277	5,38907	4,56621	688,01	3 76 68,5	219
220	4 84 00	10 648 000	14,8324	6,0368	5,39363	4,54545	691,15	3 80 13,3	**220**
221	4 88 41	10 793 861	14,8661	6,0459	5,39816	4,52489	694,29	3 83 59,6	221
222	4 92 84	10 941 048	14,8997	6,0550	5,40268	4,50450	697,43	3 87 07,6	222
223	4 97 29	11 089 567	14,9332	6,0641	5,40717	4,48430	700,58	3 90 57,1	223
224	5 01 76	11 239 424	14,9666	6,0732	5,41165	4,46429	703,72	3 94 08,1	224
225	5 06 25	11 390 625	15,0000	6,0822	5,41610	4,44444	706,86	3 97 60,8	225
226	5 10 76	11 543 176	15,0333	6,0912	5,42053	4,42478	710,00	4 01 15,0	226
227	5 15 29	11 697 083	15,0665	6,1002	5,42495	4,40529	713,14	4 04 70,8	227
228	5 19 84	11 852 352	15,0997	6,1091	5,42935	4,38596	716,28	4 08 28,1	228
229	5 24 41	12 008 989	15,1327	6,1180	5,43372	4,36681	719,42	4 11 87,1	229
230	5 29 00	12 167 000	15,1658	6,1269	5,43808	4,34783	722,57	4 15 47,6	**230**
231	5 33 61	12 326 391	15,1987	6,1358	5,44242	4,32900	725,71	4 19 09,6	231
232	5 38 24	12 487 168	15,2315	6,1446	5,44674	4,31034	728,85	4 22 73,3	232
233	5 42 89	12 649 337	15,2643	6,1534	5,45104	4,29185	731,99	4 26 38,5	233
234	5 47 56	12 812 904	15,2971	6,1622	5,45532	4,27350	735,13	4 30 05,3	234
235	5 52 25	12 977 875	15,3297	6,1710	5,45959	4,25532	738,27	4 33 73,6	235
236	5 56 96	13 144 256	15,3623	6,1797	5,46383	4,23729	741,42	4 37 43,5	236
237	5 61 69	13 312 053	15,3948	6,1885	5,46806	4,21941	744,56	4 41 15,0	237
238	5 66 44	13 481 272	15,4272	6,1972	5,47227	4,20168	747,70	4 44 88,1	238
239	5 71 21	13 651 919	15,4596	6,2058	5,47646	4,18410	750,84	4 48 62,7	239
240	5 76 00	13 824 000	15,4919	6,2145	5,48064	4,16667	753,98	4 52 38,9	**240**
241	5 80 81	13 997 521	15,5242	6,2231	5,48480	4,14938	757,12	4 56 16,7	241
242	5 85 64	14 172 488	15,5563	6,2317	5,48894	4,13223	760,27	4 59 96,1	242
243	5 90 49	14 348 907	15,5885	6,2403	5,49306	4,11523	763,41	4 63 77,0	243
244	5 95 36	14 526 784	15,6205	6,2488	5,49717	4,09836	766,55	4 67 59,5	244
245	6 00 25	14 706 125	15,6525	6,2573	5,50126	4,08163	769,69	4 71 43,5	245
246	6 05 16	14 886 936	15,6844	6,2658	5,50533	4,06504	772,83	4 75 29,2	246
247	6 10 09	15 069 223	15,7162	6,2743	5,50939	4,04858	775,97	4 79 16,4	247
248	6 15 04	15 252 992	15,7480	6,2828	5,51343	4,03226	779,11	4 83 05,1	248
249	6 20 01	15 438 249	15,7797	6,2912	5,51745	4,01606	782,26	4 86 95,5	249
250	6 25 00	15 625 000	15,8114	6,2996	5,52146	4,00000	785,40	4 90 87,4	**250**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
250	6 25 00	15 625 000	15,8114	6,2996	5,52146	4,00000	785,40	4 90 87,4	**250**
251	6 30 01	15 813 251	15,8430	6,3080	5,52545	3,98406	788,54	4 94 80,9	251
252	6 35 04	16 003 008	15,8745	6,3164	5,52943	3,96825	791,68	4 98 75,9	252
253	6 40 09	16 194 277	15,9060	6,3247	5,53339	3,95257	794,82	5 02 72,6	253
254	6 45 16	16 387 064	15,9374	6,3330	5,53733	3,93701	797,96	5 06 70,7	254
255	6 50 25	16 581 375	15,9687	6,3413	5,54126	3,92157	801,11	5 10 70,5	255
256	6 55 36	16 777 216	16,0000	6,3496	5,54518	3,90625	804,25	5 14 71,9	256
257	6 60 49	16 974 593	16,0312	6,3579	5,54908	3,89105	807,39	5 18 74,8	257
258	6 65 64	17 173 512	16,0624	6,3661	5,55296	3,87597	810,53	5 22 79,2	258
259	6 70 81	17 373 979	16,0935	6,3743	5,55683	3,86100	813,67	5 26 85,3	259
260	6 76 00	17 576 000	16,1245	6,3825	5,56068	3,84615	816,81	5 30 92,9	**260**
261	6 81 21	17 779 581	16,1555	6,3907	5,56452	3,83142	819,96	5 35 02,1	261
262	6 86 44	17 984 728	16,1864	6,3988	5,56834	3,81679	823,10	5 39 12,9	262
263	6 91 69	18 191 447	16,2173	6,4070	5,57215	3,80228	826,24	5 43 25,2	263
264	6 96 96	18 399 744	16,2481	6,4151	5,57595	3,78788	829,38	5 47 39,1	264
265	7 02 25	18 609 625	16,2788	6,4232	5,57973	3,77358	832,52	5 51 54,6	265
266	7 07 56	18 821 096	16,3095	6,4312	5,58350	3,75940	835,66	5 55 71,6	266
267	7 12 89	19 034 163	16,3401	6,4393	5,58725	3,74532	838,81	5 59 90,2	267
268	7 18 24	19 248 832	16,3707	6,4473	5,59099	3,73134	841,95	5 64 10,4	268
269	7 23 61	19 465 109	16,4012	6,4553	5,59471	3,71747	845,09	5 68 32,2	269
270	7 29 00	19 683 000	16,4317	6,4633	5,59842	3,70370	848,23	5 72 55,5	**270**
271	7 34 41	19 902 511	16,4621	6,4713	5,60212	3,69004	851,37	5 76 80,4	271
272	7 39 84	20 123 648	16,4924	6,4792	5,60580	3,67647	854,51	5 81 06,9	272
273	7 45 29	20 346 417	16,5227	6,4872	5,60947	3,66300	857,65	5 85 34,9	273
274	7 50 76	20 570 824	16,5529	6,4951	5,61313	3,64964	860,80	5 89 64,6	274
275	7 56 25	20 796 875	16,5831	6,5030	5,61677	3,63636	863,94	5 93 95,7	275
276	7 61 76	21 024 576	16,6132	6,5108	5,62040	3,62319	867,08	5 98 28,5	276
277	7 67 29	21 253 933	16,6433	6,5187	5,62402	3,61011	870,22	6 02 62,8	277
278	7 72 84	21 484 952	16,6733	6,5265	5,62762	3,59712	873,36	6 06 98,7	278
279	7 78 41	21 717 639	16,7033	6,5343	5,63121	3,58423	876,50	6 11 36,2	279
280	7 84 00	21 952 000	16,7332	6,5421	5,63479	3,57143	879,65	6 15 75,2	**280**
281	7 89 61	22 188 041	16,7631	6,5499	5,63835	3,55872	882,79	6 20 15,8	281
282	7 95 24	22 425 768	16,7929	6,5577	5,64191	3,54610	885,93	6 24 58,0	282
283	8 00 89	22 665 187	16,8226	6,5654	5,64545	3,53357	889,07	6 29 01,8	283
284	8 06 56	22 906 304	16,8523	6,5731	5,64897	3,52113	892,21	6 33 47,1	284
285	8 12 25	23 149 125	16,8819	6,5808	5,65249	3,50877	895,35	6 37 94,0	285
286	8 17 96	23 393 656	16,9115	6,5885	5,65599	3,49650	898,50	6 42 42,4	286
287	8 23 69	23 639 903	16,9411	6,5962	5,65948	3,48432	901,64	6 46 92,5	287
288	8 29 44	23 887 872	16,9706	6,6039	5,66296	3,47222	904,78	6 51 44,1	288
289	8 35 21	24 137 569	17,0000	6,6115	5,66643	3,46021	907,92	6 55 97,2	289
290	8 41 00	24 389 000	17,0294	6,6191	5,66988	3,44828	911,06	6 60 52,0	**290**
291	8 46 81	24 642 171	17,0587	6,6267	5,67332	3,43643	914,20	6 65 08,3	291
292	8 52 64	24 897 088	17,0880	6,6343	5,67675	3,42466	917,35	6 69 66,2	292
293	8 58 49	25 153 757	17,1172	6,6419	5,68017	3,41297	920,49	6 74 25,6	293
294	8 64 36	25 412 184	17,1464	6,6494	5,68358	3,40136	923,63	6 78 86,7	294
295	8 70 25	25 672 375	17,1756	6,6569	5,68698	3,38983	926,77	6 83 49,3	295
296	8 76 16	25 934 336	17,2047	6,6644	5,69036	3,37838	929,91	6 88 13,4	296
297	8 82 09	26 198 073	17,2337	6,6719	5,69373	3,36700	933,05	6 92 79,2	297
298	8 88 04	26 463 592	17,2627	6,6794	5,69709	3,35570	936,19	6 97 46,5	298
299	8 94 01	26 730 899	17,2916	6,6869	5,70044	3,34448	939,34	7 02 15,4	299
300	9 00 00	27 000 000	17,3205	6,6943	5,70378	3,33333	942,48	7 06 85,8	**300**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
300	9 00 00	27 000 000	17,3205	6,6943	5,70378	3,33333	942,48	7 06 85,8	**300**
301	9 06 01	27 270 901	17,3494	6,7018	5,70711	3,32226	945,62	7 11 57,9	301
302	9 12 04	27 543 608	17,3781	6,7092	5,71043	3,31126	948,76	7 16 31,5	302
303	9 18 09	27 818 127	17,4069	6,7166	5,71373	3,30033	951,90	7 21 06,6	303
304	9 24 16	28 094 464	17,4356	6,7240	5,71703	3,28947	955,04	7 25 83,4	304
305	9 30 25	28 372 625	17,4642	6,7313	5,72031	3,27869	958,19	7 30 61,7	305
306	9 36 36	28 652 616	17,4929	6,7387	5,72359	3,26797	961,33	7 35 41,5	306
307	9 42 49	28 934 443	17,5214	6,7460	5,72685	3,25733	964,47	7 40 23,0	307
308	9 48 64	29 218 112	17,5499	6,7533	5,73010	3,24675	967,61	7 45 06,0	308
309	9 54 81	29 503 629	17,5784	6,7606	5,73334	3,23625	970,75	7 49 90,6	309
310	9 61 00	29 791 000	17,6068	6,7679	5,73657	3,22581	973,89	7 54 76,8	**310**
311	9 67 21	30 080 231	17,6352	6,7752	5,73979	3,21543	977,04	7 59 64,5	311
312	9 73 44	30 371 328	17,6635	6,7824	5,74300	3,20513	980,18	7 64 53,8	312
313	9 79 69	30 664 297	17,6918	6,7897	5,74620	3,19489	983,32	7 69 44,7	313
314	9 85 96	30 959 144	17,7200	6,7969	5,74939	3,18471	986,46	7 74 37,1	314
315	9 92 25	31 255 875	17,7482	6,8041	5,75257	3,17460	989,60	7 79 31,1	315
316	9 98 56	31 554 496	17,7764	6,8113	5,75574	3,16456	992,74	7 84 26,7	316
317	10 04 89	31 855 013	17,8045	6,8185	5,75890	3,15457	995,88	7 89 23,9	317
318	10 11 24	32 157 432	17,8326	6,8256	5,76205	3,14465	999,03	7 94 22,6	318
319	10 17 61	32 461 759	17,8606	6,8328	5,76519	3,13480	1002,2	7 99 22,9	319
320	10 24 00	32 768 000	17,8885	6,8399	5,76832	3,12500	1005,3	8 04 24,8	**320**
321	10 30 41	33 076 161	17,9165	6,8470	5,77144	3,11526	1008,5	8 09 28,2	321
322	10 36 84	33 386 248	17,9444	6,8541	5,77455	3,10559	1011,6	8 14 33,2	322
323	10 43 29	33 698 267	17,9722	6,8612	5,77765	3,09598	1014,7	8 19 39,8	323
324	10 49 76	34 012 224	18,0000	6,8683	5,78074	3,08642	1017,9	8 24 48,0	324
325	10 56 25	34 328 125	18,0278	6,8753	5,78383	3,07692	1021,0	8 29 57,7	325
326	10 62 76	34 645 976	18,0555	6,8824	5,78690	3,06748	1024,2	8 34 69,0	326
327	10 69 29	34 965 783	18,0831	6,8894	5,78996	3,05810	1027,3	8 39 81,8	327
328	10 75 84	35 287 552	18,1108	6,8964	5,79301	3,04878	1030,4	8 44 96,3	328
329	10 82 41	35 611 289	18,1384	6,9034	5,79606	3,03951	1033,6	8 50 12,3	329
330	10 89 00	35 937 000	18,1659	6,9104	5,79909	3,03030	1036,7	8 55 29,9	**330**
331	10 95 61	36 264 691	18,1934	6,9174	5,80212	3,02115	1039,9	8 60 49,0	331
332	11 02 24	36 594 368	18,2209	6,9244	5,80513	3,01205	1043,0	8 65 69,7	332
333	11 08 89	36 926 037	18,2483	6,9313	5,80814	3,00300	1046,2	8 70 92,0	333
334	11 15 56	37 259 704	18,2757	6,9382	5,81114	2,99401	1049,3	8 76 15,9	334
335	11 22 25	37 595 375	18,3030	6,9451	5,81413	2,98507	1052,4	8 81 41,3	335
336	11 28 96	37 933 056	18,3303	6,9521	5,81711	2,97619	1055,6	8 86 68,3	336
337	11 35 69	38 272 753	18,3576	6,9589	5,82008	2,96736	1058,7	8 91 96,9	337
338	11 42 44	38 614 472	18,3848	6,9658	5,82305	2,95858	1061,9	8 97 27,0	338
339	11 49 21	38 958 219	18,4120	6,9727	5,82600	2,94985	1065,0	9 02 58,7	339
340	11 56 00	39 304 000	18,4391	6,9795	5,82895	2,94118	1068,1	9 07 92,0	**340**
341	11 62 81	39 651 821	18,4662	6,9864	5,83188	2,93255	1071,3	9 13 26,9	341
342	11 69 64	40 001 688	18,4932	6,9932	5,83481	2,92398	1074,4	9 18 63,3	342
343	11 76 49	40 353 607	18,5203	7,0000	5,83773	2,91545	1077,6	9 24 01,3	343
344	11 83 36	40 707 584	18,5472	7,0068	5,84064	2,90698	1080,7	9 29 40,9	344
345	11 90 25	41 063 625	18,5742	7,0136	5,84354	2,89855	1083,8	9 34 82,0	345
346	11 97 16	41 421 736	18,6011	7,0203	5,84644	2,89017	1087,0	9 40 24,7	346
347	12 04 09	41 781 923	18,6279	7,0271	5,84932	2,88184	1090,1	9 45 69,0	347
348	12 11 04	42 144 192	18,6548	7,0338	5,85220	2,87356	1093,3	9 51 14,9	348
349	12 18 01	42 508 549	18,6815	7,0406	5,85507	2,86533	1096,4	9 56 62,3	349
350	12 25 00	42 875 000	18,7083	7,0473	5,85793	2,85714	1099,6	9 62 11,3	**350**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
350	12 25 00	42 875 000	18,7083	7,0473	5,85793	2,85714	1099,6	9 62 11,3	350
351	12 32 01	43 243 551	18,7350	7,0540	5,86079	2,84900	1102,7	9 67 61,8	351
352	12 39 04	43 614 208	18,7617	7,0607	5,86363	2,84091	1105,8	9 73 14,0	352
353	12 46 09	43 986 977	18,7883	7,0674	5,86647	2,83286	1109,0	9 78 67,7	353
354	12 53 16	44 361 864	18,8149	7,0740	5,86930	2,82486	1112,1	9 84 23,0	354
355	12 60 25	44 738 875	18,8414	7,0807	5,87212	2,81690	1115,3	9 89 79,8	355
356	12 67 36	45 118 016	18,8680	7,0873	5,87493	2,80899	1118,4	9 95 38,2	356
357	12 74 49	45 499 293	18,8944	7,0940	5,87774	2,80112	1121,5	10 00 98	357
358	12 81 64	45 882 712	18,9209	7,1006	5,88053	2,79330	1124,7	10 06 60	358
359	12 88 81	46 268 279	18,9473	7,1072	5,88332	2,78552	1127,8	10 12 23	359
360	12 96 00	46 656 000	18,9737	7,1138	5,88610	2,77778	1131,0	10 17 88	360
361	13 03 21	47 045 881	19,0000	7,1204	5,88888	2,77008	1134,1	10 23 54	361
362	13 10 44	47 437 928	19,0263	7,1269	5,89164	2,76243	1137,3	10 29 22	362
363	13 17 69	47 832 147	19,0526	7,1335	5,89440	2,75482	1140,4	10 34 91	363
364	13 24 96	48 228 544	19,0788	7,1400	5,89715	2,74725	1143,5	10 40 62	364
365	13 32 25	48 627 125	19,1050	7,1466	5,89990	2,73973	1146,7	10 46 35	365
366	13 39 56	49 027 896	19,1311	7,1531	5,90263	2,73224	1149,8	10 52 09	366
367	13 46 89	49 430 863	19,1572	7,1596	5,90536	2,72480	1153,0	10 57 85	367
368	13 54 24	49 836 032	19,1833	7,1661	5,90808	2,71739	1156,1	10 63 62	368
369	13 61 61	50 243 409	19,2094	7,1726	5,91080	2,71003	1159,2	10 69 41	369
370	13 69 00	50 653 000	19,2354	7,1791	5,91350	2,70270	1162,4	10 75 21	370
371	13 76 41	51 064 811	19,2614	7,1855	5,91620	2,69542	1165,5	10 81 03	371
372	13 83 84	51 478 848	19,2873	7,1920	5,91889	2,68817	1168,7	10 86 87	372
373	13 91 29	51 895 117	19,3132	7,1984	5,92158	2,68097	1171,8	10 92 72	373
374	13 98 76	52 313 624	19,3391	7,2048	5,92426	2,67380	1175,0	10 98 58	374
375	14 06 25	52 734 375	19,3649	7,2112	5,92693	2,66667	1178,1	11 04 47	375
376	14 13 76	53 157 376	19,3907	7,2177	5,92959	2,65957	1181,2	11 10 36	376
377	14 21 29	53 582 633	19,4165	7,2240	5,93225	2,65252	1184,4	11 16 28	377
378	14 28 84	54 010 152	19,4422	7,2304	5,93489	2,64550	1187,5	11 22 21	378
379	14 36 41	54 439 939	19,4679	7,2368	5,93754	2,63852	1190,7	11 28 15	379
380	14 44 00	54 872 000	19,4936	7,2432	5,94017	2,63158	1193,8	11 34 11	380
381	14 51 61	55 306 341	19,5192	7,2495	5,94280	2,62467	1196,9	11 40 09	381
382	14 59 24	55 742 968	19,5448	7,2558	5,94542	2,61780	1200,1	11 46 08	382
383	14 66 89	56 181 887	19,5704	7,2622	5,94803	2,61097	1203,2	11 52 09	383
384	14 74 56	56 623 104	19,5959	7,2685	5,95064	2,60417	1206,4	11 58 12	384
385	14 82 25	57 066 625	19,6214	7,2748	5,95324	2,59740	1209,5	11 64 16	385
386	14 89 96	57 512 456	19,6469	7,2811	5,95584	2,59067	1212,7	11 70 21	386
387	14 97 69	57 960 603	19,6723	7,2874	5,95842	2,58398	1215,8	11 76 28	387
388	15 05 44	58 411 072	19,6977	7,2936	5,96101	2,57732	1218,9	11 82 37	388
389	15 13 21	58 863 869	19,7231	7,2999	5,96358	2,57069	1222,1	11 88 47	389
390	15 21 00	59 319 000	19,7484	7,3061	5,96615	2,56410	1225,2	11 94 59	390
391	15 28 81	59 776 471	19,7737	7,3124	5,96871	2,55754	1228,4	12 00 72	391
392	15 36 64	60 236 288	19,7990	7,3186	5,97126	2,55102	1231,5	12 06 87	392
393	15 44 49	60 698 457	19,8242	7,3248	5,97381	2,54453	1234,6	12 13 04	393
394	15 52 36	61 162 984	19,8494	7,3310	5,97635	2,53807	1237,8	12 19 22	394
395	15 60 25	61 629 875	19,8746	7,3372	5,97889	2,53165	1240,9	12 25 42	395
396	15 68 16	62 099 136	19,8997	7,3434	5,98141	2,52525	1244,1	12 31 63	396
397	15 76 09	62 570 773	19,9249	7,3496	5,98394	2,51889	1247,2	12 37 86	397
398	15 84 04	63 044 792	19,9499	7,3558	5,98645	2,51256	1250,4	12 44 10	398
399	15 92 01	63 521 199	19,9750	7,3619	5,98896	2,50627	1253,5	12 50 36	399
400	16 00 00	64 000 000	20,0000	7,3681	5,99146	2,50000	1256,6	12 56 64	400

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
400	16 00 00	64 000 000	20,0000	7,3681	5,99146	2,50000	1256,6	12 56 64	**400**
401	16 08 01	64 481 201	20,0250	7,3742	5,99396	2,49377	1259,8	12 62 93	401
402	16 16 04	64 964 808	20,0499	7,3803	5,99645	2,48756	1262,9	12 69 23	402
403	16 24 09	65 450 827	20,0749	7,3864	5,99894	2,48139	1266,1	12 75 56	403
404	16 32 16	65 939 264	20,0998	7,3925	6,00141	2,47525	1269,2	12 81 90	404
405	16 40 25	66 430 125	20,1246	7,3986	6,00389	2,46914	1272,3	12 88 25	405
406	16 48 36	66 923 416	20,1494	7,4047	6,00635	2,46305	1275,5	12 94 62	406
407	16 56 49	67 419 143	20,1742	7,4108	6,00881	2,45700	1278,6	13 01 00	407
408	16 64 64	67 917 312	20,1990	7,4169	6,01127	2,45098	1281,8	13 07 41	408
409	16 72 81	68 417 929	20,2237	7,4229	6,01372	2,44499	1284,9	13 13 82	409
410	16 81 00	68 921 000	20,2485	7,4290	6,01616	2,43902	1288,1	13 20 25	**410**
411	16 89 21	69 426 531	20,2731	7,4350	6,01859	2,43309	1291,2	13 26 70	411
412	16 97 44	69 934 528	20,2978	7,4410	6,02102	2,42718	1294,3	13 33 17	412
413	17 05 69	70 444 997	20,3224	7,4470	6,02345	2,42131	1297,5	13 39 65	413
414	17 13 96	70 957 944	20,3470	7,4530	6,02587	2,41546	1300,6	13 46 14	414
415	17 22 25	71 473 375	20,3715	7,4590	6,02828	2,40964	1303,8	13 52 65	415
416	17 30 56	71 991 296	20,3961	7,4650	6,03069	2,40385	1306,9	13 59 18	416
417	17 38 89	72 511 713	20,4206	7,4710	6,03309	2,39808	1310,0	13 65 72	417
418	17 47 24	73 034 632	20,4450	7,4770	6,03548	2,39234	1313,2	13 72 28	418
419	17 55 61	73 560 059	20,4695	7,4829	6,03787	2,38663	1316,3	13 78 85	419
420	17 64 00	74 088 000	20,4939	7,4889	6,04025	2,38095	1319,5	13 85 44	**420**
421	17 72 41	74 618 461	20,5183	7,4948	6,04263	2,37530	1322,6	13 92 05	421
422	17 80 84	75 151 448	20,5426	7,5007	6,04501	2,36967	1325,8	13 98 67	422
423	17 89 29	75 686 967	20,5670	7,5067	6,04737	2,36407	1328,9	14 05 31	423
424	17 97 76	76 225 024	20,5913	7,5126	6,04973	2,35849	1332,0	14 11 96	424
425	18 06 25	76 765 625	20,6155	7,5185	6,05209	2,35294	1335,2	14 18 63	425
426	18 14 76	77 308 776	20,6398	7,5244	6,05444	2,34742	1338,3	14 25 31	426
427	18 23 29	77 854 483	20,6640	7,5302	6,05678	2,34192	1341,5	14 32 01	427
428	18 31 84	78 402 752	20,6882	7,5361	6,05912	2,33645	1344,6	14 38 72	428
429	18 40 41	78 953 589	20,7123	7,5420	6,06146	2,33100	1347,7	14 45 45	429
430	18 49 00	79 507 000	20,7364	7,5478	6,06379	2,32558	1350,9	14 52 20	**430**
431	18 57 61	80 062 991	20,7605	7,5537	6,06611	2,32019	1354,0	14 58 96	431
432	18 66 24	80 621 568	20,7846	7,5595	6,06843	2,31481	1357,2	14 65 74	432
433	18 74 89	81 182 737	20,8087	7,5654	6,07074	2,30947	1360,3	14 72 54	433
434	18 83 56	81 746 504	20,8327	7,5712	6,07304	2,30415	1363,5	14 79 34	434
435	18 92 25	82 312 875	20,8567	7,5770	6,07535	2,29885	1366,6	14 86 17	435
436	19 00 96	82 881 856	20,8806	7,5828	6,07764	2,29358	1369,7	14 93 01	436
437	19 09 69	83 453 453	20,9045	7,5886	6,07993	2,28833	1372,9	14 99 87	437
438	19 18 44	84 027 672	20,9284	7,5944	6,08222	2,28311	1376,0	15 06 74	438
439	19 27 21	84 604 519	20,9523	7,6001	6,08450	2,27790	1379,2	15 13 63	439
440	19 36 00	85 184 000	20,9762	7,6059	6,08677	2,27273	1382,3	15 20 53	**440**
441	19 44 81	85 766 121	21,0000	7,6117	6,08904	2,26757	1385,4	15 27 45	441
442	19 53 64	86 350 888	21,0238	7,6174	6,09131	2,26244	1388,6	15 34 39	442
443	19 62 49	86 938 307	21,0476	7,6232	6,09357	2,25734	1391,7	15 41 34	443
444	19 71 36	87 528 384	21,0713	7,6289	6,09582	2,25225	1394,9	15 48 30	444
445	19 80 25	88 121 125	21,0950	7,6346	6,09807	2,24719	1398,0	15 55 28	445
446	19 89 16	88 716 536	21,1187	7,6403	6,10032	2,24215	1401,2	15 62 28	446
447	19 98 09	89 314 623	21,1424	7,6460	6,10256	2,23714	1404,3	15 69 30	447
448	20 07 04	89 915 392	21,1660	7,6517	6,10479	2,23214	1407,4	15 76 33	448
449	20 16 01	90 518 849	21,1896	7,6574	6,10702	2,22717	1410,6	15 83 37	449
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	7,6631	6,10925	2,22222	1413,7	15 90 43	**450**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	7,6631	6,10925	2,22222	1413,7	15 90 43	**450**
451	20 34 01	91 733 851	21,2368	7,6688	6,11147	2,21729	1416,9	15 97 51	451
452	20 43 04	92 345 408	21,2603	7,6744	6,11368	2,21239	1420,0	16 04 60	452
453	20 52 09	92 959 677	21,2838	7,6801	6,11589	2,20751	1423,1	16 11 71	453
454	20 61 16	93 576 664	21,3073	7,6857	6,11810	2,20264	1426,3	16 18 83	454
455	20 70 25	94 196 375	21,3307	7,6914	6,12030	2,19780	1429,4	16 25 97	455
456	20 79 36	94 818 816	21,3542	7,6970	6,12249	2,19298	1432,6	16 33 13	456
457	20 88 49	95 443 993	21,3776	7,7026	6,12468	2,18818	1435,7	16 40 30	457
458	20 97 64	96 071 912	21,4009	7,7082	6,12687	2,18341	1438,8	16 47 48	458
459	21 06 81	96 702 579	21,4243	7,7138	6,12905	2,17865	1442,0	16 54 68	459
460	21 16 00	97 336 000	21,4476	7,7194	6,13123	2,17391	1445,1	16 61 90	**460**
461	21 25 21	97 972 181	21,4709	7,7250	6,13340	2,16920	1448,3	16 69 14	461
462	21 34 44	98 611 128	21,4942	7,7306	6,13556	2,16450	1451,4	16 76 39	462
463	21 43 69	99 252 847	21,5174	7,7362	6,13773	2,15983	1454,6	16 83 65	463
464	21 52 96	99 897 344	21,5407	7,7418	6,13988	2,15517	1457,7	16 90 93	464
465	21 62 25	100 544 625	21,5639	7,7473	6,14204	2,15054	1460,8	16 98 23	465
466	21 71 56	101 194 696	21,5870	7,7529	6,14419	2,14592	1464,0	17 05 54	466
467	21 80 89	101 847 563	21,6102	7,7584	6,14633	2,14133	1467,1	17 12 87	467
468	21 90 24	102 503 232	21,6333	7,7639	6,14847	2,13675	1470,3	17 20 21	468
469	21 99 61	103 161 709	21,6564	7,7695	6,15060	2,13220	1473,4	17 27 57	469
470	22 09 00	103 823 000	21,6795	7,7750	6,15273	2,12766	1476,5	17 34 94	**470**
471	22 18 41	104 487 111	21,7025	7,7805	6,15486	2,12314	1479,7	17 42 34	471
472	22 27 84	105 154 048	21,7256	7,7860	6,15698	2,11864	1482,8	17 49 74	472
473	22 37 29	105 823 817	21,7486	7,7915	6,15910	2,11416	1486,0	17 57 16	473
474	22 46 76	106 496 424	21,7715	7,7970	6,16121	2,10970	1489,1	17 64 60	474
475	22 56 25	107 171 875	21,7945	7,8025	6,16331	2,10526	1492,3	17 72 05	475
476	22 65 76	107 850 176	21,8174	7,8079	6,16542	2,10084	1495,4	17 79 52	476
477	22 75 29	108 531 333	21,8403	7,8134	6,16752	2,09644	1498,5	17 87 01	477
478	22 84 84	109 215 352	21,8632	7,8188	6,16961	2,09205	1501,7	17 94 51	478
479	22 94 41	109 902 239	21,8861	7,8243	6,17170	2,08768	1504,8	18 02 03	479
480	23 04 00	110 592 000	21,9089	7,8297	6,17379	2,08333	1508,0	18 09 56	**480**
481	23 13 61	111 284 641	21,9317	7,8352	6,17587	2,07900	1511,1	18 17 11	481
482	23 23 24	111 980 168	21,9545	7,8406	6,17794	2,07469	1514,2	18 24 67	482
483	23 32 89	112 678 587	21,9773	7,8460	6,18002	2,07039	1517,4	18 32 25	483
484	23 42 56	113 379 904	22,0000	7,8514	6,18208	2,06612	1520,5	18 39 84	484
485	23 52 25	114 084 125	22,0227	7,8568	6,18415	2,06186	1523,7	18 47 45	485
486	23 61 96	114 791 256	22,0454	7,8622	6,18621	2,05761	1526,8	18 55 08	486
487	23 71 69	115 501 303	22,0681	7,8676	6,18826	2,05339	1530,0	18 62 72	487
488	23 81 44	116 214 272	22,0907	7,8730	6,19032	2,04918	1533,1	18 70 38	488
489	23 91 21	116 930 169	22,1133	7,8784	6,19236	2,04499	1536,2	18 78 05	489
490	24 01 00	117 649 000	22,1359	7,8837	6,19441	2,04082	1539,4	18 85 74	**490**
491	24 10 81	118 370 771	22,1585	7,8891	6,19644	2,03666	1542,5	18 93 45	491
492	24 20 64	119 095 488	22,1811	7,8944	6,19848	2,03252	1545,7	19 01 17	492
493	24 30 49	119 823 157	22,2036	7,8998	6,20051	2,02840	1548,8	19 08 90	493
494	24 40 36	120 553 784	22,2261	7,9051	6,20254	2,02429	1551,9	19 16 65	494
495	24 50 25	121 287 375	22,2486	7,9105	6,20456	2,02020	1555,1	19 24 42	495
496	24 60 16	122 023 936	22,2711	7,9158	6,20658	2,01613	1558,2	19 32 21	496
497	24 70 09	122 763 473	22,2935	7,9211	6,20859	2,01207	1561,4	19 40 00	497
498	24 80 04	123 505 992	22,3159	7,9264	6,21060	2,00803	1564,5	19 47 82	498
499	24 90 01	124 251 499	22,3383	7,9317	6,21261	2,00401	1567,7	19 55 65	499
500	25 00 00	125 000 000	22,3607	7,9370	6,21461	2,00000	1570,8	19 63 50	**500**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
500	25 00 00	125 000 000	22,3607	7,9370	6,21461	2,00000	1570,8	19 63 50	**500**
501	25 10 01	125 751 501	22,3830	7,9423	6,21661	1,99601	1573,9	19 71 36	501
502	25 20 04	126 506 008	22,4054	7,9476	6,21860	1,99203	1577,1	19 79 23	502
503	25 30 09	127 263 527	22,4277	7,9528	6,22059	1,98807	1580,2	19 87 13	503
504	25 40 16	128 024 064	22,4499	7,9581	6,22258	1,98413	1583,4	19 95 04	504
505	25 50 25	128 787 625	22,4722	7,9634	6,22456	1,98020	1586,5	20 02 96	505
506	25 60 36	129 554 216	22,4944	7,9686	6,22654	1,97628	1589,6	20 10 90	506
507	25 70 49	130 323 843	22,5167	7,9739	6,22851	1,97239	1592,8	20 18 86	507
508	25 80 64	131 096 512	22,5389	7,9791	6,23048	1,96850	1595,9	20 26 83	508
509	25 90 81	131 872 229	22,5610	7,9843	6,23245	1,96464	1599,1	20 34 82	509
510	26 01 00	132 651 000	22,5832	7,9896	6,23441	1,96078	1602,2	20 42 82	**510**
511	26 11 21	133 432 831	22,6053	7,9948	6,23637	1,95695	1605,4	20 50 84	511
512	26 21 44	134 217 728	22,6274	8,0000	6,23832	1,95312	1608,5	20 58 87	512
513	26 31 69	135 005 697	22,6495	8,0052	6,24028	1,94932	1611,6	20 66 92	513
514	26 41 96	135 796 744	22,6716	8,0104	6,24222	1,94553	1614,8	20 74 99	514
515	26 52 25	136 590 875	22,6936	8,0156	6,24417	1,94175	1617,9	20 83 07	515
516	26 62 56	137 388 096	22,7156	8,0208	6,24611	1,93798	1621,1	20 91 17	516
517	26 72 89	138 188 413	22,7376	8,0260	6,24804	1,93424	1624,2	20 99 28	517
518	26 83 24	138 991 832	22,7596	8,0311	6,24998	1,93050	1627,3	21 07 41	518
519	26 93 61	139 798 359	22,7816	8,0363	6,25190	1,92678	1630,5	21 15 56	519
520	27 04 00	140 608 000	22,8035	8,0415	6,25383	1,92308	1633,6	21 23 72	**520**
521	27 14 41	141 420 761	22,8254	8,0466	6,25575	1,91939	1636,8	21 31 89	521
522	27 24 84	142 236 648	22,8473	8,0517	6,25767	1,91571	1639,9	21 40 08	522
523	27 35 29	143 055 667	22,8692	8,0569	6,25958	1,91205	1643,1	21 48 29	523
524	27 45 76	143 877 824	22,8910	8,0620	6,26149	1,90840	1646,2	21 56 51	524
525	27 56 25	144 703 125	22,9129	8,0671	6,26340	1,90476	1649,3	21 64 75	525
526	27 66 76	145 531 576	22,9347	8,0723	6,26530	1,90114	1652,5	21 73 01	526
527	27 77 29	146 363 183	22,9565	8,0774	6,26720	1,89753	1655,6	21 81 28	527
528	27 87 84	147 197 952	22,9783	8,0825	6,26910	1,89394	1658,8	21 89 56	528
529	27 98 41	148 035 889	23,0000	8,0876	6,27099	1,89036	1661,9	21 97 87	529
530	28 09 00	148 877 000	23,0217	8,0927	6,27288	1,88679	1665,0	22 06 18	**530**
531	28 19 61	149 721 291	23,0434	8,0978	6,27476	1,88324	1668,2	22 14 52	531
532	28 30 24	150 568 768	23,0651	8,1028	6,27664	1,87970	1671,3	22 22 87	532
533	28 40 89	151 419 437	23,0868	8,1079	6,27852	1,87617	1674,5	22 31 23	533
534	28 51 56	152 273 304	23,1084	8,1130	6,28040	1,87266	1677,6	22 39 61	534
535	28 62 25	153 130 375	23,1301	8,1180	6,28227	1,86916	1680,8	22 48 01	535
536	28 72 96	153 990 656	23,1517	8,1231	6,28413	1,86567	1683,9	22 56 42	536
537	28 83 69	154 854 153	23,1733	8,1281	6,28600	1,86220	1687,0	22 64 84	537
538	28 94 44	155 720 872	23,1948	8,1332	6,28786	1,85874	1690,2	22 73 29	538
539	29 05 21	156 590 819	23,2164	8,1382	6,28972	1,85529	1693,3	22 81 75	539
540	29 16 00	157 464 000	23,2379	8,1433	6,29157	1,85185	1696,5	22 90 22	**540**
541	29 26 81	158 340 421	23,2594	8,1483	6,29342	1,84843	1699,6	22 98 71	541
542	29 37 64	159 220 088	23,2809	8,1533	6,29527	1,84502	1702,7	23 07 22	542
543	29 48 49	160 103 007	23,3024	8,1583	6,29711	1,84162	1705,9	23 15 74	543
544	29 59 36	160 989 184	23,3238	8,1633	6,29895	1,83824	1709,0	23 24 28	544
545	29 70 25	161 878 625	23,3452	8,1683	6,30079	1,83486	1712,2	23 32 83	545
546	29 81 16	162 771 336	23,3666	8,1733	6,30262	1,83150	1715,3	23 41 40	546
547	29 92 09	163 667 323	23,3880	8,1783	6,30445	1,82815	1718,5	23 49 98	547
548	30 03 04	164 566 592	23,4094	8,1833	6,30628	1,82482	1721,6	23 58 58	548
549	30 14 01	165 469 149	23,4307	8,1882	6,30810	1,82149	1724,7	23 67 20	549
550	30 25 00	166 375 000	23,4521	8,1932	6,30992	1,81818	1727,9	23 75 83	**550**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
550	30 25 00	166 375 000	23,4521	8,1932	6,30992	1,81818	1727,9	23 75 83	550
551	30 36 01	167 284 151	23,4734	8,1982	6,31173	1,81488	1731,0	23 84 48	551
552	30 47 04	168 196 608	23,4947	8,2031	6,31355	1,81159	1734,2	23 93 14	552
553	30 58 09	169 112 377	23,5160	8,2081	6,31536	1,80832	1737,3	24 01 82	553
554	30 69 16	170 031 464	23,5372	8,2130	6,31716	1,80505	1740,4	24 10 51	554
555	30 80 25	170 953 875	23,5584	8,2180	6,31897	1,80180	1743,6	24 19 22	555
556	30 91 36	171 879 616	23,5797	8,2229	6,32077	1,79856	1746,7	24 27 95	556
557	31 02 49	172 808 693	23,6008	8,2278	6,32257	1,79533	1749,9	24 36 69	557
558	31 13 64	173 741 112	23,6220	8,2327	6,32436	1,79211	1753,0	24 45 45	558
559	31 24 81	174 676 879	23,6432	8,2377	6,32615	1,78891	1756,2	24 54 22	559
560	31 36 00	175 616 000	23,6643	8,2426	6,32794	1,78571	1759,3	24 63 01	560
561	31 47 21	176 558 481	23,6854	8,2475	6,32972	1,78253	1762,4	24 71 81	561
562	31 58 44	177 504 328	23,7065	8,2524	6,33150	1,77936	1765,6	24 80 63	562
563	31 69 69	178 453 547	23,7276	8,2573	6,33328	1,77620	1768,7	24 89 47	563
564	31 80 96	179 406 144	23,7487	8,2621	6,33505	1,77305	1771,9	24 98 32	564
565	31 92 25	180 362 125	23,7697	8,2670	6,33683	1,76991	1775,0	25 07 19	565
566	32 03 56	181 321 496	23,7908	8,2719	6,33859	1,76678	1778,1	25 16 07	566
567	32 14 89	182 284 263	23,8118	8,2768	6,34036	1,76367	1781,3	25 24 97	567
568	32 26 24	183 250 432	23,8328	8,2816	6,34212	1,76056	1784,4	25 33 88	568
569	32 37 61	184 220 009	23,8537	8,2865	6,34388	1,75747	1787,6	25 42 81	569
570	32 49 00	185 193 000	23,8747	8,2913	6,34564	1,75439	1790,7	25 51 76	570
571	32 60 41	186 169 411	23,8956	8,2962	6,34739	1,75131	1793,8	25 60 72	571
572	32 71 84	187 149 248	23,9165	8,3010	6,34914	1,74825	1797,0	25 69 70	572
573	32 83 29	188 132 517	23,9374	8,3059	6,35089	1,74520	1800,1	25 78 69	573
574	32 94 76	189 119 224	23,9583	8,3107	6,35263	1,74216	1803,3	25 87 70	574
575	33 06 25	190 109 375	23,9792	8,3155	6,35437	1,73913	1806,4	25 96 72	575
576	33 17 76	191 102 976	24,0000	8,3203	6,35611	1,73611	1809,6	26 05 76	576
577	33 29 29	192 100 033	24,0208	8,3251	6,35784	1,73310	1812,7	26 14 82	577
578	33 40 84	193 100 552	24,0416	8,3300	6,35957	1,73010	1815,8	26 23 89	578
579	33 52 41	194 104 539	24,0624	8,3348	6,36130	1,72712	1819,0	26 32 98	579
580	33 64 00	195 112 000	24,0832	8,3396	6,36303	1,72414	1822,1	26 42 08	580
581	33 75 61	196 122 941	24,1039	8,3443	6,36475	1,72117	1825,3	26 51 20	581
582	33 87 24	197 137 368	24,1247	8,3491	6,36647	1,71821	1828,4	26 60 33	582
583	33 98 89	198 155 287	24,1454	8,3539	6,36819	1,71527	1831,6	26 69 48	583
584	34 10 56	199 176 704	24,1661	8,3587	6,36990	1,71233	1834,7	26 78 65	584
585	34 22 25	200 201 625	24,1868	8,3634	6,37161	1,70940	1837,8	26 87 83	585
586	34 33 96	201 230 056	24,2074	8,3682	6,37332	1,70648	1841,0	26 97 03	586
587	34 45 69	202 262 003	24,2281	8,3730	6,37502	1,70358	1844,1	27 06 24	587
588	34 57 44	203 297 472	24,2487	8,3777	6,37673	1,70068	1847,3	27 15 47	588
589	34 69 21	204 336 469	24,2693	8,3825	6,37843	1,69779	1850,4	27 24 71	589
590	34 81 00	205 379 000	24,2899	8,3872	6,38012	1,69492	1853,5	27 33 97	590
591	34 92 81	206 425 071	24,3105	8,3919	6,38182	1,69205	1856,7	27 43 25	591
592	35 04 64	207 474 688	24,3311	8,3967	6,38351	1,68919	1859,8	27 52 54	592
593	35 16 49	208 527 857	24,3516	8,4014	6,38519	1,68634	1863,0	27 61 84	593
594	35 28 36	209 584 584	24,3721	8,4061	6,38688	1,68350	1866,1	27 71 17	594
595	35 40 25	210 644 875	24,3926	8,4108	6,38856	1,68067	1869,2	27 80 51	595
596	35 52 16	211 708 736	24,4131	8,4155	6,39024	1,67785	1872,4	27 89 86	596
597	35 64 09	212 776 173	24,4336	8,4202	6,39192	1,67504	1875,5	27 99 23	597
598	35 76 04	213 847 192	24,4540	8,4249	6,39359	1,67224	1878,7	28 08 62	598
599	35 88 01	214 921 799	24,4745	8,4296	6,39526	1,66945	1881,8	28 18 02	599
600	36 00 00	216 000 000	24,4949	8,4343	6,39693	1,66667	1885,0	28 27 43	600

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
600	36 00 00	216 000 000	24,4949	8,4343	6,39693	1,66667	1885,0	28 27 43	**600**
601	36 12 01	217 081 801	24,5153	8,4390	6,39859	1,66389	1888,1	28 36 87	601
602	36 24 04	218 167 208	24,5357	8,4437	6,40026	1,66113	1891,2	28 46 31	602
603	36 36 09	219 256 227	24,5561	8,4484	6,40192	1,65837	1894,4	28 55 78	603
604	36 48 16	220 348 864	24,5764	8,4530	6,40357	1,65563	1897,5	28 65 26	604
605	36 60 25	221 445 125	24,5967	8,4577	6,40523	1,65289	1900,7	28 74 75	605
606	36 72 36	222 545 016	24,6171	8,4623	6,40688	1,65017	1903,8	28 84 26	606
607	36 84 49	223 648 543	24,6374	8,4670	6,40853	1,64745	1906,9	28 93 79	607
608	36 96 64	224 755 712	24,6577	8,4716	6,41017	1,64474	1910,1	29 03 33	608
609	37 08 81	225 866 529	24,6779	8,4763	6,41182	1,64204	1913,2	29 12 89	609
610	37 21 00	226 981 000	24,6982	8,4809	6,41346	1,63934	1916,4	29 22 47	**610**
611	37 33 21	228 099 131	24,7184	8,4856	6,41510	1,63666	1919,5	29 32 06	611
612	37 45 44	229 220 928	24,7386	8,4902	6,41673	1,63399	1922,7	29 41 66	612
613	37 57 69	230 346 397	24,7588	8,4948	6,41836	1,63132	1925,8	29 51 28	613
614	37 69 96	231 475 544	24,7790	8,4994	6,41999	1,62866	1928,9	29 60 92	614
615	37 82 25	232 608 375	24,7992	8,5040	6,42162	1,62602	1932,1	29 70 57	615
616	37 94 56	233 744 896	24,8193	8,5086	6,42325	1,62338	1935,2	29 80 24	616
617	38 06 89	234 885 113	24,8395	8,5132	6,42487	1,62075	1938,4	29 89 92	617
618	38 19 24	236 029 032	24,8596	8,5178	6,42649	1,61812	1941,5	29 99 62	618
619	38 31 61	237 176 659	24,8797	8,5224	6,42811	1,61551	1944,6	30 09 34	619
620	38 44 00	238 328 000	24,8998	8,5270	6,42972	1,61290	1947,8	30 19 07	**620**
621	38 56 41	239 483 061	24,9199	8,5316	6,43133	1,61031	1950,9	30 28 82	621
622	38 68 84	240 641 848	24,9399	8,5362	6,43294	1,60772	1954,1	30 38 58	622
623	38 81 29	241 804 367	24,9600	8,5408	6,43455	1,60514	1957,2	30 48 36	623
624	38 93 76	242 970 624	24,9800	8,5453	6,43615	1,60256	1960,4	30 58 15	624
625	39 06 25	244 140 625	25,0000	8,5499	6,43775	1,60000	1963,5	30 67 96	625
626	39 18 76	245 314 376	25,0200	8,5544	6,43935	1,59744	1966,6	30 77 79	626
627	39 31 29	246 491 883	25,0400	8,5590	6,44095	1,59490	1969,8	30 87 63	627
628	39 43 84	247 673 152	25,0599	8,5635	6,44254	1,59236	1972,9	30 97 48	628
629	39 56 41	248 858 189	25,0799	8,5681	6,44413	1,58983	1976,1	31 07 36	629
630	39 69 00	250 047 000	25,0998	8,5726	6,44572	1,58730	1979,2	31 17 25	**630**
631	39 81 61	251 239 591	25,1197	8,5772	6,44731	1,58479	1982,3	31 27 15	631
632	39 94 24	252 435 968	25,1396	8,5817	6,44889	1,58228	1985,5	31 37 07	632
633	40 06 89	253 636 137	25,1595	8,5862	6,45047	1,57978	1988,6	31 47 00	633
634	40 19 56	254 840 104	25,1794	8,5907	6,45205	1,57729	1991,8	31 56 96	634
635	40 32 25	256 047 875	25,1992	8,5952	6,45362	1,57480	1994,9	31 66 92	635
636	40 44 96	257 259 456	25,2190	8,5997	6,45520	1,57233	1998,1	31 76 90	636
637	40 57 69	258 474 853	25,2389	8,6043	6,45677	1,56986	2001,2	31 86 90	637
638	40 70 44	259 694 072	25,2587	8,6088	6,45834	1,56740	2004,3	31 96 92	638
639	40 83 21	260 917 119	25,2784	8,6132	6,45990	1,56495	2007,5	32 06 95	639
640	40 96 00	262 144 000	25,2982	8,6177	6,46147	1,56250	2010,6	32 16 99	**640**
641	41 08 81	263 374 721	25,3180	8,6222	6,46303	1,56006	2013,8	32 27 05	641
642	41 21 64	264 609 288	25,3377	8,6267	6,46459	1,55763	2016,9	32 37 13	642
643	41 34 49	265 847 707	25,3574	8,6312	6,46614	1,55521	2020,0	32 47 22	643
644	41 47 36	267 089 984	25,3772	8,6357	6,46770	1,55280	2023,2	32 57 33	644
645	41 60 25	268 336 125	25,3969	8,6401	6,46925	1,55039	2026,3	32 67 45	645
646	41 73 16	269 586 136	25,4165	8,6446	6,47080	1,54799	2029,5	32 77 59	646
647	41 86 09	270 840 023	25,4362	8,6490	6,47235	1,54560	2032,6	32 87 75	647
648	41 99 04	272 097 792	25,4558	8,6535	6,47389	1,54321	2035,8	32 97 92	648
649	42 12 01	273 359 449	25,4755	8,6579	6,47543	1,54083	2038,9	33 08 10	649
650	42 25 00	274 625 000	25,4951	8,6624	6,47697	1,53846	2042,0	33 18 31	**650**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
650	42 25 00	274 625 000	25,4951	8,6624	6,47697	1,53846	2042,0	33 18 31	**650**
651	42 38 01	275 894 451	25,5147	8,6668	6,47851	1,53610	2045,2	33 28 53	651
652	42 51 04	277 167 808	25,5343	8,6713	6,48004	1,53374	2048,3	33 38 76	652
653	42 64 09	278 445 077	25,5539	8,6757	6,48158	1,53139	2051,5	33 49 01	653
654	42 77 16	279 726 264	25,5734	8,6801	6,48311	1,52905	2054,6	33 59 27	654
655	42 90 25	281 011 375	25,5930	8,6845	6,48464	1,52672	2057,7	33 69 55	655
656	43 03 36	282 300 416	25,6125	8,6890	6,48616	1,52439	2060,9	33 79 85	656
657	43 16 49	283 593 393	25,6320	8,6934	6,48768	1,52207	2064,0	33 90 16	657
658	43 29 64	284 890 312	25,6515	8,6978	6,48920	1,51976	2067,2	34 00 49	658
659	43 42 81	286 191 179	25,6710	8,7022	6,49072	1,51745	2070,3	34 10 84	659
660	43 56 00	287 496 000	25,6905	8,7066	6,49224	1,51515	2073,5	34 21 19	**660**
661	43 69 21	288 804 781	25,7099	8,7110	6,49375	1,51286	2076,6	34 31 57	661
662	43 82 44	290 117 528	25,7294	8,7154	6,49527	1,51057	2079,7	34 41 96	662
663	43 95 69	291 434 247	25,7488	8,7198	6,49677	1,50830	2082,9	34 52 37	663
664	44 08 96	292 754 944	25,7682	8,7241	6,49828	1,50602	2086,0	34 62 79	664
665	44 22 25	294 079 625	25,7876	8,7285	6,49979	1,50376	2089,2	34 73 23	665
666	44 35 56	295 408 296	25,8070	8,7329	6,50129	1,50150	2092,3	34 83 68	666
667	44 48 89	296 740 963	25,8263	8,7373	6,50279	1,49925	2095,4	34 94 15	667
668	44 62 24	298 077 632	25,8457	8,7416	6,50429	1,49701	2098,6	35 04 64	668
669	44 75 61	299 418 309	25,8650	8,7460	6,50578	1,49477	2101,7	35 15 14	669
670	44 89 00	300 763 000	25,8844	8,7503	6,50728	1,49254	2104,9	35 25 65	**670**
671	45 02 41	302 111 711	25,9037	8,7547	6,50877	1,49031	2108,0	35 36 18	671
672	45 15 84	303 464 448	25,9230	8,7590	6,51026	1,48810	2111,2	35 46 73	672
673	45 29 29	304 821 217	25,9422	8,7634	6,51175	1,48588	2114,3	35 57 30	673
674	45 42 76	306 182 024	25,9615	8,7677	6,51323	1,48368	2117,4	35 67 88	674
675	45 56 25	307 546 875	25,9808	8,7721	6,51471	1,48148	2120,6	35 78 47	675
676	45 69 76	308 915 776	26,0000	8,7764	6,51619	1,47929	2123,7	35 89 08	676
677	45 83 29	310 288 733	26,0192	8,7807	6,51767	1,47710	2126,9	35 99 71	677
678	45 96 84	311 665 752	26,0384	8,7850	6,51915	1,47493	2130,0	36 10 35	678
679	46 10 41	313 046 839	26,0576	8,7893	6,52062	1,47275	2133,1	36 21 01	679
680	46 24 00	314 432 000	26,0768	8,7937	6,52209	1,47059	2136,3	36 31 68	**680**
681	46 37 61	315 821 241	26,0960	8,7980	6,52356	1,46843	2139,4	36 42 37	681
682	46 51 24	317 214 568	26,1151	8,8023	6,52503	1,46628	2142,6	36 53 08	682
683	46 64 89	318 611 987	26,1343	8,8066	6,52649	1,46413	2145,7	36 63 80	683
684	46 78 56	320 013 504	26,1534	8,8109	6,52796	1,46199	2148,8	36 74 53	684
685	46 92 25	321 419 125	26,1725	8,8152	6,52942	1,45985	2152,0	36 85 28	685
686	47 05 96	322 828 856	26,1916	8,8194	6,53088	1,45773	2155,1	36 96 05	686
687	47 19 69	324 242 703	26,2107	8,8237	6,53233	1,45560	2158,3	37 06 84	687
688	47 33 44	325 660 672	26,2298	8,8280	6,53379	1,45349	2161,4	37 17 64	688
689	47 47 21	327 082 769	26,2488	8,8323	6,53524	1,45138	2164,6	37 28 45	689
690	47 61 00	328 509 000	26,2679	8,8366	6,53669	1,44928	2167,7	37 39 28	**690**
691	47 74 81	329 939 371	26,2869	8,8408	6,53814	1,44718	2170,8	37 50 13	691
692	47 88 64	331 373 888	26,3059	8,8451	6,53959	1,44509	2174,0	37 60 99	692
693	48 02 49	332 812 557	26,3249	8,8493	6,54103	1,44300	2177,1	37 71 87	693
694	48 16 36	334 255 384	26,3439	8,8536	6,54247	1,44092	2180,3	37 82 76	694
695	48 30 25	335 702 375	26,3629	8,8578	6,54391	1,43885	2183,4	37 93 67	695
696	48 44 16	337 153 536	26,3818	8,8621	6,54535	1,43678	2186,5	38 04 59	696
697	48 58 09	338 608 873	26,4008	8,8663	6,54679	1,43472	2189,7	38 15 53	697
698	48 72 04	340 068 392	26,4197	8,8706	6,54822	1,43266	2192,8	38 26 49	698
699	48 86 01	341 532 099	26,4386	8,8748	6,54965	1,43062	2196,0	38 37 46	699
700	49 00 00	343 000 000	26,4575	8,8790	6,55108	1,42857	2199,1	38 48 45	**700**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
700	49 00 00	343 000 000	26,4575	8,8790	6,55108	1,42857	2199,1	38 48 45	**700**
701	49 14 01	344 472 101	26,4764	8,8833	6,55251	1,42653	2202,3	38 59 45	701
702	49 28 04	345 948 408	26,4953	8,8875	6,55393	1,42450	2205,4	38 70 47	702
703	49 42 09	347 428 927	26,5141	8,8917	6,55536	1,42248	2208,5	38 81 51	703
704	49 56 16	348 913 664	26,5330	8,8959	6,55678	1,42045	2211,7	38 92 56	704
705	49 70 25	350 402 625	26,5518	8,9001	6,55820	1,41844	2214,8	39 03 63	705
706	49 84 36	351 895 816	26,5707	8,9043	6,55962	1,41643	2218,0	39 14 71	706
707	49 98 49	353 393 243	26,5895	8,9085	6,56103	1,41443	2221,1	39 25 80	707
708	50 12 64	354 894 912	26,6083	8,9127	6,56244	1,41243	2224,2	39 36 92	708
709	50 26 81	356 400 829	26,6271	8,9169	6,56386	1,41044	2227,4	39 48 05	709
710	50 41 00	357 911 000	26,6458	8,9211	6,56526	1,40845	2230,5	39 59 19	**710**
711	50 55 21	359 425 431	26,6646	8,9253	6,56667	1,40647	2233,7	39 70 35	711
712	50 69 44	360 944 128	26,6833	8,9295	6,56808	1,40449	2236,8	39 81 53	712
713	50 83 69	362 467 097	26,7021	8,9337	6,56948	1,40252	2240,0	39 92 72	713
714	50 97 96	363 994 344	26,7208	8,9378	6,57088	1,40056	2243,1	40 03 93	714
715	51 12 25	365 525 875	26,7395	8,9420	6,57228	1,39860	2246,2	40 15 15	715
716	51 26 56	367 061 696	26,7582	8,9462	6,57368	1,39665	2249,4	40 26 39	716
717	51 40 89	368 601 813	26,7769	8,9503	6,57508	1,39470	2252,5	40 37 65	717
718	51 55 24	370 146 232	26,7955	8,9545	6,57647	1,39276	2255,7	40 48 92	718
719	51 69 61	371 694 959	26,8142	8,9587	6,57786	1,39082	2258,8	40 60 20	719
720	51 84 00	373 248 000	26,8328	8,9628	6,57925	1,38889	2261,9	40 71 50	**720**
721	51 98 41	374 805 361	26,8514	8,9670	6,58064	1,38696	2265,1	40 82 82	721
722	52 12 84	376 367 048	26,8701	8,9711	6,58203	1,38504	2268,2	40 94 15	722
723	52 27 29	377 933 067	26,8887	8,9752	6,58341	1,38313	2271,4	41 05 50	723
724	52 41 76	379 503 424	26,9072	8,9794	6,58479	1,38122	2274,5	41 16 87	724
725	52 56 25	381 078 125	26,9258	8,9835	6,58617	1,37931	2277,7	41 28 25	725
726	52 70 76	382 657 176	26,9444	8,9876	6.58755	1,37741	2280,8	41 39 65	726
727	52 85 29	384 240 583	26,9629	8,9918	6,58893	1,37552	2283,9	41 51 06	727
728	52 99 84	385 828 352	26,9815	8,9959	6,59030	1,37363	2287,1	41 62 48	728
729	53 14 41	387 420 489	27,0000	9,0000	6,59167	1,37174	2290,2	41 73 93	729
730	53 29 00	389 017 000	27,0185	9,0041	6,59304	1,36986	2293,4	41 85 39	**730**
731	53 43 61	390 617 891	27,0370	9,0082	6,59441	1,36799	2296,5	41 96 86	731
732	53 58 24	392 223 168	27,0555	9,0123	6,59578	1,36612	2299,6	42 08 35	732
733	53 72 89	393 832 837	27.0740	9,0164	6,59715	1,36426	2302,8	42 19 86	733
734	53 87 56	395 446 904	27,0924	9,0205	6,59851	1,36240	2305,9	42 31 38	734
735	54 02 25	397 065 375	27,1109	9,0246	6,59987	1,36054	2309,1	42 42 93	735
736	54 16 96	398 688 256	27,1293	9,0287	6,60123	1,35870	2312,2	42 54 47	736
737	54 31 69	400 315 553	27,1477	9,0328	6,60259	1,35685	2315,4	42 66 04	737
738	54 46 44	401 947 272	27,1662	9,0369	6,60394	1,35501	2318,5	42 77 62	738
739	54 61 21	403 583 419	27,1846	9,0410	6,60530	1,35318	2321,6	42 89 22	739
740	54 76 00	405 224 000	27,2029	9,0450	6,60665	1,35135	2324,8	43 00 84	**740**
741	54 90 81	406 869 021	27,2213	9,0491	6,60800	1,34953	2327,9	43 12 47	741
742	55 05 64	408 518 488	27,2397	9,0532	6,60935	1,34771	2331,1	43 24 12	742
743	55 20 49	410 172 407	27,2580	9,0572	6,61070	1,34590	2334,2	43 35 78	743
744	55 35 36	411 830 784	27,2764	9,0613	6,61204	1,34409	2337,3	43 47 46	744
745	55 50 25	413 493 625	27,2947	9,0654	6,61338	1,34228	2340,5	43 59 16	745
746	55 65 16	415 160 936	27,3130	9,0694	6,61473	1,34048	2343,6	43 70 87	746
747	55 80 09	416 832 723	27,3313	9,0735	6,61607	1,33869	2346,8	43 82 59	747
748	55 95 04	418 508 992	27,3496	9,0775	6,61740	1,33690	2349,9	43 94 33	748
749	56 10 01	420 189 749	27,3679	9,0816	6,61874	1,33511	2353,1	44 06 09	749
750	56 25 00	421 875 000	27,3861	9,0856	6,62007	1,33333	2356,2	44 17 86	**750**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
750	56 25 00	421 875 000	27,3861	9,0856	6,62007	1,33333	2356,2	44 17 86	**750**
751	56 40 01	423 564 751	27,4044	9,0896	6,62141	1,33156	2359,3	44 29 65	751
752	56 55 04	425 259 008	27,4226	9,0937	6,62274	1,32979	2362,5	44 41 46	752
753	56 70 09	426 957 777	27,4408	9,0977	6,62407	1,32802	2365,6	44 53 28	753
754	56 85 16	428 661 064	27,4591	9,1017	6,62539	1,32626	2368,8	44 65 11	754
755	57 00 25	430 368 875	27,4773	9,1057	6,62672	1,32450	2371,9	44 76 97	755
756	57 15 36	432 081 216	27,4955	9,1098	6,62804	1,32275	2375,0	44 88 83	756
757	57 30 49	433 798 093	27,5136	9,1138	6,62936	1,32100	2378,2	45 00 72	757
758	57 45 64	435 519 512	27,5318	9,1178	6,63068	1,31926	2381,3	45 12 62	758
759	57 60 81	437 245 479	27,5500	9,1218	6,63200	1,31752	2384,5	45 24 53	759
760	57 76 00	438 976 000	27,5681	9,1258	6,63332	1,31579	2387,6	45 36 46	**760**
761	57 91 21	440 711 081	27,5862	9,1298	6,63463	1,31406	2390,8	45 48 41	761
762	58 06 44	442 450 728	27,6043	9,1338	6,63595	1,31234	2393,9	45 60 37	762
763	58 21 69	444 194 947	27,6225	9,1378	6,63726	1,31062	2397,0	45 72 34	763
764	58 36 96	445 943 744	27,6405	9,1418	6,63857	1,30890	2400,2	45 84 34	764
765	58 52 25	447 697 125	27,6586	9,1458	6,63988	1,30719	2403,3	45 96 35	765
766	58 67 56	449 455 096	27,6767	9,1498	6,64118	1,30548	2406,5	46 08 37	766
767	58 82 89	451 217 663	27,6948	9,1537	6,64249	1,30378	2409,6	46 20 41	767
768	58 98 24	452 984 832	27,7128	9,1577	6,64379	1,30208	2412,7	46 32 47	768
769	59 13 61	454 756 609	27,7308	9,1617	6,64509	1,30039	2415,9	46 44 54	769
770	59 29 00	456 533 000	27,7489	9,1657	6,64639	1,29870	2419,0	46 56 63	**770**
771	59 44 41	458 314 011	27,7669	9,1696	6,64769	1,29702	2422,2	46 68 73	771
772	59 59 84	460 099 648	27,7849	9,1736	6,64898	1,29534	2425,3	46 80 85	772
773	59 75 29	461 889 917	27,8029	9,1775	6,65028	1,29366	2428,5	46 92 98	773
774	59 90 76	463 684 824	27,8209	9,1815	6,65157	1,29199	2431,6	47 05 13	774
775	60 06 25	465 484 375	27,8388	9,1855	6,65286	1,29032	2434,7	47 17 30	775
776	60 21 76	467 288 576	27,8568	9,1894	6,65415	1,28866	2437,9	47 29 48	776
777	60 37 29	469 097 433	27,8747	9,1933	6,65544	1,28700	2441,0	47 41 68	777
778	60 52 84	470 910 952	27,8927	9,1973	6,65673	1,28535	2444,2	47 53 89	778
779	60 68 41	472 729 139	27,9106	9,2012	6,65801	1,28370	2447,3	47 66 12	779
780	60 84 00	474 552 000	27,9285	9,2052	6,65929	1,28205	2450,4	47 78 36	**780**
781	60 99 61	476 379 541	27,9464	9,2091	6,66058	1,28041	2453,6	47 90 62	781
782	61 15 24	478 211 768	27,9643	9,2130	6,66185	1,27877	2456,7	48 02 90	782
783	61 30 89	480 048 687	27,9821	9,2170	6,66313	1,27714	2459,9	48 15 19	783
784	61 46 56	481 890 304	28,0000	9,2209	6,66441	1,27551	2463,0	48 27 50	784
785	61 62 25	483 736 625	28,0179	9,2248	6,66568	1,27389	2466,2	48 39 82	785
786	61 77 96	485 587 656	28,0357	9,2287	6,66696	1,27226	2469,3	48 52 16	786
787	61 93 69	487 443 403	28,0535	9,2326	6,66823	1,27065	2472,4	48 64 51	787
788	62 09 44	489 303 872	28,0713	9,2365	6,66950	1,26904	2475,6	48 76 88	788
789	62 25 21	491 169 069	28,0891	9,2404	6,67077	1,26743	2478,7	48 89 27	789
790	62 41 00	493 039 000	28,1069	9,2443	6,67203	1,26582	2481,9	49 01 67	**790**
791	62 56 81	494 913 671	28,1247	9,2482	6,67330	1,26422	2485,0	49 14 09	791
792	62 72 64	496 793 088	28,1425	9,2521	6,67456	1,26263	2488,1	49 26 52	792
793	62 88 49	498 677 257	28,1603	9,2560	6,67582	1,26103	2491,3	49 38 97	793
794	63 04 36	500 566 184	28,1780	9,2599	6,67708	1,25945	2494,4	49 51 43	794
795	63 20 25	502 459 875	28,1957	9,2638	6,67834	1,25786	2497,6	49 63 91	795
796	63 36 16	504 358 336	28,2135	9,2677	6,67960	1,25628	2500,7	49 76 41	796
797	63 52 09	506 261 573	28,2312	9,2716	6,68085	1,25471	2503,8	49 88 92	797
798	63 68 04	508 169 592	28,2489	9,2754	6,68211	1,25313	2507,0	50 01 45	798
799	63 84 01	510 082 399	28,2666	9,2793	6,68336	1,25156	2510,1	50 13 99	799
800	64 00 00	512 000 000	28,2843	9,2832	6,68461	1,25000	2513,3	50 26 55	**800**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
800	64 00 00	512 000 000	28,2843	9,2832	6,68461	1,25000	2513,3	50 26 55	**800**
801	64 16 01	513 922 401	28,3019	9,2870	6,68586	1,24844	2516,4	50 39 12	801
802	64 32 04	515 849 608	28,3196	9,2909	6,68711	1,24688	2519,6	50 51 71	802
803	64 48 09	517 781 627	28,3373	9,2948	6,68835	1,24533	2522,7	50 64 32	803
804	64 64 16	519 718 464	28,3549	9,2986	6,68960	1,24378	2525,8	50 76 94	804
805	64 80 25	521 660 125	28,3725	9,3025	6,69084	1,24224	2529,0	50 89 58	805
806	64 96 36	523 606 616	28,3901	9,3063	6,69208	1,24069	2532,1	51 02 23	806
807	65 12 49	525 557 943	28,4077	9,3102	6,69332	1,23916	2535,3	51 14 90	807
808	65 28 64	527 514 112	28,4253	9,3140	6,69456	1,23762	2538,4	51 27 58	808
809	65 44 81	529 475 129	28,4429	9,3179	6,69580	1,23609	2541,5	51 40 28	809
810	65 61 00	531 441 000	28,4605	9,3217	6,69703	1,23457	2544,7	51 53 00	**810**
811	65 77 21	533 411 731	28,4781	9,3255	6,69827	1,23305	2547,8	51 65 73	811
812	65 93 44	535 387 328	28,4956	9,3294	6,69950	1,23153	2551,0	51 78 48	812
813	66 09 69	537 367 797	28,5132	9,3332	6,70073	1,23001	2554,1	51 91 24	813
814	66 25 96	539 353 144	28,5307	9,3370	6,70196	1,22850	2557,3	52 04 02	814
815	66 42 25	541 343 375	28,5482	9,3408	6,70319	1,22699	2560,4	52 16 81	815
816	66 58 56	543 338 496	28,5657	9,3447	6,70441	1,22549	2563,5	52 29 62	816
817	66 74 89	545 338 513	28,5832	9,3485	6,70564	1,22399	2566,7	52 42 45	817
818	66 91 24	547 343 432	28,6007	9,3523	6,70686	1,22249	2569,8	52 55 29	818
819	67 07 61	549 353 259	28,6182	9,3561	6,70808	1,22100	2573,0	52 68 14	819
820	67 24 00	551 368 000	28,6356	9,3599	6,70930	1,21951	2576,1	52 81 02	**820**
821	67 40 41	553 387 661	28,6531	9,3637	6,71052	1,21803	2579,2	52 93 91	821
822	67 56 84	555 412 248	28,6705	9,3675	6,71174	1,21655	2582,4	53 06 81	822
823	67 73 29	557 441 767	28,6880	9,3713	6,71296	1,21507	2585,5	53 19 73	823
824	67 89 76	559 476 224	28,7054	9,3751	6,71417	1,21359	2588,7	53 32 67	824
825	68 06 25	561 515 625	28,7228	9,3789	6,71538	1,21212	2591,8	53 45 62	825
826	68 22 76	563 559 976	28,7402	9,3827	6,71659	1,21065	2595,0	53 58 58	826
827	68 39 29	565 609 283	28,7576	9,3865	6,71780	1,20919	2598,1	53 71 57	827
828	68 55 84	567 663 552	28,7750	9,3902	6,71901	1,20773	2601,2	53 84 56	828
829	68 72 41	569 722 789	28,7924	9,3940	6,72022	1,20627	2604,4	53 97 58	829
830	68 89 00	571 787 000	28,8097	9,3978	6,72143	1,20482	2607,5	54 10 61	**830**
831	69 05 61	573 856 191	28,8271	9,4016	6,72263	1,20337	2610,7	54 23 65	831
832	69 22 24	575 930 368	28,8444	9,4053	6,72383	1,20192	2613,8	54 36 71	832
833	69 38 89	578 009 537	28,8617	9,4091	6,72503	1,20048	2616,9	54 49 79	833
834	69 55 56	580 093 704	28,8791	9,4129	6,72623	1,19904	2620,1	54 62 88	834
835	69 72 25	582 182 875	28,8964	9,4166	6,72743	1,19760	2623,2	54 75 99	835
836	69 88 96	584 277 056	28,9137	9,4204	6,72863	1,19617	2626,4	54 89 12	836
837	70 05 69	586 376 253	28,9310	9,4241	6,72982	1,19474	2629,5	55 02 26	837
838	70 22 44	588 480 472	28,9482	9,4279	6,73102	1,19332	2632,7	55 15 41	838
839	70 39 21	590 589 719	28,9655	9,4316	6,73221	1,19190	2635,8	55 28 58	839
840	70 56 00	592 704 000	28,9828	9,4354	6,73340	1,19048	2638,9	55 41 77	**840**
841	70 72 81	594 823 321	29,0000	9,4391	6,73459	1,18906	2642,1	55 54 97	841
842	70 89 64	596 947 688	29,0172	9,4429	6,73578	1,18765	2645,2	55 68 19	842
843	71 06 49	599 077 107	29,0345	9,4466	6,73697	1,18624	2648,4	55 81 42	843
844	71 23 36	601 211 584	29,0517	9,4503	6,73815	1,18483	2651,5	55 94 67	844
845	71 40 25	603 351 125	29,0689	9,4541	6,73934	1,18343	2654,6	56 07 94	845
846	71 57 16	605 495 736	29,0861	9,4578	6,74052	1,18203	2657,8	56 21 22	846
847	71 74 09	607 645 423	29,1033	9,4615	6,74170	1,18064	2660,9	56 34 52	847
848	71 91 04	609 800 192	29,1204	9,4652	6,74288	1,17925	2664,1	56 47 83	848
849	72 08 01	611 960 049	29,1376	9,4690	6,74406	1,17786	2667,2	56 61 16	849
850	72 25 00	614 125 000	29,1548	9,4727	6,74524	1,17647	2670,4	56 74 50	**850**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
850	72 25 00	614 125 000	29,1548	9,4727	6,74524	1,17647	2670,4	56 74 50	**850**
851	72 42 01	616 295 051	29,1719	9,4764	6,74641	1,17509	2673,5	56 87 86	851
852	72 59 04	618 470 208	29,1890	9,4801	6,74759	1,17371	2676,6	57 01 24	852
853	72 76 09	620 650 477	29,2062	9,4838	6,74876	1,17233	2679,8	57 14 63	853
854	72 93 16	622 835 864	29,2233	9,4875	6,74993	1,17096	2682,9	57 28 03	854
855	73 10 25	625 026 375	29,2404	9,4912	6,75110	1,16959	2686,1	57 41 46	855
856	73 27 36	627 222 016	29,2575	9,4949	6,75227	1,16822	2689,2	57 54 90	856
857	73 44 49	629 422 793	29,2746	9,4986	6,75344	1,16686	2692,3	57 68 35	857
858	73 61 64	631 628 712	29,2916	9,5023	6,75460	1,16550	2695,5	57 81 82	858
859	73 78 81	633 839 779	29,3087	9,5060	6,75577	1,16414	2698,6	57 95 30	859
860	73 96 00	636 056 000	29,3258	9,5097	6,75693	1,16279	2701,8	58 08 80	**860**
861	74 13 21	638 277 381	29,3428	9,5134	6,75809	1,16144	2704,9	58 22 32	861
862	74 30 44	640 503 928	29,3598	9,5171	6,75926	1,16009	2708,1	58 35 85	862
863	74 47 69	642 735 647	29,3769	9,5207	6,76041	1,15875	2711,2	58 49 40	863
864	74 64 96	644 972 544	29,3939	9,5244	6,76157	1,15741	2714,3	58 62 97	864
865	74 82 25	647 214 625	29,4109	9,5281	6,76273	1,15607	2717,5	58 76 55	865
866	74 99 56	649 461 896	29,4279	9,5317	6,76388	1,15473	2720,6	58 90 14	866
867	75 16 89	651 714 363	29,4449	9,5354	6,76504	1,15340	2723,8	59 03 75	867
868	75 34 24	653 972 032	29,4618	9,5391	6,76619	1,15207	2726,9	59 17 38	868
869	75 51 61	656 234 909	29,4788	9,5427	6,76734	1,15075	2730,0	59 31 02	869
870	75 69 00	658 503 000	29,4958	9,5464	6,76849	1,14943	2733,2	59 44 68	**870**
871	75 86 41	660 776 311	29,5127	9,5501	6,76964	1,14811	2736,3	59 58 35	871
872	76 03 84	663 054 848	29,5296	9,5537	6,77079	1,14679	2739,5	59 72 04	872
873	76 21 29	665 338 617	29,5466	9,5574	6,77194	1,14548	2742,6	59 85 75	873
874	76 38 76	667 627 624	29,5635	9,5610	6,77308	1,14416	2745,8	59 99 47	874
875	76 56 25	669 921 875	29,5804	9,5647	6,77422	1,14286	2748,9	60 13 20	875
876	76 73 76	672 221 376	29,5973	9,5683	6,77537	1,14155	2752,0	60 26 96	876
877	76 91 29	674 526 133	29,6142	9,5719	6,77651	1,14025	2755,2	60 40 73	877
878	77 08 84	676 836 152	29,6311	9,5756	6,77765	1,13895	2758,3	60 54 51	878
879	77 26 41	679 151 439	29,6479	9,5792	6,77878	1,13766	2761,5	60 68 31	879
880	77 44 00	681 472 000	29,6648	9,5828	6,77992	1,13636	2764,6	60 82 12	**880**
881	77 61 61	683 797 841	29,6816	9,5865	6,78106	1,13507	2767,7	60 95 95	881
882	77 79 24	686 128 968	29,6985	9,5901	6,78219	1,13379	2770,9	61 09 80	882
883	77 96 89	688 465 387	29,7153	9,5937	6,78333	1,13250	2774,0	61 23 66	883
884	78 14 56	690 807 104	29,7321	9,5973	6,78446	1,13122	2777,2	61 37 54	884
885	78 32 25	693 154 125	29,7489	9,6010	6,78559	1,12994	2780,3	61 51 43	885
886	78 49 96	695 506 456	29,7658	9,6046	6,78672	1,12867	2783,5	61 65 34	886
887	78 67 69	697 864 103	29,7825	9,6082	6,78784	1,12740	2786,6	61 79 27	887
888	78 85 44	700 227 072	29,7993	9,6118	6,78897	1,12613	2789,7	61 93 21	888
889	79 03 21	702 595 369	29,8161	9,6154	6,79010	1,12486	2792,9	62 07 17	889
890	79 21 00	704 969 000	29,8329	9,6190	6,79122	1,12360	2796,0	62 21 14	**890**
891	79 38 81	707 347 971	29,8496	9,6226	6,79234	1,12233	2799,2	62 35 13	891
892	79 56 64	709 732 288	29,8664	9,6262	6,79347	1,12108	2802,3	62 49 13	892
893	79 74 49	712 121 957	29,8831	9,6298	6,79459	1,11982	2805,4	62 63 15	893
894	79 92 36	714 516 984	29,8998	9,6334	6,79571	1,11857	2808,6	62 77 18	894
895	80 10 25	716 917 375	29,9166	9,6370	6,79682	1,11732	2811,7	62 91 24	895
896	80 28 16	719 323 136	29,9333	9,6406	6,79794	1,11607	2814,9	63 05 30	896
897	80 46 09	721 734 273	29,9500	9,6442	6,79906	1,11483	2818,0	63 19 38	897
898	80 64 04	724 150 792	29,9666	9,6477	6,80017	1,11359	2821,2	63 33 48	898
899	80 82 01	726 572 699	29,9833	9,6513	6,80128	1,11235	2824,3	63 47 60	899
900	81 00 00	729 000 000	30,0000	9,6549	6,80239	1,11111	2827,4	63 61 73	**900**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
900	81 00 00	729 000 000	30,0000	9,6549	6,80239	1,11111	2827,4	63 61 73	**900**
901	81 18 01	731 432 701	30,0167	9,6585	6,80351	1,10988	2830,6	63 75 87	901
902	81 36 04	733 870 808	30,0333	9,6620	6,80461	1,10865	2833,7	63 90 03	902
903	81 54 09	736 314 327	30,0500	9,6656	6,80572	1,10742	2836,9	64 04 21	903
904	81 72 16	738 763 264	30,0666	9,6692	6,80683	1,10619	2840,0	64 18 40	904
905	81 90 25	741 217 625	30,0832	9,6727	6,80793	1,10497	2843,1	64 32 61	905
906	82 08 36	743 677 416	30,0998	9,6763	6,80904	1,10375	2846,3	64 46 83	906
907	82 26 49	746 142 643	30,1164	9,6799	6,81014	1,10254	2849,4	64 61 07	907
908	82 44 64	748 613 312	30,1330	9,6834	6,81124	1,10132	2852,6	64 75 33	908
909	82 62 81	751 089 429	30,1496	9,6870	6,81235	1,10011	2855,7	64 89 60	909
910	82 81 00	753 571 000	30,1662	9,6905	6,81344	1,09890	2858,8	65 03 88	**910**
911	82 99 21	756 058 031	30,1828	9,6941	6,81454	1,09769	2862,0	65 18 18	911
912	83 17 44	758 550 528	30,1993	9,6976	6,81564	1,09649	2865,1	65 32 50	912
913	83 35 69	761 048 497	30,2159	9,7012	6,81674	1,09529	2868,3	65 46 84	913
914	83 53 96	763 551 944	30,2324	9,7047	6,81783	1,09409	2871,4	65 61 18	914
915	83 72 25	766 060 875	30,2490	9,7082	6,81892	1,09290	2874,6	65 75 55	915
916	83 90 56	768 575 296	30,2655	9,7118	6,82002	1,09170	2877,7	65 89 93	916
917	84 08 89	771 095 213	30,2820	9,7153	6,82111	1,09051	2880,8	66 04 33	917
918	84 27 24	773 620 632	30,2985	9,7188	6,82220	1,08932	2884,0	66 18 74	918
919	84 45 61	776 151 559	30,3150	9,7224	6,82329	1,08814	2887,1	66 33 17	919
920	84 64 00	778 688 000	30,3315	9,7259	6,82437	1,08696	2890,3	66 47 61	**920**
921	84 82 41	781 229 961	30,3480	9,7294	6,82546	1,08578	2893,4	66 62 07	921
922	85 00 84	783 777 448	30,3645	9,7329	6,82655	1,08460	2896,5	66 76 54	922
923	85 19 29	786 330 467	30,3809	9,7364	6,82763	1,08342	2899,7	66 91 03	923
924	85 37 76	788 889 024	30,3974	9,7400	6,82871	1,08225	2902,8	67 05 54	924
925	85 56 25	791 453 125	30,4138	9,7435	6,82979	1,08108	2906,0	67 20 06	925
926	85 74 76	794 022 776	30,4302	9,7470	6,83087	1,07991	2909,1	67 34 60	926
927	85 93 29	796 597 983	30,4467	9,7505	6,83195	1,07875	2912,3	67 49 15	927
928	86 11 84	799 178 752	30,4631	9,7540	6,83303	1,07759	2915,4	67 63 72	928
929	86 30 41	801 765 089	30,4795	9,7575	6,83411	1,07643	2918,5	67 78 31	929
930	86 49 00	804 357 000	30,4959	9,7610	6,83518	1,07527	2921,7	67 92 91	**930**
931	86 67 61	806 954 491	30,5123	9,7645	6,83626	1,07411	2924,8	68 07 52	931
932	86 86 24	809 557 568	30,5287	9,7680	6,83733	1,07296	2928,0	68 22 16	932
933	87 04 89	812 166 237	30,5450	9,7715	6,83841	1,07181	2931,1	68 36 80	933
934	87 23 56	814 780 504	30,5614	9,7750	6,83948	1,07066	2934,2	68 51 47	934
935	87 42 25	817 400 375	30,5778	9,7785	6,84055	1,06952	2937,4	68 66 15	935
936	87 60 96	820 025 856	30,5941	9,7819	6,84162	1,06838	2940,5	68 80 84	936
937	87 79 69	822 656 953	30,6105	9,7854	6,84268	1,06724	2943,7	68 95 55	937
938	87 98 44	825 293 672	30,6268	9,7889	6,84375	1,06610	2946,8	69 10 28	938
939	88 17 21	827 936 019	30,6431	9,7924	6,84482	1,06496	2950,0	69 25 02	939
940	88 36 00	830 584 000	30,6594	9,7959	6,84588	1,06383	2953,1	69 39 78	**940**
941	88 54 81	833 237 621	30,6757	9,7993	6,84694	1,06270	2956,2	69 54 55	941
942	88 73 64	835 896 888	30,6920	9,8028	6,84801	1,06157	2959,4	69 69 34	942
943	88 92 49	838 561 807	30,7083	9,8063	6,84907	1,06045	2962,5	69 84 15	943
944	89 11 36	841 232 384	30,7246	9,8097	6,85013	1,05932	2965,7	69 98 97	944
945	89 30 25	843 908 625	30,7409	9,8132	6,85118	1,05820	2968,8	70 13 80	945
946	89 49 16	846 590 536	30,7571	9,8167	6,85224	1,05708	2971,9	70 28 65	946
947	89 68 09	849 278 123	30,7734	9,8201	6,85330	1,05597	2975,1	70 43 52	947
948	89 87 04	851 971 392	30,7896	9,8236	6,85435	1,05485	2978,2	70 58 40	948
949	90 06 01	854 670 349	30,8058	9,8270	6,85541	1,05374	2981,4	70 73 30	949
950	90 25 00	857 375 000	30,8221	9,8305	6,85646	1,05263	2984,5	70 88 22	**950**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
950	90 25 00	857 375 000	30,8221	9,8305	6,85646	1,05263	2984,5	70 88 22	**950**
951	90 44 01	860 085 351	30,8383	9,8339	6,85751	1,05152	2987,7	71 03 15	951
952	90 63 04	862 801 408	30,8545	9,8374	6,85857	1,05042	2990,8	71 18 09	952
953	90 82 09	865 523 177	30,8707	9,8408	6,85961	1,04932	2993,9	71 33 06	953
954	91 01 16	868 250 664	30,8869	9,8443	6,86066	1,04822	2997,1	71 48 03	954
955	91 20 25	870 983 875	30,9031	9,8477	6,86171	1,04712	3000,2	71 63 03	955
956	91 39 36	873 722 816	30,9192	9,8511	6,86276	1,04603	3003,4	71 78 04	956
957	91 58 49	876 467 493	30,9354	9,8546	6,86380	1,04493	3006,5	71 93 06	957
958	91 77 64	879 217 912	30,9516	9,8580	6,86485	1,04384	3009,6	72 08 10	958
959	91 96 81	881 974 079	30,9677	9,8614	6,86589	1,04275	3012,8	72 23 16	959
960	92 16 00	884 736 000	30,9839	9,8648	6,86693	1,04167	3015,9	72 38 23	**960**
961	92 35 21	887 503 681	31,0000	9,8683	6,86797	1,04058	3019,1	72 53 32	961
962	92 54 44	890 277 128	31,0161	9,8717	6,86901	1,03950	3022,2	72 68 42	962
963	92 73 69	893 056 347	31,0322	9,8751	6,87005	1,03842	3025,4	72 83 54	963
964	92 92 96	895 841 344	31,0483	9,8785	6,87109	1,03734	3028,5	72 98 67	964
965	93 12 25	898 632 125	31,0644	9,8819	6,87213	1,03627	3031,6	73 13 82	965
966	93 31 56	901 428 696	31,0805	9,8854	6,87316	1,03520	3034,8	73 28 99	966
967	93 50 89	904 231 063	31,0966	9,8888	6,87420	1,03413	3037,9	73 44 17	967
968	93 70 24	907 039 232	31,1127	9,8922	6,87523	1,03306	3041,1	73 59 37	968
969	93 89 61	909 853 209	31,1288	9,8956	6,87626	1,03199	3044,2	73 74 58	969
970	94 09 00	912 673 000	31,1448	9,8990	6,87730	1,03093	3047,3	73 89 81	**970**
971	94 28 41	915 498 611	31,1609	9,9024	6,87833	1,02987	3050,5	74 05 06	971
972	94 47 84	918 330 048	31,1769	9,9058	6,87936	1,02881	3053,6	74 20 32	972
973	94 67 29	921 167 317	31,1929	9,9092	6,88038	1,02775	3056,8	74 35 59	973
974	94 86 76	924 010 424	31,2090	9,9126	6,88141	1,02669	3059,9	74 50 88	974
975	95 06 25	926 859 375	31,2250	9,9160	6,88244	1,02564	3063,1	74 66 19	975
976	95 25 76	929 714 176	31,2410	9,9194	6,88346	1,02459	3066,2	74 81 51	976
977	95 45 29	932 574 833	31,2570	9,9227	6,88449	1,02354	3069,3	74 96 85	977
978	95 64 84	935 441 352	31,2730	9,9261	6,88551	1,02249	3072,5	75 12 21	978
979	95 84 41	938 313 739	31,2890	9,9295	6,88653	1,02145	3075,6	75 27 58	979
980	96 04 00	941 192 000	31,3050	9,9329	6,88755	1,02041	3078,8	75 42 96	**980**
981	96 23 61	944 076 141	31,3209	9,9363	6,88857	1,01937	3081,9	75 58 37	981
982	96 43 24	946 966 168	31,3369	9,9396	6,88959	1,01833	3085,0	75 73 78	982
983	96 62 89	949 862 087	31,3528	9,9430	6,89061	1,01729	3088,2	75 89 22	983
984	96 82 56	952 763 904	31,3688	9,9464	6,89163	1,01626	3091,3	76 04 66	984
985	97 02 25	955 671 625	31,3847	9,9497	6,89264	1,01523	3094,5	76 20 13	985
986	97 21 96	958 585 256	31,4006	9,9531	6,89366	1,01420	3097,6	76 35 61	986
987	97 41 69	961 504 803	31,4166	9,9565	6,89467	1,01317	3100,8	76 51 11	987
988	97 61 44	964 430 272	31,4325	9,9598	6,89568	1,01215	3103,9	76 66 62	988
989	97 81 21	967 361 669	31,4484	9,9632	6,89669	1,01112	3107,0	76 82 14	989
990	98 01 00	970 299 000	31,4643	9,9666	6,89770	1,01010	3110,2	76 97 69	**990**
991	98 20 81	973 242 271	31,4802	9,9699	6,89871	1,00908	3113,3	77 13 25	991
992	98 40 64	976 191 488	31,4960	9,9733	6,89972	1,00806	3116,5	77 28 82	992
993	98 60 49	979 146 657	31,5119	9,9766	6,90073	1,00705	3119,6	77 44 41	993
994	98 80 36	982 107 784	31,5278	9,9800	6,90174	1,00604	3122,7	77 60 02	994
995	99 00 25	985 074 875	31,5436	9,9833	6,90274	1,00503	3125,9	77 75 64	995
996	99 20 16	988 047 936	31,5595	9,9866	6,90375	1,00402	3129,0	77 91 28	996
997	99 40 09	991 026 973	31,5753	9,9900	6,90475	1,00301	3132,2	78 06 93	997
998	99 60 04	994 011 992	31,5911	9,9933	6,90575	1,00200	3135,3	78 22 60	998
999	99 80 01	997 002 999	31,6070	9,9967	6,90675	1,00100	3138,5	78 38 28	999
1000	100 00 00	1000 000 000	31,6228	10,0000	6,90776	1,00000	3141,6	78 53 98	**1000**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1000	1 000 000	1 000 000 000	31,6228	10,0000	6,90776	1,00000	3141,6	78 53 98	**1000**
1001	1 002 001	1 003 003 001	31,6386	10,0033	6,90875	0,99900	3144,7	78 69 70	1001
1002	1 004 004	1 006 012 008	31,6544	10,0067	6,90975	0,99800	3147,9	78 85 43	1002
1003	1 006 009	1 009 027 027	31,6702	10,0100	6,91075	0,99701	3151,0	79 01 18	1003
1004	1 008 016	1 012 048 064	31,6860	10,0133	6,91175	0,99602	3154,2	79 16 94	1004
1005	1 010 025	1 015 075 125	31,7017	10,0166	6,91275	0,99502	3157,3	79 32 72	1005
1006	1 012 036	1 018 108 216	31,7175	10,0200	6,91374	0,99404	3160,4	79 48 51	1006
1007	1 014 049	1 021 147 343	31,7333	10,0233	6,91474	0,99305	3163,6	79 64 32	1007
1008	1 016 064	1 024 192 512	31,7490	10,0266	6,91573	0,99206	3166,7	79 80 15	1008
1009	1 018 081	1 027 243 729	31,7648	10,0299	6,91672	0,99108	3169,9	79 95 99	1009
1010	1 020 100	1 030 301 000	31,7805	10,0332	6,91771	0,99010	3173,0	80 11 84	**1010**
1011	1 022 121	1 033 364 331	31,7962	10,0365	6,91869	0,98912	3176,2	80 27 72	1011
1012	1 024 144	1 036 433 728	31,8119	10,0398	6,91968	0,98814	3179,3	80 43 61	1012
1013	1 026 169	1 039 509 197	31,8277	10,0431	6,92067	0,98717	3182,4	80 59 51	1013
1014	1 028 196	1 042 590 744	31,8434	10,0465	6,92166	0,98619	3185,6	80 75 43	1014
1015	1 030 225	1 045 678 375	31,8591	10,0498	6,92264	0,98522	3188,7	80 91 37	1015
1016	1 032 256	1 048 772 096	31,8748	10,0531	6,92363	0,98425	3191,9	81 07 32	1016
1017	1 034 289	1 051 871 913	31,8904	10,0563	6,92461	0,98328	3195,0	81 23 29	1017
1018	1 036 324	1 054 977 832	31,9061	10,0596	6,92559	0,98232	3198,1	81 39 27	1018
1019	1 038 361	1 058 089 859	31,9218	10,0629	6,92658	0,98135	3201,3	81 55 27	1019
1020	1 040 400	1 061 208 000	31,9374	10,0662	6,92756	0,98039	3204,4	81 71 28	**1020**
1021	1 042 441	1 064 332 261	31,9531	10,0695	6,92854	0,97943	3207,6	81 87 31	1021
1022	1 044 484	1 067 462 648	31,9687	10,0728	6,92952	0,97847	3210,7	82 03 36	1022
1023	1 046 529	1 070 599 167	31,9844	10,0761	6,93049	0,97752	3213,9	82 19 42	1023
1024	1 048 576	1 073 741 824	32,0000	10,0794	6,93147	0,97656	3217,0	82 35 49	1024
1025	1 050 625	1 076 890 625	32,0156	10,0826	6,93245	0,97561	3220,1	82 51 59	1025
1026	1 052 676	1 080 045 576	32,0312	10,0859	6,93342	0,97466	3223,3	82 67 70	1026
1027	1 054 729	1 083 206 683	32,0468	10,0892	6,93440	0,97371	3226,4	82 83 82	1027
1028	1 056 784	1 086 373 952	32,0624	10,0925	6,93537	0,97276	3229,6	82 99 96	1028
1029	1 058 841	1 089 547 389	32,0780	10,0957	6,93634	0,97182	3232,7	83 16 12	1029
1030	1 060 900	1 092 727 000	32,0936	10,0990	6,93731	0,97087	3235,8	83 32 29	**1030**
1031	1 062 961	1 095 912 791	32,1092	10,1023	6,93828	0,96993	3239,0	83 48 47	1031
1032	1 065 024	1 099 104 768	32,1248	10,1055	6,93925	0,96899	3242,1	83 64 68	1032
1033	1 067 089	1 102 302 937	32,1403	10,1088	6,94022	0,96805	3245,3	83 80 90	1033
1034	1 069 156	1 105 507 304	32,1559	10,1121	6,94119	0,96712	3248,4	83 97 13	1034
1035	1 071 225	1 108 717 875	32,1714	10,1153	6,94216	0,96618	3251,5	84 13 38	1035
1036	1 073 296	1 111 934 656	32,1870	10,1186	6,94312	0,96525	3254,7	84 29 65	1036
1037	1 075 369	1 115 157 653	32,2025	10,1218	6,94409	0,96432	3257,8	84 45 93	1037
1038	1 077 444	1 118 386 872	32,2180	10,1251	6,94505	0,96339	3261,0	84 62 22	1038
1039	1 079 521	1 121 622 319	32,2335	10,1283	6,94601	0,96246	3264,1	84 78 54	1039
1040	1 081 600	1 124 864 000	32,2490	10,1316	6,94698	0,96154	3267,3	84 94 87	**1040**
1041	1 083 681	1 128 111 921	32,2645	10,1348	6,94794	0,96061	3270,4	85 11 21	1041
1042	1 085 764	1 131 366 088	32,2800	10,1381	6,94890	0,95969	3273,5	85 27 57	1042
1043	1 087 849	1 134 626 507	32,2955	10,1413	6,94986	0,95877	3276,7	85 43 94	1043
1044	1 089 936	1 137 893 184	32,3110	10,1446	6,95081	0,95785	3279,8	85 60 34	1044
1045	1 092 025	1 141 166 125	32,3265	10,1478	6,95177	0,95694	3283,0	85 76 74	1045
1046	1 094 116	1 144 445 336	32,3419	10,1510	6,95273	0,95602	3286,1	85 93 17	1046
1047	1 096 209	1 147 730 823	32,3574	10,1543	6,95368	0,95511	3289,2	86 09 60	1047
1048	1 098 304	1 151 022 592	32,3728	10,1575	6,95464	0,95420	3292,4	86 26 06	1048
1049	1 100 401	1 154 320 649	32,3883	10,1607	6,95559	0,95329	3295,5	86 42 53	1049
1050	1 102 500	1 157 625 000	32,4037	10,1640	6,95655	0,95238	3298,7	86 59 01	**1050**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1050	1 102 500	1 157 625 000	32,4037	10,1640	6,95655	0,95238	3298,7	86 59 01	**1050**
1051	1 104 601	1 160 935 651	32,4191	10,1672	6,95750	0,95147	3301,8	86 75 51	1051
1052	1 106 704	1 164 252 608	32,4345	10,1704	6,95845	0,95057	3305,0	86 92 03	1052
1053	1 108 809	1 167 575 877	32,4500	10,1736	6,95940	0,94967	3308,1	87 08 56	1053
1054	1 110 916	1 170 905 464	32,4654	10,1769	6,96035	0,94877	3311,2	87 25 11	1054
1055	1 113 025	1 174 241 375	32,4808	10,1801	6,96130	0,94787	3314,4	87 41 68	1055
1056	1 115 136	1 177 583 616	32,4962	10,1833	6,96224	0,94697	3317,5	87 58 26	1056
1057	1 117 249	1 180 932 193	32,5115	10,1865	6,96319	0,94607	3320,7	87 74 85	1057
1058	1 119 364	1 184 287 112	32,5269	10,1897	6,96414	0,94518	3323,8	87 91 46	1058
1059	1 121 481	1 187 648 379	32,5423	10,1929	6,96508	0,94429	3326,9	88 08 09	1059
1060	1 123 600	1 191 016 000	32,5576	10,1961	6,96602	0,94340	3330,1	88 24 73	**1060**
1061	1 125 721	1 194 389 981	32,5730	10,1993	6,96697	0,94251	3333,2	88 41 39	1061
1062	1 127 844	1 197 770 328	32,5883	10,2025	6,96791	0,94162	3336,4	88 58 06	1062
1063	1 129 969	1 201 157 047	32,6037	10,2057	6,96885	0,94073	3339,5	88 74 75	1063
1064	1 132 096	1 204 550 144	32,6190	10,2089	6,96979	0,93985	3342,7	88 91 46	1064
1065	1 134 225	1 207 949 625	32,6343	10,2121	6,97073	0,93897	3345,8	89 08 18	1065
1066	1 136 356	1 211 355 496	32,6497	10,2153	6,97167	0,93809	3348,9	89 24 92	1066
1067	1 138 489	1 214 767 763	32,6650	10,2185	6,97261	0,93721	3352,1	89 41 67	1067
1068	1 140 624	1 218 186 432	32,6803	10,2217	6,97354	0,93633	3355,2	89 58 43	1068
1069	1 142 761	1 221 611 509	32,6956	10,2249	6,97448	0,93545	3358,4	89 75 22	1069
1070	1 144 900	1 225 043 000	32,7109	10,2281	6,97541	0,93458	3361,5	89 92 02	**1070**
1071	1 147 041	1 228 480 911	32,7261	10,2313	6,97635	0,93371	3364,6	90 08 84	1071
1072	1 149 184	1 231 925 248	32,7414	10,2345	6,97728	0,93284	3367,8	90 25 67	1072
1073	1 151 329	1 235 376 017	32,7567	10,2376	6,97821	0,93197	3370,9	90 42 51	1073
1074	1 153 476	1 238 833 224	32,7719	10,2408	6,97914	0,93110	3374,1	90 59 38	1074
1075	1 155 625	1 242 296 875	32,7872	10,2440	6,98008	0,93023	3377,2	90 76 26	1075
1076	1 157 776	1 245 766 976	32,8024	10,2472	6,98101	0,92937	3380,4	90 93 15	1076
1077	1 159 929	1 249 243 533	32,8177	10,2503	6,98193	0,92851	3383,5	91 10 06	1077
1078	1 162 084	1 252 726 552	32,8329	10,2535	6,98286	0,92764	3386,6	91 26 98	1078
1079	1 164 241	1 256 216 039	32,8481	10,2567	6,98379	0,92678	3389,8	91 43 92	1079
1080	1 166 400	1 259 712 000	32,8634	10,2599	6,98472	0,92593	3392,9	91 60 88	**1080**
1081	1 168 561	1 263 214 441	32,8786	10,2630	6,98564	0,92507	3396,1	91 77 85	1081
1082	1 170 724	1 266 723 368	32,8938	10,2662	6,98657	0,92421	3399,2	91 94 84	1082
1083	1 172 889	1 270 238 787	32,9090	10,2693	6,98749	0,92336	3402,3	92 11 85	1083
1084	1 175 056	1 273 760 704	32,9242	10,2725	6,98841	0,92251	3405,5	92 28 87	1084
1085	1 177 225	1 277 289 125	32,9393	10,2757	6,98933	0,92166	3408,6	92 45 90	1085
1086	1 179 396	1 280 824 056	32,9545	10,2788	6,99026	0,92081	3411,8	92 62 95	1086
1087	1 181 569	1 284 365 503	32,9697	10,2820	6,99118	0,91996	3414,9	92 80 02	1087
1088	1 183 744	1 287 913 472	32,9848	10,2851	6,99210	0,91912	3418,1	92 97 10	1088
1089	1 185 921	1 291 467 969	33,0000	10,2883	6,99301	0,91827	3421,2	93 14 20	1089
1090	1 188 100	1 295 029 000	33,0151	10,2914	6,99393	0,91743	3424,3	93 31 31	**1090**
1091	1 190 281	1 298 596 571	33,0303	10,2946	6,99485	0,91659	3427,5	93 48 44	1091
1092	1 192 464	1 302 170 688	33,0454	10,2977	6,99577	0,91575	3430,6	93 65 59	1092
1093	1 194 649	1 305 751 357	33,0606	10,3009	6,99668	0,91491	3433,8	93 82 75	1093
1094	1 196 836	1 309 338 584	33,0757	10,3040	6,99760	0,91408	3436,9	93 99 93	1094
1095	1 199 025	1 312 932 375	33,0908	10,3071	6,99851	0,91324	3440,0	94 17 12	1095
1096	1 201 216	1 316 532 736	33,1059	10,3103	6,99942	0,91240	3443,2	94 34 33	1096
1097	1 203 409	1 320 139 673	33,1210	10,3134	7,00033	0,91158	3446,3	94 51 55	1097
1098	1 205 604	1 323 753 192	33,1361	10,3165	7,00125	0,91075	3449,5	94 68 79	1098
1099	1 207 801	1 327 373 299	33,1512	10,3197	7,00216	0,90992	3452,6	94 86 04	1099
1100	1 210 000	1 331 000 000	33,1662	10,3228	7,00307	0,90909	3455,8	95 03 32	**1100**

B. Mantissen der Briggs-

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	4049
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981

schen Logarithmen.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	6854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Grad	Sinus							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Cosinus							

Grad	Cosinus 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ Sinus	Grad

Grad	Tangens 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Cotangens							

Grad	Cotangens							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Tangens							

D. Tafeln der Hyperbelfunktionen.

Hyperbelfunktion $\mathfrak{Sin}\,\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi})$ für $\varphi = 0$ bis 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0701	0801	0901	101
0,1	0,1002	1102	1203	1304	1405	1506	1607	1708	1810	1911	102
0,2	0,2013	2115	2218	2320	2423	2526	2629	2733	2837	2941	104
0,3	0,3045	3150	3255	3360	3466	3572	3678	3785	3892	4000	108
0,4	0,4108	4216	4325	4434	4543	4653	4764	4875	4986	5098	113
0,5	0,5211	5324	5438	5552	5666	5782	5897	6014	6131	6248	119
0,6	0,6367	6485	6605	6725	6846	6967	7090	7213	7336	7461	125
0,7	0,7586	7712	7838	7966	8094	8223	8353	8484	8615	8748	133
0,8	0,8881	9015	9150	9286	9423	9561	9700	9840	9981	0122*	143
0,9	1,0265	0409	0554	0700	0847	0995	1144	1294	1446	1598	154
1,0	1,1752	1907	2063	2220	2379	2539	2700	2862	3025	3190	166
1,1	1,3356	3524	3693	3863	4035	4208	4382	4558	4735	4914	181
1,2	1,5095	5276	5460	5645	5831	6019	6209	6400	6593	6788	196
1,3	1,6984	7182	7381	7583	7786	7991	8198	8406	8617	8829	214
1,4	1,9043	9259	9477	9697	9919	0143*	0369*	0597*	0827*	1059*	234
1,5	2,1293	1529	1768	2008	2251	2496	2743	2993	3245	3499	257
1,6	2,3756	4015	4276	4540	4806	5075	5346	5620	5896	6175	281
1,7	2,6456	6740	7027	7317	7609	7904	8202	8503	8806	9112	310
1,8	2,9422	9734	0049*	0367*	0689*	1013*	1340*	1671*	2005*	2341*	341
1,9	3,2682	3025	3372	3722	4075	4432	4792	5156	5523	5894	375
2,0	3,6269	6647	7028	7414	7803	8196	8593	8993	9398	9806	413
2,1	4,0219	0635	1056	1480	1909	2342	2779	3221	3666	4117	454
2,2	4,4571	5030	5494	5962	6434	6912	7394	7880	8372	8868	502
2,3	4,9370	9876	0387*	0903*	1425*	1951*	2483*	3020*	3562*	4109*	553
2,4	5,4662	5221	5785	6354	6929	7510	8097	8689	9288	9892	610
2,5	6,0502	1118	1741	2369	3004	3645	4293	4946	5607	6274	673
2,6	6,6947	7628	8315	9009	9709	0417*	1132*	1854*	2583*	3319*	744
2,7	7,4063	4814	5572	6338	7112	7894	8683	9480	0285*	1098*	821
2,8	8,1919	2749	3586	4432	5287	6150	7021	7902	8791	9689	907
2,9	9,0596	1512	2437	3371	4315	5268	6231	7203	8185	9177	1002
3,0	10,0179	1191	2212	3245	4287	5340	6403	7477	8562	9658	1107
3,1	11,0765	1882	3011	4151	5303	6466	7641	8827	0026*	1236*	1223
3,2	12,2459	3694	4941	6201	7473	8758	0056*	1367*	2691*	4028*	1351
3,3	13,5379	6743	8121	9513	0919*	2338*	3772*	5221*	6684*	8161*	1493
3,4	14,965	15,116	15,268	15,422	15,577	15,734	15,893	16,053	16,214	16,378	165
3,5	16,543	16,709	16,877	17,047	17,219	17,392	17,567	17,744	17,923	18,103	182
3,6	18,285	18,470	18,655	18,843	19,033	19,224	19,418	19,613	19,811	20,010	201
3,7	20,211	20,415	20,620	20,828	21,037	21,249	21,463	21,679	21,897	22,117	222
3,8	22,339	22,564	22,791	23,020	23,252	23,486	23,722	23,961	24,202	24,445	246
3,9	24,691	24,939	25,190	25,444	25,700	25,958	26,219	26,483	26,749	27,018	272
4,0	27,290	27,564	27,842	28,122	28,404	28,690	28,979	29,270	29,564	29,862	300
4,1	30,162	30,465	30,772	31,081	31,393	31,709	32,028	32,350	32,675	33,004	332
4,2	33,336	33,671	34,009	34,351	34,697	35,046	35,398	35,754	36,113	36,476	367
4,3	36,843	37,214	37,588	37,966	38,347	38,733	39,122	39,515	39,913	40,314	405
4,4	40,719	41,129	41,542	41,960	42,382	42,808	43,238	43,673	44,112	44,555	448
4,5	45,003	45,455	45,912	46,374	46,840	47,311	47,787	48,267	48,752	49,242	495
4,6	49,737	50,237	50,742	51,252	51,767	52,288	52,813	53,344	53,880	54,422	547
4,7	54,969	55,522	56,080	56,643	57,213	57,788	58,369	58,955	59,548	60,147	604
4,8	60,751	61,362	61,979	62,601	63,231	63,866	64,508	65,157	65,812	66,473	668
4,9	67,141	67,816	68,498	69,186	69,882	70,584	71,293	72,010	72,734	73,465	738
5,0	74,203	74,949	75,702	76,463	77,232	78,008	78,792	79,584	80,384	81,192	816

Hyperbelfunktion Cof $\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi})$ für $\varphi = 0$ bis 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	1,0000	0001	0002	0005	0008	0013	0018	0025	0032	0041	9
0,1	1,0050	0061	0072	0085	0098	0113	0128	0145	0162	0181	20
0,2	1,0201	0221	0243	0266	0289	0314	0340	0367	0395	0423	30
0,3	1,0453	0484	0516	0549	0584	0619	0655	0692	0731	0770	41
0,4	1,0811	0852	0895	0939	0984	1030	1077	1125	1174	1225	51
0,5	1,1276	1329	1383	1438	1494	1551	1609	1669	1730	1792	63
0,6	1,1855	1919	1984	2051	2119	2188	2258	2330	2402	2476	76
0,7	1,2552	2628	2706	2785	2865	2947	3030	3114	3199	3286	88
0,8	1,3374	3464	3555	3647	3740	3835	3932	4029	4128	4229	102
0,9	1,4331	4434	4539	4645	4753	4862	4973	5085	5199	5314	117
1,0	1,5431	5549	5669	5790	5913	6038	6164	6292	6421	6552	133
1,1	1,6685	6820	6956	7093	7233	7374	7517	7662	7808	7956	151
1,2	1,8107	8258	8412	8568	8725	8884	9045	9208	9373	9540	169
1,3	1,9709	9880	0053*	0228*	0404*	0583*	0764*	0947*	1132*	1320*	189
1,4	2,1509	1700	1894	2090	2288	2488	2691	2896	3103	3312	212
1,5	2,3524	3738	3955	4174	4395	4619	4845	5073	5305	5538	237
1,6	2,5775	6013	6255	6499	6746	6995	7247	7502	7760	8020	263
1,7	2,8283	8549	8818	9090	9364	9642	9922	0206*	0492*	0782*	293
1,8	3,1075	1371	1669	1972	2277	2585	2897	3212	3530	3852	325
1,9	3,4177	4506	4838	5173	5512	5855	6201	6551	6904	7261	361
2,0	3,7622	7987	8355	8727	9103	9483	9867	0255*	0647*	1043*	400
2,1	4,1443	1847	2256	2668	3085	3507	3932	4362	4797	5236	443
2,2	4,5679	6127	6580	7037	7499	7966	8437	8914	9395	9881	491
2,3	5,0372	0868	1370	1876	2388	2905	3427	3954	4487	5026	543
2,4	5,5569	6119	6674	7235	7801	8373	8951	9535	0125*	0721*	602
2,5	6,1323	1931	2545	3166	3793	4426	5066	5712	6365	7024	666
2,6	6,7690	8363	9043	9729	0423*	1123*	1831*	2546*	3268*	3998*	737
2,7	7,4735	5479	6231	6990	7758	8533	9136	0106*	0905*	1712*	815
2,8	8,2527	3351	4182	5022	5871	6728	7594	8469	9352	0244*	902
2,9	9,1146	2056	2976	3905	4844	5791	6749	7716	8693	9680	998
3,0	10,0678	1683	2700	3728	4765	5813	6872	7942	9022	0113*	1102
3,1	11,1215	2328	3453	4588	5736	6895	8065	9247	0442*	1648*	1218
3,2	12,2866	4097	5340	6596	7864	9146	0440*	1747*	3067*	4401*	1347
3,3	13,5748	7108	8482	9871	1273*	2689*	4120*	5565*	7024*	8498*	1489
3,4	14,999	15,149	15,301	15,455	15,610	15,766	15,924	16,084	16,245	16,408	165
3,5	16,573	16,739	16,907	17,077	17,248	17,421	17,596	17,772	17,951	18,131	182
3,6	18,313	18,497	18,682	18,870	19,059	19,250	19,444	19,639	19,836	20,035	201
3,7	20,236	20,439	20,644	20,852	21,061	21,272	21,486	21,702	21,919	22,139	222
3,8	22,362	22,586	22,813	23,042	23,273	23,507	23,743	23,982	24,222	24,466	245
3,9	24,711	24,959	25,210	25,463	25,719	25,977	26,238	26,502	26,768	27,037	271
4,0	27,308	27,582	27,860	28,139	28,422	28,707	28,996	29,287	29,581	29,878	300
4,1	30,178	30,482	30,788	31,097	31,409	31,725	32,044	32,365	32,691	33,019	332
4,2	33,351	33,686	34,024	34,366	34,711	35,060	35,412	35,768	36,127	36,490	367
4,3	36,857	37,227	37,601	37,979	38,360	38,746	39,135	39,528	39,925	40,326	406
4,4	40,732	41,141	41,554	41,972	42,393	42,819	43,250	43,684	44,123	44,566	448
4,5	45,014	45,466	45,923	46,385	46,851	47,321	47,797	48,277	48,762	49,252	495
4,6	49,747	50,247	50,752	51,262	51,777	52,297	52,823	53,354	53,890	54,431	547
4,7	54,978	55,531	56,089	56,652	57,221	57,796	58,377	58,964	59,556	60,155	604
4,8	60,759	61,370	61,987	62,609	63,239	63,874	64,516	65,164	65,819	66,481	668
4,9	67,149	67,823	68,505	69,193	69,889	70,591	71,300	72,017	72,741	73,472	738
5,0	74,210	74,956	75,709	76,470	77,238	78,014	78,798	79,590	80,390	81,198	816

Briggsche Logarithmen der Hyperbelfunktion $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ für $\varphi = 0$ bis 5,09; um 10 vergrößert.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	— ∞	8,0000	3011	4772	6022	6992	7784	8455	9036	9548	459
0,1	9,0007	0423	0802	1152	1475	1777	2060	2325	2576	2814	225
0,2	9,3039	3254	3459	3656	3844	4025	4199	4366	4528	4685	151
0,3	9,4836	4983	5125	5264	5398	5529	5656	5781	5902	6020	116
0,4	9,6136	6249	6359	6468	6574	6678	6780	6880	6978	7074	95
0,5	9,7169	7262	7354	7444	7533	7620	7707	7791	7875	7958	81
0,6	9,8039	8119	8199	8277	8354	8431	8506	8581	8655	8728	72
0,7	9,8800	8872	8942	9012	9082	9150	9218	9286	9353	9419	66
0,8	9,9485	9550	9614	9678	9742	9805	9868	9930	9992	0053*	61
0,9	10,0114	0174	0234	0294	0353	0412	0470	0529	0586	0644	57
1,0	10,0701	0758	0815	0871	0927	0982	1038	1093	1148	1203	54
1,1	10,1257	1311	1365	1419	1472	1525	1578	1631	1684	1736	52
1,2	10,1788	1840	1892	1944	1995	2046	2098	2148	2199	2250	50
1,3	10,2300	2351	2401	2451	2501	2551	2600	2650	2699	2748	49
1,4	10,2797	2846	2895	2944	2993	3041	3090	3138	3186	3234	48
1,5	10,3282	3330	3378	3426	3474	3521	3569	3616	3663	3711	47
1,6	10,3758	3805	3852	3899	3946	3992	4039	4086	4132	4179	46
1,7	10,4225	4272	4318	4364	4411	4457	4503	4549	4595	4641	46
1,8	10,4687	4733	4778	4824	4870	4915	4961	5007	5052	5098	45
1,9	10,5143	5188	5234	5279	5324	5370	5415	5460	5505	5550	45
2,0	10,5595	5640	5685	5730	5775	5820	5865	5910	5955	6000	45
2,1	10,6044	6089	6134	6178	6223	6268	6312	6357	6401	6446	45
2,2	10,6491	6535	6580	6624	6668	6713	6757	6802	6846	6890	45
2,3	10,6935	6979	7023	7067	7112	7156	7200	7244	7289	7333	44
2,4	10,7377	7421	7465	7509	7553	7597	7642	7686	7730	7774	44
2,5	10,7818	7862	7906	7950	7994	8038	8082	8126	8169	8213	44
2,6	10,8257	8301	8345	8389	8433	8477	8521	8564	8608	8652	44
2,7	10,8696	8740	8784	8827	8871	8915	8959	9003	9046	9090	44
2,8	10,9134	9178	9221	9265	9309	9353	9396	9440	9484	9527	44
2,9	10,9571	9615	9658	9702	9746	9789	9833	9877	9920	9964	44
3,0	11,0008	0051	0095	0139	0182	0226	0270	0313	0357	0400	44
3,1	11,0444	0488	0531	0575	0618	0662	0706	0749	0793	0836	44
3,2	11,0880	0923	0967	1011	1054	1098	1141	1185	1228	1272	44
3,3	11,1316	1359	1403	1446	1490	1533	1577	1620	1664	1707	44
3,4	11,1751	1794	1838	1881	1925	1968	2012	2056	2099	2143	43
3,5	11,2186	2230	2273	2317	2360	2404	2447	2491	2534	2578	43
3,6	11,2621	2665	2708	2752	2795	2839	2882	2925	2969	3012	44
3,7	11,3056	3099	3143	3186	3230	3273	3317	3360	3404	3447	44
3,8	11,3491	3534	3578	3621	3665	3708	3752	3795	3838	3882	43
3,9	11,3925	3969	4012	4056	4099	4143	4186	4230	4273	4317	43
4,0	11,4360	4403	4447	4490	4534	4577	4621	4664	4708	4751	44
4,1	11,4795	4838	4881	4925	4968	5012	5055	5099	5142	5186	43
4,2	11,5229	5273	5316	5359	5403	5446	5490	5533	5577	5620	44
4,3	11,5664	5707	5750	5794	5837	5881	5924	5968	6011	6055	43
4,4	11,6098	6141	6185	6228	6272	6315	6359	6402	6446	6489	43
4,5	11,6532	6576	6619	6663	6706	6750	6793	6836	6880	6923	44
4,6	11,6967	7010	7054	7097	7141	7184	7227	7271	7314	7358	43
4,7	11,7401	7445	7488	7531	7575	7618	7662	7705	7749	7792	44
4,8	11,7836	7879	7922	7966	8009	8053	8096	8140	8183	8226	44
4,9	11,8270	8313	8357	8400	8444	8487	8530	8574	8617	8661	43
5,0	11,8704	8748	8791	8835	8878	8921	8965	9008	9052	9095	43

Briggssche Logarithmen der Hyperbelfunktion Coſ φ für $\varphi = 0$ bis 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0000	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0014	0018	4
0,1	0,0022	0026	0031	0037	0042	0049	0055	0062	0070	0078	8
0,2	0,0086	0095	0104	0114	0124	0134	0145	0156	0168	0180	13
0,3	0,0193	0205	0219	0232	0246	0261	0276	0291	0306	0322	17
0,4	0,0339	0355	0372	0390	0407	0426	0444	0463	0482	0502	20
0,5	0,0522	0542	0562	0583	0605	0626	0648	0670	0693	0716	23
0,6	0,0739	0762	0786	0810	0835	0859	0884	0910	0935	0961	26
0,7	0,0987	1013	1040	1067	1094	1122	1149	1177	1206	1234	29
0,8	0,1263	1292	1321	1350	1380	1410	1440	1470	1501	1532	31
0,9	0,1563	1594	1625	1657	1689	1721	1753	1785	1818	1851	33
1,0	0,1884	1917	1950	1984	2018	2051	2086	2120	2154	2189	34
1,1	0,2223	2258	2293	2328	2364	2399	2435	2470	2506	2542	36
1,2	0,2578	2615	2651	2688	2724	2761	2798	2835	2872	2909	38
1,3	0,2947	2984	3022	3059	3097	3135	3173	3211	3249	3288	38
1,4	0,3326	3365	3403	3442	3481	3520	3559	3598	3637	3676	39
1,5	0,3715	3754	3794	3833	3873	3913	3952	3992	4032	4072	40
1,6	0,4112	4152	4192	4232	4273	4313	4353	4394	4434	4475	40
1,7	0,4515	4556	4597	4637	4678	4719	4760	4801	4842	4883	41
1,8	0,4924	4965	5006	5048	5089	5130	5172	5213	5254	5296	41
1,9	0,5337	5379	5421	5462	5504	5545	5587	5629	5671	5713	41
2,0	0,5754	5796	5838	5880	5922	5964	6006	6048	6090	6132	43
2,1	0,6175	6217	6259	6301	6343	6386	6428	6470	6512	6555	42
2,2	0,6597	6640	6682	6724	6767	6809	6852	6894	6937	6979	43
2,3	0,7022	7064	7107	7150	7192	7235	7278	7320	7363	7406	42
2,4	0,7448	7491	7534	7577	7619	7662	7705	7748	7791	7833	43
2,5	0,7876	7919	7962	8005	8048	8091	8134	8176	8219	8262	43
2,6	0,8305	8348	8391	8434	8477	8520	8563	8606	8649	8692	43
2,7	0,8735	8778	8821	8864	8907	8951	8994	9037	9080	9123	43
2,8	0,9166	9209	9252	9295	9338	9382	9425	9468	9511	9554	43
2,9	0,9597	9641	9684	9727	9770	9813	9856	9900	9943	9986	43
3,0	1,0029	0073	0116	0159	0202	0245	0289	0332	0375	0418	44
3,1	1,0462	0505	0548	0591	0635	0678	0721	0764	0808	0851	43
3,2	1,0894	0938	0981	1024	1067	1111	1154	1197	1241	1284	43
3,3	1,1327	1371	1414	1457	1501	1544	1587	1631	1674	1717	44
3,4	1,1761	1804	1847	1891	1934	1977	2021	2064	2107	2151	43
3,5	1,2194	2237	2281	2324	2367	2411	2454	2497	2541	2584	44
3,6	1,2628	2671	2714	2758	2801	2844	2888	2931	2974	3018	43
3,7	1,3061	3105	3148	3191	3235	3278	3322	3365	3408	3452	43
3,8	1,3495	3538	3582	3625	3669	3712	3755	3799	3842	3886	43
3,9	1,3929	3972	4016	4059	4103	4146	4189	4233	4276	4320	43
4,0	1,4363	4406	4450	4493	4537	4580	4623	4667	4710	4754	43
4,1	1,4797	4840	4884	4927	4971	5014	5057	5101	5144	5188	43
4,2	1,5231	5274	5318	5361	5405	5448	5492	5535	5578	5622	43
4,3	1,5665	5709	5752	5795	5839	5882	5926	5969	6012	6056	43
4,4	1,6099	6143	6186	6230	6273	6316	6360	6403	6447	6490	43
4,5	1,6533	6577	6620	6664	6707	6751	6794	6837	6881	6924	44
4,6	1,6968	7011	7055	7098	7141	7185	7228	7272	7315	7358	44
4,7	1,7402	7445	7489	7532	7576	7619	7662	7706	7749	7793	43
4,8	1,7836	7880	7923	7966	8010	8053	8097	8140	8184	8227	43
4,9	1,8270	8314	8357	8401	8444	8487	8531	8574	8618	8661	44
5,0	1,8705	8748	8791	8835	8878	8922	8965	9009	9052	9095	43

Hyperbelfunktion $\mathfrak{Tg}\,\varphi$ für $\varphi = 0$ bis 2,39.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898	99
0,1	0,0997	1096	1194	1293	1391	1489	1587	1684	1781	1878	96
0,2	0,1974	2070	2165	2260	2355	2449	2543	2636	2729	2821	92
0,3	0,2913	3004	3095	3185	3275	3364	3452	3540	3627	3714	86
0,4	0,3800	3885	3969	4053	4137	4219	4301	4382	4462	4542	79
0,5	0,4621	4700	4777	4854	4930	5005	5080	5154	5227	5299	71
0,6	0,5370	5441	5511	5581	5649	5717	5784	5850	5915	5980	64
0,7	0,6044	6107	6169	6231	6291	6352	6411	6469	6527	6584	56
0,8	0,6640	6696	6751	6805	6858	6911	6963	7014	7064	7114	49
0,9	0,7163	7211	7259	7306	7352	7398	7443	7487	7531	7574	42
1,0	0,7616	7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969	36
1,1	0,8005	8041	8076	8110	8144	8178	8210	8243	8275	8306	31
1,2	0,8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591	26
1,3	0,8617	8643	8668	8693	8717	8741	8764	8787	8810	8832	22
1,4	0,8854	8875	8896	8917	8937	8957	8977	8996	9015	9033	19
1,5	0,9052	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9202	15
1,6	0,9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9342	12
1,7	0,9354	9367	9379	9391	9402	9414	9425	9436	9447	9458	10
1,8	0,9468	9478	9488	9498	9508	9518	9527	9536	9545	9554	8
1,9	0,9562	9571	9579	9587	9595	9603	9611	9619	9626	9633	7
2,0	0,9640	9647	9654	9661	9668	9674	9680	9687	9693	9699	6
2,1	0,9705	9710	9716	9722	9727	9732	9738	9743	9748	9753	5
2,2	0,9757	9762	9767	9771	9776	9780	9785	9789	9793	9797	4
2,3	0,9801	9805	9809	9812	9816	9820	9823	9827	9830	9834	3

Briggssche Logarithmen der Hyperbelfunktion $\mathfrak{Tg}\,\varphi$ für $\varphi = 0$ bis 2,39; um 10 vergrößert.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	$-\infty$	8,0000	3010	4770	6018	6986	7776	8444	9022	9531	455
0,1	8,9986	0396*	0771*	1115*	1433*	1729*	2004*	2263*	2506*	2736*	217
0,2	9,2953	3159	3355	3542	3720	3890	4053	4210	4360	4505	139
0,3	9,4644	4778	4907	5031	5152	5268	5381	5490	5596	5698	99
0,4	9,5797	5894	5987	6078	6166	6252	6336	6417	6496	6573	75
0,5	9,6648	6720	6792	6861	6928	6994	7058	7121	7182	7242	58
0,6	9,7300	7357	7413	7467	7520	7571	7622	7671	7720	7767	46
0,7	9,7813	7858	7902	7945	7988	8029	8069	8109	8147	8185	37
0,8	9,8222	8258	8293	8328	8362	8395	8428	8459	8491	8521	30
0,9	9,8551	8580	8609	8637	8664	8691	8717	8743	8768	8793	24
1,0	9,8817	8841	8864	8887	8909	8931	8952	8973	8994	9014	20
1,1	9,9034	9053	9072	9090	9108	9126	9144	9161	9177	9194	16
1,2	9,9210	9226	9241	9256	9271	9285	9300	9314	9327	9341	13
1,3	9,9354	9367	9379	9391	9404	9415	9427	9438	9450	9460	11
1,4	9,9471	9482	9492	9502	9512	9522	9531	9540	9550	9558	9
1,5	9,9567	9576	9584	9592	9601	9608	9616	9624	9631	9639	7
1,6	9,9646	9653	9660	9666	9673	9679	9686	9692	9698	9704	6
1,7	9,9710	9716	9721	9727	9732	9738	9743	9748	9753	9758	5
1,8	9,9763	9767	9772	9776	9781	9785	9789	9794	9798	9802	4
1,9	9,9806	9810	9813	9817	9821	9824	9828	9831	9834	9838	3
2,0	9,9841	9844	9847	9850	9853	9856	9859	9862	9864	9867	3
2,1	9,9870	9872	9875	9877	9880	9882	9884	9887	9889	9891	2
2,2	9,9893	9895	9898	9900	9902	9904	9905	9907	9909	9911	2
2,3	9,9913	9914	9916	9918	9919	9921	9923	9924	9926	9927	2

E. Kugelinhalte für die Durchmesser $d = 1$ bis 200.

d	$\frac{\pi}{6} d^3$	d	$\frac{\pi}{6} d^3$	d	$\frac{\pi}{6} d^3$	d	$\frac{\pi}{6} d^3$	d	$\frac{\pi}{6} d^3$
1	0,523599	41	36086,95	81	278261,8	121	927587,2	161	2185125
2	4,188790	42	38792,39	82	288695,6	122	950775,8	162	2226094
3	14,13717	43	41629,77	83	299387,0	123	974347,7	163	2267574
4	33,51032	44	44602,24	84	310339,1	124	998305,9	164	2309565
5	65,44985	45	47712,94	85	321555,1	125	1022654	165	2352071
6	113,0973	46	50965,01	86	333038,2	126	1047394	166	2395096
7	179,5944	47	54361,60	87	344791,4	127	1072531	167	2438642
8	268,0826	48	57905,84	88	356817,9	128	1098066	168	2482713
9	381,7035	49	61600,87	89	369120,9	129	1124004	169	2527311
10	523,5988	**50**	65449,85	**90**	381703,5	**130**	1150347	**170**	2572441
11	696,9100	51	69455,91	91	394568,9	131	1177098	171	2618104
12	904,7787	52	73622,18	92	407720,1	132	1204260	172	2664305
13	1150,347	53	77951,81	93	421160,3	133	1231838	173	2711046
14	1436,755	54	82447,92	94	434892,8	134	1259833	174	2758331
15	1767,146	55	87113,75	95	448920,5	135	1288249	175	2806162
16	2144,660	56	91952,32	96	463246,7	136	1317090	176	2854543
17	2572,441	57	96966,83	97	477874,5	137	1346357	177	2903477
18	3053,628	58	102160,4	98	492807,0	138	1376055	178	2952967
19	3591,364	59	107536,2	99	508047,4	139	1406187	179	3003006
20	4188,790	**60**	113097,3	**100**	523598,8	**140**	1436755	**180**	3053628
21	4849,048	61	118847,0	101	539464,3	141	1467763	181	3104805
22	5575,280	62	124788,2	102	555647,2	142	1499214	182	3156551
23	6370,626	63	130924,3	103	572150,5	143	1531112	183	3208869
24	7238,229	64	137258,2	104	588977,4	144	1563457	184	3261761
25	8181,231	65	143793,3	105	606131,0	145	1596256	185	3315231
26	9202,772	66	150532,6	106	623614,5	146	1629511	186	3369282
27	10305,99	67	157479,1	107	641431,0	147	1663224	187	3423919
28	11494,04	68	164636,2	108	659583,7	148	1697398	188	3479142
29	12770,05	69	172006,9	109	678075,6	149	1732038	189	3534956
30	14137,17	**70**	179594,4	**110**	696910,0	**150**	1767146	**190**	3591364
31	15598,53	71	187401,8	111	716090,0	151	1802725	191	3648369
32	17157,28	72	195432,2	112	735618,6	152	1838778	192	3705973
33	18816,57	73	203688,8	113	755499,1	153	1875309	193	3764181
34	20579,53	74	212174,8	114	775734,6	154	1912321	194	3822996
35	22449.30	75	220893,2	115	796328,3	155	1949816	195	3882419
36	24429,02	76	229847,3	116	817283,2	156	1987799	196	3942456
37	26521,85	77	239040,1	117	838602,7	157	2026271	197	4003108
38	28730,91	78	248474,9	118	860289,5	158	2065237	198	4064379
39	31059,36	79	258154,6	119	882347,3	159	2104699	199	4126272
40	33510,32	**80**	268082,6	**120**	904778,7	**160**	2144660	**200**	4188790

F. Bogenlängen, Bogenhöhen,

Zentriwinkel in Grad	Bogenlänge l	Bogenhöhe h	$\frac{l}{h}$	Sehnenlänge s	Inhalt des Kreisabschn.	Zentriwinkel in Grad	Bogenlänge l	Bogenhöhe h	$\frac{l}{h}$	Sehnenlänge s	Inhalt des Kreisabschn.
1	0,0175	0,0000	458,36	0,0175	0,00000	46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	0,04176
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	0,00000	47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	0,04448
3	0,0524	0,0003	152,79	0,0524	0,00001	48	0,8378	0,0865	9,69	0,8135	0,04731
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	0,00003	49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	0,05025
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	0,00006	50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	0,05331
6	c,1047	0,0014	76,41	0,1047	0,00010	51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	0,05649
7	0,1222	0,0019	64,01	0,1221	0,00015	52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	0,05978
8	0,1396	0,0024	56,01	0,1395	0,00023	53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	0,06319
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	0,00032	54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	0,06673
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	0,00044	55	0,9599	0,1130	8,49	0,9235	0,07039
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	0,00059	56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	0,07417
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	0,00076	57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	0,07808
13	0,2269	0,0064	35,28	0,2264	0,00097	58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	0,08212
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	0,00121	59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	0,08629
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	0,00149	60	1,0472	1,1340	7,81	1,0000	0,09059
16	0,2793	0,0097	28,04	0,2783	0,00181	61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	0,09502
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	0,00217	62	1,0821	0,1428	7,56	1,0301	0,09958
18	0,3142	0,0123	25,35	0,3129	0,00257	63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	0,10428
19	0,3316	0,0137	24,17	0,3301	0,00302	64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	0,10911
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	0,00352	65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	0,11408
21	0,3665	0,0167	21,95	0,3645	0,00408	66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	0,11919
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	0,00468	67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	0,12443
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	0,00535	68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	0,12982
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	0,00607	69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	0,13535
25	0,4363	0,0237	18,47	0,4329	0,00686	70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	0,14102
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	0,00771	71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	0,14683
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	0,00862	72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	0,15279
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	0,00961	73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	0,15889
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	0,01067	74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	0,16514
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	0,01180	75	1,3090	0,2066	6,34	1,2175	0,17154
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	0,01301	76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	0,17808
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5512	0,01429	77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	0,18477
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	0,01566	78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	0,19160
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	0,01711	79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	0,19859
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	0,01864	80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	0,20573
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	0,02027	81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	0,21301
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	0,02198	82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	0,22045
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	0,02378	83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	0,22804
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	0,02568	84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	0,23578
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	0,02767	85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	0,24367
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	0,02976	86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	0,25171
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	0,03195	87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	0,25990
43	0,7505	0,0696	10,78	0,7330	0,03425	88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	0,26825
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	0,03664	89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	0,26775
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	0,03915	90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	0,28540

Zu einer gegebenen Bogenlänge l und Bogenhöhe h findet man den Halbmesser r aus $r = l : l_0$, wo l_0 die Bogenlänge ist, die beim Halbmesser 1 zu dem gegebenen $\frac{l}{h}$ gehört. Ist r der Kreishalbmesser und φ der Zentriwinkel in Grad, so ergibt sich

1) die Sehnenlänge $s = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$

2) die Bogenhöhe $h = r\left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} = 2r \sin^2 \frac{\varphi}{4}$

3) die Bogenlänge $l = \pi r \frac{\varphi}{180} = 0{,}017453\, r \varphi = \sqrt{s^2 + \frac{16}{3} h^2}$ (angenähert)

Sehnenlängen und Kreisabschnitte für den Halbmesser 1.

Zentriwinkel in Grad	Bogenlänge l	Bogenhöhe h	$\frac{l}{h}$	Sehnenlänge s	Inhalt des Kreisabschn.	Zentriwinkel in Grad	Bogenlänge l	Bogenhöhe h	$\frac{l}{h}$	Sehnenlänge s	Inhalt des Kreisabschn.
91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	0,29420	136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	0,83949
92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	0,30316	137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	0,85455
93	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	0,31226	138	2,4086	0,6416	3,75	1,8672	0,86971
94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	0,32152	139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	0,88497
95	1,6580	0,3244	5,11	1,4746	0,33093	140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	0,90034
96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	0,34050	141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	0,91580
97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	0,35021	142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	0,93135
98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	0,36008	143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	0,94700
99	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	0,37009	144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	0,96274
100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	0,38026	145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	0,97858
101	1,7628	0,3639	4,84	1,5432	0,39058	146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	0,99449
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	0,40104	147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	1,01050
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	0,41166	148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	1,02658
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	0,42242	149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	1,04275
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	0,43333	150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	1,05900
106	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	0,44439	151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	1,07532
107	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	0,45560	152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	1,09171
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	0,46695	153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	1,10818
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	0,47844	154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	1,12472
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	0,49008	155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	1,14132
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	0,50187	156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	1,15799
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	0,51379	157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	1,17472
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	0,52586	158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	1,19151
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	0,53807	159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	1,20835
115	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	0,55041	160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	1,22525
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	0,56289	161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	1,24221
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	0,57551	162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	1,25921
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	0,58827	163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	1,27626
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	0,60116	164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	1,29335
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	0,61418	165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	1,31049
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	0,62734	166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	1,32766
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	0,64063	167	2,9147	0,8868	3,28	1,9871	1,34487
123	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	0,65404	168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	1,36212
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	0,66759	169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	1,37940
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	0,68125	170	2,9671	0,0128	3,25	1,9924	1,39671
126	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	0,69505	171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	1,41404
127	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	0,70897	172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	1,43140
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	0,72301	173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	1,44878
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	0,73716	174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	1,46617
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	0,75144	175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	1,48359
131	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	0,76584	176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	1,50101
132	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	0,78034	177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	1,51845
133	2,3213	0,6013	3,86	1,8341	0,79497	178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	1,53589
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	0,80970	179	3,1241	0,9013	3,15	1,9999	1,55334
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	0,82454	180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	1,57080

4) der Inhalt des Kreisabschnittes $= \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{180}\,\varphi - \sin\varphi\right)$

5) „ „ „ Kreisausschnittes $= \frac{\varphi}{360}\,\pi r^2 = 0{,}008\,726\,65\;\varphi\, r^2$

6) $l = r$ entspricht $\varphi = 57^0\,17'\,44{,}806'' = 57{,}295\,779\,5^0 = 206\,264{,}806''$

7) $\operatorname{arc} 1^0 = \pi : 180 = 0{,}017\,453\,292\,52$; lg arc $1^0 = 0{,}241\,877\,367\,6 - 2$

8) $\operatorname{arc} 1' = \pi : 10\,800 = 0{,}000\,290\,888\,21$; lg arc $1' = 0{,}463\,726\,117\,2 - 4$

9) $\operatorname{arc} 1'' = \pi : 648\,000 = 0{,}000\,004\,848\,14$; lg arc $1'' = 0{,}685\,574\,866\,8 - 6$.

G. Länge der Kreisbogen

Grad	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Grad
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	**0**
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02909	0,03200	1
2	0,03491	0,03782	0,04072	0,04363	0,04654	0,04945	2
3	0,05236	0,05527	0,05818	0,06109	0,06400	0,06690	3
4	0,06981	0,07272	0,07563	0,07854	0,08145	0,08436	4
5	0,08727	0,09017	0,09308	0,09599	0,09890	0,10181	5
6	0,10472	0,10763	0,11054	0,11345	0,11636	0,11926	6
7	0,12217	0,12508	0,12799	0,13090	0,13381	0,13672	7
8	0,13963	0,14253	0,14544	0,14835	0,15126	0,15417	8
9	0,15708	0,15999	0,16290	0,16581	0,16872	0,17162	9
10	0,17453	0,17744	0,18035	0,18326	0,18617	0,18908	**10**
11	0,19199	0,19489	0,19780	0,20071	0,20362	0,20653	11
12	0,20944	0,21235	0,21526	0,21817	0,22108	0,22398	12
13	0,22689	0,22980	0,23271	0,23562	0,23853	0,24144	13
14	0,24435	0,24725	0,25016	0,25307	0,25598	0,25889	14
15	0,26180	0,26471	0,26762	0,27053	0,27343	0,27634	15
16	0,27925	0,28216	0,28507	0,28798	0,29089	0,29380	16
17	0.29671	0,29961	0,30252	0,30543	0,30834	0,31125	17
18	0,31416	0,31707	0,31998	0,32289	0,32579	0,32870	18
19	0,33161	0,33452	0,33743	0,34034	0,34325	0,34616	19
20	0,34907	0,35197	0,35488	0,35779	0,36070	0,36361	**20**
21	0,36652	0,36943	0,37234	0,37525	0,37815	0,38106	21
22	0,38397	0,38688	0,38979	0,39270	0,39561	0,39852	22
23	0,40143	0,40433	0,40724	0,41015	0,41306	0,41597	23
24	0,41888	0,42179	0,42470	0,42761	0,43051	0,43342	24
25	0,43633	0,43924	0,44215	0,44506	0,44797	0,45088	25
26	0,45379	0,45669	0,45960	0,46251	0,46542	0,46833	26
27	0,47124	0,47415	0,47706	0,47997	0,48287	0,48578	27
28	0,48869	0,49160	0,49451	0,49742	0,50033	0,50324	28
29	0,50615	0,50905	0,51196	0,51487	0,51778	0,52069	29
30	0,52360	0,52651	0,52942	0,53233	0,53523	0,53814	**30**
31	0,54105	0,54396	0,54687	0,54978	0,55269	0,55560	31
32	0,55851	0,56141	0,56432	0,56723	0,57014	0,57305	32
33	0,57596	0,57887	0,58178	0,58479	0,58759	0,59050	33
34	0,59341	0,59632	0,59923	0,60214	0,60505	0,60796	34
35	0,61087	0,61377	0,61668	0,61959	0,62250	0,62541	35
36	0,62832	0,63123	0,63414	0,63705	0,63995	0,64286	36
37	0,64577	0,64868	0,65159	0,65450	0,65741	0,66032	37
38	0,66323	0,66613	0,66904	0,67195	0,67486	0,67777	38
39	0,68068	0,68359	0,68650	0,68940	0,69231	0,69522	39
40	0,69813	0,70104	0,70395	0,70686	0,70977	0,71268	**40**
41	0,71558	0,71849	0,72140	0,72431	0,72722	0,73013	41
42	0,73304	0,73595	0,73886	0,74176	0,74467	0,74758	42
43	0,75049	0,75340	0,75631	0,75922	0,76213	0,76504	43
44	0,76794	0,77085	0,77376	0,77667	0,77958	0,78249	44
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	

für den Halbmesser 1.

Grad	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Grad
45	0,78540	0,78831	0,79122	0,79412	0,79703	0,79994	45
46	0,80285	0,80576	0,80867	0,81158	0,81449	0,81740	46
47	0,82030	0,82322	0,82612	0,82903	0,83194	0,83485	47
48	0,83776	0,84067	0,84358	0,84648	0,84939	0,85230	48
49	0,85521	0,85812	0,86109	0,86394	0,86685	0,86976	49
50	0,87266	0,87557	0,87848	0,88139	0,88430	0,88721	**50**
51	0,89012	0,89303	0,89594	0,89884	0,90175	0,90466	51
52	0,90757	0,91048	0,91339	0,91630	0,91921	0,92212	52
53	0,92503	0,92793	0,93084	0,93375	0,93666	0,93957	53
54	0,94248	0,94539	0,94830	0,95120	0,95411	0,95702	54
55	0,95993	0,96284	0,96575	0,96866	0,97157	0,97448	55
56	0,97738	0,98029	0,98320	0,98611	0,98902	0,99193	56
57	0,99484	0,99775	1,00066	1,00356	1,00647	1,00938	57
58	1,01229	1,01520	1,01811	1,02102	1,02393	1,02684	58
59	1,02974	1,03265	1,03556	1,03847	1,04138	1,04429	59
60	1,04720	1,05011	1,05302	1,05592	1,05883	1,06174	**60**
61	1,06465	1,06756	1,07047	1,07338	1,07629	1,07920	61
62	1,08210	1,08501	1,08792	1,09083	1,09374	1,09665	62
63	1,09956	1,10247	1,10537	1,10828	1,11119	1,11410	63
64	1,11701	1,11992	1,12283	1,12574	1,12865	1,13156	64
65	1,13446	1,13737	1,14028	1,14319	1,14610	1,14901	65
66	1,15192	1,15483	1,15773	1,16064	1,16355	1,16646	66
67	1,16937	1,17228	1,17519	1,17810	1,18101	1,18392	67
68	1,18682	1,18973	1,19264	1,19555	1,19846	1,20137	68
69	1,20428	1,20719	1,21009	1,21300	1,21591	1,21882	69
70	1,22173	1,22464	1,22755	1,23046	1,23337	1,23627	**70**
71	1,23918	1,24209	1,24500	1,24791	1,25082	1,25373	71
72	1,25664	1,25955	1,26245	1,26536	1,26827	1,27118	72
73	1,27409	1,27700	1,27991	1,28282	1,28573	1,28863	73
74	1,29154	1,29445	1,29736	1,30027	1,30318	1,30609	74
75	1,30900	1,31191	1,31481	1,31772	1,32063	1,32354	75
76	1,32645	1,32936	1,33227	1,33518	1,33809	1,34099	76
77	1,34390	1,34681	1,34972	1,35263	1,35554	1,35845	77
78	1,36136	1,36427	1,36717	1,37008	1,37299	1,37590	78
79	1,37881	1,38172	1,38463	1,38754	1,39045	1,39335	79
80	1,39626	1,39917	1,40208	1,40499	1,40790	1,41081	**80**
81	1,41372	1,41663	1,41953	1,42244	1,42535	1,42826	81
82	1,43117	1,43408	1,43699	1,43990	1,44281	1,44571	82
83	1,44862	1,45153	1,45444	1,45735	1,46026	1,46317	83
84	1,46608	1,46899	1,47189	1,47480	1,47771	1,48062	84
85	1,48353	1,48644	1,48935	1,49226	1,49517	1,49807	85
86	1,50098	1,50389	1,50680	1,50971	1,51262	1,51553	86
87	1,51844	1,52134	1,52425	1,52716	1,53007	1,53298	87
88	1,53589	1,53880	1,54171	1,54462	1,54753	1,55043	88
89	1,55334	1,55625	1,55916	1,56207	1,56498	1,56789	89
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	

Länge der Kreisbogen

Grad	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Grad
90	1,57080	1,57370	1,57661	1,57952	1,58243	1,58534	**90**
91	1,58825	1,59116	1,59407	1,59698	1,59989	1,60279	91
92	1,60570	1,60861	1,61152	1,61443	1,61734	1,62025	92
93	1,62316	1,62606	1,62897	1,63188	1,63479	1,63770	93
94	1,64061	1,64352	1,64643	1,64934	1,65224	1,65515	94
95	1,65806	1,66097	1,66388	1,66679	1,66970	1,67261	95
96	1,67552	1,67842	1,68133	1,68424	1,68715	1,69006	96
97	1,69297	1,69588	1,69879	1,70170	1,70460	1,70751	97
98	1,71042	1,71333	1,71624	1,71915	1,72206	1,72497	98
99	1,72788	1,73078	1,73369	1,73660	1,73951	1,74242	99
100	1,74533	1,74824	1,75115	1,75406	1,75697	1,75987	**100**
101	1,76278	1,76569	1,76860	1,77151	1,77442	1,77733	101
102	1,78024	1,78314	1,78605	1,78896	1,79187	1,79478	102
103	1,79769	1,80060	1,80351	1,80642	1,80932	1,81223	103
104	1,81514	1,81805	1,82096	1,82387	1,82678	1,82969	104
105	1,83260	1,83550	1,83841	1,84132	1,84423	1,84714	105
106	1,85005	1,85296	1,85587	1,85878	1,86168	1,86459	106
107	1,86750	1,87041	1,87332	1,87623	1,87914	1,88205	107
108	1,88496	1,88786	1,89077	1,89368	1,89659	1,89950	108
109	1,90241	1,90532	1,90823	1,91114	1,91404	1,91695	109
110	1,91986	1,92277	1,92568	1,92859	1,93150	1,93441	**110**
111	1,93732	1,94023	1,94313	1,94604	1,94895	1,95186	111
112	1,95477	1,95768	1,96059	1,96350	1,96640	1,96931	112
113	1,97222	1,97513	1,97804	1,98095	1,98386	1,98676	113
114	1,98968	1,99258	1,99549	1,99840	2,00131	2,00422	114
115	2,00713	2,01004	2,01295	2,01586	2,01876	2,02167	115
116	2,02458	2,02749	2,03040	2,03331	2,03622	2,03913	116
117	2,04204	2,04494	2,04785	2,05076	2,05367	2,05658	117
118	2,05949	2,06240	2,06531	2,06822	2,07112	2,07403	118
119	2,07694	2,07985	2,08276	2,08567	2,08858	2,09149	119
120	2,09440	2,09730	2,10021	2,10312	2,10603	2,10894	**120**
121	2,11185	2,11476	2,11767	2,12057	2,12348	2,12639	121
122	2,12930	2,13221	2,13512	2,13803	2,14094	2,14385	122
123	2,14676	2,14966	2,15257	2,15548	2,15839	2,16130	123
124	2,16421	2,16712	2,17003	2,17293	2,17584	2,17875	124
125	2,18166	2,18457	2,18748	2,19039	2,19330	2,19621	125
126	2,19912	2,20202	2,20493	2,20784	2,21075	2,21366	126
127	2,21657	2,21948	2,22239	2,22529	2,22820	2,23111	127
128	2,23402	2,23693	2,23984	2,24275	2,24566	2,24857	128
129	2,25148	2,25438	2,25729	2,26020	2,26311	2,26602	129
130	2,26893	2,27184	2,27475	2,27765	2,28056	2,28347	**130**
131	2,28638	2,28929	2,29220	2,29511	2,29802	2,30093	131
132	2,30384	2,30674	2,30965	2,31256	2,31547	2,31838	132
133	2,32129	2,32420	2,32711	2,33001	2,33292	2,33583	133
134	2,33874	2,34165	2,34456	2,34747	2,35038	2,35329	134
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	

für den Halbmesser 1.

Grad	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Grad
135	2,35619	2,35910	2,36201	2,36492	2,36783	2,37074	135
136	2,37365	2,37656	2,37947	2,38237	2,38528	2,38819	136
137	2,39110	2,39401	2,39692	2,39983	2,40274	2,40565	137
138	2,40855	2,41146	2,41437	2,41728	2,42019	2,42310	138
139	2,42601	2,42892	2,43183	2,43473	2,43764	2,44055	139
140	2,44346	2,44637	2,44928	2,45219	2,45510	2,45801	**140**
141	2,46091	2,46382	2,46673	2,46964	2,47255	2,47546	141
142	2,47837	2,48128	2,48419	2,48709	2,49000	2,49291	142
143	2,49582	2,49873	2,50164	2,50455	2,50746	2,51037	143
144	2,51327	2,51618	2,51909	2,52200	2,52491	2,52782	144
145	2,53073	2,53364	2,53654	2,53945	2,54236	2,54527	145
146	2,54818	2,55109	2,55400	2,55691	2,55982	2,56273	146
147	2,56563	2,56854	2,57145	2,57436	2,57727	2,58018	147
148	2,58309	2,58600	2,58890	2,59181	2,59472	2,59763	148
149	2,60054	2,60345	2,60636	2,60927	2,61218	2,61509	149
150	2,61799	2,62090	2,62381	2,62672	2,62963	2,63254	**150**
151	2,63545	2,63836	2,64126	2,64417	2,64708	2,64999	151
152	2,65290	2,65581	2,65872	2,66163	2,66454	2,66744	152
153	2,67035	2,67326	2,67617	2,67908	2,68199	2,68490	153
154	2,68781	2,69072	2,69362	2,69653	2,69944	2,70235	154
155	2,70526	2,70817	2,71108	2,71399	2,71690	2,71980	155
156	2,72271	2,72562	2,72853	2,73144	2,73435	2,73726	156
157	2,74017	2,74307	2,74598	2,74889	2,75180	2,75471	157
158	2,75762	2,76053	2,76344	2,76635	2,76926	2,77216	158
159	2,77507	2,77798	2,78089	2,78380	2,78671	2,78962	159
160	2,79253	2,79544	2,79834	2,80125	2,80416	2,80707	**160**
161	2,80998	2,81289	2,81580	2,81871	2,82162	2,82452	161
162	2,82743	2,83034	2,83325	2,83616	2,83907	2,84198	162
163	2,84489	2,84780	2,85070	2,85361	2,85652	2,85943	163
164	2,86234	2,86525	2,86816	2,87107	2,87398	2,87688	164
165	2,87980	2,88270	2,88561	2,88852	2,89143	2,89434	165
166	2,89725	2,90016	2,90306	2,90597	2,90888	2,91179	166
167	2,91470	2,91761	2,92052	2,92343	2,92634	2,92924	167
168	2,93215	2,93506	2,93797	2,94088	2,94379	2,94670	168
169	2,94961	2,95251	2,95542	2,95833	2,96124	2,96415	169
170	2,96706	2,96997	2,97288	2,97578	2,97870	2,98160	**170**
171	2,98451	2,98742	2,99033	2,99324	2,99615	2,99906	171
172	3,00197	3,00487	3,00778	3,01069	3,01360	3,01651	172
173	3,01942	3,02233	3,02524	3,02815	3,03106	3,03396	173
174	3,03687	3,03978	3,04269	3,04560	3,04851	3,05142	174
175	3,05433	3,05723	3,06014	3,06305	3,06596	3,06887	175
176	3,07178	3,07469	3,07760	3,08051	3,08341	3,08632	176
177	3,08923	3,09214	3,09505	3,09796	3,10087	3,10378	177
178	3,10669	3,10959	3,11250	3,11541	3,11832	3,12123	178
179	3,12414	3,12705	3,12996	3,13287	3,13577	3,13868	179
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	

H. Tafel zum Uebergang aus der 90°-Teilung in die 100°-Teilung des Quadranten.

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0	0,0000	0,1852	0,3704	0,5556	0,7407	0,9259	**0**
1	1,1111	1,2963	1,4815	1,6667	1,8519	2,0370	1
2	2,2222	2,4074	2,5926	2,7778	2,9630	3,1481	2
3	3,3333	3,5185	3,7037	3,8889	4,0741	4,2593	3
4	4,4444	4,6296	4,8148	5,0000	5,1852	5,3704	4
5	5,5556	5,7407	5,9259	6,1111	6,2963	6,4815	5
6	6,6667	6,8519	7,0370	7,2222	7,4074	7,5926	6
7	7,7778	7,9630	8,1481	8,3333	8,5185	8,7037	7
8	8,8889	9,0741	9,2593	9,4444	9,6296	9,8148	8
9	10,0000	10,1852	10,3704	10,5556	10,7407	10,9259	9
10	11,1111	11,2963	11,4815	11,6667	11,8519	12,0370	**10**
11	12,2222	12,4074	12,5926	12,7778	12,9630	13,1481	11
12	13,3333	13,5185	13,7037	13,8889	14,0741	14,2593	12
13	14,4444	14,6296	14,8148	15,0000	15,1852	15,3704	13
14	15,5556	15,7407	15,9259	16,1111	16,2963	16,4815	14
15	16,6667	16,8519	17,0370	17,2222	17,4074	17,5926	15
16	17,7778	17,9630	18,1481	18,3333	18,5185	18,7037	16
17	18,8889	19,0741	19,2593	19,4444	19,6296	19,8148	17
18	20,0000	20,1852	20,3704	20,5556	20,7407	20,9259	18
19	21,1111	21,2963	21,4815	21,6667	21,8519	22,0370	19
20	22,2222	22,4074	22,5926	22,7778	22,9630	23,1481	**20**
21	23,3333	23,5185	23,7037	23,8889	24,0741	24,2593	21
22	24,4444	24,6296	24,8148	25,0000	25,1852	25,3704	22
23	25,5556	25,7407	25,9259	26,1111	26,2963	26,4815	23
24	26,6667	26,8519	27,0370	27,2222	27,4074	27,5926	24
25	27,8778	27,9630	28,1481	28,3333	28,5185	28,7037	25
26	28,8889	29,0741	29,2593	29,4444	29,6296	29,8148	26
27	30,0000	30,1852	30,3704	30,5556	30,7407	30,9259	27
28	31,1111	31,2963	31,4815	31,6667	31,8519	32,0370	28
29	32,2222	32,4074	32,5926	32,7778	32,9630	33,1481	29
30	33,3333	33,5185	33,7037	33,8889	34,0741	34,2593	**30**
31	34,4444	34,6296	34,8148	35,0000	35,1852	35,3704	31
32	35,5556	35,7407	35,9259	36,1111	36,2963	36,4815	32
33	36,6667	36,8519	37,0370	37,2222	37,4074	37,5926	33
34	37,7778	37,9630	38,1481	38,3333	38,5185	38,7037	34
35	38,8889	39,0741	39,2593	39,4444	39,6296	39,8148	35
36	40,0000	40,1852	40,3704	40,5556	40,7407	40,9259	36
37	41,1111	41,2963	41,4815	41,6667	41,8519	42,0370	37
38	42,2222	42,4074	42,5926	42,7778	42,9630	43,1481	38
39	43,3333	43,5185	43,7037	43,8889	44,0741	44,2593	39
40	44,4444	44,6296	44,8148	45,0000	45,1852	45,3704	**40**
41	45,5556	45,7407	45,9259	46,1111	46,2963	46,4815	41
42	46,6667	46,8519	47,0370	47,2222	47,4074	47,5926	42
43	47,7778	47,9630	48,1481	48,3333	48,5185	48,7037	43
44	48,8889	49,0741	49,2593	49,4444	49,6296	49,8148	44
45	50,0000	50,1852	50,3704	50,5556	50,7407	50,9259	45

Zur Umrechnung eines Winkels $\alpha > 45^0$ in die 100^0-Teilung suche den zu $\beta = \alpha - n\,45^0$ gehörigen Winkel dieser Teilung auf und zähle $n\,50$ hinzu.

J. Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{1}$ bis $\binom{n}{15}$.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$	$\binom{n}{11}$	$\binom{n}{12}$	$\binom{n}{13}$	$\binom{n}{14}$	$\binom{n}{15}$
1	1	1														
2	1	2	1													
3	1	3	3	1												
4	1	4	6	4	1											
5	1	5	10	10	5	1										
6	1	6	15	20	15	6	1									
7	1	7	21	35	35	21	7	1								
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1							
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

K. Quadrat- und Kubikwurzeln einiger Brüche.

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
$^1/_3$	0,57735	0,69336	$^1/_7$	0,37796	0,52276	$^1/_8$	0,35355	0,50000	$^4/_9$	0,66667	0,76314
$^2/_3$	0,81650	0,87358	$^2/_7$	0,53452	0,65863	$^3/_8$	0,61237	0,72112	$^5/_9$	0,74536	0,82207
$^1/_4$	0,50000	0,62996	$^3/_7$	0,65465	0,75395	$^5/_8$	0,79057	0,85499	$^7/_9$	0,88192	0,91964
$^3/_4$	0,86603	0,90856	$^4/_7$	0,75593	0,82983	$^7/_8$	0,93541	0,95647	$^1/_{12}$	0,28868	0,43679
$^1/_6$	0,40825	0,55032	$^5/_7$	0,84515	0,89390	$^1/_9$	0,33333	0,48075	$^5/_{12}$	0,64550	0,74690
$^5/_6$	0,91287	0,94104	$^6/_7$	0,92582	0,94991	$^2/_9$	0,47140	0,60571	$^7/_{12}$	0,76376	0,83555

L. Wichtige Zahlenwerte.

Gröfse	n	lg n	Gröfse	n	lg n	Gröfse	n	lg n
π	3,1415927	0,49715	$\pi^2:4$	2,4674011	0,39224	$\sqrt[3]{2:\pi}$	0,860254	0,93463—1
2π	6,2831853	0,79818	$\pi\sqrt{2}$	4,4428829	0,64767	$\sqrt[3]{3:\pi}$	0,984745	0,99332—1
3π	9,4247780	0,97427	g	9,81	0,99167	$1:2g$	0,050968	0,70830—2
$\pi:2$	1,5707963	0,19612	g^2	96,2361	1,98334	$2\sqrt{g}$	6,264184	0,79686
$\pi:3$	1,0471976	0,02003	$\sqrt{g}$	3,1320919	0,49583	$\sqrt{2g}$	4,429447	0,64635
$\pi:4$	0,7853982	0,89509—1	$\pi:\sqrt{2}$	2,221442	0,34663	$\pi\sqrt{g}$	9,839757	0,99298
π^2	9,8696044	0,99430	$2\sqrt{\pi}$	3,544908	0,54960	$\pi\sqrt{2g}$	13,91536	1,14350
π^3	31,006277	1,49145	$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,39909	$\pi:\sqrt{g}$	1,003033	0,00132
$1:\pi$	0,318310	0,50285—1	$\sqrt{\pi:2}$	1,253314	0,09806	$\pi:\sqrt{2g}$	0,709252	0,85080—1
$1:\pi^2$	0,101321	0,00570—1	$\sqrt{2:\pi}$	0,797885	0,90194—1	e	2,718282	0,43429
$1:\pi^3$	0,032252	0,50856—2	$\sqrt{3:\pi}$	0,977205	0,98998—1	e^2	7,389056	0,86859
$\sqrt{\pi}$	1,7724539	0,24857	$\sqrt[3]{2\pi}$	1,845261	0,26606	$1:e$	0,367879	0,56571—1
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4645919	0,16572	$\sqrt[3]{\pi:2}$	1,162447	0,06537	$1:e^2$	0,135335	0,13141—1
$\pi\sqrt{\pi}$	5,5683280	0,74572	$\sqrt[3]{\pi:4}$	0,922635	0,96503—1	$\sqrt{e}$	1,648721	0,21715
$\pi\sqrt[3]{\pi}$	4,6011511	0,66287				$\sqrt[3]{e}$	1,395612	0,14476
$4\pi^2$	39,478418	1,59636						

Anmerkungen zu den vorstehenden Tafeln.

Um ln, Num. ln, lg, Num. lg, die Werte der Kreisfunktionen, den Winkel für eine Kreisfunktion, Bogen- und Sehnenlänge für einen gegebenen Winkel oder den Winkel für eine gegebene Bogen- oder Sehnenlänge von Zahlen zu erhalten, die zwischen zwei Tafelwerten liegen, beachte man, dafs für kleine Zunahmen der gegebenen Gröfse die Zunahmen der gesuchten Gröfse den Zunahmen der gegebenen proportional genommen werden dürfen; z. B.:

1) Gesucht ln 289,5.

ln 289 = 5,666 43, ln 290 = 5,669 88; Unterschied = 0,003 45 entsprechend einer Zunahme des Num. um 1,0; Zunahme von ln für 0,1 0,000 345, also für 0,5 0,000 345 · 5 = 0,001 73; mithin ln 289,5 = 5,666 43 + 0,001 73 = 5,668 16.

2) Gesucht tg $58^0\,47'\,22{,}5''$.

$58^0\,47'\,22{,}5'' = 58^0\,47{,}375'$; tg $58^0\,40' = 1{,}64\,256$; tg $58^0\,50' = 1{,}653\,37$; Unterschied = 0,010 81 = Zunahme von tg für 10'; für 1' der 10te Teil, für 7,375' Zunahme (0,010 81 : 10) · 7,375 = 0,007 97. Mithin tg $58^0\,47'\,22{,}5'' = 1{,}650\,53$.

3) Gesucht der Winkel, dessen Sinus gleich 0,636 62 ist (arc sin 0,636 62 = ?).

Der nächst niedrigere Tafelwert ist 0,636 08; arc sin 0,636 08 = $39^0 30'$; der nächst höhere Tafelwert ist 0,638 32 = $39^0 40'$, Unterschied 0,638 32 — 0,636 08 = 0,002 24; dem entsprechen 10'; Unterschied zwischen dem gegebenen Wert und dem nächst niedrigeren Tafelwert ist 0,636 62 — 0,636 08 = 0,000 54. Diesem Unterschied entsprechen dann (10 : 0,002 24) · 0,000 54 = 2,4107'. Mithin ergibt sich

$$\text{arc sin } 0{,}636\,62 = 39^0\,30' + 2{,}4107' = 39^0\,32{,}4107' = 39^0\,32'\,24{,}64''.$$

Für das Aufsuchen der Quadrat- und Kubikwurzeln nicht in der Tafel enthaltener Zahlen wende man die Formeln **b.** 11 und 12 S. 46 an (Näherungsverfahren).

Gesucht die Kreisfläche vom Durchmesser 1,784. Der Halbmesser 0,892 liefert $F_1 = 0{,}624\,913$ (S. 19); mithin ist die gesuchte Fläche $= 4\,F_1 = 4 \cdot 0{,}624\,913 = 2{,}499\,652$.

ln 2,738 = ln 273,8 — ln 100 = 5,612 40 — 4,605 17 = 1,007 23.

ln 2895 = ln 289,5 + ln 10 = 5,668 16 + 2,302 59 = 7,970 75.

Num. ln 1,062 99 = [Num. ln (1,062 99 + ln 100)] : 100
= [Num. ln (1,062 99 + 4,605 17)] : 100
= [Num. ln 5,668 16] : 100 = 289,5 : 100 = 2,895.

Anmerkungen zu den Tafeln der Hyperbelfunktionen (D).

1) Beispiele: Sin 1,34 = 1,7786. Sin 3,37 = 14,5221. Cof 0,65 = 1,2188. Cof 2,66 = 7,1831. lg Sin 4,52 = 11,6619 — 10 = 1,6619. lg Tg 0,17 = 9,2263 — 10.

2) Für Werte von $\varphi > 5{,}09$ ist angenähert: $\text{Sin}\,\varphi = \text{Cof}\,\varphi = {}^1\!/_2\, e^{\varphi}$, u. zw. von $\varphi = 5{,}09$ bis 6,908 auf 1 Dezimale, von $\varphi = 6{,}908$ bis 9,210 auf 2 Dezimalen genau.

3) Für Werte von $\varphi = 2{,}39$ aufwärts nähert sich Tg φ mehr und mehr dem Werte 1.

4) Für kleine Werte von φ ist angenähert:

$$\lg \text{Sin}\,\varphi = \lg \varphi + {}^1\!/_3 \lg \text{Cof}\,\varphi; \qquad \lg \text{Tg}\,\varphi = \lg \varphi - {}^2\!/_3 \lg \text{Cof}\,\varphi.$$

5) Für Werte von $\varphi > 5{,}09$ ist angenähert:

$$\lg \text{Sin}\,\varphi = \lg \text{Cof}\,\varphi = 0{,}434\,29\,\varphi + 0{,}698\,97 - 1 \quad \text{und}$$
$$\varphi = 2{,}302\,59\,(\lg \text{Sin}\,\varphi + 0{,}301\,03),$$

wobei lg 0,434 29 = 0,637 78 — 1 und lg 2,302 59 = 0,362 22.

6) Die Werte von lg Tg φ und lg Ctg φ ergeben sich auch (nach S. 32 u. 33) aus lg Tg φ = lg Sin φ — lg Cof φ (— 10); lg Ctg φ = lg Cof φ — lg Sin φ (+ 10).

7) Die Summe der Tafelwerte von Cof φ und Sin φ für dasselbe φ ergibt den Wert e^{φ}, der Unterschied ergibt $e^{-\varphi}$; also $\text{Cof}\,\varphi \pm \text{Sin}\,\varphi = e^{\pm\varphi}$.

II. ARITHMETIK.

A. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.

a. Potenzen.

1. $(+a)^n = +a^n$
2. $(-a)^{2n} = +a^{2n}$
3. $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$
4. $a^m a^n = a^{m+n}$
5. $a^m : a^n = a^{m-n}$
6. $a^m b^m = (ab)^m$
7. $a^m : b^m = (a:b)^m$
8. $1 : a^m = (1:a)^m = a^{-m}$
9. $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$
10. $a^0 = 1;\ 0^a = 0;\ 0^0 =$ unbestimmt (Vrgl. S. 69.)
11. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
12. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
13. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
14. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
15. $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}$
16. $\frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a+b} = a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \cdots + b^{2n}$
17. $\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a+b} = a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \cdots\cdots - b^{2n-1}$
18. Wenn $a > 1$, so ist für $n = \infty$ $\lim a^n = \infty$ und $\lim \frac{1}{a^n} = 0$.

Binomischer Satz.

19. $$(a \pm b)^n = a^n \pm n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \cdots$$

Die Reihe rechts ist endlich, wenn n eine ganze, positive Zahl; sie ist unendlich, wenn n gebrochen oder negativ ist; sie ist konvergent für $a > b$.

Die Koeffizienten der Potenzen heifsen **Binomialkoeffizienten.** *) Man schreibt kürzer

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p} = \binom{n}{p} \text{ oder } (n)_p.$$

Lesart: n Zeiger p oder: n tief p, oder n über p.

Der Nenner $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . p$ heifst „p **Fakultät**“ $= p!$. Es ist $0! = 1$.

---

*) Tafel der Binomialkoeffizienten s. S. 43.

Regeln über Binomialkoeffizienten.

Wenn n (die Grundzahl) und p (der Zeiger) ganze, positive Zahlen sind, so ist

20. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ 21. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ 22. $\binom{n}{1} = n$

23. $\binom{n}{n+p} = 0$ 24. $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$

25. $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$

26. $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p} + \ldots + \binom{p}{p}$.

Anwendungen des binomischen Satzes.

Für beliebige Werte von n ist, wenn $-1 < x < +1$:

27. $(1 \pm x)^n = 1 \pm \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 \pm \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{4} x^4 \pm \binom{n}{5} x^5 + \ldots$

28. $\frac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + x^6 \mp x^7 + \cdots$

29. $\sqrt{1 \pm x} = (1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 \pm \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} x^5 - \ldots\ldots$

30. $\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \cdots$

b. Wurzeln.

1. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$ 2. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$

3. $\sqrt[m]{a:b} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$ 4. $\sqrt[m]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}} = a^{-\frac{1}{m}}$

5. $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$ 6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

7. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$

8. $\sqrt{a^2} = \pm a$; $\sqrt[2n]{a} = \pm a^{\frac{1}{2n}}$ 9. $\sqrt[2n+1]{-a} = -a^{\frac{1}{2n+1}} = -\sqrt[2n+1]{a}$

10. $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[n]{\sqrt{-a}} = \sqrt[n]{i\sqrt{a}}$, also imaginär; s. S. 47.

11. $\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a}$,
12. $\sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{b}{3a^2}$,

(angenähert, wenn b gegen a sehr klein ist.)

13. $\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}960\,a + 0{,}368\,b$ (angenähert), wenn $a > b$. Der Fehler ist kleiner als 4 vH des wirklichen Wertes.

Genauer ist (nach Schlömilch) $\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}9938\,a + 0{,}0703\,b + 0{,}3567\,\frac{b^2}{a}$.

14. $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 0{,}939\,a + 0{,}389\,b + 0{,}297\,c$ (angenähert), wenn $a > b > c$. Der Fehler ist kleiner als 6 vH des wirklichen Wertes.

Imaginäre Gröfsen.

15. $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $\frac{1}{i} = -i$

16. $i^{4n+m} = i^m$, also $i^{4n} = +1$; $i^{4n+1} = +i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$

17. Jede komplexe Größe, d. i. jeder aus reellen und imaginären Gröfsen zusammengesetzte Ausdruck, läfst sich auf die Form $a \pm bi$ bringen, in der a und b reelle Werte sind.

18. Wenn $a + bi = 0$, so ist $a = 0$, $b = 0$.
Wenn $a + bi = \alpha + \beta i$, so ist $a = \alpha$, $b = \beta$.

19. $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$; $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha^2+\beta^2}\,i$

20. $\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$

21. Jede komplexe Gröfse läfst sich auf die Normalform bringen:
$$a \pm bi = r\,[\cos(\varphi + 2\,k\pi) \pm i \sin(\varphi + 2\,k\pi)];$$
dabei ist $r = +\sqrt{a^2+b^2}$ der Modul, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$,
$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, k eine ganze Zahl.

22. $\cos x + i \sin x = e^{ix}$, $\cos x - i \sin x = e^{-ix}$, wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet (s. S. 48).

23. $1 : (\cos x + i \sin x) = \cos x - i \sin x$

24. $(\cos x \pm i \sin x)(\cos y \pm i \sin y) = \cos(x+y) \pm i \sin(x+y)$

25. $(\cos x \pm i \sin x) : (\cos y \pm i \sin y) = \cos(x-y) \pm i \sin(x-y)$

26. **Moivrescher Satz.** (Gültig für beliebige Werte von n)
$$(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx$$

27. $\sqrt[n]{a+bi} + \sqrt[n]{a-bi} = 2\sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi + 2\,k\pi}{n} = u$

Für $n = 3$ ist $u_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}$, $u_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$,
$u_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$. r, φ und k s. Formel 21.

28. **Wurzeln der Einheit.**
$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\,k\pi}{n} + i \sin\frac{2\,k\pi}{n},$$
$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin\frac{(2k+1)\pi}{n},$$
wo k eine ganze, positive Zahl zwischen 0 und $n-1$ ist.

c. Logarithmen.

1. Ist $\overset{b}{\lg}\, a = c$, so ist $b^c = a$.

Für $b > 1$ ist $\overset{b}{\lg}\, 0 = -\infty$; $\overset{b}{\lg}\, 1 = 0$; $\overset{b}{\lg}\, b = 1$; $\overset{b}{\lg}\, \infty = \infty$

2. $\overset{b}{\lg}\,(ac) = \overset{b}{\lg}\, a + \overset{b}{\lg}\, c$

3. $\overset{b}{\lg}\,\frac{a}{c} = \overset{b}{\lg}\, a - \overset{b}{\lg}\, c$

4. $\overset{b}{\lg}\,(a^n) = n \overset{b}{\lg}\, a$

5. $\overset{b}{\lg}\,\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \overset{b}{\lg}\, a$

6. $\overset{b}{\lg}\, x = \overset{a}{\lg}\, x \cdot \overset{b}{\lg}\, a = \overset{a}{\lg}\, x : \overset{a}{\lg}\, b$.

7. Die Logarithmen für die Grundzahl $e = 2{,}718\,281\,828\,459 \cdots$ heißen natürliche, die für die Grundzahl 10 dagegen Briggssche Logarithmen. Man schreibt statt $\overset{e}{\lg}\, a$ kürzer $\ln a$, statt $\overset{10}{\lg}\, a$ kürzer $\lg a$.

8. Es ist $\lg(10^n) = n$; $\lg(10^{-n}) = -n$; $\lg(a \cdot 10^n) = \lg a + n$; $\lg(a : 10^n) = \lg a - n$. Ferner $\ln(e^{\pm n}) = \pm n$; $\ln(a \cdot 10^n) = \ln a + \ln(10^n)$; $\ln(a : 10^n) = \ln a - \ln(10^n)$.

9. Die (positiven oder negativen) ganzen Einheiten eines Logarithmus nennt man die Charakteristik oder Kennziffer (K) und den echten Dezimalbruch die Mantisse (M) des Logarithmus. Für $10 > a > 1$ hat $\lg a$ die Kennziffer $K = 0$.

10. $$\left.\begin{aligned} \ln x &= \ln 10 \lg x = 2{,}302\,585\,093\,0 \lg x \\ \lg x &= \lg e \ln x = 0{,}434\,294\,481\,9 \ln x \end{aligned}\right\} \ln 10 \lg e = 1$$

11. $\ln i = i\,\frac{\pi}{2}$

12. $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}207\,88$.

B. Kombinationslehre.

1. Die Anzahl der möglichen **Permutationen** von n ungleichen Elementen beträgt $n!$ (n Fakultät.)

Befinden sich unter den n Elementen p gleiche einer Art, q gleiche einer anderen Art, r gleiche einer dritten Art usw., so ist die Anzahl der möglichen Permutationen $P = \frac{n!}{p!\,q!\,r!\ldots}$.

2. Die Anzahl der möglichen **Kombinationen** von n Elementen zur r^{ten} Klasse (d. h. zu je r Elementen) beträgt:

a) $\binom{n}{r}$ ohne Wiederholung, d. h. wenn jede Gruppe dasselbe Element nur einmal enthält,

b) $\binom{n+r-1}{r}$ mit Wiederholung, d. h. wenn jede Gruppe dasselbe Element r mal enthält.

Die Anzahl aller überhaupt möglichen Kombinationen von n ungleichen Elementen ohne Wiederholung ist

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots \binom{n}{n} = 2^n - 1.$$

3. Die Anzahl der möglichen **Variationen** von n Elementen zur r^{ten} Klasse beträgt:

a) $\binom{n}{r} \cdot r!$ ohne Wiederholung (entsprechend wie unter 2a),

b) n^r mit Wiederholung (entsprechend wie unter 2b).

Man erhält die Variationen aus den Kombinationen, indem man die einzelnen Gruppen der letzteren permutiert.

C. Determinanten.

1. Eine Determinante von n Zeilen (wagerechten Reihen) und n Kolonnen (senkrechten Reihen) (n^2 Elementen) heifst vom n^{ten} Grade.

2. Die allgemeine Form der Determinante n^{ten} Grades ist

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 & \dots & p_1 \\ a_2 b_2 c_2 & \dots & p_2 \\ a_3 b_3 c_3 & \dots & p_3 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots & & \vdots \\ a_n b_n c_n & \dots & p_n \end{vmatrix} = \Sigma\,(\pm\, a_1 b_2 c_3 \dots p_n),$$

wenn $a_1, b_1, \dots p_n$ n^2 Elemente bedeuten.

Die Determinante ist eine Summe von $n!$ Gliedern, welche, abgesehen vom Vorzeichen, aus der Diagonalreihe $a_1, b_2, c_3 \cdots p_n$ durch Permutation (s. unter **B.**, S. 48) der Zeiger entstehen. Die so entstehenden $n!$ Glieder sind zur Hälfte positiv und zur Hälfte negativ, u. zw. hat ein bestimmtes Glied das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Zahl der Umkehrungen (Inversionen) unter seinen Zeigern gerade oder ungerade ist.

Folgt in einer Permutation ein niedrigeres Element einem höheren, so bilden diese beiden Elemente eine Umkehrung (Inversion).

3. Eine Determinante vom n^{ten} Grade kann man berechnen, indem man sie in n Unterdeterminanten vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade zerlegt, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1);$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \end{vmatrix}.$$

Die Unterdeterminante zum Element a_p wird erhalten, indem man in der ursprünglichen Determinante die Kolonne a und die p^{te} Zeile streicht. Sie ist mit dem positiven oder negativen Vorzeichen zu versehen, je nachdem der Zeiger ungerade oder gerade ist.

4. In einer Determinante kann man die Zeilen mit den Kolonnen vertauschen, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}.$$

5. Vertauscht man in einer Determinante zwei Zeilen oder zwei Kolonnen miteinander, so ist die neue Determinante gleich der ersten mit entgegengesetztem Vorzeichen.

6. Sind die Elemente zweier Zeilen oder zweier Kolonnen einer Determinante entsprechend gleich oder proportional, so ist die Determinante gleich null, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 a_1 b_1 \\ a_2 a_2 b_2 \\ a_3 a_3 b_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & n a_1 & b_1 \\ a_2 & n a_2 & b_2 \\ a_3 & n a_3 & b_3 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} a_1 a_1 b_1 \\ a_2 a_2 b_2 \\ a_3 a_3 b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Eine Determinante wird mit einer Zahl multipliziert oder durch eine Zahl geteilt, indem man alle Elemente einer Zeile oder einer Kolonne mit der Zahl multipliziert oder durch sie teilt, z. B.

$$p \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p a_1 & p b_1 & p c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p a_1 & b_1 & c_1 \\ p a_2 & b_2 & c_2 \\ p a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

8. Sind die Elemente einer Zeile oder Kolonne Summen von gleicher Gliederzahl, so ist die Determinante gleich der Summe mehrerer Determinanten, welche man aus der ursprünglichen erhält, indem man die einzelnen Teilreihen einsetzt.

$$\begin{vmatrix} a_1 + p_1 + q_1, & b_1 & c_1 \\ a_2 + p_2 + q_2, & b_2 & c_2 \\ a_3 + p_3 + q_3, & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 b_1 c_1 \\ p_2 b_2 c_2 \\ p_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 b_1 c_1 \\ q_2 b_2 c_2 \\ q_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}.$$

9. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man zu den Elementen einer Zeile oder einer Kolonne die mit einer beliebigen Zahl multiplizierten Elemente einer parallelen Zeile oder Kolonne zuzählt, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + p b_1, & b_1 & c_1 \\ a_2 + p b_2, & b_2 & c_2 \\ a_3 + p b_3, & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

D. Gleichungen.

a. Gleichungen ersten Grades.

1. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a_1 x + b_1 y &= c_1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \frac{c b_1 - c_1 b}{a b_1 - a_1 b} \\ y &= \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \frac{a c_1 - a_1 c}{a b_1 - a_1 b} \end{aligned}$$

2. Zwei homogene Gleichungen mit drei Unbekannten.

$$a x + b y + c z = 0$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$

$$x : y : z = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = (b c_1 - b_1 c) : (c a_1 - c_1 a) : (a b_1 - a_1 b).$$

3. Drei Gleichungen mit drei Unbekannten.

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= d \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \end{aligned} \qquad \text{Setzt man} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = D, \text{ so ist}$$

$$x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} : D, \qquad y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix} : D, \qquad z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix} : D.$$

Ueber die arithmetische Bedeutung der Determinanten s. S. 49 u. f.

4. n Gleichungen mit n Unbekannten.

1. **Lösung mittels Determinanten,** entsprechend wie unter **3.**

2. **Eliminationsverfahren.** Man entfernt eine und dieselbe Unbekannte aus den gegebenen n Gleichungen, indem man $(n-1)$ mal je zwei der n Gleichungen vereinigt. Aus den so entstandenen $(n-1)$ neuen Gleichungen eliminiert man in gleicher Weise eine zweite Unbekannte usw., bis eine Gleichung mit einer (der n^{ten}) Unbekannten übrig bleibt, aus der sich diese n^{te} Unbekannte ergibt. Durch Einsetzen des gefundenen Wertes in eine der beiden Gleichungen mit zwei Unbekannten erhält man die $(n-1)^{\text{te}}$ Unbekannte usw., so dafs sich der Reihe nach auch die übrigen Unbekannten ergeben.

Beispiel:

	Faktoren.		
$2x - y + 3z + 5u = 29$	3	1	2
$5x + 2y - 2z + 3u = 15$	−5		
$3x - 4y + 7z - u = 12$		5	
$4x + 3y - 5z + 2u = 3$			−5
$-19x - 13y + 19z = 12$	−2	−31	
$17x - 21y + 38z = 89$	1		
$-16x - 17y + 31z = 43$		19	
$55x + 5y = 65$	16		
$285x + 80y = 445$	−1		

$595\,x = 595;$ $\qquad x = 1.$

$5\,y = 65 - 55\,x = 65 - 55 = 10;$ $\qquad y = 2.$

$19\,z = 12 + 19\,x + 13\,y = 12 + 19 + 26 = 57;$ $\qquad z = 3.$

$2\,u = 3 - 4\,x - 3\,y + 5\,z = 3 - 4 - 6 + 15 = 8;$ $\qquad u = 4.$

b. Gleichungen zweiten Grades.

1. Algebraische Auflösung.

1. $x^2 + px + q = 0 \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

2. Ist $x_1 + x_2 = s$, $x_1 x_2 = p$, so sind x_1 und x_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - sx + p = 0.$$

2. Goniometrische Auflösung. (Zur Anwendung ununterbrochener logarithmischer Rechnung bei vielstelligen Zahlen.)

1. Fall. $\quad x^2 \pm px - q = 0 \qquad p$ und q positiv.

Man bestimme einen Winkel φ zwischen 0° und 90° so, daſs $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{q}}{{}^1/_2\, p}$; dann sind die Wurzeln

$$x_1 = \pm \sqrt{q}\,\operatorname{tg} {}^1/_2\,\varphi, \qquad x_2 = \mp \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg} {}^1/_2\,\varphi}.$$

2. Fall. $x^2 \pm px + q = 0$ p und q positiv.

Nach Berechnung des im ersten Quadranten liegenden Winkels φ aus $\sin\varphi = \frac{\sqrt{q}}{{}^1/_2\, p}$ bestimmt man die Wurzeln mittels der Formeln

$$x_1 = \mp \sqrt{q}\,\operatorname{tg} {}^1/_2\,\varphi, \qquad x_2 = \mp \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg} {}^1/_2\,\varphi}.$$

Findet sich $\sin\varphi > 1$, so sind die Wurzeln imaginär, nämlich

$$x = \sqrt{q}\,(\cos\psi \pm i \sin\psi),$$

worin $$\cos\psi = \mp \frac{{}^1/_2\, p}{\sqrt{q}} \qquad (\psi \text{ zwischen } 0^0 \text{ und } 180^0).$$

c. Gleichungen dritten Grades.

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0.$$

Setzt man $$z = x - {}^1/_3\, a,$$

so entsteht eine reduzierte kubische Gleichung von der Form

$$x^3 + px + q = 0.$$

1. Algebraische Auflösung. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

sind nach der Cardanischen Formel

$$x_1 = \sqrt[3]{-{}^1/_2\, q + \sqrt{({}^1/_2\, q)^2 + ({}^1/_3\, p)^3}} + \sqrt[3]{-{}^1/_2\, q - \sqrt{({}^1/_2\, q)^2 + ({}^1/_3\, p)^3}},$$

$$x_2 = w_1\sqrt[3]{-{}^1/_2\, q + \sqrt{({}^1/_2\, q)^2 + ({}^1/_3\, p)^3}} + w_2\sqrt[3]{-{}^1/_2\, q - \sqrt{({}^1/_2\, q)^2 + ({}^1/_3\, p)^3}},$$

$$x_3 = w_2\sqrt[3]{-{}^1/_2\, q + \sqrt{({}^1/_2\, q)^2 + ({}^1/_3\, p)^3}} + w_1\sqrt[3]{-{}^1/_2\, q - \sqrt{({}^1/_2\, q)^2 + ({}^1/_3\, p)^3}},$$

worin w_1 und w_2 die beiden imaginären Wurzeln von $\sqrt[3]{1}$ bezeichnen, nämlich

$$w_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad w_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Ist $({}^1/_2\, q)^2 + ({}^1/_3\, p)^3 < 0$, so erscheinen alle drei Wurzeln in imaginärer Form, obgleich sie reell sind. Es ist dann die goniometrische Auflösung anzuwenden (s. S. 53, 3. Fall).

2. Auflösung mittels Kreis- und Hyperbelfunktionen.

1. Fall. $x^3 + px \pm q = 0$; p und q positiv. Man berechnet die Hülfsgröſse φ aus $\operatorname{Sin}\varphi = \frac{{}^1/_2\, q}{{}^1/_3\, p\sqrt{{}^1/_3\, p}}$; die Wurzeln sind dann

$$x_1 = \mp 2\sqrt{{}^1/_3\, p}\,\operatorname{Sin} {}^1/_3\,\varphi, \quad x_2 = \pm \sqrt{{}^1/_3\, p}\,\operatorname{Sin} {}^1/_3\,\varphi + i\sqrt{p}\,\operatorname{Cof} {}^1/_3\,\varphi,$$

$$x_3 = \pm \sqrt{{}^1/_3\, p}\,\operatorname{Sin} {}^1/_3\,\varphi - i\sqrt{p}\,\operatorname{Cof} {}^1/_3\,\varphi.$$

2. Fall. $x^3 - px \pm q = 0$; p und q positiv, $(\frac{1}{3}p)^3 < (\frac{1}{2}q)^2$.

Man bestimmt φ aus $\mathfrak{Cof}\,\varphi = \frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}}$; die Wurzeln sind dann

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\,\mathfrak{Cof}\,\tfrac{1}{3}\varphi, \qquad x_2 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\,\mathfrak{Cof}\,\tfrac{1}{3}\varphi + i\sqrt{p}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}\varphi,$$
$$x_3 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\,\mathfrak{Cof}\,\tfrac{1}{3}\varphi - i\sqrt{p}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}\varphi.$$

3. Fall. $x^3 - px \pm q = 0$; p und q positiv; $(\frac{1}{3}p)^3 > (\frac{1}{2}q)^2$.

Man bestimmt den Winkel φ aus $\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}}$; dann ist

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\tfrac{1}{3}\varphi, \qquad x_2 = \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos(60^\circ - \tfrac{1}{3}\varphi),$$
$$x_3 = \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos(60^\circ + \tfrac{1}{3}\varphi).$$

4. Fall. $x^3 - px \pm q = 0$; p und q positiv; $(\frac{1}{3}p)^3 = (\frac{1}{2}q)^2$.

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}, \qquad x_2 = x_3 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}.$$

d. Höhere algebraische und transzendente Gleichungen.

Man bestimme durch Versuche oder Zeichnung Näherungswerte für die Wurzeln; genügt deren Genauigkeit nicht, so kann sie durch eines der Annäherungsverfahren erhöht werden.

1. Bestimmung von Näherungswerten.

α) Durch Versuche.

Wird $y = f(x)$ für $x = p$ positiv und für $x = q$ negativ, so liegt eine ungerade Anzahl von Wurzeln, also mindestens eine zwischen p und q.

β) Durch Zeichnung.

Ist $f(x) = 0$ die aufzulösende Gleichung, so zeichnet man (etwa mittels Berechnung der Koordinaten einiger Punkte) die Kurve zur Gleichung $y = f(x)$; die Abszissen ihrer Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Wurzeln der Gleichung. Oft ist es besser, der aufzulösenden Gleichung die Form $f_1(x) = f_2(x)$ zu geben und die beiden Kurven

$$y = f_1(x), \qquad y = f_2(x)$$

zu zeichnen, deren gegenseitige Schnittpunkte durch ihre Abszissen die gesuchten Wurzeln liefern.

2. Annäherungsverfahren.

Ist a ein Näherungswert einer Wurzel von $f(x) = 0$, so berechnet man die Verbesserung δ aus

$$\delta = -f(a)\frac{a_1 - a}{f(a_1) - f(a)},$$

wo a_1 einen von a wenig verschiedenen Wert bezeichnet; oder nach dem **Newtonschen Verfahren** aus

$$\delta = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

unter $f'(a)$ die erste nach a genommene Ableitung von $f(a)$ verstanden, oder nach dem **Verfahren der Proportionalteile** aus

$$\delta = -\frac{f(a)}{P},$$

wo P (Proportionalteil) die in Einheiten irgend einer Dezimale ausgedrückte Aenderung von $f(a)$ bei der Zunahme von a um eine Einheit jener Dezimale bedeutet.*) Ist der angenäherte Wert $(a + \delta)$ noch nicht genau genug, so berechnet man eine neue Annäherung, indem man in die vorstehenden Formeln $(a + \delta)$ statt a einsetzt, usw.

E. Zinseszins- und Rentenrechnung.

1. Der Wert K_n eines Kapitals K nach n Jahren beträgt bei einem Zinsfuſse von k Prozent:

a) bei **jährlichen** Zinseszinsen

$$K_n = Kp^n,$$

worin

$$p = 1 + \frac{k}{100} = \frac{100 + k}{100}$$

der jährliche Diskontfaktor genannt wird;

b) bei **halbjährlichen** Zinseszinsen

$$K_n = Kq^{2n},$$

worin

$$q = 1 + \frac{k}{2 \cdot 100} = \frac{200 + k}{200}$$

der halbjährliche Diskontfaktor genannt wird;

c) bei **stetigen** Zinseszinsen (wobei die Zinsen in jedem Augenblicke zum Kapital geschlagen werden)

$$K_n = Ke^{\frac{kn}{100}}; \quad (e \text{ s. S. } 43).$$

*) Bei der Berechnung von $f(a)$ mittels Logarithmen- oder anderer Tafeln ergibt sich P nebenher, vrgl. Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 36 S. 158 f.

Für **jährliche** Zinseszinsen gelten ferner folgende Regeln:

2. Legt man am Anfange jedes Jahres eine Summe R zurück, so ist der Wert des Zurückgelegten am Ende des n^{ten} Jahres einschliefslich der alsdann fälligen Zinsen

$$K_n = R \frac{p(p^n - 1)}{p - 1}.$$

3. Legt man am Ende jedes Jahres die Summe R zurück, so ist der Wert des Zurückgelegten am Ende des n^{ten} Jahres

$$K_n = R \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

Die jährliche **Abschreibungssumme** eines nach n Jahren erlöschenden Wertes (z. B. eines Konzessionsrechtes) beträgt mithin in Prozenten:

$$100 \frac{R}{K_n} = 100 \frac{p - 1}{p^n - 1}.$$

Abschreibungssumme.

Zinsfuſs k vH	Der Wert erlischt in Jahren: 5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	60	70	75	80	90	100
3,0	18,836	8,723	5,376	3,722	2,742	2,101	1,653	1,326	1,078	0,886	0,613	0,433	0,367	0,311	0,225	0,164
3,25	18,741	8,623	5,278	3,627	2,653	2,018	1,575	1,252	1,010	0,823	0,558	0,387	0,324	0,272	0,193	0,138
3,5	18,648	8,524	5,183	3,536	2,567	1,937	1,499	1,183	0,945	0,763	0,508	0,346	0,286	0,238	0,166	0,115
3,75	18,555	8,426	5,087	3,446	2,483	1,858	1,427	1,115	0,884	0,707	0,462	0,308	0,253	0,208	0,141	0,096
4,0	18,462	8,329	4,993	3,358	2,401	1,783	1,357	1,052	0,826	0,655	0,420	0,274	0,222	0,181	0,120	0,081
4,25	18,370	8,233	4,902	3,272	2,321	1,709	1,290	0,991	0,771	0,606	0,381	0,243	0,196	0,157	0,102	0,067
4,5	18,279	8,137	4,811	3,187	2,243	1,639	1,227	0,934	0,720	0,560	0,345	0,216	0,172	0,137	0,087	0,055
5,0	18,097	7,950	4,634	3,024	2,095	1,505	1,107	0,827	0,626	0,477	0,282	0,169	0,132	0,102	0,062	0,038
5,5	17,917	7,766	4,462	2,868	1,954	1,380	0,997	0,732	0,543	0,406	0,230	0,132	0,101	0,076	0,044	0,026
6,0	17,739	7,586	4,296	2,718	1,822	1,264	0,897	0,646	0,470	0,344	0,187	0,103	0,076	0,057	0,031	0,017

4. Wird das Kapital K am Ende jedes Jahres um die gleiche Summe R vermehrt oder vermindert, so beträgt sein Wert nach n Jahren

$$K_n = Kp^n \pm R \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

5. Das Kapital K wird unter denselben Bedingungen einem anderen Kapital K_1 gleich geworden sein nach

$$n = \frac{\lg [(p-1) K_1 \pm R] - \lg [(p-1) K \pm R]}{\lg p} \text{ Jahren.}$$

6. Wenn die jährlich fortgenommene Summe R (Rente) gröfser ist als die jährlichen Zinsen des Kapitals K, wird das Kapital aufgezehrt sein nach

$$n = \frac{\lg R - \lg [R - (p-1) K]}{\lg p} \text{ Jahren.}$$

7. Soll eine Rente R für die folgenden n Jahre gekauft werden, so hat man dafür heute ein Kapital zu zahlen

$$K = R \frac{p^n - 1}{p^n (p - 1)} \mathcal{M}.$$

8. Die Rente, die ein Kapital K für den Zeitraum von n Jahren abzuwerfen vermag, beträgt

$$R = \frac{K p^n (p - 1)}{p^n - 1} \mathcal{M}.$$

F. Reihen.

Binomische Reihen s. S. 45 und 46.

a. Arithmetische Reihen.

Für die arithmetische Reihe $a, a + d, a + 2d, \ldots a + (n - 1) d$ ist das n^{te} Glied

$$u = a + (n - 1) d$$

und die Summe der n ersten Glieder

$$S = \tfrac{1}{2} (a + u) n = [a + \tfrac{1}{2} (n - 1) d] n.$$

Höhere arithmetische Reihen.

Ist $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$ eine höhere arithmetische Reihe,
$\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3, \ldots \Delta a_{n-1}$ ihre erste,
$\Delta_2 a_1, \Delta_2 a_2, \ldots \Delta_2 a_{n-2}$ ihre zweite Differenzenreihe usw.,
ist also $\Delta a_1 = a_2 - a_1$, $\Delta a_2 = a_3 - a_2$, $\Delta_2 a_1 = \Delta a_2 - \Delta a_1$ usw., so ist das n^{te} Glied der Hauptreihe

$$a_n = a_1 + (n - 1) \Delta a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta_2 a_1 + \binom{n-1}{3} \Delta_3 a_1 + \cdots$$

und die Summe der n ersten Glieder

$$\Sigma a_n = n a_1 + \binom{n}{2} \Delta a_1 + \binom{n}{3} \Delta_2 a_1 + \binom{n}{4} \Delta_3 a_1 + \cdots$$

(Ueber Binomialkoeffizienten s. S. 43 und 45.)

Ist eine höhere arithmetische Reihe von der k^{ten} Ordnung, so schliefst sowohl die Formel a_n als auch für Σa_n mit dem Gliede ab, welches $\Delta_k a_1$ enthält.

Eine Reihe von n Gliedern kann höchstens von der $(n - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung sein, in welchem Falle vorstehende Formeln mit dem Gliede $\Delta_{n-1} a_1$ schliefsen.

b. Geometrische Reihen.

Für die geometrische Reihe $a, aq, aq^2, \ldots aq^{n-1}$ ist das n^{te} Glied

$$u = a q^{n-1}$$

und die Summe der n ersten Glieder

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{qu - a}{q - 1}.$$

Ist $n = \infty$ und q ein positiver oder negativer echter Bruch, so wird

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

c. Einige besondere Reihen.

1. $1+2+3+4+5+6+7+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$

2. $p+(p+1)+(p+2)+\cdots+(q-1)+q=\frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$

3. $2+4+6+8+10+12+14+\cdots+(2n-2)+2n=n(n+1)$

4. $1+3+5+7+9+11+13+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$

5. $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$

6. $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

7. $1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4+n^4=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

d. Exponential- und logarithmische Reihen.

1. $e=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ (Wert von e s. S. 43).

2. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\,;\quad -\infty<x<+\infty$

3. $a^x=1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{(\ln a)^2}{2!}x^2+\frac{(\ln a)^3}{3!}x^3+\cdots;-\infty<x<+\infty$

4. $\ln(1\pm x)=\pm x-\frac{x^2}{2}\pm\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\pm\frac{x^5}{5}-\cdots;\quad -1<x<+1$

5. $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\cdots\right);\quad -1<x<+1$

6. $\ln\frac{x+1}{x-1}=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\cdots\right);\ -1>x$ oder $x>+1$

7. $\ln x=2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7+\cdots\right]$,
wobei $0<x<+\infty$

8. $\ln(a+x)=\ln a+2\left[\frac{x}{2a+x}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5+\cdots\right]$,
wobei $0<a<+\infty$ und $-a<x<+\infty$.

e. Reihen für die Kreisfunktionen und ihre Umkehrungen.

In den Formeln 1. bis 4. ist $x=\frac{\pi\varphi}{180}$, wenn φ der Zentriwinkel in Grad ist.

1. $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots;-\infty<x<+\infty$

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots; \quad -\infty < x < +\infty$

3. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3 \cdot 5} + \frac{17x^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{62x^9}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots; -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$

4. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2 \cdot 5} - \frac{2x^5}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{x^7}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} - \cdots; -\pi < x < +\pi$

5. $\operatorname{arc} \sin x = x + \frac{1\, x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3\, x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5\, x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots; \quad -1 \leqq x \leqq +1$

6. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots; \qquad -1 \leqq x \leqq +1$

7. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots.$

III. KREIS- UND HYPERBELFUNKTIONEN.

A. Kreisfunktionen.

(Tafeln der Kreisfunktionen s. S. 26 bis 29.)

Grad	0	90	180	270	360	30	45	60
sin =	0	+1	0	−1	0	$1/2$	$1/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{3}$
cos =	+1	0	−1	0	+1	$1/2\sqrt{3}$	$1/2\sqrt{2}$	$1/2$
tg =	0	∞	0	∞	0	$1/3\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg =	∞	0	∞	0	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/3\sqrt{3}$

Ist α ein Winkel $< 90^0$, so ist, vorausgesetzt dafs:

Funktion	Winkel φ liegt zwischen				Winkel φ in Grad =			
	0^0 u. 90^0	90^0 u. 180^0	180^0 u. 270^0	270^0 u. 360^0	$\pm\alpha$	$90 \pm \alpha$	$180 \pm \alpha$	$270 \pm \alpha$
$\sin\varphi =$	+	+	−	−	$\pm \sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\varphi =$	+	−	−	+	$+\cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm \sin\alpha$
$\operatorname{tg}\varphi =$	+	−	+	−	$\pm \operatorname{tg}\alpha$	$\mp \operatorname{ctg}\alpha$	$\pm \operatorname{tg}\alpha$	$\mp \operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\varphi =$	+	−	+	−	$\pm \operatorname{ctg}\alpha$	$\mp \operatorname{tg}\alpha$	$\pm \operatorname{ctg}\alpha$	$\mp \operatorname{tg}\alpha$

$\sin(45^0 \pm \alpha) = \cos(45^0 \mp \alpha)$; $\quad \operatorname{tg}(45^0 \pm \alpha) = \operatorname{ctg}(45^0 \mp \alpha)$.

a. Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 3. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

4. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ 5. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

6. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$

7. $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$

b. Beziehungen zwischen den Funktionen zweier Winkel.

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = [\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta] : [1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta]$
4. $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = [\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1] : [\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha]$

5. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)$
6. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)\sin{}^1/_2(\alpha-\beta)$
7. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)$
8. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\sin{}^1/_2(\alpha-\beta)$
9. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ 10. $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

11. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$
12. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

13. $\sin\alpha\sin\beta = {}^1/_2\cos(\alpha-\beta) - {}^1/_2\cos(\alpha+\beta)$
14. $\cos\alpha\cos\beta = {}^1/_2\cos(\alpha-\beta) + {}^1/_2\cos(\alpha+\beta)$
15. $\sin\alpha\cos\beta = {}^1/_2\sin(\alpha+\beta) + {}^1/_2\sin(\alpha-\beta)$
16. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$
17. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$

c. Formeln für die Vielfachen und Teile eines Winkels.

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\sin\alpha = 2\sin{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\alpha$
2. $\sin n\alpha = n\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5}\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \ldots$
3. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

4. $\cos n\alpha = \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \sin^2\alpha \cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4} \sin^4\alpha \cos^{n-4}\alpha - \ldots$

5. $\sin {}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = {}^1/_2\sqrt{1+\sin\alpha} - {}^1/_2\sqrt{1-\sin\alpha}$

6. $\cos {}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = {}^1/_2\sqrt{1+\sin\alpha} + {}^1/_2\sqrt{1-\sin\alpha}$

7. $\operatorname{tg} {}^1/_2\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

8. $\operatorname{ctg.} {}^1/_2\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

9. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}{}^1/_2\,\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 {}^1/_2\,\alpha}$

10. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = {}^1/_2 \operatorname{ctg}\alpha - {}^1/_2 \operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 {}^1/_2\,\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}{}^1/_2\,\alpha}$

11. $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\qquad$ 12. $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$

13. $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}{}^1/_2\,\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 {}^1/_2\,\alpha}$ $\qquad$ 14. $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2 {}^1/_2\,\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 {}^1/_2\,\alpha}$

15. $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \pm\sqrt{1 \pm \sin 2\alpha} = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm {}^1/_4\,\pi)$

d. Potenzen von Sinus und Cosinus.

1. $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ $\qquad$ 2. $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

3. $4\sin^3\alpha = -\sin 3\alpha + 3\sin\alpha$ $\qquad$ 4. $4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$

5. Wenn n eine ungerade Zahl:

$$\sin^n\alpha = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1}\left[\sin n\alpha - \binom{n}{1}\sin(n-2)\alpha + \binom{n}{2}\sin(n-4)\alpha - \binom{n}{3}\sin(n-6)\alpha + \ldots + (-1)^{\frac{n-3}{2}}\binom{n}{\frac{n-3}{2}}\sin 3\alpha + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\sin\alpha\right]$$

6. Wenn n eine gerade Zahl:

$$\sin^n\alpha = \frac{1}{2^{n-1}i^n}\left[\cos n\alpha - \binom{n}{1}\cos(n-2)\alpha + \binom{n}{2}\cos(n-4)\alpha - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-4}{2}}\binom{n}{\frac{n-4}{2}}\cos 4\alpha + (-1)^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{\frac{n-2}{n}}\cos 2\alpha\right] + (-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2^n i^n}\right)$$

7. Wenn n eine ungerade Zahl:

$$\cos^n \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[\cos n\alpha + \binom{n}{1} \cos(n-2)\alpha + \binom{n}{2} \cos(n-4)\alpha + \binom{n}{3} \cos(n-6)\alpha + \ldots + \binom{n}{\frac{n-3}{2}} \cos 3\alpha + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \cos \alpha\right]$$

8. Wenn n eine gerade Zahl:

$$\cos^n \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[\cos n\alpha + \binom{n}{1} \cos(n-2)\alpha + \binom{n}{2} \cos(n-4)\alpha + \ldots\ldots + \binom{n}{\frac{n-4}{2}} \cos 4\alpha + \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \cos 2\alpha\right] + \binom{n}{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(Ueber Binomialkoeffizienten s. S. 43 u. 45; über i s. S. 47.)

e. Formeln für die Arcus der verschiedenen Funktionen.

1. $\operatorname{arc} \sin u = \operatorname{arc} \cos \sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \cos u$

2. $\operatorname{arc} \cos u = \operatorname{arc} \sin \sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin u$

3. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} u = \operatorname{arc} \sin \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1}{u}$
$= {}^1/_2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2u}{1-u^2} = {}^1/_2 \operatorname{arc} \sin \frac{2u}{1+u^2} = {}^1/_2 \operatorname{arc} \cos \frac{1-u^2}{1+u^2}$

4. $\operatorname{arc} \sin u \pm \operatorname{arc} \sin v = \operatorname{arc} \sin \left(u\sqrt{1-v^2} \pm v\sqrt{1-u^2}\right)$
$= \operatorname{arc} \cos \left(\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} \mp uv\right)$

5. $\operatorname{arc} \cos u \pm \operatorname{arc} \cos v = \operatorname{arc} \sin \left(v\sqrt{1-u^2} \pm u\sqrt{1-v^2}\right)$
$= \operatorname{arc} \cos \left(uv \mp \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}\right)$

6. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} u \pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} v = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u \pm v}{1 \mp uv}$

(Weiteres s. u. **c.**, S. 66.)

f. Beziehungen zwischen den drei Winkeln $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

1. $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos {}^1/_2 \alpha \cos {}^1/_2 \beta \cos {}^1/_2 \gamma$
2. $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin {}^1/_2 \alpha \sin {}^1/_2 \beta \sin {}^1/_2 \gamma + 1$
3. $\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin {}^1/_2 \alpha \sin {}^1/_2 \beta \cos {}^1/_2 \gamma$
4. $\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = 4 \cos {}^1/_2 \alpha \cos {}^1/_2 \beta \sin {}^1/_2 \gamma - 1$
5. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 2$
6. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$
7. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$

8. $\operatorname{ctg} {}^1/_2 \alpha + \operatorname{ctg} {}^1/_2 \beta + \operatorname{ctg} {}^1/_2 \gamma = \operatorname{ctg} {}^1/_2 \alpha \operatorname{ctg} {}^1/_2 \beta \operatorname{ctg} {}^1/_2 \gamma$

9. $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma = 1$

10. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

11. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$

B. Ebene Dreiecke.

Formeln für den Flächeninhalt des Dreiecks s. S. 125.

Es seien a, b, c die Seiten des Dreiecks,
α, β, γ die den Seiten gegenüberliegenden Winkel,
ϱ der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises,
r der Halbmesser des umschriebenen Kreises,
$s = {}^1/_2 (a + b + c)$ die halbe Summe der Seiten.

(Da $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, so gelten auch die vorstehenden Formeln 1 bis 11 unter S. 61 f.)

a. Allgemeine Formeln.

1. $\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma} = 2r$

2. $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$; $b = c \cos \alpha + a \cos \gamma$; $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$.

3. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
$= (b + c)^2 - 4bc \cos^2 {}^1/_2 \alpha$
$= (b - c)^2 + 4bc \sin^2 {}^1/_2 \alpha$

4. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}$

5. $\sin \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s - b)(s - c)}{bc}}$

6. $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s - a)}{bc}}$

7. $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}} = \dfrac{\varrho}{s - a}$ $\qquad \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\varrho}{s - b}$

8. $(a + b) : c = \cos {}^1/_2 (\alpha - \beta) : \cos {}^1/_2 (\alpha + \beta)$

9. $(a - b) : c = \sin {}^1/_2 (\alpha - \beta) : \sin {}^1/_2 (\alpha + \beta)$

10. $(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg} {}^1/_2 (\alpha + \beta) : \operatorname{tg} {}^1/_2 (\alpha - \beta)$

11. $\varrho = 4r \sin \dfrac{\alpha}{2} \sin \dfrac{\beta}{2} \sin \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{abc}{4rs} = \sqrt{\dfrac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}}$

12. Die nach c gehende Winkelhalbierende ist

$$w = \frac{2\sqrt{abs(s - c)}}{a + b} = \frac{\sqrt{ab[(a + b)^2 - c^2]}}{a + b}.$$

13. Die nach c gehende Mittellinie ist

$$m = {}^1/_2 \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

b. Schiefwinklige Dreiecke.

gegeben	gesucht	Formeln
$a, b, c,$	α	$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; oder S. 62 **B. a.** Formel 5, 6 oder 7; Formel 5 für kleine Winkel, 6 für Winkel nahe 90°.
a, b, α	β	$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$
	γ	$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$
	c	$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2\alpha}$
		Für $a > b$ ist $\beta < 90^0$ und $\beta < \alpha$.
		Für $b > a > b \sin\alpha$ ist für das eine der Dreiecke mit den gegebenen Elementen $\alpha < \beta < 90^0$; für das andere Dreieck ist $\beta > 90^0$.
		Für $b \sin\alpha > a$ gibt es kein Dreieck, dem die gegebenen Elemente zukommen.
a, α, β	b, c	$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$ $\quad c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}$
a, b, γ	α, β	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a \sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$ $\quad \beta = 180^0 - (\alpha + \gamma)$
		oder $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$ und
		$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\gamma.$
		$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}$; $\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}.$
	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$
		$= \frac{a - b}{\cos\varphi}$, wo $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{ab}\sin\frac{1}{2}\gamma}{a - b}.$

c. Rechtwinklige Dreiecke.

a und b Katheten, c Hypotenuse, α der Winkel, der a gegenüberliegt.

1. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ 2. $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad$ 3. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\qquad$ 4. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

5. $a^2 + b^2 = c^2$.

C. Kugeldreiecke.

Formel für den Flächeninhalt des Kugeldreiecks s. S. 132.

Es seien a, b, c die Seiten des Dreiecks,
α, β, γ die den Seiten gegenüberliegenden Winkel.

$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$,
$\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$,
$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^0$ der sogen. sphärische Exzeſs.

a. Allgemeine Formeln.

1. $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$
2. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$
3. $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$
4. $\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos \gamma + \sin c \cos \alpha$
   $\operatorname{ctg} a \sin b = \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha + \cos \gamma \cos b$
5. $\cos \alpha \sin \beta = \sin \gamma \cos a - \sin \alpha \cos \beta \cos c$
   $\operatorname{ctg} \alpha \sin \beta = \sin c \operatorname{ctg} a - \cos c \cos \beta$
6. $\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos(\sigma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}}$; $\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma - \beta)\cos(\sigma - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}$
7. $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s - b)\sin(s - c)}{\sin b \sin c}}$; $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s - a)}{\sin b \sin c}}$
8. $\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \frac{1}{2} b + \cos \gamma}{\sin \gamma}$
9. $\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} s \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - c)}$

b. Nepersche Analogien.

1. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tg} \frac{c}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tg} \frac{c}{2}$
2. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$

c. Gauſssche Formeln.

1. $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2} \gamma$
2. $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2} \gamma$
3. $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2} c = \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2} \gamma$
4. $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2} c = \sin \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2} \gamma$

d. Rechtwinklige Kugeldreiecke.

Wenn c die Hypotenuse, also $\gamma = 90^0$ ist, gelten folgende Formeln:

1. $\cos c = \cos a \cos b = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$
2. $\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$ 3. $\cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$
4. $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$ 5. $\cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$ 6. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$

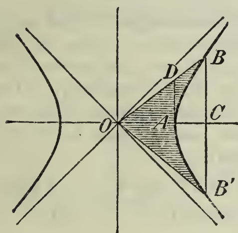
D. Hyperbelfunktionen.*)

(Tafel der Hyperbelfunktionen s. S. 30 bis 34.)

a. Grundformeln.

1. Die Hyperbelfunktionen stehen in ähnlicher Beziehung zur gleichseitigen Hyperbel, wie die Kreisfunktionen zum Kreise. Es bezeichne (s. Abb. 1) O den Mittelpunkt, A den einen Scheitel einer gleichseitigen Hyperbel (vrgl. S. 101), deren reelle Halbachse $OA = 1$ ist, B einen beliebigen Punkt der Kurve; ferner sei $BB' \perp OA$, C der Schnittpunkt von BB' mit OA, D der Schnittpunkt des Leitstrahles OB mit der Scheiteltangente AD. Man faſst die Strecken BC, OC und DA als Funktionen der gestrichelten Hyperbelfläche $OBAB'O$ auf und schreibt

Abb. 1.



$$BC = \mathfrak{Sin}\,\varphi,$$
$$OC = \mathfrak{Cof}\,\varphi,$$
$$DA = \mathfrak{Tg}\,\varphi \text{**)},$$

wenn φ gleich der Fläche $OBAB'O$ ist.

Ferner bezeichnet man $\dfrac{1}{\mathfrak{Tg}\,\varphi}$ mit $\mathfrak{Ctg}\,\varphi$.

2. Es ist $\mathfrak{Sin}\,\varphi = \dfrac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$ $\qquad \mathfrak{Cof}\,\varphi = \dfrac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$

$$\mathfrak{Tg}\,\varphi = \frac{\mathfrak{Sin}\,\varphi}{\mathfrak{Cof}\,\varphi} = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}; \quad \mathfrak{Ctg}\,\varphi = \frac{\mathfrak{Cof}\,\varphi}{\mathfrak{Sin}\,\varphi} = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}$$

$$\mathfrak{Cof}\,\varphi + \mathfrak{Sin}\,\varphi = e^{\varphi}; \quad \mathfrak{Cof}\,\varphi - \mathfrak{Sin}\,\varphi = e^{-\varphi}; \quad \mathfrak{Cof}^2\varphi - \mathfrak{Sin}^2\varphi = 1.$$

(e s. S. 43.)

3. Die Hyperbelfunktionen sind, wie die Kreisfunktionen, periodisch, jedoch ist die Periode imaginär, u. zw. bei den Funktionen $\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Cof}$ gleich $2i\pi$, bei den Funktionen $\mathfrak{Tg}$ und $\mathfrak{Ctg}$ gleich $i\pi$. Für reelle Werte der Veränderlichen φ ist

$$\mathfrak{Cof}\,\varphi \geqq 1; \qquad -1 \lesseqgtr \mathfrak{Tg}\,\varphi \lesseqgtr +1; \qquad \mathfrak{Ctg}^2\varphi \geqq 1,$$

während $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ jeden (positiven oder negativen) Zahlenwert annehmen kann.

4. Es ist $\mathfrak{Sin}(-\varphi) = -\mathfrak{Sin}\,\varphi$; $\quad \mathfrak{Cof}(-\varphi) = +\mathfrak{Cof}\,\varphi$;
$\mathfrak{Tg}(-\varphi) = -\mathfrak{Tg}\,\varphi$; $\quad \mathfrak{Ctg}(-\varphi) = -\mathfrak{Ctg}\,\varphi$.

---

*) Eine ausführliche Sammlung von Formeln und Tafeln findet sich in Ligowski Tafeln der Hyperbelfunktionen usw., Berlin 1890, Wilhelm Ernst & Sohn.

**) Eine andere Schreibweise ist:

sin h φ (= sinus hyperbolicus φ), cos h φ, tg h φ.

5. Ist $\mathfrak{Sin}\,\varphi = u$, so schreibt man $\varphi = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,u$, d. h., $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,u$ bedeutet diejenige Hyperbelfläche, deren $\mathfrak{Sin}$ gleich u ist. Entsprechende Bedeutung haben $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,u$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,u$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,u$*). Man hat

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,u = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right); \qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}$$

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,u = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right); \qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,u = \frac{1}{2}\ln\frac{u+1}{u-1}.$$

b. Eigenschaften der Hyperbelfunktionen.

Die für die Kreisfunktionen und ihre Umkehrungen (S. 58 u. f., auch im Folgenden unter IV.) gegebenen Beziehungen gelten in der Form auch für die entsprechenden Hyperbelfunktionen und deren Umkehrungen, jedoch u. Umst. mit Abänderung der Vorzeichen. Man erhält nämlich aus einer Beziehung der Kreisfunktionen die entsprechende Beziehung der Hyperbelfunktionen, indem man in erstere $\alpha = ix$, $\beta = iy$ setzt, darauf die Gleichungen

$$\sin ix = i\,\mathfrak{Sin}\,x, \quad \cos ix = \mathfrak{Cof}\,x, \quad \operatorname{tg} ix = i\,\mathfrak{Tg}\,x, \quad \operatorname{ctg} ix = -i\,\mathfrak{Ctg}\,x$$

anwendet und, falls erforderlich, beiderseits durch i, i^2 .... teilt.

Beispiele:

1. Nach S. 59 **b. 11.** ist $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.
Für $\alpha = ix$, $\beta = iy$ wird $\sin^2 ix - \sin^2 iy = \sin i(x+y)\sin i(x-y)$
oder $i^2\,\mathfrak{Sin}^2 x - i^2\,\mathfrak{Sin}^2 y = i\,\mathfrak{Sin}(x+y)\,i\,\mathfrak{Sin}(x-y) = i^2\,\mathfrak{Sin}(x+y)\,\mathfrak{Sin}(x-y)$;
mithin $\mathfrak{Sin}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 y = \mathfrak{Sin}(x+y)\,\mathfrak{Sin}(x-y)$.

2. Aus Formel **e.** 1., S. 57 folgt

$$\sin ix = \frac{ix}{1!} - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} - \ldots = i\left(\frac{x}{1!} - \frac{i^2x^3}{3!} + \frac{i^4x^5}{5!} - \ldots\right);$$

$$\text{mithin } \mathfrak{Sin}\,x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \; -\infty < x < +\infty.$$

c. Beziehungen zwischen den Kreis- und Hyperbelfunktionen.

1. $\sin x = -i\,\mathfrak{Sin}\,ix = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

2. $\cos x = \mathfrak{Cof}\,ix = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

3. $\operatorname{tg} x = -i\,\mathfrak{Tg}\,ix = -i\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$

4. $\operatorname{ctg} x = i\,\mathfrak{Ctg}\,ix = i\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}$

5. $\sin ix = i\,\mathfrak{Sin}\,x = i\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

6. $\cos ix = \mathfrak{Cof}\,x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

7. $\operatorname{tg} ix = i\,\mathfrak{Tg}\,x = i\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

8. $\operatorname{ctg} ix = -i\,\mathfrak{Ctg}\,x = -i\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

9. $\operatorname{arc}\sin x = -i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,ix = -i\ln\left[ix + \sqrt{1-x^2}\right]$

10. $\operatorname{arc}\cos x = -i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x = -i\ln\left[x + i\sqrt{1-x^2}\right]$

11. $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = -i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,ix = \dfrac{1}{2i}\ln\dfrac{1+ix}{1-ix}$

12. $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x = i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,ix = \dfrac{1}{2i}\ln\dfrac{ix-1}{ix+1}$

---

*) Die Bezeichnung kommt von area = Fläche, Flächeninhalt.

13. $\operatorname{arc\,sin} ix = i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x = i \ln\left[x + \sqrt{1+x^2}\right]$
14. $\operatorname{arc\,cos} ix = -i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,ix = {}^1/_2\,\pi - i\ln\left[x + \sqrt{1+x^2}\right]$
15. $\operatorname{arc\,tg}\ x = i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x = \frac{i}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$
16. $\operatorname{arc\,ctg} ix = -i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,x = -\frac{i}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$

Für die Formeln 9 bis 16 vrgl. auch e., S. 61

IV. DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG.

A. Differentialformeln.

Ist $y = f(x)$, so ist der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

und das Differential

$$dy = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} dx = \frac{dy}{dx} dx.$$

In den folgenden Formeln können die Gröfsen x, y, z, u ... entweder unabhängig veränderlich oder Funktionen derselben Veränderlichen (t) sein.

1. $d(a + x) = dx$
2. $d(ax) = a\,dx$
3. $d(x + y + z + u \cdots) = dx + dy + dz + du + \cdots$
4. $d(xy) = x\,dy + y\,dx$
5. $d(xyzu\cdots) = \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{du}{u} + \cdots\right) xyzu \ldots$
6. $d\frac{x}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$
7. $dx^m = mx^{m-1}\,dx$
8. $d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
9. $d\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}$
10. $de^x = e^x\,dx$
11. $da^x = a^x \ln a\,dx$
12. $d\ln x = \frac{dx}{x}$
13. $d\,{}^a\!\lg x = \frac{1}{\ln a}\frac{dx}{x}$
14. $d\sin x = \cos x\,dx$
15. $d\frac{1}{\sin x} = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$
16. $d\cos x = -\sin x\,dx$
17. $d\frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$
18. $d\operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$
19. $d\operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$

20. $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

21. $d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

22. $d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2}$

23. $d \operatorname{arc\,ctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}$

24. $d \ln \sin x = \operatorname{ctg} x \cdot dx$

25. $d \ln \cos x = -\operatorname{tg} x\, dx$

26. $d \ln \operatorname{tg} x = \frac{2\,dx}{\sin 2x}$

27. $d \ln \operatorname{ctg} x = -\frac{2\,dx}{\sin 2x}$

28. $d \operatorname{Sin} x = \operatorname{Cos} x\, dx$

29. $d \operatorname{Cos} x = \operatorname{Sin} x\, dx$

30. $d \operatorname{Tg} x = \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x}$

31. $d \operatorname{Ctg} x = -\frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x}$

32. $dx^y = x^{y-1}(x \ln x\, dy + y\, dx)$

Allgemein ist

33. $dF(x, y, z, u \ldots) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial u} du + \cdots$

34. $d^n F(x, y, z, u \cdots) = \frac{\partial^n F}{\partial x^n} dx^n + n \frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\, \partial y} dx^{n-1}\, dy + \cdots$

$$\text{oder (sinnbildlich)} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \cdots\right)^n,$$

wenn man in dem nach dem binomischen Satze (S. 45) entwickelten Ausdruck auf der rechten Seite die n^{te} Potenz von ∂ im Zähler mit der n^{ten} partiellen Ableitung von F vertauscht.

B. Reihen von Maclaurin und Taylor.

1. Reihe von Maclaurin.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} f^{n-2}(0) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n.$$

$f(0), f'(0), f''(0), \ldots f^{n-1}(0)$ sind die Werte, die $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$ für $x = 0$ annehmen. R_n heifst das Restglied,

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\Theta x) \quad \text{oder} \quad R_n = \frac{(1-\Theta)^{n-1} x^n}{(n-1)!} f^{(n)}(\Theta x),$$

worin Θ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

2. Reihe von Taylor.

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(x) + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n.$$

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \Theta h) \quad \text{oder} \quad R_n = \frac{(1-\Theta)^{n-1} h^n}{(n-1)!} f^{(n)}(x + \Theta h),$$

worin Θ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Die Reihen von Maclaurin und Taylor sind nur gültig, wenn $f(x)$ mit sämtlichen Ableitungen in dem Intervall 0 bis x bzw. x bis $x + h$ endlich und stetig bleibt.

C. Unbestimmte Formen.

1. $\frac{0}{0}$. Nimmt der Bruch $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ an, so erhält man den wahren Wert, wenn man $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ bildet und darin $x = a$ setzt. Stellt sich auch $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ in der Form $\frac{0}{0}$ dar, so ist der wahre Wert $\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$ usw.

2. $\frac{\infty}{\infty}$. Man verfährt wie bei $\frac{0}{0}$.

3. $0 \cdot \infty$. Wenn in $\varphi(x) f(x)$ für $x = a$ $\varphi(x) = 0$ und $f(x) = \infty$ wird, so setzt man zur Ermittlung des wahren Wertes $\frac{1}{f(x)} = \psi(x)$ und erhält dann den Fall 1.

4. 0^0, 1^∞, ∞^0. Nimmt der Ausdruck $\psi(x)^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine dieser Formen an, so setze man $\psi(x)^{\varphi(x)} = y$; dann wird $\ln y = \varphi(x) \cdot \ln \psi(x)$, mithin $y = e^{\varphi(x) \ln \psi(x)}$. Der Exponent $\varphi(x) \ln \psi(x)$ wird nun nach Fall 3. bestimmt.

5. $\infty - \infty$. Es wird $\varphi(x) - \psi(x) = \infty - \infty$ auf den Fall 1 zurückgeführt, indem man

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)}} = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty \cdot \infty}} = \frac{0}{0} \text{ setzt.}$$

D. Maxima und Minima.

1. Funktion mit einer Veränderlichen. Die Werte von x, die $y = f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, findet man aus der Gleichung

$$f'(x) = 0,$$

u. zw. ist für einen dieser Werte von x

y ein Maximum, wenn $f''(x) < 0$;
y „ Minimum, „ $f''(x) > 0$ wird.

Ist $f''(x)=0$, so muß auch $f'''(x)=0$ sein, wenn der gefundene Wert von x ein Maximum oder Minimum von y ergeben soll; es wird y ein Maximum oder Minimum, je nachdem $f''''(x) \lesseqgtr 0$; usw.

2. Unentwickelte Funktion: $f(x, y)=0$. Die Werte, welche y zu einem Maximum oder Minimum machen, müssen die Gleichungen $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0$, $f(x,y)=0$, und die Bedingung $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \gtrless 0$ erfüllen.

$$y \text{ ist ein Maximum, wenn } \left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] : \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] < 0;$$

$$y \text{ „ „ Minimum, „ } \left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] : \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] > 0 \text{ wird.}$$

3. Funktion mit zwei unabhängigen Veränderlichen: $z=f(x, y)$. Die Werte von x und y, die ein Maximum oder Minimum ergeben, finden sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$$

unter der Bedingung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]^2 > 0$,

u. zw. hat man, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ beide <0, ein Maximum;

„ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ „ >0, „ Minimum.

4. Relative Maxima und Minima. Sollen die Maxima und Minima der Funktion $v=f(x, y, z)$ unter gleichzeitigem Bestehen der Bedingungsgleichungen $\varphi(x, y, z)=0$ und $\psi(x, y, z)=0$ ermittelt werden, so setze man

$$1. \quad \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial x}=0$$

$$2. \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial y}=0$$

$$3. \quad \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial z}=0.$$

Ferner ist

$$4. \quad \varphi(x, y, z)=0$$

$$5. \quad \psi(x, y, z)=0.$$

Aus den Gleichungen 1, 2 und 3 eliminiere man die Hülfsgröfsen λ und μ; man findet dann mit Hülfe der Gleichungen 4 und 5 die Werte von x, y, z, die einem Maximum oder Minimum entsprechen.

E. Zerlegung rationaler Brüche in Teilbrüche.

In Teilbrüche können nur echte rationale Brüche zerlegt werden, deren allgemeine Form

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \cdots Px + Q}{x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + px + q} \text{ ist.}$$

Man zerlege $F(x)$ in seine linearen Faktoren durch Auflösen der Gleichung $F(x) = 0$.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ die n Wurzeln dieser Gleichung, so ist

$$F(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \ldots \ldots$$

Alsdann können drei Fälle eintreten:

1. Die Wurzeln sind sämtlich **reell und verschieden.**

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{x-\alpha} + \frac{\beta_1}{x-\beta} + \frac{\gamma_1}{x-\gamma} + \frac{\delta_1}{x-\delta} + \cdots\cdots$$

Die Zähler $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$ bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\alpha_1 = \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}, \quad \beta_1 = \frac{f(\beta)}{F'(\beta)}, \quad \gamma_1 = \frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}, \quad \delta_1 = \frac{f(\delta)}{F'(\delta)}, \quad \text{usw.}$$

2. Die Wurzeln sind teilweise **gleich**, etwa α μ-mal, β ν-mal, sodafs also

$$F(x) = (x-\alpha)^\mu (x-\beta)^\nu (x-\gamma)(x-\delta) \ldots,$$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{(x-\alpha)^\mu} + \frac{\alpha_2}{(x-\alpha)^{\mu-1}} + \frac{\alpha_3}{(x-\alpha)^{\mu-2}} + \cdots + \frac{\alpha_\mu}{x-\alpha} + \frac{\beta_1}{(x-\beta)^\nu}$$
$$+ \frac{\beta_2}{(x-\beta)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{\beta_\nu}{x-\beta} + \frac{\gamma_1}{x-\gamma} + \frac{\delta_1}{x-\delta} + \cdots\cdots$$

Die Zähler $\alpha_1 \ldots \alpha_\mu$ ergeben sich als Koeffizienten der Potenzen $z^0, z^1, \ldots z^{\mu-1}$ in der Entwicklung des folgenden Ausdruckes nach steigenden Potenzen von z:

$$\frac{f(\alpha+z)}{(\alpha-\beta+z)^\nu (\alpha-\gamma+z)(\alpha-\delta+z)\ldots} = \alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \cdots + \alpha_\mu z^{\mu-1} + \cdots\cdots$$

Entsprechend findet man die $\beta_1, \ldots \beta_\nu$ aus der Entwicklung

$$\frac{f(\beta+z)}{(\beta-\alpha+z)^\mu (\beta-\gamma+z)(\beta-\delta+z)\ldots} = \beta_1 + \beta_2 z + \beta_3 z^2 + \cdots + \beta_\nu z^{\nu-1} + \cdots\cdots$$

γ_1, δ_1 usw. findet man nach dem unter **1.** (s. o.) angegebenen Verfahren.

3. Die Wurzeln sind teilweise oder sämtlich **imaginär**, also etwa

$$F(x) = (x-p+qi)(x-p-qi)\,\Phi(x).$$

Sind die Wurzeln sämtlich verschieden, so verfährt man wie unter **1.** und erhält

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{x-p+qi} + \frac{\alpha_2}{x-p-qi} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

worin $\alpha_1 = \dfrac{f(p-qi)}{F'(p-qi)} = A - iB, \quad \alpha_2 = \dfrac{f(p+qi)}{F'(p+qi)} = A + iB.$

Soll die Rechnung reell durchgeführt werden, so fasse man die beiden imaginären (zugeordneten) Teilbrüche zusammen; es ergibt sich dann ein reeller Teilbruch mit einem Nenner zweiten Grades, und es wird

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{2A(x-p) - 2Bq}{(x-p)^2 + q^2} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}.$$

Treten gleiche imaginäre Wurzeln auf, so verfährt man entsprechend wie unter **2.**

F. Integralformeln.

a. Allgemeine Regeln.

In den Formeln 1. bis 3. sind u und v Funktionen der Veränderlichen x.

1. $\int a\,du = a\int du = au + C$

2. $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$ (Zerlegungsverfahren)

3. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (Teilweise Integration)

4. $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(y)]\,\varphi'(y)\,dy, \quad x = \varphi(y)$ (Substitutionsverfahren)

5. $\frac{\partial}{\partial\alpha}\int f(x,\alpha)\,dx = \int \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$ (Differentiation unter dem Integralzeichen)

6. $\int dy \int f(x,y)\,dx = \int dx \int f(x,y)\,dy$ (Umkehrung der Reihenfolge der Integrationen)

b. Fundamental-Integrale.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; n eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl, ausgenommen $n = -1$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln cx$

3. $\int e^x\,dx = e^x + C$

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x + C = -\,\text{arc cos}\, x + C$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x + C = -\,\text{arc ctg}\, x + C$

c. Rationale Funktionen.

1. $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)\,b} + C$

2. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln (a+bx) + C = \frac{1}{b} \ln c\,(a+bx)$

3. $\int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + C$ 4. $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b\,(a+bx)} + C$

5.*) $\int \frac{dx}{1-x^2} = {}^1\!/_2 \ln \frac{1+x}{1-x} + C = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\, x + C,$ wenn $x < 1$

6.*) $\int \frac{dx}{x^2-1} = {}^1\!/_2 \ln \frac{x-1}{x+1} + C = -\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\, x + C,$ wenn $x > 1$

7. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{arc tg} \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x\right) + C$

8. $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{ab}+bx}{\sqrt{ab}-bx} + C$

$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x\right) + C$

(7. und 8.:) wenn $a > 0, \quad b > 0$

9. $\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \text{arc tg} \frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}} + C,$ wenn $ac - b^2 > 0;$

$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2-ac}-b-cx}{\sqrt{b^2-ac}+b+cx} + C$

$= -\frac{1}{\sqrt{b^2-ac}}\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C,$

(beide:) wenn $b^2 - ac > 0;$

ferner $\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = -\frac{1}{b+cx} + C,$ wenn $b^2 = ac$

10. $\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{\beta}{2c} \ln (a+2bx+cx^2) + \frac{\alpha c - \beta b}{c} \int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}$

---

*) Ueber die Hyperbelfunktionen vrgl. S. 65 u. f

11. Ist in $\int \frac{f(x)\,dx}{a + 2\,bx + cx^2}$ der Zähler $f(x)$ eine ganze Funktion von höherem als dem ersten Grade, so stellt man die zu integrierende Funktion als Summe einer ganzen und einer echten gebrochenen rationalen Funktion dar und integriert die einzelnen Summanden.

12. $$\int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^p} = \frac{1}{2(ac-b^2)(p-1)} \cdot \frac{b+cx}{(a+2\,bx+c\,x^2)^{p-1}} + \frac{(2\,p-3)\,c}{2\,(ac-b^2)\,(p-1)} \int \frac{dx}{(a+2\,bx+cx^2)^{p-1}}$$

13. $$\int \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{(a+2\,bx+cx^2)^p} = -\frac{\beta}{2\,c\,(p-1)} \cdot \frac{1}{(a+2\,bx+cx^2)^{p-1}} + \frac{\alpha c - \beta b}{c} \int \frac{dx}{(a+2\,bx+cx^2)^p}$$

14. $$\int x^{m-1}(a+bx)^n\,dx = \frac{x^{m-1}(a+bx)^{n+1}}{(m+n)\,b} - \frac{(m-1)\,a}{(m+n)\,b} \int x^{m-2}(a+bx)^n\,dx$$
$$= \frac{x^m(a+bx)^n}{m+n} + \frac{n\,a}{m+n} \int x^{m-1}(a+bx)^{n-1}\,dx$$

15. Ist $\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{Ax^m + Bx^{m-1} + \cdot\cdot + Px + Q}{x^n + ax^{n-1} + \cdot\cdot\, px + q}\,dx$ und $m > n$, so sondere man durch Teilung eine ganze Funktion von x ab und zerlege die übrig bleibende, echt gebrochene Funktion in Teilbrüche (s. S. 70 u. f.), die man einzeln integriert.

d. Irrationale Funktionen.

1. $$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3\,b}\left(\sqrt{a+bx}\right)^3 + C$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} + C$$

3. $$\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{3\,b^2}(3\,\alpha b - 2\,a\beta + \beta b x)\sqrt{a+bx} + C$$

4. $\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x)\sqrt{a+bx}}$ wird durch die Substitution $y = \sqrt{a+bx}$ auf die Form c. 7. und 8. (S. 73) gebracht. (Vrgl. auch Nr. 5.)

5. $\int \frac{f\left(x, \sqrt[n]{a+bx}\right)}{\varphi\left(x, \sqrt[n]{a+bx}\right)}\,dx.$ Man substituiere $\sqrt[n]{a+bx} = y$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$$
$$= 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$$

7.*) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right] + C = \tfrac{1}{2} \ln\left[\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{-x + \sqrt{a^2 + x^2}}\right] + C$$
$$= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{a} + C$$

8.*) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left[b + cx + \sqrt{c}\sqrt{a + 2bx + cx^2}\right] + C, \text{ wenn } c > 0:$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{b + cx}{\sqrt{ac - b^2}} + C, \text{ wenn } ac - b^2 > 0;$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{b + cx}{\sqrt{b^2 - ac}} + C, \text{ wenn } b^2 - ac > 0;$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{b + cx}{\sqrt{b^2 - ac}} + C, \text{ wenn } c < 0$$

9. $$\int \frac{(\alpha + \beta x)\, dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{\beta}{c} \sqrt{a + 2bx + cx^2}$$
$$+ \frac{\alpha c - \beta b}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} + C$$

10. $$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{x^{m-1} X}{mc} - \frac{(m-1)\, a}{mc} \int \frac{x^{m-2}\, dx}{X}$$
$$- \frac{(2m-1)\, b}{mc} \int \frac{x^{m-1}\, dx}{X},$$

worin $X = \sqrt{a + 2bx + cx^2}$

11.*) $$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$
$$= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{a} + C$$

12. $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

13.*) $$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C$$
$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{x}{a} + C$$

---

*) Ueber die Hyperbelfunktionen vrgl. S. 65 u. f.

14. $\int \sqrt{a + 2bx + cx^2}\, dx = \frac{b + cx}{2c} \sqrt{a + 2bx + cx^2}$

$$+ \frac{ac - b^2}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} + C$$

15. $\int \frac{dx}{(x-a)^p X}$ wird durch die Substitution $\frac{1}{x - a} = y$ auf die Form 10. (S. 75) gebracht.

16. $\int \frac{A + Bx}{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2} \frac{dx}{X}$ wird durch die Substitution $x = \frac{py + q}{y + 1}$, wenn man p und q aus den Gleichungen

$$\gamma pq + \beta(p + q) + \alpha = 0 \text{ und}$$
$$cpq + b(p + q) + a = 0$$

bestimmt und alsdann $y^2 = z$ setzt, auf zwei Integrale von der Form

$$\int \frac{dz}{(\alpha_1 + \gamma_1 z)\sqrt{a_1 + c_1 z}} \text{ und } \int \frac{dz}{(\alpha_2 + \gamma_2 z)\sqrt{a_1 z + c_1 z^2}}$$

gebracht, die nach **d.** 4. (S. 74) und nach 15. (s. o.) zu behandeln sind.

17. Um $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{X}$ zu bestimmen, zerlege man $\frac{f(x)}{F(x)}$, erforderlichen Falls nach Absonderung einer ganzen Funktion, in Teilbrüche; man erhält alsdann Integrale von der Form 15. (s. o.) und, wenn man zugeordnete imaginäre Teilbrüche zusammenfaſst, von der Form 16.

18. $\int \frac{(\alpha + \beta x)\, dx}{X^3} = \frac{(a\beta - b\alpha) + (b\beta - c\alpha)x}{(b^2 - ac)\sqrt{a + 2bx + cx^2}} + C.$

e. Transzendente Funktionen.

1. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

2. $\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a}\left[1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2x^2} - \cdots \pm \frac{n!}{a^n x^n}\right] + C$

3. $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$

4. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

5. $\int \frac{(\ln x)^n}{x}\, dx = \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} + C$

6. $\int \sin^2 x\,dx = -\,{}^1/_4 \sin 2x + {}^1/_2 x + C$

7. $\int \cos^2 x\,dx = {}^1/_4 \sin 2x + {}^1/_2 x + C$

8. $\int \sin mx\,dx = -\frac{\cos mx}{m} + C$ 9. $\int \cos mx\,dx = \frac{\sin mx}{m} + C$

10. $\int \sin mx \cos nx\,dx = -\frac{\cos (m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)x}{2(m-n)} + C$

11. $\int \sin mx \sin nx\,dx = \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + C$

12. $\int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + C$

13. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln \cos x + C$ 14. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln \sin x + C$

15. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$ 16. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$

17. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$ 18. $\int \frac{dx}{1-\cos x} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C$

19. $\int \sin x \cos x\,dx = {}^1/_2 \sin^2 x + C$ 20. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x + C$

21.*) $\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$

22.*) $\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

23. $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$

24. $\int \operatorname{ctg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx$

25. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$

26. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$

---

*) Ist n eine ungerade Zahl, so wende man statt der gegebenen Reduktionsformeln die Substitutionen $\cos x = z$ oder $\sin x = z$ an. Die Integration kann auch erfolgen durch Benutzung der Formeln c. 1. und 2., S. 66, und von Nr. 8. und 9. s. o.

27.*) $\int \sin^p x \cos^q x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \int \sin^p x \cos^{q-2} x\, dx$

$= -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q} \int \sin^{p-2} x \cos^q x\, dx$

28.*) $\int \sin^{-p} x \cos^q x\, dx = -\frac{\sin^{-p+1} x \cos^{q+1} x}{p-1} + \frac{p-q-2}{p-1} \int \sin^{-p+2} x \cos^q x\, dx$

29.*) $\int \sin^p x \cos^{-q} x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{-q+1} x}{q-1} + \frac{q-p-2}{q-1} \int \sin^p x \cos^{-q+2} x\, dx$

30. $\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} {}^1\!/_2 x\right) + C,$ wenn $a^2 > b^2$

$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + a\cos x + \sin x \sqrt{b^2 - a^2}}{a + b\cos x} + C,$

$= \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \operatorname{tg} {}^1\!/_2 x\right) + C,$ wenn $a^2 < b^2$

31. $\int \frac{\cos x\, dx}{a + b\cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b\cos x} + C$

32. $\int \frac{\sin x\, dx}{a + b\cos x} = -\frac{1}{b} \ln (a + b\cos x) + C$

33. $\int \frac{A + B\cos x + C\sin x}{a + b\cos x + c\sin x}\, dx = A \int \frac{d\varphi}{a + p\cos\varphi}$

$+ (B\cos\alpha + C\sin\alpha) \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{a + p\cos\varphi} - (B\sin\alpha - C\cos\alpha) \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{a + p\cos\varphi}$

wenn man $b = p\cos\alpha$, $c = p\sin\alpha$ und $x - \alpha = \varphi$ setzt.

34. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$

35. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$

36. $\int \operatorname{arc\,sin} x\, dx = x \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1 - x^2} + C$

37. $\int \operatorname{arc\,cos} x\, dx = x \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1 - x^2} + C$

38. $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - {}^1\!/_2 \ln (1 + x^2) + C$

---

*) Ist p oder q eine ungerade Zahl, so gelingt die Integration leichter durch die Substitution $\cos x = z$ oder $\sin x = z$.

39. $\int \operatorname{arc\,ctg} x\,dx = x \operatorname{arc\,ctg} x + {}^1/_2 \ln(1 + x^2) + C$

40. Rationale Ausdrücke der **Hyperbelfunktionen** $\mathfrak{Sin}\,x$, $\mathfrak{Cof}\,x$, $\mathfrak{Tg}\,x$, $\mathfrak{Ctg}\,x$ (und deren Umkehrungen) werden mittels der entsprechenden Formeln für die Kreisfunktionen (oder für deren Umkehrungen) integriert, indem man $x = iy$ setzt und gemäfs S. 66 die Beziehungen berücksichtigt:

$$\sin ix = i\,\mathfrak{Sin}\,x, \qquad \cos ix = \mathfrak{Cof}\,x, \qquad \operatorname{tg} ix = i\,\mathfrak{Tg}\,x, \qquad \operatorname{ctg} ix = -i\,\mathfrak{Ctg}\,x.$$

f. Integration durch Reihenentwicklung.

Kann man in $\int f(x)\,dx$ die Funktion $f(x)$ in eine Reihe verwandeln, welche innerhalb des gegebenen Integrations-Intervalls von x konvergent ist, so ist die durch Integration aller Glieder gewonnene Integralreihe für die gegebenen Grenzen konvergent.

Aus der Maclaurinschen Reihe (s. S. 68) folgt

1. $$\int f(x)\,dx = f(0)\,x + f'(0)\frac{x^2}{2} + \frac{f''(0)}{2!}\frac{x^3}{3} + \frac{f'''(0)}{3!}\frac{x^4}{4} + \cdots.$$

2. $$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = 0{,}5772156649 \cdots + \ln(-\ln x) + \ln x + {}^1/_2\frac{(\ln x)^2}{2!} + {}^1/_3\frac{(\ln x)^3}{3!} + \cdots; \quad 0 < x < 1.$$

3. $\int_0^x \frac{e^x\,dx}{x}$ führt durch die Substitution $e^x = z$ auf Nr. 2 zurück.

g. Bestimmte Integrale.

1. $$\int_a^b = -\int_b^a \qquad \int_a^c = \int_a^b + \int_b^c \qquad \int_a^c - \int_a^b = \int_b^c$$

2. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$$

3. $$\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{a + bx^2} = \int_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^\infty \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}$$

4. $$\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}$$

5. $$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \text{ wenn } b > 0$$

6. $$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x}\,dx = \infty$$

wenn n eine positive ganze Zahl ist (gilt für 7. und 8.):

7. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots \quad 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)},$$

8. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots \quad 2n} \frac{\pi}{2},$$

9 $$\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1$$ 10. $$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = {}^1/_2 \sqrt{\pi}$$

11. $$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}},$$ wenn a eine positive, n eine positive ganze Zahl ist.

12. $$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\, dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin n\pi},$$ wenn $0 < n < 1$.

h. Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale.

Gegeben $\int_a^b f(x)\, dx$. Man teile $b-a$ in n gleiche Teile: $\frac{b-a}{n} = h$ und berechne die zu den Werten $x = a,\ x = a + h,\ x = a + 2h \ldots$ gehörenden Werte $f(x) = y_0,\ y_1,\ y_2 \ldots$, dann ist unter der Voraussetzung, daſs $f(x)$ und ihre in den nachfolgenden Formeln vorkommenden Ableitungen für $x = a$ bis b endlich und stetig sind,

1. $$\int_a^b f(x)\, dx = h\,[{}^1/_2\, y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + {}^1/_2\, y_n]$$
$$- \frac{B_1 h^2}{2!}[f'(b) - f'(a)] + \frac{B_2 h^4}{4!}[f'''(b) - f'''(a)] - \cdots$$
$$+ (-1)^{r-1} \frac{B_{r-1} h^{2r-2}}{(2r-2)!}[f^{(2r-3)}(b) - f^{(2r-3)}(a)] +$$
$$(-1)^r \frac{B_r}{(2r)!} \varrho \frac{(b-a)^{2r+1}}{n^{2r}} M^{(2r)}$$

Hierin sind $B_1, B_2 \ldots$ die Bernoullischen Zahlen, u. zw.

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ B_6 = \frac{691}{2730} \text{ usw.}$$

Der wirkliche Restbetrag (Fehler) liegt zwischen den beiden Werten des letzten (Rest-) Gliedes, die sich ergeben für $\varrho = +1$ als oberster Grenzwert der positiven echten Brüche und für $M^{(2r)}$ gleich dem gröſsten bzw. kleinsten Wert von $f^{(2r)}(x)$ in den Grenzen $x = a$ bis b einschl. der zugehörigen Vorzeichen.

Für $r = 2$ erhält man

$$2.\ \int_a^b f(x)\,dx = h\,[{}^1\!/_2\, y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + {}^1\!/_2\, y_n] - \frac{1}{12} h^2 [f'(b) - f'(a)] + \frac{1}{720} \varrho \frac{(b-a)^5}{n^4} M''''.$$

3. **Simpsonsche Regel:**
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n] - \frac{1}{180} \varrho \frac{(b-a)^5}{n^4} M''''.$$

n mufs eine gerade Zahl sein. ϱ und M'''' s. o. Formel 2. ist bei gleichem Werte r genauer als 3.

G. Differentialgleichungen.

a. Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. $$f(x)\,dx + \varphi(y)\,dy = 0.$$

Lösung:
$$\int f(x)\,dx + \int \varphi(y)\,dy = C.$$

2. **Trennung der Veränderlichen.**
$$f(x)\,\varphi(y)\,dx + F(x)\,\psi(y)\,dy = 0.$$

Lösung:
$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx + \int \frac{\psi(y)}{\varphi(y)}\,dy = C.$$

3. $$f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy = 0.$$

Ist die Bedingung der Integrabilität

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}$$ erfüllt, so ist die Lösung:

$$\int f(x, y)\,dx + \int \left[\varphi(x, y) - \int \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx\right] dy = C$$

oder
$$\int \varphi(x, y)\,dy + \int \left[f(x, y) - \int \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}\,dy\right] dx = C.$$

4. Ist die vorstehende Bedingung der Integrabilität nicht erfüllt, so wird sie hergestellt durch Multiplikation der Gleichung mit einem Faktor M, dem **integrierenden Faktor,** welcher der partiellen Differentialgleichung genügen mufs:

$$f(x, y)\frac{\partial M}{\partial y} - \varphi(x, y)\frac{\partial M}{\partial x} = M\left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right).$$

In manchen Fällen kann M bestimmt werden aus den Gleichungen

$$\frac{dy}{f(x, y)} = -\frac{dx}{\varphi(x, y)} = \frac{dM}{M\left[\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]}.$$

5. Ergibt die Auflösung nach $\frac{dy}{dx}$ die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

so heifst die Differentialgleichung **homogen.** Man löst sie, indem man

$$\frac{y}{x} = t, \quad \text{also} \quad y = xt; \quad dy = x\,dt + t\,dx \text{ setzt.}$$

Lösung:
$$\ln x = \int \frac{dt}{f(t) - t} + C.$$

6. Die Differentialgleichung heifst **linear,** wenn sie die Form

$$f_1(x)\frac{dy}{dx} + f(x)\,y + \varphi(x) = 0 \text{ hat.}$$

Man setze $y = uv$, wobei u und v Funktionen von x bedeuten, dann ist

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Diese beiden Werte in die zu lösende Gleichung eingesetzt, gibt

$$f_1(x)\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) + f(x)\,uv + \varphi(x) = 0.$$

Man bestimme nun u aus der Gleichung

$$f_1(x)\frac{du}{dx} + f(x)\,u = 0 \text{ und erhält}$$

$$\ln\frac{u}{c} = -\int\frac{f(x)}{f_1(x)}dx \quad \text{oder} \quad u = ce^{-\int\frac{f(x)}{f_1(x)}dx}.$$

Aus dieser Gleichung folgt dann für v die Bedingungsgleichung

$$f_1(x)\,u\frac{dv}{dx} + \varphi(x) = 0$$

oder $v = -\int\frac{\varphi(x)}{uf_1(x)}dx + C_1 = -\int\left(\frac{\varphi(x)}{cf_1(x)}e^{\int\frac{f(x)}{f_1(x)}dx}\right)dx + C_1.$

Die Lösung wird daher:

$$y = uv = e^{-\int\frac{f(x)}{f_1(x)}dx}\left[-\int\left(\frac{\varphi(x)}{f_1(x)}e^{\int\frac{f(x)}{f_1(x)}dx}\right)dx + C\right].$$

7. Verfahren der **wiederholten Differentiation.**

$$y = F\left(x, \frac{dy}{dx}\right).$$

Man setze $\frac{dy}{dx} = z$ und differentiiere nach x, so folgt

$$z = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

womit bisweilen Fall 6. hergestellt ist. Den für z gefundenen Ausdruck setze man in $y = F(x, z)$ ein.

b. Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1. $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x).$$

Lösungen: 1) $y = \int dx \int f(x)\, dx + Cx + C_1$.

2) $y = x \int f(x)\, dx - \int x f(x)\, dx + Cx + C_1$.

2. $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y).$$

Lösung: $$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int f(y)\, dy}} + C_1.$$

Allgemein: $F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, y\right) = 0$.

Man setze $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ und eliminiere dx aus den beiden Gleichungen $F\left(\frac{dz}{dx}, y\right) = 0$ und $\frac{dy}{dx} = z$. Die Lösung ergibt sich durch die mittels Trennung der Veränderlichen auszuführende Integration der Gleichung $F\left(\frac{z\,dz}{dy}, y\right) = 0$.

3. $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Man setze $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$; dann erhält man die beiden Gleichungen $x = \int \frac{dz}{f(z)} + C$ und $y = \int \frac{z\,dz}{f(z)} + C_1$, aus denen sich durch Elimination von z die Lösung ergibt.

4. $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, x\right)$. Man setze $\frac{dy}{dx} = z$ und versuche, die entstehende Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{dz}{dx} = f(z, x)$ zu integrieren. Findet man $z = \varphi(x)$, so bleibt noch die Integration der Gleichung $dy = \varphi(x)\, dx$ übrig.

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, y\right)$. Man setze $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{d^2y}{dx^2} = z\frac{dz}{dy}$ und versuche, die entstehende Differentialgleichung erster Ordnung $z\frac{dz}{dy} = f(z, y)$ zu integrieren. Findet man $z = \varphi(y)$, so ist das Integral der gegebenen Gleichung: $$x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + C.$$

c. Lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit unveränderlichen Koeffizienten.

α) Ohne Störungsfunktion.

1. $$a\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0.$$

Integral: $y = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + \cdots\cdots + C_n e^{w_n x}$.

Die Gröfsen $w_1, w_2, \ldots\ldots w_n$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$a w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots\cdots a_n = 0.$$

2. Tritt unter jenen Wurzeln eine imaginäre auf, z. B. $w_3 = p + qi$, so gibt es auch eine zweite imaginäre Wurzel $w_4 = p - qi$, falls die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ sämtlich reell sind. Das Integral der Differentialgleichung wird dann

$$y = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + e^{px}[C_3 \cos qx + C_4 \sin qx] + C_5 e^{w_5 x} + \cdots\cdots + C_n e^{w_n x}.$$

3. Sind mehrere Wurzeln einander gleich, $w_1 = w_2 = w_3 = \ldots = w_p$, so wird das Integral

$$y = e^{w_1 x}[C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots\cdots + C_p x^{p-1}] + C_{p+1} e^{w_{p+1} x} + \cdots\cdots + C_n e^{w_n x}.$$

β) Mit Störungsfunktion.

$$a\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = f(x).$$

Integral: $$y = z_1 e^{w_1 x} + z_2 e^{w_2 x} + \cdots\cdots + z_n e^{w_n x}.$$

Die $w_1, w_2, \cdots\cdots w_n$ hierin bestimmen sich wie unter α). Die $z_1, z_2, \cdots\cdots z_n$ sind zu berechnen aus den Gleichungen:

$$e^{w_1 x}\frac{dz_1}{dx} + e^{w_2 x}\frac{dz_2}{dx} + e^{w_3 x}\frac{dz_3}{dx} + \cdots\cdots + e^{w_n x}\frac{dz_n}{dx} = 0,$$

$$w_1 e^{w_1 x}\frac{dz_1}{dx} + w_2 e^{w_2 x}\frac{dz_2}{dx} + w_3 e^{w_3 x}\frac{dz_3}{dx} + \cdots + w_n e^{w_n x}\frac{dz_n}{dx} = 0,$$

$$w_1^2 e^{w_1 x}\frac{dz_1}{dx} + w_2^2 e^{w_2 x}\frac{dz_2}{dx} + w_3^2 e^{w_3 x}\frac{dz_3}{dx} + \cdots + w_n^2 e^{w_n x}\frac{dz_n}{dx} = 0,$$

. . . .

. . . .

$$w_1^{n-1} e^{w_1 x}\frac{dz_1}{dx} + w_2^{n-1} e^{w_2 x}\frac{dz_2}{dx} + w_3^{n-1} e^{w_3 x}\frac{dz_3}{dx} + \cdots\cdots + w_n^{n-1} e^{w_n x}\frac{dz_n}{dx} = f(x).$$

Wenn $f(x)$ eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades ist, so erscheint y in der Form

$$y = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + \cdots + C_n e^{w_n x} + F(x),$$

in der $F(x)$ eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades bedeutet, deren Koeffizienten nach dem Verfahren der unbestimmten Koeffizienten ermittelt werden können.

γ) **Mit einer Unveränderlichen als Störungsfunktion.**

$$a \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = \mu = \text{konst.}$$

Integral (Vrgl. 1., S. 84): $y = \Sigma (C e^{wx}) + \dfrac{\mu}{a_n}$.

V. WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG UND THEORIE DER BEOBACHTUNGSFEHLER.

a. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Die **absolute Wahrscheinlichkeit** w eines Ereignisses wird dargestellt durch den Quotient aus der Anzahl a der dem Ereignis günstigen Fälle und der Anzahl n der überhaupt möglichen Fälle:

$$w = \frac{a}{n}.$$

$w = 0$ ist der Ausdruck für die Unmöglichkeit, $w = 1$ der Ausdruck für die Gewifsheit.

2. Sind w_1, w_2, w_3 .... die Wahrscheinlichkeiten mehrerer voneinander unabhängiger Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs diese Ereignisse gleichzeitig oder in einer vorbestimmten Reihenfolge eintreten,

$$w = w_1 w_2 w_3 \ldots\ldots$$

3. Die Wahrscheinlichkeit w, dafs von mehreren zusammengehörenden Ereignissen, die für sich die absoluten Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2, w_3 ... haben, irgend eines dieser Ereignisse eintritt, ist

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots\cdots$$

4. **Relative Wahrscheinlichkeiten** zweier Ereignisse nennt man die Wahrscheinlichkeiten, die man erhält, wenn man die überhaupt keinem dieser Ereignisse günstigen Fälle bei der Anzahl der möglichen

Fälle als nicht vorhanden betrachtet. Sind w_1, w_2 die absoluten Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse, so sind $\frac{w_1}{w_1 + w_2}$ und $\frac{w_2}{w_1 + w_2}$ ihre relativen Wahrscheinlichkeiten.

5. Die Wahrscheinlichkeit w, dafs von zwei Ereignissen A und B, die für sich die Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_2 haben, A m-mal und B n-mal in bestimmter Reihenfolge eintritt, ist

$$w = w_1^{\ m} w_2^{\ n}.$$

Wenn die Reihenfolge beliebig ist, so erhält man

$$w = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} w_1^{\ m} w_2^{\ n}.$$

b. Theorie der Beobachtungsfehler.

Jede Beobachtung ist mit zufälligen Fehlern behaftet. Jeder Beobachtungsfehler ist anzusehen als die Summe einer unendlich grofsen Anzahl von elementaren Fehlern, welche eben so leicht positiv wie negativ ausfallen können.

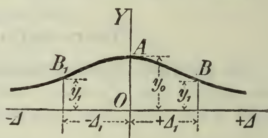
Unter dieser Voraussetzung ergibt sich die Wahrscheinlichkeit w des Vorkommens eines Fehlers zwischen den Grenzen Δ und $\Delta + d\Delta$ zu

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta,$$

die Wahrscheinlichkeit W für das Vorkommen eines Fehlers zwischen den Grenzen Δ_1 und Δ_2 ist

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta.$$

Abb. 2.



Hierin ist die Unveränderliche h der Faktor, der jeder einzelnen Beobachtung zugeordnet werden mufs, um die Gröfse ihrer Genauigkeit auszudrücken, der also mit letzterer wächst und daher der **Genauigkeitskoeffizient** der Beobachtung genannt wird.

Setzt man $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}$ und nimmt Δ als Abszissen, y als Ordinaten eines rechtwinkligen Achsenkreuzes an, so stellt jene Gleichung die sogen. **Wahrscheinlichkeitskurve** (s. Abb. 2) dar; w ist ein Flächenelement, W die zwischen den Abszissen Δ_1 und Δ_2 liegende Fläche der Kurve. Die Fläche der ganzen Kurve (von $\Delta = -\infty$ bis $+\infty$) ist $= 1$.

Für $\Delta = 0$ wird

$$y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5642\,h = y_{\max}.$$

Die Kurve verläuft in zwei zur y-Achse gleichliegenden Aesten; die Δ-Achse ist Asymptote der Kurve. Für die Abszisse

$$\pm \Delta_1 = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0{,}707\,107}{h} = \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m}},$$

worin m die Anzahl der Fehler und die zugehörige Ordinate $y_1 = 0{,}606\,53 \frac{h}{\sqrt{\pi}} = 0{,}342\,198\,h$ ist, hat die Kurve je einen Wendepunkt B und B_1.

Der **wahrscheinliche Fehler** r einer Beobachtung ist derjenige Wert von Δ, welcher bei dieser Gattung von Beobachtungen von den positiven wie negativen Fehlern ebenso oft überschritten wie nicht erreicht wird. Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines Fehlers in den Grenzen $+r$ und $-r$ ist daher $= 1/2$, und es ist $\pm r$ die Abszisse der Wahrscheinlichkeitskurve, deren zugehörige Ordinate die rechts bzw. links vom Scheitel gelegene Fläche der Kurve halbiert.

Der wahrscheinliche Fehler r ist umgekehrt proportional dem Genauigkeits-Koeffizienten und dient als Einheit des Maſses zur Darstellung der Fehler.

Es ist

$$r = \frac{0{,}476\,936\,4}{h} = 0{,}674\,49\,\Delta_1 = 0{,}674\,49\sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m}},$$

wenn m die Anzahl der Fehler bedeutet. Δ_1 s. Abb. 2, S. 86.

Um zu prüfen, ob die Anzahl der Versuche groſs genug war, daſs die Fehler wirklich zufällig gewesen, und um sich überhaupt über die Zuverlässigkeit des Ergebnisses zu vergewissern, ist die **Verteilung der Gröſsen der Fehler** in Betracht zu ziehen, wofür die vorstehende Theorie folgende Angaben liefert:

Bei 1000 Beobachtungen liegen in den nach $0{,}1\,r$ fortschreitenden Zwischenräumen:

von 0 bis $1r$:	54, 54, 53, 52, 51, 50, 49, 47, 46, 44: zusammen 500 Fehler;
zwischen $1r$ und $2r$:	42, 40, 38, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 23: zusammen 323 Fehler;
zwischen $2r$ und $3r$:	21, 19, 17, 15, 14, 12, 11, 10, 8, 7: zusammen 134 Fehler;
zwischen $3r$ und $3{,}5r$	25 Fehler;
zwischen $3{,}5r$ und $4r$	11 Fehler;
zwischen $4r$ und $5r$	6 Fehler;
	zusammen 999 Fehler.

Hiernach ist also eine Beobachtung, deren Fehler $> 5\,r$ ist, bereits als unzulässig anzusehen.

c. Methode der kleinsten Quadrate.

F sei eine bekannte Funktion von einer Anzahl unabhängiger Veränderlichen $x, y, z \ldots$ und der n Unveränderlichen $a, b, c \ldots$ Durch Beobachtung kennt man m Werte von F, die gegebenen Werten von $x, y, z \ldots$ entsprechen, und es sind nun die Werte der n Unveränderlichen zu bestimmen für den Fall, daſs $m > n$.

Wollte man je n Gleichungen zur Bestimmung der n Unveränderlichen verbinden, so würde man, weil die m beobachteten Werte von F mit unvermeidlichen Beobachtungsfehlern behaftet sind, je nach Wahl der n Gleichungen andere Werte der Unveränderlichen erhalten. Die Aufgabe ist nun, die Gruppe von Werten der Unveränderlichen zu bestimmen, die für die m beobachteten Werte von F die wahrscheinlichste ist. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt, dafs dies bei den Werten der Fall ist, für die

$$\Sigma(h^2 \Delta^2) = \text{min.}$$

Denkt man sich unter h eine Zahl von der Beschaffenheit, dafs $\frac{h_1^2}{h^2}, \frac{h_2^2}{h^2}, \frac{h_3^2}{h^2}$ ganze Zahlen sind, die der Reihe nach mit $g_1, g_2, g_3 \ldots$ bezeichnet werden, so gilt die Bedingung der wahrscheinlichsten Werte der Unveränderlichen:

$$\Sigma(g \Delta^2) = \text{min. für ungleiche Genauigkeiten,}$$

$$\Sigma(\Delta^2) = \text{min. für gleiche Genauigkeiten.}$$

Der erste Fall wird also auf den einfacheren zweiten zurückgeführt, wenn man die einzelnen Werte von Δ so oft in die Summe einsetzt, wie die zugehörigen Koeffizienten g anzeigen. g heifst das **Gewicht** der Beobachtung.

1. Ausgleich unmittelbarer Beobachtungen.

Ist die beobachtete Gröfse von keiner Veränderlichen abhängig, also

$$F = a,$$

so wird der wahrscheinlichste Wert von a:

$$a = \frac{\Sigma(F h^2)}{\Sigma(h^2)} = \frac{\Sigma(F g)}{\Sigma(g)};$$

bei m Beobachtungen von gleicher Güte:

$$a = \frac{\Sigma(F)}{m},$$

d. h., bei Beobachtungen gleicher Güte einer unabhängigen Gröfse ist das **arithmetische Mittel** der wahrscheinlichste Wert der Gröfse.

Wahrscheinlicher Beobachtungsfehler $r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{m}{m-1} \frac{\Sigma(g \Delta^2)}{\Sigma(g)}}$.

Wahrscheinlicher Fehler des arithmetischen Mittels $r_a = \frac{r}{\sqrt{m}}$.

2. Funktionen ersten Grades.

Die Funktion F sei in Bezug auf die zu berechnenden Unveränderlichen vom ersten Grade, also von der Form

$$F = ax + by + cz + \cdots,$$

worin $x, y, z \ldots$ unabhängige Veränderliche sind.

Die beobachteten Werte von F seien $F_1, F_2, F_3 \ldots$, die Beobachtungsfehler dabei $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots$

Bezeichnet m die Anzahl der Gleichungen, n die Anzahl der Unveränderlichen $(m > n)$, so ergeben sich die wahrscheinlichsten Werte der Unveränderlichen a, b, c . . . . aus den Gleichungen

$$\Sigma(gFx) = a\Sigma(gx^2) + b\Sigma(gxy) + c\Sigma(gxz) + \cdots$$
$$\Sigma(gFy) = a\Sigma(gyx) + b\Sigma(gy^2) + c\Sigma(gyz) + \cdots$$
$$\Sigma(gFz) = a\Sigma(gzx) + b\Sigma(gzy) + c\Sigma(gz^2) + \cdots$$

usw.,

worin z. B. $\Sigma(gyz) = g_1 y_1 z_1 + g_2 y_2 z_2 + \cdots$ ist.

Bei gleicher Genauigkeit aller Beobachtungen fällt überall in den Gleichungen der Faktor g fort.

Wenn in der gegebenen Gleichung für F eine der zu ermittelnden Unveränderlichen mit keiner Veränderlichen verbunden ist (absolutes Glied), so ist in den vorstehenden Bestimmungsgleichungen der Wert der betreffenden Veränderlichen = 1 zu setzen.

Die Auflösungen der Bestimmungsgleichungen haben die Formen

$$a = A_1\Sigma(gFx) + B_1\Sigma(gFy) + C_1\Sigma(gFz) + \cdots$$
$$b = A_2\Sigma(gFx) + B_2\Sigma(gFy) + C_2\Sigma(gFz) + \cdots$$
$$c = A_3\Sigma(gFx) + B_3\Sigma(gFy) + C_3\Sigma(gFz) + \cdots \text{ usw.}$$

Berechnet man durch Einsetzen der so bestimmten wahrscheinlichsten Werte von a, b, c . . . . in die Gleichung $F = ax + by + cz + \cdots$ die Werte von F, welche den bei der Beobachtung benutzten Werten von x, y, z . . . entsprechen, und bezeichnet die Unterschiede entsprechender berechneter und beobachteter Werte von F mit $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots$, so liegt der wahrscheinliche Fehler der Beobachtungen in den Grenzen

$$r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{m}{m-n} \frac{\Sigma(g\Delta^2)}{\Sigma(g)}} \left(1 \pm \frac{0{,}4769364}{\sqrt{m}}\right).$$

Für gleiche g: $r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m-n}} \left(1 \pm \frac{0{,}4769364}{\sqrt{m}}\right)$;

hierin ist $\Sigma(g\Delta^2) = \Sigma(gF^2) - a\Sigma(gFx) - b\Sigma(gFy) - \cdots$;

ferner $\Sigma(\Delta^2) = \Sigma(F^2) - a\Sigma(Fx) - b\Sigma(Fy) - \cdots$.

Die wahrscheinlichen Fehler der berechneten Unveränderlichen sind

$$r_a = r\sqrt{\frac{A_1\Sigma(g)}{m}} \qquad r_b = r\sqrt{\frac{B_2\Sigma(g)}{m}} \qquad r_c = r\sqrt{\frac{C_3\Sigma(g)}{m}};$$

usw.;

für gleiche g: $r_a = r\sqrt{A_1}$; $r_b = r\sqrt{B_2}$; $r_c = r\sqrt{C_3}$ usw.

VI. ANALYTISCHE GEOMETRIE.

A. Punkt und gerade Linie in der Ebene.

In den folgenden Entwicklungen sind rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt.

1. Sind x_1, y_1 und x_2, y_2 die Koordinaten zweier Punkte, deren Entfernung voneinander l ist, ist ferner α der Winkel, den l mit der positiven Richtung der Abszissenachse (x-Achse) bildet, so ist

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{l}; \qquad \sin\alpha = \frac{y_2 - y_1}{l}.$$

2. Teilt man die Strecke l zwischen den Punkten (x_2, y_2) und (x_1, y_1) im Verhältnis $m:n$ und nennt die Koordinaten des Teilpunktes x, y, so ist

$$x = \frac{mx_2 \pm nx_1}{m \pm n}; \qquad y = \frac{my_2 \pm ny_1}{m \pm n}.$$

3. **Gleichungen der geraden Linie.**

Die Gleichungen einer geraden Linie, d. h. die Gleichungen zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes einer geraden Linie, sind Gleichungen ersten Grades.

α) Die allgemeine Form lautet:

$$Ax + By + C = 0.$$

β) Ist die Gerade unter einem Winkel α gegen die x-Achse geneigt, so dafs $\operatorname{tg}\alpha = m$, und schneidet die Gerade auf der y-Achse die Strecke b ab, so ist ihre Gleichung

$$y = mx + b.$$

$x = a$, Gleichung einer Geraden, parallel zur y-Achse.
$y = b$, ,, ,, ,, ,, ,, x-Achse.
$y = mx$, ,, ,, ,, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht.

γ) Geht die Gerade durch einen Punkt (x_1, y_1), so ist ihre Gleichung

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

δ) Geht die Gerade durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2), so ist ihre Gleichung

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

ε) Schneidet eine Gerade auf der x-Achse die Strecke a, auf der y-Achse die Strecke b ab, so ist ihre Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Durch Vergleich mit der allgemeinen Form findet man:

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}, \quad m = -\frac{A}{B}.$$

ζ) Ist das Lot l vom Koordinatenanfangspunkt auf eine Gerade unter dem Winkel α gegen die x-Achse geneigt, so lautet die Gleichung der Geraden:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - l = 0. \quad \textbf{(Normalform.)}$$

Um die allgemeine Gleichung der geraden Linie

$$Ax + By + C = 0$$

in die Normalform zu bringen, setze man

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad l = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist überall so zu wählen, dafs l positiv wird.

4. Der **Abstand** p eines Punktes (x_1, y_1) von einer geraden Linie, deren Gleichung die Normalform hat, ist

$$p = \pm (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - l);$$

p wird positiv, wenn der Punkt (x_1, y_1) und der Koordinatenanfangspunkt auf derselben Seite der Geraden liegen, negativ, wenn sie auf verschiedenen Seiten liegen.

5. Sind $$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \text{ und}$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$
die Gleichungen zweier Geraden, so ist, wenn k eine beliebige Zahl bedeutet, die Gleichung aller Geraden, die durch den Schnittpunkt beider gehen,

$$A_1 x + B_1 y + C_1 + k (A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

6. Der **Winkel** φ, den zwei gerade Linien (der unter 5 genannten Gleichungen) miteinander bilden, ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Die Linien sind parallel ($\varphi = 0$), wenn $A_2 B_1 = A_1 B_2$ oder $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Die Linien stehen winkelrecht zueinander ($\varphi = 90^0$), wenn $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Sind die Gleichungen in entwickelter Form gegeben:

$$y = m_1 x + b_1, \qquad y = m_2 x + b_2,$$

so ist
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2};$$

die Geraden sind parallel, wenn

$$m_1 = m_2,$$

sie stehen winkelrecht zueinander, wenn

$$m_1 m_2 + 1 = 0$$

oder
$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

7. Die Gleichung einer Geraden, welche die Gerade $y = mx + b$ im Punkte (x_1, y_1) unter dem Winkel φ schneidet, ist

$$y - y_1 = \frac{m + \operatorname{tg} \varphi}{1 - m \operatorname{tg} \varphi} (x - x_1).$$

8. Die Winkel zweier Geraden (der unter 5. genannten Gleichungen) werden halbiert durch die Geraden

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \mp \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

9. Umwandlung der Koordinaten.

Die Koordinaten in Beziehung auf das alte Achsenkreuz werden mit x, y, auf das neue mit x', y' bezeichnet.

α) Parallele Verschiebung des Achsenkreuzes. Sind f, g die Koordinaten des neuen Anfangspunktes, so ist

$$x = f + x', \quad y = g + y'.$$

β) Drehung des Achsenkreuzes um den Anfangspunkt. Bezeichnet α den Winkel, den die alte positive x-Achse bei ihrer Drehung nach der alten positiven y-Achse hin zurücklegen mufs, um in die Lage der neuen positiven x'-Achse zu kommen, so ist

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

γ) Bei gleichzeitiger Verschiebung und Drehung verbinde man die Formeln unter α) und β) entsprechend.

δ) Umwandlung des rechtwinkligen Achsenkreuzes in ein schiefwinkliges. Ist die x'-Achse um α, die y'-Achse um β gegen die x-Achse geneigt, so wird

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \beta,$$
$$y = x' \sin \alpha + y' \sin \beta.$$

ε) Umwandlung von Parallelkoordinaten in **Polarkoordinaten.** Bezeichnet r den Leitstrahl, φ den Polarwinkel, so ist, wenn der Pol mit dem Anfangspunkte und die Polarachse mit der positiven x-Achse zusammenfallen, für rechtwinklige Koordinaten:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Sind x, y die Koordinaten eines **schiefwinkligen** Achsenkreuzes mit dem Winkel ω, so hat man

$$x = \frac{r \sin (\omega - \varphi)}{\sin \omega}, \quad y = \frac{r \sin \varphi}{\sin \omega}.$$

ζ) Umwandlung von Polarkoordinaten in Parallelkoordinaten. Bei den Bezeichnungen unter δ) ist für rechtwinklige Koordinaten:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

für schiefwinklige Koordinaten:

$$\cos \varphi = \frac{x + y \cos \omega}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y \sin \omega}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega}.$$

B. Krumme Linien in der Ebene.

a. Allgemeine Sätze.

1. Eine krumme Linie in der Ebene, bezogen auf Parallelkoordinaten, wird dargestellt durch eine **Gleichung:**

$$F(x, y) = 0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung nach y erhält man eine oder mehrere Gleichungen von der Form

$$y = f(x),$$

die ebensoviele zusammenhängende oder getrennte Zweige der Kurve darstellen.

Dasselbe gilt für die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten:

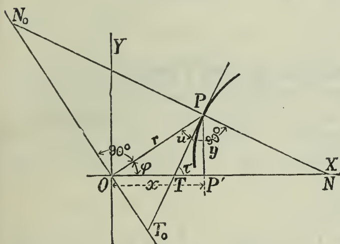
$$F(r, \varphi) = 0 \quad \text{oder} \quad r = f(\varphi).$$

Häufig ist es für die Rechnung bequemer, die Kurve mittels einer Hilfsveränderlichen t (Parameter) durch zwei Gleichungen darzustellen:

$$x = \psi_1(t); \qquad y = \psi_2(t).$$

2. Den Winkel τ, den die nach der Seite der positiven y-Achse liegende **Tangente** mit der positiven x-Achse bildet (s. Abb. 3), findet man für rechtwinklige Koordinaten aus

Abb. 3



$$\sin\tau = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\tau = \frac{dx}{ds},$$

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx};$$

hierin ist das Differential des **Bogens**

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

welches bei der Bestimmung von $\sin\tau$ und $\cos\tau$ mit dem für $\operatorname{tg}\tau$ sich ergebenden Vorzeichen genommen werden muß.

3. Bezeichnet man den Winkel, den die im Sinne des wachsenden φ gerichtete Tangente der Kurve mit der positiven Richtung des Leitstrahles r bildet, mit u (s. Abb. 3), so ist

$$\sin u = \frac{r\,d\varphi}{ds}, \qquad \cos u = \frac{dr}{ds}, \qquad \operatorname{tg} u = \frac{r\,d\varphi}{dr}.$$

Das Differential des Bogens

$$ds = \pm\sqrt{dr^2 + r^2\,d\varphi^2}$$

muß bei der Bestimmung von $\sin u$ und $\cos u$ mit dem für $\operatorname{tg} u$ sich ergebenden Vorzeichen genommen werden.

4. Die **Gleichung der Tangente** im Punkte (x, y) der Kurve ist

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0,$$

worin ξ und η die laufenden Koordinaten bezeichnen.

In Abb. 3 ist die **Tangente** $PT = y\frac{ds}{dy} = y\frac{dx}{dy}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Subtangente . . . $P'T = y\frac{dx}{dy}$.

Polartangente . . $PT_0 = \frac{r\,ds}{dr} = r\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}$.

Polarsubtangente . $OT_0 = \frac{r^2 d\varphi}{dr}$.

5. Die **Gleichung der Normale** im Punkte (x, y) ist für rechtwinklige Koordinaten, wenn ξ, η die laufenden Koordinaten bezeichnen,

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(\eta - y) = 0.$$

Normale . . . . $PN = y\frac{ds}{dx} = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Subnormale . . . $P'N = y\frac{dy}{dx}$.

Polarnormale . . . $PN_0 = \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$.

Polarsubnormale . $ON_0 = \frac{dr}{d\varphi}$.

6. Die Richtungswinkel der **unendlich fernen Punkte** einer Kurve findet man, indem man die Gleichung der Kurve auf Polarkoordinaten bezieht und diejenigen Winkel φ sucht, welche $r = \infty$ entsprechen. Ist die Kurve eine algebraische vom n^{ten} Grade, so teile man zuvor ihre Gleichung durch die höchste Potenz von r; hierzu schreibe man die Gleichung in der Form

$$F(x, y) = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \cdots + F_1 + F_0 = 0,$$

worin F_k die homogenen Glieder k^{ter} Ordnung von $F(x, y)$ bezeichnet.

7. Die **Asymptoten** sind die Tangenten in den unendlich fernen Punkten der Kurve. Man erhält ihre Gleichung, indem man in der Tangentengleichung für den Berührungspunkt (x, y) Polarkoordinaten (r, φ) einführt, durch die höchste Potenz von r teilt, sodann $r = \infty$ werden läßt und für φ die unter 6. bestimmten Richtungswinkel der unendlich fernen Punkte der Reihe nach einsetzt.

8. Zwei Kurven, welche einen Punkt gemeinsam haben, bilden in diesem eine **Berührung** k^{ter} Ordnung, wenn die ersten k Ableitungen

$$\frac{dy}{dx}, \ \frac{d^2y}{dx^2}, \ \ldots \ \frac{d^ky}{dx^k}$$

in dem betreffenden Punkte für beide Kurven einander gleich sind.

Bei einer Berührung von gerader Ordnung schneiden sich die Kurven in dem gemeinsamen Punkte, bei einer Berührung von ungerader Ordnung berühren sie sich, ohne sich zu schneiden.

Die **Tangente** einer Kurve bildet mit dieser im allgemeinen eine Berührung erster Ordnung, der Krümmungskreis (s. u. 9.) im allgemeinen eine Berührung zweiter Ordnung.

9. Der **Krümmungskreis** einer Kurve im Punkte (x, y) ist der Kreis, der mit der Kurve daselbst eine Berührung zweiter Ordnung (s. u. 8.) eingeht, oder, was dasselbe ist, drei unendlich nahe Punkte mit ihr gemein hat. Sein Mittelpunkt, der sogen. Krümmungsmittelpunkt, ist der Schnittpunkt der im Punkte (x, y) und der im benachbarten Punkte $(x + dx, y + dy)$ errichteten Normale. Der **Krümmungshalbmesser** ϱ ist

für rechtwinklige Koordinaten:

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

für Polarkoordinaten:

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

Der reziproke Wert von ϱ heißt die **Krümmung** der Kurve im Punkte (x, y).

10. Die Koordinaten X, Y des **Krümmungsmittelpunktes** für den Punkt (x, y) sind

$$X = x - \varrho\frac{dy}{ds}, \qquad Y = y + \varrho\frac{dx}{ds};$$

oder

$$X = x - \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad Y = y + \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

oder

$$X = x - \frac{dy}{d\tau}, \qquad Y = y + \frac{dx}{d\tau};$$

oder

$$X = x - \varrho \sin\tau, \qquad Y = y + \varrho\cos\tau.$$

11. Die **Evolute** einer Kurve ist der geometrische Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte; die gegebene Kurve heißt Evolvente der Evolute.

Die Gleichung der Evolute findet man, indem man aus der Gleichung der Evolvente und den Gleichungen für die Koordinaten X und Y des Krümmungsmittelpunktes die Koordinaten x, y eliminiert und dann X, Y als veränderlich betrachtet.

Jeder Krümmungshalbmesser ist Normale der Evolvente und Tangente der Evolute.

Die Bogenlänge zwischen zwei Punkten der Evolute ist gleich dem Unterschiede der zu diesen Punkten gehörigen Krümmungshalbmesser der Evolvente. Hieraus folgt, daß der Endpunkt eines

vollkommen biegsamen, unausdehnbaren Fadens, der auf die Evolute gewickelt ist, die Evolvente beschreibt, wenn der Faden, stets in Richtung der Tangente angezogen, von der Evolute abgewickelt wird.

Man findet umgekehrt, wenn die Evolute $F(X, Y)=0$ gegeben ist, die Gleichung der **Evolvente** aus den folgenden Beziehungen:

$$x=X-S\frac{dX}{dS},\quad y=Y-S\frac{dY}{dS},\quad F(X, Y)=0,$$

wenn (X, Y) einen beliebigen Punkt der Evolute und S deren Bogenlänge bis zu diesem Punkte bezeichnet, von dem Punkte aus gezählt, wo die Abwicklung beginnt.

12. Eine Kurve ist nach der positiven Seite der y-Achse **konkav,** wenn $\frac{d^2y}{dx^2}>0$; **konvex,** wenn $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ ist. In dem Punkte, wo $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ist, während $\frac{d^3y}{dx^3}\gtrless 0$, geht die Kurve aus der konkaven in die konvexe Form über, oder umgekehrt. Ein solcher Punkt heifst ein **Wendepunkt;** man ermittelt ihn durch Auflösung der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. Wenn die Wurzeln dieser Gleichung gleichzeitig den sämtlichen Bedingungen

$$\frac{d^3y}{dx^3}=0,\quad \frac{d^4y}{dx^4}=0,\ \ldots\ \frac{d^ky}{dx^k}=0,\quad \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}\gtrless 0$$

genügen, so ist der Punkt nur dann ein Wendepunkt, wenn k gerade ist; die Tangente hat alsdann (wegen 8.) eine Berührung gerader Ordnung mit der Kurve, schneidet diese also im Berührungspunkte. Ist hingegen k ungerade, so hat der Punkt die Eigenschaft, dafs seine Tangente mit der Kurve eine Berührung ungerader Ordnung eingeht, er ist aber kein Wendepunkt.

Für einen Wendepunkt ist $\varrho=\infty$.

13. Eine Kurve hat einen **Doppelpunkt,** wenn

$$F(x, y)=0;\quad \frac{\partial F}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0;$$

in diesem Falle erscheint $\operatorname{tg}\tau=\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{dy}}$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Der Wert für $\operatorname{tg}\tau$ wird bestimmt nach Seite 69, C; erhält man für $\operatorname{tg}\tau$ 2 reelle Werte, entsprechend 2 Tangenten, so ist der Punkt ein eigentlicher Doppelpunkt; bei 2 gleichen Werten für $\operatorname{tg}\tau$, 2 zusammenfallenden Tangenten, hat man einen Rückkehrpunkt (Spitze); sind die beiden Werte für $\operatorname{tg}\tau$ imaginär, so ist der Punkt ein isolierter oder zugeordneter Punkt.

14. **Inhalt der Fläche:**

α) zwischen der Kurve, der Abszissenachse und den Ordinaten y_0, y, die den Abszissen x_0, x entsprechen:

$$F = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx;$$

β) zwischen der Kurve und den zu den Polarwinkeln φ_0, φ gehörenden Leitstrahlen r_0, r:

$$F = {}^1\!/_2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2\,d\varphi.$$

15. **Bogenlänge.** Die Länge s einer Kurve, die zwischen zwei den Abszissen x_0, x entsprechenden Punkten liegt, ist

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Für Polarkoordinaten hat man

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi = \int_{r_0}^{r} \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\,dr.$$

16. **Einhüllende Kurve.** Die durch die Gleichung $F(x, y, p) = 0$, worin p ein veränderlicher Parameter ist, dargestellte Kurvenschar wird im allgemeinen von einer Kurve umhüllt, welche die einhüllende Kurve der Kurvenschar heifst. Ihre Gleichung ergibt sich durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0, \qquad F(x, y, p) = 0.$$

Ist die Kurvenschar bestimmt durch die Gleichung $F(x, y, p, q) = 0$ mit zwei veränderlichen Parametern p und q, zwischen denen die Bedingungsgleichung $\varphi(p, q) = 0$ besteht, so ergibt sich die Gleichung der einhüllenden Kurve durch Elimination von p und q aus den drei Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p}, \qquad F(x, y, p, q) = 0, \qquad \varphi(p, q) = 0.$$

17. **Trajektorie.** Die Kurve, welche die Kurvenschar $F(x, y, p) = 0$, worin p ein veränderlicher Parameter ist, rechtwinklig durchschneidet, heifst die rechtwinklige Trajektorie der Kurvenschar. Die Differentialgleichung der Trajektorie, deren Koordinaten ξ, η seien, ergibt sich, indem man aus den Gleichungen

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\partial F}{\partial \eta} : \frac{\partial F}{\partial \xi} \quad \text{und} \quad F(\xi, \eta, p) = 0$$

die Gröfse p eliminiert. Die Integration der entstandenen Gleichung liefert mit Rücksicht auf die willkürlich gewählte Unveränderliche eine Schar von Trajektorien.

b. Kegelschnitte.

1. Allgemeines.

1. Eine Meridianebene M, d. i. eine Ebene durch die Drehachse eines geraden Kreiskegels (vrgl. S. 124), sei begrenzt durch die Mantellinien S_1 und S_2; die Kegelspitze sei s. Eine zu M winkelrechte Ebene E schneidet den Kegel: 1) in einer **Ellipse,** wenn S_1 und S_2 von s aus auf derselben Seite durch E geschnitten werden; 2) in einer **Parabel,** wenn E parallel S_1 oder S_2 ist; 3) in einer **Hyperbel,** wenn E zwar S_1 und S_2 schneidet, jedoch die eine der beiden Mantellinien erst in ihrer Verlängerung über s hinaus. Diese drei Kurven heifsen daher Kegelschnitte. Ist im Falle 1) E winkelrecht zur Achse des Kegels, so ist die Schnittfigur ein **Kreis.** Im Falle 3) liefert eine zu E parallele und durch s gehende Ebene E_1 beim Schnitt des Kegelmantels zwei Parallelen zu den Asymptoten der Hyperbel (s. S. 99 und Abb. 6, S. 100). Eine gleichseitige Hyperbel (für die $\alpha = 45^0$) erhält man nur bei Kegeln, deren Spitzenwinkel $\geqq 90^0$ ist.

2. Bewegt sich ein Punkt P in der Weise, dafs seine jedesmaligen Abstände PF von einem festen Punkte F und PQ von einer festen Geraden in einem unveränderlichen Verhältnis $PF:PQ = e$ stehen, so ist der geometrische Ort des Punktes eine Ellipse, wenn $e < 1$; eine Parabel, wenn $e = 1$; eine Hyperbel, wenn $e > 1$ ist. Das Verhältnis e ist die (numerische) Exzentrizität des betreffenden Kegelschnittes. Der feste Punkt F liegt auf der Hauptachse und ist ein Brennpunkt; die feste Gerade steht winkelrecht zur Hauptachse und heifst **Leitlinie** (Direktrix). Beim Kreis ist F der Mittelpunkt und die Leitlinie liegt im Unendlichen; hierbei ist $e = 0$.

3. a) Die **allgemeine Gleichung** der Kegelschnitte in Parallelkoordinaten hat die Form

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_1 x + 2 a_2 y + a_0 = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, jenachdem die Diskriminante $a_{11} a_{22} - a_{12}^2$ positiv, null oder negativ ist.

Die allgemeine Form der Parabelgleichung ist also

$$(ax + by + c)^2 + Ax + By + C = 0.$$

b) Der **Mittelpunkt** von Ellipse und Hyperbel unter a) ist der Schnittpunkt der geraden Linien

$$a_{11} x + a_{12} y + a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_{12} x + a_{22} y + a_2 = 0.$$

c) Aus der allgemeinen Gleichung von Ellipse und Hyperbel in rechtwinkligen Parallelkoordinaten findet man die **Mittelpunktsgleichung:**

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 = k$$

und die **Hauptachsengleichung:**

$$g_1 x'^2 + g_2 y'^2 = k.$$

Der Winkel φ, um den das alte Koordinatenkreuz im positiven Sinne gedreht werden mufs, um in die Lage des neuen zu gelangen, ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 a_{12}}{a_{11} - a_{22}};$$

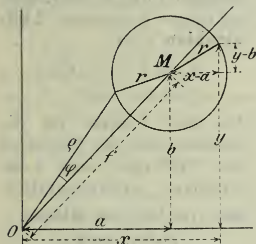
g_1 und g_2 findet man als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$g^2 - g\,(a_{11} + a_{22}) + a_{11}\,a_{22} - a_{12}{}^2 = 0.$$

$a_{11} + a_{22}$ heifst die Invariante der Kegelschnittgleichung.

d) Die allgemeine Kegelschnittgleichung ist die eines Kreises, wenn $a_{12} = 0$; $a_{11} = a_{22}$; a_{11} und k gleiches Vorzeichen haben.

Abb. 4.



2. Kreis.

1. **Allgemeine Gleichung** (Abb. 4):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

2. **Mittelpunktsgleichung** (Koordinaten-Anfangspunkt im Mittelpunkt M):

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

3. **Scheitelgleichung** (Koordinaten-Anfangspunkt in der Kreislinie, OX ein Durchmesser):

$$y^2 = x\,(2r - x).$$

4. **Polargleichung** für die Achse OM:

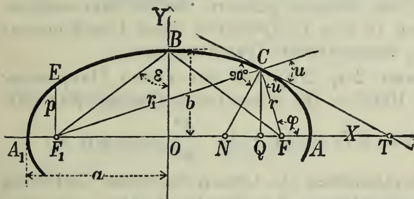
$$\varrho^2 - 2\,\varrho f \cos\varphi + f^2 = r^2.$$

5. **Umfang** und **Inhalt** der Kreisfläche s. S. 2 u. f., Inhalte der Kreisabschnitte und Kreisausschnitte s. S. 36 u. 37, sowie S. 127 u. 128.

3. Ellipse und Hyperbel.

Für die Ellipse (Abb. 5) gelten im folgenden die oberen, für die Hyperbel (Abb. 6, S. 100) die unteren Zeichen.

Abb. 5.



1. **Mittelpunktsgleichung.** Bezieht man die Kurven auf ihre Hauptachse, so ist die Gleichung, wenn $OA = a$ und OB bezw. $AD = b$ die beiden Halbachsen bezeichnen,

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hieraus ergibt sich $\quad y = \pm\,\frac{b}{a}\sqrt{\pm\,(a^2 - x^2)}.$

2. **Scheitelgleichung.** Verlegt man den Anfangspunkt der Koordinaten in den Scheitel A_1 (in der x-Achse), so ist die Gleichung:

$$\pm\,y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2 = 2\,p\,x - \frac{p\,x^2}{a}.$$

3. Die **Brennpunkte** F und F_1 haben auf der x-Achse von O den Abstand

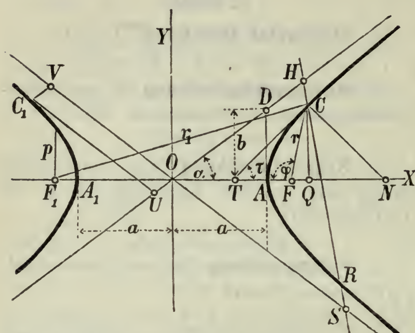
$$OF = OF_1 = \pm\sqrt{a^2 \mp b^2}.$$

Bei der Ellipse ist $BF = BF_1 = OA = a$, bei der Hyperbel $OF = OF_1 = OD$. Das Verhältnis

$$\frac{OF}{OA} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a} = e = \sin \varepsilon, \text{ bezw. } \frac{OF}{OA} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

heifst die (numerische) Exzentrizität des Kegelschnittes.

Abb. 6.



4. Die von den Brennpunkten nach einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes gezogenen **Leitstrahlen** sind

$$r = \pm (a - ex),$$
$$r_1 = a + ex.$$

Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Leitstrahlen unveränderlich, also ist bei der Ellipse

$$r + r_1 = 2a$$

(Fadenkonstruktion), bei der Hyperbel

$$r - r_1 = \pm 2a.$$

5. Die Ordinate in einem Brennpunkte ist

$$p = \pm a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a} \cdot$$

Die Gröfse $2p$ heifst der **Parameter.**

6. **Zugeordnete** (konjugierte) **Durchmesser** nennt man solche Durchmesser, von denen der eine alle Sehnen halbiert, die zu dem anderen parallel sind. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel zu dem diesem zugeordneten Durchmesser.

Bilden diese Durchmesser $2a_1$, $2b_1$ mit der ersten Hauptachse die Winkel α, β (Abb. 10 S. 103), so ist, wenn beide Winkel spitz sind,

$$a^2 \pm b^2 = a_1^2 \pm b_1^2; \quad ab = a_1 b_1 \sin(\alpha + \beta); \quad \frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Die auf zwei zugeordnete Durchmesser als Achsen bezogene Gleichung beider Kegelschnitte in schiefwinkligen Koordinaten lautet

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1.$$

7. **Gleichung der Tangente** im Punkte (x, y): $\dfrac{\xi x}{a^2} \pm \dfrac{\eta y}{b^2} = 1.$

Gleichung der Normale: $\dfrac{\xi - x}{b^2 x} = \pm \dfrac{\eta - y}{a^2 y} \cdot$

Hierbei bedeuten ξ und η die laufenden Koordinaten.
Tangente und Normale halbieren die Winkel der Leitstrahlen.

8. Die Hyperbel nähert sich auf ihren in das Unendliche gehenden Zweigen den **Asymptoten,** d. h. den beiden Geraden $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$, immer mehr, ohne diese im Endlichen zu erreichen. Jede Asymptote bildet mit der x-Achse einen Winkel α, so daſs $\operatorname{tg} \alpha = b : a$ ist.

Zieht man eine Gerade HS (Abb. 6), welche die Hyperbel und die Asymptoten schneidet, so sind die beiden Stücke CH und RS zwischen der Hyperbel und den Asymptoten einander gleich. Hieraus folgt eine einfache **Konstruktion der Hyperbel,** wenn die Asymptoten und ein Punkt C der Hyperbel gegeben sind.

Das zwischen den Asymptoten liegende Stück einer zur x-Achse winkelrechten Geraden wird durch einen Hyperbelast so geteilt, daſs das Produkt der Teile unveränderlich gleich b^2 ist.

Das zwischen den beiden Hyperbelästen liegende Stück einer zur x-Achse parallelen Geraden wird durch eine Asymptote so geteilt, daſs das Produkt der Teile unveränderlich gleich a^2 ist.

Das zwischen den Asymptoten liegende Stück einer Tangente wird im Berührungspunkte halbiert. Die von beliebigen Tangenten und den Asymptoten gebildeten Dreiecke sind flächengleich.

Wenn C_1U und C_1V, Abb. 6, den Asymptoten parallel sind, so ist

$$C_1U \cdot C_1V = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Die auf die Asymptoten als Achsen bezogene **Gleichung der Hyperbel** in schiefwinkligen Koordinaten lautet:

$$x' y' = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

9. Für einen beliebigen Punkt C (x, y) (s. Abb. 5 u. 6) ist die

Tangente $CT = \frac{a y}{b x} \sqrt{\pm (a^2 - e^2 x^2)}$;

Normale $CN = \frac{b}{a} \sqrt{\pm (a^2 - e^2 x^2)}$;

Subtangente $TQ = \mp \frac{a^2}{x} \pm x$; **Subnormale** $NQ = \mp \frac{b^2}{a^2} x$.

10. **Gleichseitige Hyperbel.**

Mittelpunktsgleichung: $x^2 - y^2 = a^2$.

Asymptotengleichung: $x' y' = \tfrac{1}{2} a^2$.

Parameter: $2p = 2a$.

Ferner ist $a = b$ $e = \sqrt{2}$ $\alpha = 45^0$.

Die Asymptoten stehen winkelrecht zu einander.

11. **Krümmungshalbmesser** im Punkte C (Abb. 5 u. 6):

$$\varrho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r r_1)^{3/2}}{a b} = \frac{p}{\sin^3 FCT} = \frac{p}{\sin^3 u}.$$

Konstruktion (Abb. 7): Man errichte die Winkelrechte CG im Punkte C zur Tangente (Konstruktion der Tangente s. S. 103), ziehe CF

durch den Brennpunkt F, $GH \perp GC$, $HK \perp CH$, dann ist K der Krümmungsmittelpunkt.

Abb. 7.

Für den Scheitel A ist bei Ellipse und Hyperbel der Krümmungshalbmesser

$$\varrho' = AM = \frac{b^2}{a} = p;$$

für den Scheitel B ist bei der Ellipse der Krümmungshalbmesser

$$\varrho'' = BN = \frac{a^2}{b}.$$

Die Krümmungsmittelpunkte M und N für die Scheitel der Ellipse erhält man (Abb. 7), indem man durch D eine Gerade winkelrecht zu AB zieht.

12. **Polargleichung** der Ellipse und Hyperbel, bezogen auf den Brennpunkt F als Pol und FA als Polarachse (Abb. 5 u. 6):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} = \pm \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}.$$

13. **Fläche.** Bei der Ellipse ist (Abb. 5):

$$\text{Fläche } OBCQ = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

Der Inhalt der ganzen Ellipse ist πab.

Bei der Hyperbel ist (Abb. 6):

$$\text{Fläche } ACQ = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$$

Der Subtrahend stellt die Fläche OCA vor.

$$\text{Fläche } OA_1C_1V = \frac{ab}{4} + \frac{ab}{2} \ln \frac{2\,OV}{OD}.$$

Fläche der gleichseitigen Hyperbel s. S. 65.

14. **Umfang der Ellipse:**

$$U = \pi(a+b)\left[1 + {}^1/_4 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + {}^1/_{64} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + {}^1/_{256} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \ldots\right]$$
$$= \pi(a+b)\,\varkappa.$$

Zur Berechnung von $\pi(a+b)$ kann man für $(a+b) = n$ die Tafel auf S. 2 bis 23, zur Berechnung von $\varkappa$ folgende Angaben benutzen:

$\frac{a-b}{a+b} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\varkappa =$	1,0025	1,0100	1,0226	1,0404	1,0635	1,0922	1,1267	1,1677	1,2155	1,2732

15. **Konstruktion der Ellipse aus den beiden Halbachsen** a und b (Abb. 8).

α) Man beschreibe um O Kreise mit a, b und $a+b$, ziehe einen beliebigen Halbmesser $OJGH$ und durch J und G Parallele zum Achsenkreuz, so ist deren Schnittpunkt C ein Punkt der Ellipse und HCN die Normale in diesem Punkte.

Abb. 8.

Abb. 9.

β) Man lasse die Strecke $a+b$ mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleiten. Der Teilpunkt zwischen a und b beschreibt dann die Ellipse.

16. **Konstruktion der Tangente**

α) **in einem Punkte** C. (Abb. 5 und 6, S. 99 und 100.) Man halbiere den Winkel der Leitstrahlen CF und CF_1; vrgl. u. 7., S. 100

β) **von einem Punkte** P **aufserhalb** (Abb. 9).

Man beschreibe um O mit a und über PF_1 als Durchmesser Kreise.

Die Verbindungslinie des Schnittpunktes T mit P ist die Tangente. Zieht man um P mit PF_1 und um F mit $2a$ Kreise, so findet man durch Verbindung des Schnittpunktes S mit F den Berührungspunkt C.

17. **Konstruktion der Hauptachsen einer Ellipse,** wenn gegeben sind $DD_1 = 2a_1$ und $EE_1 = 2b_1$ (Abb. 10) als zugeordnete Durchmesser der Gröfse und Lage nach. Man fälle $EH \perp DD_1$, mache $EG = EG_1 = OD_1 = a_1$, so ergibt sich die Lage einer Hauptachse durch Halbierung des Winkels GOG_1. Die Längen der Hauptachsen sind

$$2a = OG_1 + OG$$
$$2b = OG_1 - OG.$$

Abb. 10.

Oder: Man konstruiere OG wie vorhin, beschreibe über OG als Durchmesser einen Kreis und verbinde seinen Mittelpunkt N mit E. Die Schnittpunkte J und K der Geraden NE mit dem Kreise sind Punkte der Hauptachsen, ihre Entfernungen von E die Längen der halben Hauptachsen.

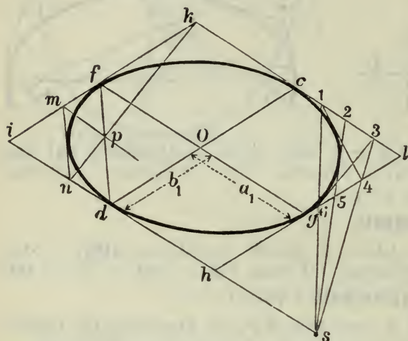
Ein Kreis, dessen Mittelpunkt M in der kleinen Achse liegt, und der durch G und G_1 geht, schneidet die grofse Achse in den Brennpunkten F und F_1.

Führt man die Linie $G_1 E H$ so, dafs sich G_1 auf $O G_1$ und H auf $D D_1$ bewegt, so beschreibt der Punkt E die Ellipse.

Der vierte harmonische Punkt zu G_1, H und G, dem Punkte H zugeordnet, ist der Krümmungsmittelpunkt zu E.

18. **Konstruktion der Ellipse aus den zugeordneten Durchmessern** cd und fg (Abb. 11).

Abb. 11.



α) Man mache $hdi \| lck \| gf$ und $lgh \| kfi \| cd$, verlängere ih um $hs = dh$, teile cl in beliebig viele (hier 4) gleiche Teile, ziehe $s3$, $s2$, $s1$; die Schnittpunkte mit gl seien 4, 5, 6, dann sind die Geraden 14, 25, 36 Tangenten an die Ellipse.

β) Man ziehe fd und nehme darauf beliebige Punkte p an, ziehe kpn und $pm \| gf$, so ist mn Tangente an die Ellipse.

4. Parabel.

1. **Scheitelgleichung:** $y^2 = 2px$, worin $2p$ der Parameter.

2. Der **Brennpunkt** F hat vom Scheitel A den Abstand $AF = \frac{1}{2} p$ (Abb. 12, S. 105), p ist die Ordinate im Brennpunkte F. Die Linie LL_1, die im Abstande $-\frac{1}{2} p = AL$ zur y-Achse parallel läuft, heifst **Leitlinie.** (Vrgl. S. 98.)

Es ist dann für jeden Punkt der Parabel $FE = EB = x + \frac{1}{2} p$.

3. Ein Durchmesser EX der Parabel halbiert alle Sehnen ab, die zur Tangente EY' in seinem Endpunkte parallel sind, indem er mit diesen Sehnen den Winkel τ bildet; er ist parallel zu AX und heifst der der Richtung EY' **zugeordnete Durchmesser.** Es ist also $am = mb$.

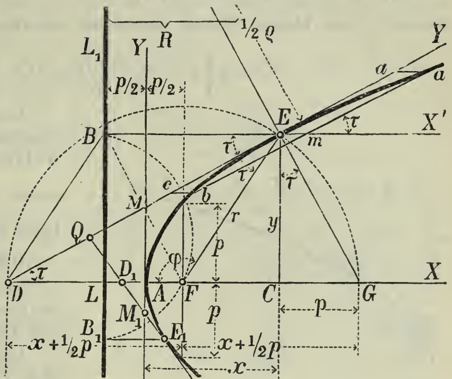
Betrachtet man EX' und EY' als Koordinatenachsen, so ist die Gleichung der Parabel

$$y'^2 = \frac{2p}{\sin^2 \tau} x' = 2p' x'.$$

4. **Gleichung der Tangente:** $\eta y = p(\xi + x)$.
Gleichung der Normale: $\eta - y = -\frac{y}{p}(\xi - x)$.

$\Big\}$ $\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} u = \frac{p}{y}$. (Vergl. S. 93 u. 94.)

Hierin bezeichnen ξ, η die Koordinaten der Tangente bzw. der Normale. Die Tangente ED und die Normale EG halbieren die Winkel FEB und FEX' Die Winkel CEG, BED, DEF, FDE sind $= \tau$. Ferner ist $DA = AC = x$; $DF = FE = FG = x + \frac{1}{2}p$. Die y-Achse halbiert den Tangentenabschnitt zwischen der x-Achse und dem Berührungspunkte; also $DM = ME$ und $D_1M_1 = M_1E_1$.



Subtangente $DC = 2x$. **Subnormale** $CG = p =$ konst.

5. **Polargleichung,** bezogen auf F als Pol, FA als Polarachse:

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi} = \frac{p}{2\cos^2 \frac{1}{2}\varphi}.$$

6. **Krümmungshalbmesser:** $\varrho = \frac{(p + 2x)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sin^3 \tau}$.

Die Projektion von ϱ auf die x-Achse ist gleich $2EF = 2EB$. Demnach ist $ER = \frac{1}{2}\varrho$. Auch gilt die Konstruktion von ϱ, wie in Abb. 7 für Ellipse und Hyperbel angegeben (s. S. 102). Krümmungshalbmesser im Scheitel $= p$.

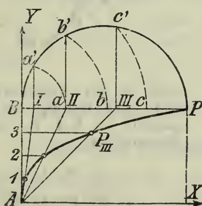
7. **Gleichung der Evolute:** $27py^2 = 8(x - p)^3$. Es ist dies die Neilsche oder semikubische Parabel.*)

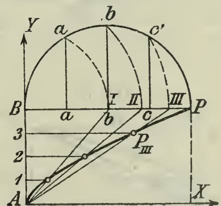
8. **Fläche** $AEC = \frac{2}{3}xy$; $aEb = \frac{2}{3}abcd$. Der Flächeninhalt eines beliebigen flachen Segmentes von der Grundlinie g und der Höhe h ist annähernd $F = \frac{2}{3}gh$.

---

*) Konstruktion der **semikubischen** und der **kubischen Parabel**. Gegeben der Scheitel A, die Achse AX und ein Punkt P der Parabel:

Konstruiere das Rechteck $ABPX$, teile AB (durch 1, 2, 3) und BP (durch a, b, c) in gleich viele (hier vier) gleiche Teile und beschreibe über BP einen Halbkreis. Mache dann z. B. in Abb. 13 die Sehne $Bc' = Bc$ und ziehe c'III winkelrecht zu BP (bzw. ziehe in Abb. 14 cc' winkelrecht zu BP und BIII = Sehne Bc'); AIII schneidet die zu AX parallele Linie 3 P_{III} im Punkte P_{III} der Parabel. Ist der Halbkreis für die Zeichnung unbequem, so verwende man


Abb. 13. **Kubische Parabel.**


Abb. 14. **Semikubische Parabel.**

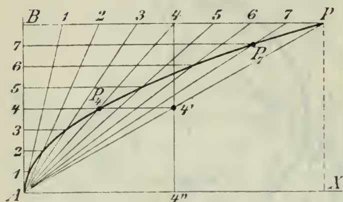
9. **Bogenlänge** AE (Abb. 12):

$$s=\frac{p}{2}\left\{\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1+\frac{2x}{p}\right)}+\ln\left(\sqrt{\frac{2x}{p}}+\sqrt{1+\frac{2x}{p}}\right)\right\}=EM+\frac{p}{2}\ln\operatorname{ctg}\frac{\iota}{2}.$$

Wenn $\frac{x}{y}$ ein kleiner Bruch ist, so ist annähernd

$$s=y\left[1+{}^2/_3\left(\frac{x}{y}\right)^2-{}^2/_5\left(\frac{x}{y}\right)^4\right].$$

Abb. 16.



Dieselbe Formel gilt näherungsweise für die Länge eines beliebigen flachen Bogens, wenn man $\frac{2h}{g}$ für $\frac{x}{y}$ und g für y setzt (vrgl. 8.).

10. Konstruktion der Parabel.

α) Gegeben Scheitel A, Achse AX und ein Punkt P der Parabel (Abb. 16).

Mache $AB \perp AX$ in A; $PB \perp AB$; PB und AB sind in gleich viele (hier 8) gleiche Teile geteilt. Verbinde z. B. Punkt 7 auf PB mit A, ziehe durch Punkt 7 auf AB eine Parallele zu AX, so ist P_7 ein Punkt der Parabel. Oder: Zieht man von einem beliebigen Punkt 4 der zu AX parallelen PB $44' \perp BP$ und $4'P_4 \| BP$, so ist deren Schnittpunkt P_4 mit $4\,A$ ein Punkt der Parabel.

Abb. 17.

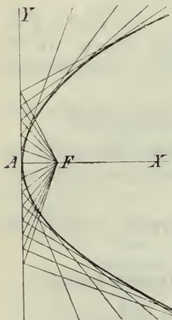
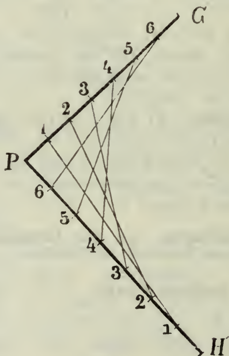


Abb. 18.



β) Gegeben Scheitel A und Brennpunkt F (Abb. 17).

Man lasse den Scheitel eines rechten Winkels an AY so gleiten, dafs der eine

Abb. 15.

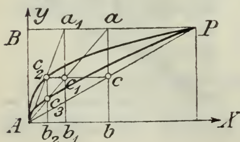


Abb. 15 zur Konstruktion. Wähle c beliebig auf AP, acb, $a_1c_1b_1$, $c_2c_3b_2$ winkelrecht zu AX, cc_1c_2 parallel zu XA, c_1 und c_3 auf Aa, c_2 auf Aa_1. Alsdann ist

c_1 ein Punkt der gemeinen Parabel,

c_2 ein Punkt der kubischen Parabel,

c_3 ein Punkt der semikubischen Parabel.

Schenkel immer durch F geht; der andere Schenkel bildet alsdann jederzeit eine Tangente an die Parabel.

Oder (Abb. 12): Man ziehe in einem beliebigen Punkte C der x-Achse $CE \perp AF$, mache $CG = 2\,AF = p$. Ein Kreis um F mit FG bestimmt auf CE den Parabelpunkt E und ferner den Schnittpunkt D der Tangente ED mit der x-Achse.

γ) Gegeben zwei Tangenten PG und PH und ihre Berührungspunkte G und H (Abb. 18).

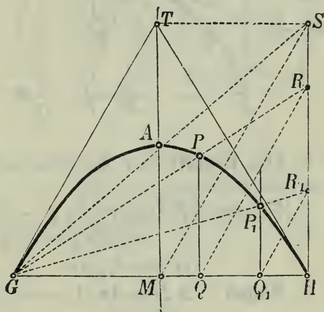
Man teile PG und PH in n (hier 7) gleiche Teile, so sind 11, 22, 33, 44, 55 und 66 Tangenten an die Parabel.

Diese Konstruktion kann mit Vorteil bei der Zeichnung flacher Bogen benutzt werden.

δ) Gegeben eine zur y-Achse parallele Sehne GH und ein Punkt P der Parabel (Abb. 19).

Man ziehe HS und $PQ \perp GH$, ferner GPR und QR. Ist $Q_1P_1 \perp GH$, $Q_1R_1 \parallel QR$, so schneidet GR_1 die Linie Q_1P_1 in dem Parabelpunkte P_1. — QR ist die Richtung der Tangente GT in G. Das Lot MT in der Mitte M auf GH ist die x-Achse und A der Scheitel, so daß $MA = AT$. Durch die Bestimmung der Tangenten GT und HT läßt sich das Verfahren auch auf die Konstruktion γ) zurückführen.

Abb. 19.



Sind H und P und die Lage der x-Achse MT gegeben, so fälle man $HM \perp MT$, verlängere HM um sich selbst bis G und konstruiere weiter, wie vorstehend angegeben.

11. **Konstruktion einer Tangente an die Parabel**

α) **in einem Punkte** E (Abb. 12 S. 105).

Man mache $AD = AC$ oder $DF = FE$, so ist DE die Tangente.

Oder: Eine Parallele durch E mit der x-Achse schneidet die Leitlinie LL_1 in B. BF wird durch die y-Achse in der Mitte M geschnitten, so daß $BM = MF$. EM ist die gesuchte Tangente.

β) **von einem Punkte** Q **außerhalb der Parabel** (Abb. 12 S. 105).

Man beschreibe um Q mit QF einen Kreis, ziehe durch B und B_1 Parallele zu AX, dann sind E und E_1 Berührungspunkte der Tangenten QE und QE_1.

c. Zyklische Kurven.

1. Gemeine Zykloide.

1. Die Zykloide ist die Kurve, die ein Punkt A einer Kreislinie AB beschreibt, wenn diese, ohne zu gleiten, sich auf einer Geraden AC abwälzt (Abb. 20).

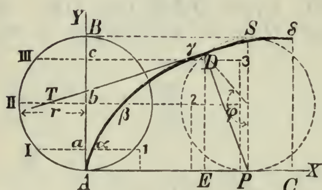
2. **Konstruktion** (Abb. 20): Man mache $AC =$ Bogen $AB = \pi r$, teile beides in n gleiche Teile, konstruiere die Schnittpunkte 1, 2, 3 und mache $1\alpha = a\mathrm{I}$, $2\beta = b\mathrm{II}$ und $3\gamma = c\mathrm{III}$, dann sind α, β, γ Punkte der Zykloide. Oder: Kreise, um die Teilpunkte von AC mit den Sehnen $A\mathrm{I}$, $A\mathrm{II}$, $A\mathrm{III}$ beschrieben, werden von der Zykloide umhüllt.

3. **Gleichungen** der Zykloide, bezogen auf AC als x-Achse und AB als y-Achse:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi); \qquad y = r(1 - \cos\varphi).$$

$$x = r \arccos \frac{r-y}{r} \pm \sqrt{(2r-y)y}.$$

Abb. 20.



4. Die **Normale** im Punkte D geht durch den Berührungspunkt P des erzeugenden Kreises und der Grundlinie AC. PD Normale, SDT Tangente.

$$PD = 2r\sin {}^1\!/_2\varphi = \sqrt{2ry}.$$

5. **Krümmungshalbmesser:**

$$\varrho = 4r\sin {}^1\!/_2\varphi = 2\sqrt{2ry}.$$

ϱ ist also doppelt so lang wie die Normale. Für den Scheitel δ ist $\varrho = 4r$; für A ist $\varrho = 0$.

6. Die **Evolute** der Zykloide ist eine der ursprünglichen Zykloide kongruente Kurve.

7. **Fläche** $AED = r^2({}^3\!/_2\varphi - 2\sin\varphi + {}^1\!/_4\sin 2\varphi)$

$$= {}^3\!/_2 rx - {}^1\!/_2 y\sqrt{(2r-y)y};$$

$$AC\delta = {}^3\!/_2\pi r^2.$$

8. **Bogen** $AD = 4r(1 - \cos {}^1\!/_2\varphi) = 4r - 2\sqrt{2r(2r-y)}.$

$$A\delta = 4r.$$

9. **Die verlängerte und die verkürzte Zykloide** entstehen, wenn der erzeugende Punkt aufserhalb oder innerhalb des rollenden Kreises im Abstande p von dessen Mittelpunkte liegt. Die Gleichungen sind $x = r\varphi - p\sin\varphi$; $\quad y = r - p\cos\varphi$.

2. Epizykloide und Hypozykloide.

1. Ein Punkt A einer Kreislinie vom Halbmesser $AC = r$, die sich, ohne zu gleiten, auf einer Kreislinie vom Halbmesser $AO = R$ abwälzt, beschreibt eine **Epizykloide**, wenn die Berührung der Kreise aufsen (Abb. 21), eine **Hypozykloide**, wenn die Berührung innen (Abb. 22) stattfindet. R Halbmesser des Grundkreises, r der des erzeugenden Kreises.

2. **Konstruktion** (Abb. 21 und 22): Man teile den Halbkreis-Bogen AB und den Winkel $AOD = \frac{r}{R}180^0$ in n gleiche Teile, ziehe die Halbmesser 1, 2, 3, 4 durch O und die Kreisbogen 5, 6, 7, 8 um O;

macht man nun $a_1 a = \alpha_1 \alpha$, $b_1 b = \beta_1 \beta$ und $c_1 c = \gamma_1 \gamma$, so sind A, a, b, c, D Punkte der Epizykloide (Abb. 21) bzw. der Hypozykloide (Abb. 22). Oder: Kreise, um die Schnittpunkte der Halbmesser 1, 2, 3 und des Grundkreises mit den Sehnen $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$ beschrieben, werden von der Kurve umhüllt.

3. **Gleichungen** (die oberen Zeichen gelten für die Epizykloide, die unteren für die Hypozykloide).

$$x = (R \pm r) \cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right) \mp r \cos\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right);$$

$$y = (R \pm r) \sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right) - r \sin\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right).$$

Die Hypozykloide R, r ist, jenachdem $r \lessgtr R$, übereinstimmend mit der Hypozykloide R, $R - r$ oder der Epizykloide R, $r - R$.

Abb. 21.

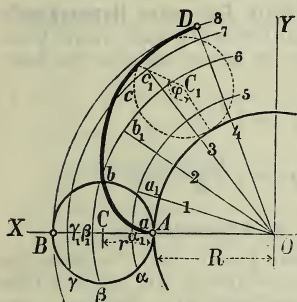
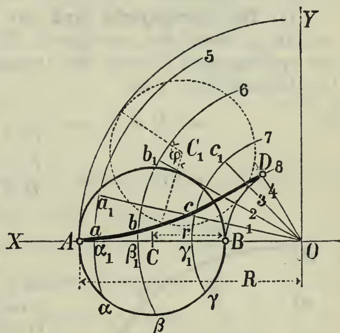


Abb. 22.



4. Die **Normale** für irgend einen Punkt geht durch den Berührungspunkt des erzeugenden Kreises und des Grundkreises für die betreffende Lage.

5. **Krümmungshalbmesser:** $\varrho = \dfrac{4r(R \pm r)}{R \pm 2r} \sin {}^1\!/_2\, \varphi$.

$$\text{Für } A \text{ ist } \varrho = 0;$$

$$\text{für } D \text{ „ } \varrho = 4r\frac{R \pm r}{R \pm 2r}.$$

6. Die **Evolute** ist eine ähnliche Epi- bzw. Hypozykloide.

7. **Fläche** zwischen OA, der Kurve und einem Leitstrahl:

$$F = \frac{r(R \pm r)(R \pm 2r)}{2R}(\varphi - \sin\varphi).$$

8. **Bogen** $s = 4r\dfrac{R \pm r}{R}(1 - \cos {}^1\!/_2\,\varphi)$; Bogen $AD = 4r\dfrac{(R \pm r)}{R}$.

9. Die Gleichungen der Kurven werden (durch Elimination von φ) algebraisch, wenn R und r ein mefsbares Verhältnis haben.

Für $r = \frac{1}{2} R$ wird die Hypozykloide eine Gerade in der Richtung AO. Jeder nicht im Umfange des erzeugenden Kreises liegende Punkt beschreibt dann eine Ellipse.

Für $r = \frac{1}{4} R$ wird die Hypozykloide zur **Astrois** (Sternkurve), ihre Gleichung lautet:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$

Für $r = R$ wird die Epizykloide zur **Kardioide** (Herzkurve). Die Gleichung der Kardioide lautet, wenn A (Abb. 21) der Koordinaten-Anfangspunkt und AO die positive Richtung der x-Achse ist:

$$(y^2 + x^2 - 2\,Rx)^2 = 4\,R^2\,(x^2 + y^2),$$

oder in den entsprechenden Polarkoordinaten ϱ und ψ:

$$\varrho = 2\,R\,(1 + \cos\psi).$$

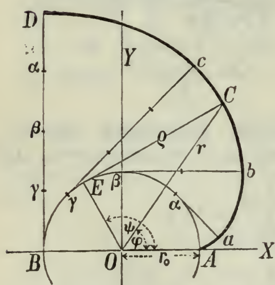
Für $r = \infty$ wird der rollende Kreis eine gerade Linie, die entsprechende Kurve eine Kreisevolvente (s. nachst. u. **3.**).

10. **Die verlängerte und die verkürzte Epi- oder Hypozykloide** entstehen, wenn der erzeugende Punkt aufserhalb bzw. innerhalb des erzeugenden Kreises im Abstande p von dessen Mittelpunkte liegt. Die Gleichungen sind

$$x = (R \pm r)\cos\left(\frac{r}{R}\,\varphi\right) \mp p\cos\left(\frac{R \pm r}{R}\,\varphi\right);$$

$$y = (R \pm r)\sin\left(\frac{r}{R}\,\varphi\right) - p\sin\left(\frac{R \pm r}{R}\,\varphi\right).$$

Abb. 23.



3. Kreisevolvente.

1. Jeder Punkt einer Geraden, die sich, ohne zu gleiten, auf einem Kreise abwälzt, beschreibt eine Kreisevolvente. (Fadenkonstruktion.)

2. **Konstruktion** (Abb. 23): Man mache BD gleich dem Kreisbogen AB und teile beide in n (hier 4) gleiche Teile: αa ist Tangente in α von der Länge $\alpha D = \frac{1}{4} BD$; βb ist Tangente in β von der Länge $\beta D = \frac{2}{4} BD$, usw.; dann sind A, a, b, c, D Punkte der Evolvente.

3. **Gleichungen:** $x = r_0(\cos\psi + \psi\sin\psi)$;

$$y = r_0(\sin\psi - \psi\cos\psi).$$

Polargleichung: $\varphi = \sqrt{\dfrac{r^2}{r_0^2} - 1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{r^2}{r_0^2} - 1}.$

4. Der **Krümmungshalbmesser** ϱ eines Punktes C ist die Tangente CE von C an den Grundkreis, also gleich der Länge des Kreisbogens AE.

5. **Bogenlänge:** Der Bogen AC, der dem Winkel ψ entspricht, ist

$$s = \frac{\varrho^2}{2 r_0} = \frac{r_0 \psi^2}{2}.$$

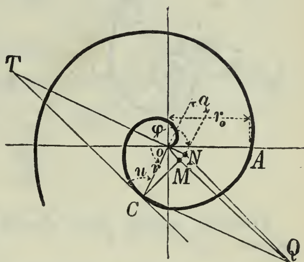
6. **Fläche:** $ACO = {}^1/_6 r_0{}^2 \psi^3$.

d. Spiralen.

1. Archimedische Spirale.

1. Die Archimedische Spirale entsteht, wenn sich ein Punkt C (Abb. 24) mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einem Strahle OC bewegt, der sich seinerseits gleichförmig um einen festen Punkt, den Pol O, dreht. Entspricht einer einmaligen Umdrehung von OC ($= 360^0$) der Weg r_0 des Punktes C auf OC, so ist nach $\frac{1}{n}$ Umdrehung die Länge des Leitstrahles $r = \frac{r_0}{n}$, woraus sich die Konstruktion der Spirale ergibt.

Abb. 24.



2. **Polargleichung:** $r = a\varphi = \frac{r_0}{2\pi}\varphi$, wenn r den Leitstrahl und φ den Polarwinkel, von OA aus gerechnet, bezeichnet.

Zieht man in einem beliebigen Punkte C die Tangente CT, ferner $OT \perp OC$ und $CN \perp CT$, so ist die **Polarsubtangente** $OT = \frac{r^2}{a}$; die **Polarsubnormale** $ON = a =$ konst. Hieraus ergibt sich die Konstruktion der Tangente an die Spirale. (Vrgl. hiermit die hyperbolische Spirale, u. **2.**)

4. **Krümmungshalbmesser** $\varrho = \frac{(a^2 + r^2)^{3/2}}{2a^2 + r^2}$.

Konstruktion: Errichte auf CN (Abb. 24) in N und auf OC in C Winkelrechte; beide schneiden sich in Q; zieht man OQ, so schneidet diese die Normale CN im Krümmungsmittelpunkte M.

5. **Bogenlänge** $s = \frac{r_0}{4\pi}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\varphi\right]$,

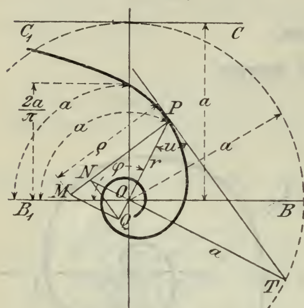
angenähert (für viele Windungen): $s = \frac{r_0}{4\pi}\varphi^2$.

2. Hyperbolische Spirale.

1. Trägt man von einem Durchmesser (Polarachse) BB_1 einer Schar konzentrischer Kreise aus auf alle diese Kreise nach derselben

Seite hin Bogen von der Länge a ab, so ist der geometrische Ort ihrer Endpunkte eine hyperbolische Spirale (Abb. 25). Ihre **Gleichung** ist $r\varphi = a$. Da für $\varphi = \infty$ $r = 0$ wird, so ist der Pol O ein **asymptotischer Punkt**, um den die Spirale unendlich viele Windungen beschreibt, ohne ihn zu erreichen.

Abb. 25.



Für $\varphi = 0$ wird $r = \infty$, d. h., die zur Polarachse BB_1 im Abstande a gezogene Parallele CC_1 ist **Asymptote** der Spirale.

2. Zieht man in einem beliebigen Punkte P die Tangente PT, ferner $OT \perp OP$, $PN \perp PT$, so ist die

Polarsubtangente

$$OT = -a = \text{konst.};$$

Polarsubnormale

$$ON = -\frac{r^2}{a}.$$

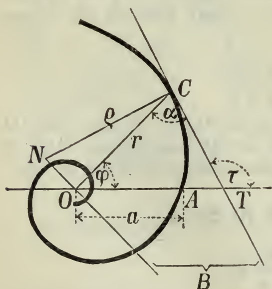
(Vrgl. auch S. 111.)

Hieraus ergibt sich die Konstruktion der Tangente an die Spirale.

3. **Krümmungshalbmesser** $\varrho = \dfrac{r}{\sin^3 OTP} = \dfrac{r}{\cos^3 u}$.

Konstruktion: Errichte auf PN in N eine Winkelrechte bis zum Schnitt mit der Verlängerung von PO in Q, ferner auf PQ in Q eine Winkelrechte; ihr Schnittpunkt M mit der verlängerten Normale PN ist der Krümmungsmittelpunkt.

Abb. 26.



3. Logarithmische Spirale.

1. **Gleichung:** $r = ae^{m\varphi}$. Für $\varphi = 0$ ist $r = OA = a$ (Abb. 26). Da ferner für $\varphi = -\infty$ $r = 0$ wird, so ist der Pol O ein **asymptotischer Punkt**, dem die Spirale für negative φ sich immer mehr nähert, ohne ihn zu erreichen.

2. Die **Tangente** CT in einem beliebigen Punkte C bildet mit dem Leitstrahle OC den Winkel $u = \alpha =$ konst., so dafs $\operatorname{ctg} \alpha = m$.

3. **Polarsubnormale**

$$ON = r \operatorname{ctg} \alpha = rm.$$

Polarnormale $CN = r\sqrt{1 + m^2} = \dfrac{r}{\sin \alpha}$

$=$ **Krümmungshalbmesser** ϱ in C.

4. Die **Evolute** der Spirale ist eine der gegebenen kongruente Kurve, gegen diese um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln m}{m}$ gedreht.

5. Die **Fläche,** die der Leitstrahl r von $\varphi = -\infty$ (Pol) bis $+\varphi$, d. h. bis zum Punkte C der Kurve beschreibt, ist gleich dem halben, vom Leitstrahle, der Tangente und der Polarsubtangente gebildeten Dreiecke OBC. $F = r^2 : 4m$.

6. Die **Bogenlänge** von C bis zum Pol ist $s = \frac{r}{\cos\alpha} = CB$, gleich der Länge der Tangente CT bis zum Schnitte mit NO.

e. Gemeine Kettenlinie.

Die gemeine Kettenlinie ist die Gleichgewichtslinie eines an zwei Punkten aufgehängten, vollkommen biegsam gedachten Fadens, dessen Belastung überall proportional seiner Länge ist. Der Parameter ist h.

1. **Gleichung:** $y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) = h \operatorname{Cof} \frac{x}{h}$;

$$x = h \ln\left(\frac{y}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1}\right) = h \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \frac{y}{h}.$$

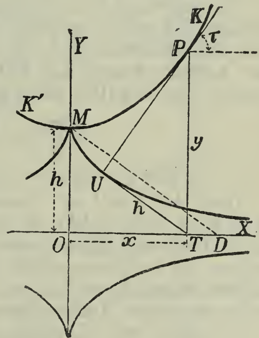
Der Anfangspunkt der Koordinaten liegt um $h = MO$ tiefer als der tiefste Punkt M der Kettenlinie KK' (Abb. 27).

2. Der Winkel τ der Tangente UP in einem beliebigen Punkte P mit der (wagerechten) x-Achse bestimmt sich aus

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = \operatorname{Sin}\frac{x}{h}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1}; \quad \cos\tau = \frac{h}{y}.$$

Abb. 27.



Führt man τ als die unabhängige Veränderliche ein, so erhält man die folgenden beiden Gleichungen der Kettenlinie:

$$x = h \ln \frac{1 + \sin\tau}{\cos\tau} = h \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$$

$$= h \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} (\operatorname{tg}\tau); \quad y = \frac{h}{\cos\tau}.$$

3. Der **Krümmungshalbmesser** im Punkte P ist gleich und entgegengerichtet der Normale im Punkte P, gemessen von P bis zur x-Achse; $\varrho = \frac{y^2}{h} = \frac{h}{\cos^2\tau}$.

4. Die **Fläche** $OMPT$ hat den Inhalt

$$F = {}^1/_2\, h^2\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = h^2 \operatorname{Sin}\frac{x}{h} = h^2 \operatorname{tg}\tau = h\sqrt{y^2 - h^2}.$$

5. **Bogenlänge** $MP =$

$$s = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = h \operatorname{Sin}\frac{x}{h} = h \operatorname{tg}\tau = \sqrt{y^2 - h^2} = PU = OD,$$

wenn TU und $MD \perp PU$ sind.

$$x = h \ln\left[\frac{s}{h} + \sqrt{1 + \left(\frac{s}{h}\right)^2}\right] = h \operatorname{Ar}\operatorname{Sin}\frac{s}{h}.$$

Die Tafeln der Hyperbelfunktionen $\operatorname{Cof} x$ und $\operatorname{Sin} x$ (s. S. 30 u. 31) geben ohne weiteres die Werte der Ordinaten bzw. Bogenlängen der Kettenlinie für den Parameter $h = 1$.

6. **Evolvente.** (**Huyghenssche Traktorie** oder **Antifriktionskurve.**) Ist im Scheitel M der Beginn der Abwicklung, so ist die Gleichung der Evolvente (s. Abb. 27):

$$\left(\frac{x}{h}\right)^2 = \left[\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} - \operatorname{Ar}\operatorname{Cof}\left(\pm\frac{h}{y}\right)\right]^2,$$

je nachdem y (Ordinate der Evolvente) positiv oder negativ ist; oder auch: $x = h\,(\operatorname{Tg}\varphi - \varphi)$; $\quad y = \pm\frac{h}{\operatorname{Cof}\varphi}$, wobei φ eine unabhängige Veränderliche bezeichnet. (Ueber $\operatorname{Ar}\operatorname{Cof}$ vrgl. S. 66.)

Hierin ist h die unveränderliche Länge $UT = MO$ der Tangente von der Kurve bis zur x-Achse. Die Traktorie hat also die Eigenschaft, dafs die Länge der Tangente von der Kurve bis zur x-Achse unveränderlich ist. Die x-Achse ist die Asymptote der vier Kurvenzweige. Die Evolute der Traktorie (vrgl. S. 95) ist die Kettenlinie KMK'. P ist der Krümmungsmittelpunkt; $\varrho = PU$ (s. o.).

Bogen $MU = h \ln (y : h)$.

7. Bezeichnet $2L$ die Länge einer Kette, $2l$ die wagerechte Entfernung, $2b$ die lotrechte Entfernung ihrer Aufhängepunkte, so findet man den Parameter h, den Anfangspunkt der Koordinaten und damit den tiefsten Punkt der Kettenlinie, wie folgt: Durch Versuche bestimmt man mit Hilfe der Tafel für $\lg \operatorname{Sin}\varphi$ (s. S. 32) die Gröfse φ aus

$$\frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\varphi} = \frac{\sqrt{L^2 - b^2}}{l}, \text{ bzw. aus}$$

$$\lg \operatorname{Sin}\varphi - \lg\varphi = {}^1/_2 \lg (L + b) + {}^1/_2 \lg (L - b) - \lg l.$$

Dann ist $h = l : \varphi$. Berechnet man noch die Gröfse ψ aus $\operatorname{Tg}\psi = b : L$ (s. Tafel S. 34), so liegt der Anfangspunkt der Koordinaten in einer Tiefe $= L \operatorname{Ctg}\varphi$ unter dem Mittelpunkte derjenigen Strecke, welche die Aufhängepunkte der Kette verbindet, und in einem wagerechten Abstande $= \psi h$ von jenem Mittelpunkte, u. zw. nach dem tiefer gelegenen Aufhängepunkte zu.

8. Liegen die Aufhängepunkte der Kette gleich hoch, so ist

$$b = 0, \qquad \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\varphi} = \frac{L}{l}, \qquad h = \frac{l}{\varphi}.$$

Die Tiefe des Anfangspunktes der Koordinaten unter der Linie der Aufhängepunkte ist $\qquad y_0 = L \operatorname{Ctg}\varphi$.

Der Aufhängewinkel α ergibt sich aus $\cos\alpha = \frac{h}{y_0} = \frac{l\,\mathfrak{Tg}\,\varphi}{L\,\varphi}$.

f. Gleichungen einiger anderer Kurven.

Kurve	Rechtwinklige Koordinaten	Polarkoordinaten
1. Zissoide.	$y^2(a-x) = x^3$	$r = \frac{a \sin^2\varphi}{\cos\varphi}$
2. Lemniskate.	$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$	$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$
3. Konchoide.	$(x^2+y^2)(x-b)^2 = a^2x^2$	$r = \frac{b}{\cos\varphi} \pm a$
4. Descartessches Blatt.	$x^3+y^3 = 3axy$	$r = \frac{3a \sin\varphi \cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$
5. Vierblatt.	$(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$	$r = a \sin 2\varphi$

1. **Zissoide** (Efeublattkurve, Abb. 28). Gegeben ein Kreis vom Durchmesser a; im Endpunkte A eines festen Durchmessers OA, der x-Achse, die Tangente AB. Vom anderen Endpunkte O, dem Koordinaten-Anfangspunkte, werden beliebige Sekanten OB bis zum Schnitte mit AB gezogen. Macht man nun $BD = OC$ oder $OD = BC$, so bestimmen die Punkte D die Zissoide.

Abb. 28.

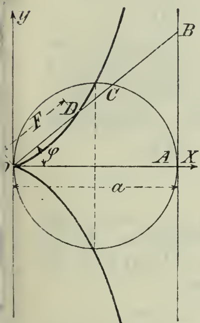


Abb. 29.

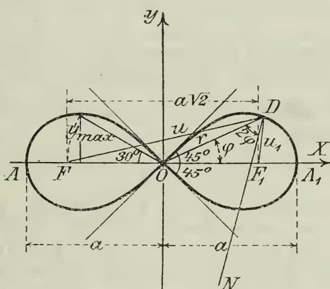
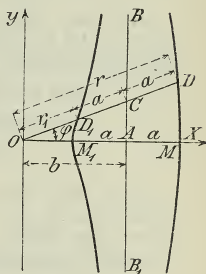


Abb. 30.



2. **Lemniskate** (Schleifenkurve, Abb. 29) ist der geometrische Ort aller Punkte D, für die das Produkt ihrer Abstände u und u_1 von zwei festen Punkten F und F_1 unveränderlich, u. zw. $= \frac{1}{2}a^2$ ist. Der Abstand $FF_1 = a\sqrt{2}$.

Die in der Mitte O der Strecke FF_1 (im Koordinaten-Anfangspunkte) sich schneidenden Kurvenäste stehen winkelrecht aufeinander.

Die Halbachse der Kurve ist a. Der Winkel zwischen Leitstrahl $OD = r$ und Normale DN ist 2φ. Für y_{max} ist $\varphi = 30°$ und $r = a\sqrt{\frac{1}{2}}$. Die ganze Fläche der Lemniskate ist $F = a^2$.

3. **Konchoide** (Muschelkurve, Abb. 30) ist der geometrische Ort der Endpunkte DD_1 der von einem Pole O nach einer Geraden BAB_1 gezogenen Strahlen OD_1CD, auf denen man, von ihren Schnittpunkten C mit BAB_1 aus, die unveränderliche Länge $\pm a$ abträgt. Die Entfernung der Geraden BAB_1 vom Pol O ist gleich b.

C. Punkt, gerade Linie und Ebene im Raume.

Die folgenden Entwicklungen beziehen sich auf drei zueinander rechtwinklige Raumkoordinaten.

1. Sind x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Koordinaten zweier Punkte, deren Entfernung voneinander l ist; sind ferner α, β, γ die Winkel, die l mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet, so ist

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{l} \qquad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{l} \qquad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{l}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2. Teilt man die vom Punkte (x_1, y_1, z_1) nach dem Punkte (x_2, y_2, z_2) gerichtete Strecke l im Verhältnis $m:n$ und nennt die Koordinaten des Teilpunktes x, y, z, so ist

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} \qquad y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \qquad z = \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}.$$

3. Der **Winkel** φ, den zwei durch die Winkel α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 gegebene Richtungen miteinander einschließen, ist bestimmt durch

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2.$$

Stehen beide Richtungen winkelrecht aufeinander ($\varphi = 90^0$), so ist

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0.$$

4. Nennt man λ, μ, ν die Winkel, welche die Normale zu den beiden unter 3. angegebenen Richtungen, also zur Ebene des Winkels φ, mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet, so ist

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1}{\sin\varphi}; \quad \cos\mu = \frac{\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1}{\sin\varphi}$$

$$\cos\nu = \frac{\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1}{\sin\varphi}.$$

Legt man eine Gerade von der Richtung $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ durch den Punkt (x_1, y_1, z_1) und eine zweite von der Richtung $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ durch den Punkt (x_2, y_2, z_2), so ist der kürzeste Abstand der Geraden voneinander gleich dem absoluten Werte von

$$p = (x_2 - x_1)\cos\lambda + (y_2 - y_1)\cos\mu + (z_2 - z_1)\cos\nu.$$

5. Eine **gerade Linie** im Raum ist durch die beiden Gleichungen bestimmt

$$y = m_1 x + b_1 \qquad z = m_2 x + b_2.$$

Geht eine Gerade durch einen Punkt (x_1, y_1, z_1) und bildet sie mit den Achsen die Winkel α, β, γ, so sind ihre Gleichungen

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

In den vorstehenden Gleichungen ist sonach

$$m_1 = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \qquad m_2 = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}.$$

Die Gleichungen der durch die Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) gehenden geraden Linie sind

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

6. Bedingung dafür, daß sich zwei gerade Linien schneiden, ist, daß die Determinante der auf die Form $mx + ny + pz + q = 0$ gebrachten vier Gleichungen der beiden Geraden identisch verschwindet.

7. **Gleichungen der Ebene.**

α. Im allgemeinen ist eine Ebene durch die Gleichung ersten Grades bestimmt

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Alle Punkte also, deren Koordinaten einer Gleichung ersten Grades zwischen drei Veränderlichen genügen, liegen in einer Ebene.

$By + Cz + D = 0$: Gleichung einer Ebene parallel zur x-Achse
$Ax + Cz + D = 0$: ,, ,, ,, ,, ,, y- ,,
$Ax + By + D = 0$: ,, ,, ,, ,, ,, z- ,,
$Ax + By + Cz = 0$: ,, ,, ,, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht.

β. Schneidet eine Ebene die Achsen in den Entfernungen a, b, c vom Anfangspunkte, so ist ihre Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

$x = a$: Gleichung einer Ebene parallel zur yz-Ebene.
$y = b$: ,, ,, ,, ,, ,, xz- ,,
$z = c$: ,, ,, ,, ,, ,, xy- ,,

γ. Bildet eine vom Anfangspunkte der Koordinaten ausgehende Strecke l mit den Achsen die Winkel α, β, γ, so ist die Gleichung einer Ebene, die im Endpunkte von l winkelrecht auf l steht:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - l = 0. \quad \textbf{(Normalform.)}$$

δ. Um die allgemeine Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

in die Normalform zu bringen, setze man

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad l = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist überall so zu wählen, dafs l positiv wird.

8. Der **Abstand** p eines Punktes (x_1, y_1, z_1) von einer Ebene, deren Gleichung die Normalform (s. o.) hat, ist

$$p = \pm (x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - l);$$

p wird positiv, wenn der Punkt (x_1, y_1, z_1) und der Koordinatenanfangspunkt auf derselben Seite der Ebene liegen, negativ, wenn sie auf verschiedenen Seiten liegen.

9. Ist $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung einer Ebene, so ist die auf ihr in einem Punkte (x_1, y_1, z_1) errichtete **Winkelrechte** bestimmt durch

$$z - z_1 = \frac{C}{A}(x - x_1); \qquad z - z_1 = \frac{C}{B}(y - y_1).$$

10. Gehen zwei Richtungen ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$) durch denselben Punkt (x_1, y_1, z_1), so ist die Gleichung der Ebene, die durch die Richtungen und den Punkt bestimmt ist,

$$(x - x_1)(\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1) + (y - y_1)(\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1) + (z - z_1)(\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1) = 0.$$

11. Sind $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ und $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

die Gleichungen zweier Ebenen, so ist, wenn k eine beliebige Zahl,

$$(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + k(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$$

die Gleichung aller Ebenen, die durch die Schnittlinie beider Ebenen gehen. Die Gleichung der Projektion dieser Schnittlinie auf die xy-Ebene erhält man durch Elimination von z aus den Gleichungen beider Ebenen; entsprechend die Gleichungen der Projektionen auf die xz- bezw. yz-Ebene.

12. Der **Winkel** φ, den zwei Ebenen (der zuerst genannten Gleichungen unter 11) miteinander bilden, ergibt sich aus

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\pm\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}.$$

Die Ebenen sind parallel ($\varphi = 0$), wenn $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Die Gleichungen zweier parallelen Ebenen sind

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ und}$$
$$k(A_1 x + B_1 y + C_1 z) + D_2 = 0.$$

Die Ebenen stehen winkelrecht zueinander ($\varphi = 90^0$), wenn

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

13. Die Winkel zweier Ebenen (der zuerst genannten Gleichungen unter 11.) werden halbiert durch die Ebenen

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0.$$

14. **Umwandlung der Koordinaten.**

Die Koordinaten in Beziehung auf das alte System werden mit x, y, z, auf das neue mit x', y', z' bezeichnet.

α) Parallele Verschiebung der Achsen. Sind f, g, h die Koordinaten des neuen Anfangspunktes, so ist

$$x = f + x'; \quad y = g + y'; \quad z = h + z'.$$

β) Drehung der Achsen um den Anfangspunkt. Die Cosinus der Winkel, welche die neuen Achsen x', y', z' mit der alten Achse x bilden, seien: a', b', c',
entsprechend mit der alten Achse y: a'', b'', c'',
entsprechend mit der alten Achse z: a''', b''', c'''; dann ist

$$x = a'x' + b'y' + c'z' \qquad x' = a'x + a''y + a'''z$$
$$y = a''x' + b''y' + c''z' \qquad y' = b'x + b''y + b'''z$$
$$z = a'''x' + b'''y' + c'''z'. \qquad z' = c'x + c''y + c'''z.$$

Es finden folgende Beziehungen statt:

1) $a'^2 + a''^2 + a'''^2 = 1$, $b'^2 + b''^2 + b'''^2 = 1$, $c'^2 + c''^2 + c'''^2 = 1$.

2) $a'b' + a''b'' + a'''b''' = 0$, $b'c' + b''c'' + b'''c''' = 0$, $c'a' + c''a'' + c'''a''' = 0$.

3) $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$, $a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$, $a'''^2 + b'''^2 + c'''^2 = 1$.

4) $a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$, $a''a''' + b''b''' + c''c''' = 0$, $a'''a' + b'''b' + c'''c' = 0$.

5) $a' = b''c''' - c''b'''$, $b' = c''a''' - a''c'''$, $c' = a''b''' - b''a'''$.

6) $a'' = c'b''' - b'c'''$, $b'' = a'c''' - c'a'''$, $c'' = b'a''' - a'b'''$.

7) $a''' = b'c'' - c'b''$, $b''' = c'a'' - a'c''$, $c''' = a'b'' - b'a''$.

γ) Bei gleichzeitiger Verschiebung und Drehung verbinde man die Formeln unter α) und β) entsprechend.

δ) Um die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes in **Polarkoordinaten** r, φ, ϑ zu verwandeln, suche man zunächst die Koordinaten x', y', z' des Punktes, bezogen auf ein rechtwinkliges System, dessen Anfangspunkt der Pol, dessen $x'y'$-Ebene die Aequatorebene und dessen x'-Achse die Polarachse ist, von der aus φ gezählt wird; dann ist

$$x' = r\cos\varphi\cos\vartheta; \quad y' = r\sin\varphi\cos\vartheta; \quad z' = r\sin\vartheta.$$

Für die Punkte in der $x'y'$-Ebene ist $\vartheta = 0$.

D. Kurven doppelter Krümmung.

a. Allgemeine Sätze.

1. Eine Kurve doppelter Krümmung bezogen auf Parallelkoordinaten wird dargestellt durch zwei **Gleichungen:**

$$F_1(x, y, z) = 0; \qquad F_2(x, y, z) = 0.$$

Sie ist die Schnittkurve der beiden Flächen, die diese Gleichungen, einzeln genommen, darstellen.

Die Kurve ist auch bestimmt durch die Gleichungen ihrer Projektionen auf die xy- und die xz-Ebene:

$$y = \varphi_1(x); \quad z = \varphi_2(x).$$

2. Die Winkel α, β, γ, welche die **Tangente** im Punkte (x, y, z) mit den Koordinatenachsen bildet, erhält man aus

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}; \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

das **Bogendifferential** erhält man aus

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

3. Die **Gleichungen der Tangente** im Punkte (x, y, z) sind

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}.$$

4. Die **Gleichung der Normalebene** ist

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

5. Eine Ebene, die durch den Punkt (x, y, z) und die beiden benachbarten Punkte der Kurve geht, nennt man die **Schmiegungsebene** oder **Krümmungsebene** in dem Punkte (x, y, z). Setzt man

$$A = dy\,d^2z - dz\,d^2y, \qquad B = dz\,d^2x - dx\,d^2z,$$
$$C = dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

so ist die Gleichung der Krümmungsebene

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0.$$

Die Winkel λ, μ, ν, welche die Normale zur Krümmungsebene, d. i. die sogen. Binormale, mit den Koordinatenachsen bildet, folgen aus

$$\cos\lambda = \frac{A}{D}, \qquad \cos\mu = \frac{B}{D}, \qquad \cos\nu = \frac{C}{D},$$

wenn gesetzt wird

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}$$
$$= ds^2\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

6. Bezeichnet man den Winkel zweier benachbarten Tangenten mit $d\tau$, so ist

$$d\tau = \frac{D}{ds^2},$$

und der Halbmesser für die Krümmung in der Krümmungsebene oder der **ersten Krümmung** der Kurve ist

$$\varrho_1 = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{D}.$$

Die Koordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes sind

$$x' = x + \varrho_1^2\,\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \qquad y' = y + \varrho_1^2\,\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \qquad z' = z + \varrho_1^2\,\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

7. Zwei benachbarte Krümmungsebenen bilden miteinander einen Winkel

$$d\vartheta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}$$
$$= \frac{A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z}{D^2}\,ds.$$

Man nennt $\varrho_2 = \frac{ds}{d\vartheta}$ den Halbmesser der **zweiten Krümmung** oder der Drehung der Kurve.

Die Kurve ist eine ebene Kurve, wenn für alle Punkte $d\vartheta = 0$

oder $$A d^3x + B d^3y + C d^3z = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

b. Zylindrische Schraubenlinie.

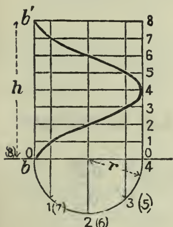
1. Eine zylindrische Schraubenlinie wird durch einen Punkt erzeugt, der gleichförmig eine Kreislinie durchläuft, während sich diese in einer Richtung, die auf ihrer Ebene winkelrecht steht, gleichförmig fortbewegt, also den Mantel eines geraden Kreiszylinders beschreibt.

Der Halbmesser dieses Zylinders sei r, die Steigung der Schraube, d. h. der Weg, den der Kreis auf dem Zylindermantel zurücklegt, während der Punkt die Kreislinie einmal durchläuft, $bb' = h$ (Abb. 31), die Tangente des Steigungswinkels α:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r} = a.$$

Die Achse des Zylinders sei die z-Achse; die x-Achse schneide die Schraubenlinie im Punkte b. Der Winkel, den die Projektion des Leitstrahles auf die xy-Ebene mit der x-Achse bildet, sei φ; alsdann sind die **Gleichungen der Schraubenlinie:**

Abb. 31.



$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = ar\varphi,$$

oder $$x = r\cos\frac{z}{ar}, \quad y = r\sin\frac{z}{ar}.$$

2. Die **Gleichungen der Tangente** sind

$$-\frac{\xi - x}{\sin\varphi} = \frac{\eta - y}{\cos\varphi} = \frac{\zeta - z}{a}.$$

Die Tangente bildet mit der z-Achse und den Seiten des Zylinders den unveränderlichen Winkel $\gamma = 90^0 - \alpha$. Wickelt man daher den Mantel des Zylinders und mit ihm die Schraubenlinie in eine Ebene ab, so wird die Kurve eine gerade Linie.

3. Die **Krümmungshalbmesser** sind

$$\varrho_1 = r(1 + a^2) = \frac{r}{\cos^2\alpha} \quad \left(\frac{1}{\varrho_1} = \text{erste Krümmung}\right),$$

$$\varrho_2 = r\frac{1 + a^2}{a} = \frac{r}{\sin\alpha\cos\alpha} \quad \left(\frac{1}{\varrho_2} = \text{zweite Krümmung}\right).$$

Es sind also ϱ_1 und ϱ_2 unveränderlich, aufserdem ist ϱ_1 stets winkelrecht zur z-Achse.

4. **Bogenlänge** $s = \frac{r}{\cos\alpha}\varphi = r\varphi\sqrt{1 + a^2}$.

5. **Konstruktion der Projektion der Schraubenlinie** auf die xz-Ebene (Abb. 31). Man teile die Steigung $h = bb'$ in n (hier 8) gleiche Teile, ebenso von b aus den als Kreis sich darstellenden

Normalschnitt des Zylinders in n gleiche Teile. Durch die ersteren Teilpunkte lege man wagerechte, durch die letzteren lotrechte Linien; der Schnittpunkt einer Wagerechten mit der entsprechenden Lotrechten ist ein Punkt der Projektion der Schraubenlinie.

E. Krumme Flächen.

a. Allgemeine Sätze.

1. Die **Gleichung einer krummen Fläche** in rechtwinkligen Koordinaten hat die allgemeine Form $F(x, y, z) = 0$.

Durch Auflösung nach z wird die Gleichung $z = f(x, y)$.

Es werde bezeichnet

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

2. Gleichung der **Tangentialebene** im Punkte (x, y, z) der Fläche:

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

wenn ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten bezeichnen.

3. Gleichungen der **Normale:**

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Die Winkel α, β, γ, welche die Normale mit den Koordinatenachsen bildet, erhält man aus

$$\cos\alpha = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \cos\beta = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial z},$$

worin

$$W = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

4. Das **Element der krummen Fläche,** dessen Projektion auf die xy-Ebene $= dx\,dy$, ist

$$dM = \frac{dx\,dy\,W}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Die doppelte Integration dieses Ausdruckes (nach beliebigen oder voneinander abhängigen Grenzen) ergibt den Inhalt eines bestimmten Bereiches der krummen Fläche.

5. Jede durch die Normale gehende Ebene bildet mit der Fläche eine Durchschnittlinie, die man **Normalschnitt** nennt. Bildet die Tangente an diesen mit den Koordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν, so ist der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\lambda + 2s\cos\lambda\cos\mu + t\cos^2\mu}.$$

6. **Satz von Meunier.** Eine Ebene, die durch die Tangente des Normalschnittes hindurchgeht und mit dessen Ebene einen Winkel ϑ bildet, schneidet die Fläche in einem schiefen Schnitte; sein Krümmungshalbmesser in dem betreffenden Punkte ist

$$\varrho' = \varrho \cos \vartheta .$$

7. Die aufeinander winkelrechten Normalschnitte, für welche ϱ ein Maximum ϱ_1 oder ein Minimum ϱ_2 wird, nennt man **Hauptnormalschnitte.** Die Werte von ϱ_1 und ϱ_2 erhält man aus den Gleichungen

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho^2} = \frac{(1 + q^2)\, r - 2\, p q s + (1 + p^2)\, t}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}.$$

8. **Satz von Euler.** Für einen beliebigen Normalschnitt, dessen Ebene mit der Ebene von ϱ_1 den Winkel φ bildet, ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho_2}.$$

9. Den Ausdruck $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ nennt man das **Mafs der Krümmung** und den Ausdruck $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ die **mittlere Krümmung** der Fläche im Punkte (x, y, z).

b. Flächen zweiter Ordnung.

1. Die **allgemeine Form der Gleichung** der Flächen zweiter Ordnung ist

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2\, a_{12} x y + 2\, a_{23} y z + 2\, a_{31} z x + 2\, a_1 x + 2\, a_2 y + 2\, a_3 z + a = 0.$$

2. Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Gamma; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta; \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \delta_1; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = \delta_2,$$

(wobei $a_{ik} = a_{ki}$), so ergeben sich folgende Bedingungen für die **Hauptflächen,** welche die allgemeine Gleichung darstellt, wenn $a_{11} > 0$ ist:

$\Delta > 0$, $\delta_1 > 0$, $\Gamma < 0$ Ellipsoid.

$\Delta < 0$, oder $\Delta > 0$, $\delta_1 < 0$ $\begin{cases} \Gamma < 0 \text{ einschaliges Hyperboloid.} \\ \Gamma = 0 \text{ Kegel.} \\ \Gamma > 0 \text{ zweischaliges Hyperboloid.} \end{cases}$

$\Delta = 0 \begin{cases} \delta_1 < 0 \text{ oder } \delta_2 < 0 \text{ hyperbolisches Paraboloid.} \\ \delta_1 > 0 \text{ oder } \delta_2 > 0 \text{ elliptisches Paraboloid.} \end{cases}$

3. **Mittelpunktflächen** ($\Delta \gtrless 0$). Der Mittelpunkt ergibt sich als Durchschnitt der Ebenen

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 = 0.$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 = 0.$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 = 0.$$

4. Es ist die Gleichung, bezogen auf den Mittelpunkt als Anfang eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Achsen in die Hauptachsen der Flächen fallen,

für das **Ellipsoid:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

für das **einschalige Hyperboloid:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

für das **zweischalige Hyperboloid:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Hierin bedeuten a, b, c die Halbachsen der Hauptschnitte; sie sind im ersten Falle sämtlich reell. Im zweiten Falle bedeutet c und im dritten Falle bedeuten b und c die imaginären Halbachsen der Hauptschnitthyperbeln.

5. **Kegel.** Jede homogene Gleichung zweiten Grades mit drei Veränderlichen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0$$

stellt einen Kegel dar.

Ist die Leitkurve des Kegels eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, deren Ebene in der Entfernung h winkelrecht zur z-Achse steht, so ist die Gleichung des Kegels, dessen Spitze im Anfangspunkte der Koordinaten liegt,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{h^2} = 0.$$

Ist die Leitkurve des Kegels ein ebensolcher Kreis vom Halbmesser a, so ist in vorstehender Gleichung $b = a$ zu setzen (Gleichung des geraden Kreiskegels). Vrgl. auch b. 1. S. 98.

6. **Kugel.** Mittelpunktgleichung: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Sind ξ, η, ζ die Koordinaten des Mittelpunktes der Kugel, so ist ihre Gleichung:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = r^2.$$

Jede Gleichung von der Form

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

stellt eine Kugel dar; dabei ist

$$\xi = -\,{}^1\!/_2\,A; \quad \eta = -\,{}^1\!/_2\,B; \quad \zeta = -\,{}^1\!/_2\,C;$$
$$r = {}^1\!/_2\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}.$$

7. **Paraboloide.** Gleichung in einfachster Form:

$$\frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q} = z.$$

Das obere Zeichen gilt für das elliptische Paraboloid; p, q sind die Parameter der Hauptschnittparabeln. Für das hyperbolische

Paraboloid ist p der Parameter der Hauptschnittparabel, $q = p \operatorname{tg}^2 \varphi$; φ ist der halbe Winkel der Asymptotenebenen.

8. **Zylinder.** Die Gleichung eines auf einer Koordinatenebene winkelrecht stehenden Zylinders ist gleichlautend mit der Gleichung der Durchschnittskurve in der betreffenden Koordinatenebene.

Ist der Durchschnitt eines Zylinders mit der xy-Ebene eine Ellipse oder Hyperbel, deren Halbachsen a und b sind, und bilden die Zylinderseiten mit den Achsen die Winkel α, β, γ, so ist die Gleichung des Zylinders

$$\frac{\left(x - z\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)^2}{a^2} \pm \frac{\left(y - z\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)^2}{b^2} = 1.$$

Hierbei gilt $+$ für den elliptischen und $-$ für den hyperbolischen Zylinder.

Die Gleichung des parabolischen Zylinders ist

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{2y}{p} - \frac{2x}{q} = 0.$$

VII. INHALTE VON FLÄCHEN UND KÖRPERN.

A. Flächeninhalte ebener Gebilde.

Gebilde	Bezeichnung der Abmessungen	Flächeninhalt F
1. Dreieck (Vrgl. S. 62.)	Abb. 32. h die Höhe zur Seite a $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ m_1, m_2, m_3 die Mittellinien $s_0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)$ $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ die Koordinaten der Ecken in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz	$F = \frac{1}{2} ah$ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $= \frac{1}{2} ab \sin\gamma$ $= \frac{a^2}{2}\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}$ $= 2r^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ $= \varrho^2 \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\beta \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma$ $= \varrho s = \frac{abc}{4r}$ $= \frac{4}{3}\sqrt{s_0(s_0-m_1)(s_0-m_2)(s_0-m_3)}$ $= \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$ $= \pm\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ + x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ + x_3 y_1 - x_1 y_3 \end{matrix}\right\}$

Gebilde	Bezeichnung der Abmessungen	Flächeninhalt F
1. Dreieck s. a. S. 125	Der Koordinaten-Anfangspunkt liegt in der Ecke 3: $[x_3 = 0,\ y_3 = 0]$.	$F = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix}$ $= \pm \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$
Rechtwinkliges Dreieck (Vrgl. S. 63)	a, b Katheten c Hypotenuse α der a gegenüberliegende Winkel	$F = \frac{1}{2} ab$ $= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg} \alpha$ $= \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg} \alpha$ $= \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha$. $a^2 + b^2 = c^2$
2. Viereck (D und D_1 die Diagonalen, φ der zwischen ihnen liegende Winkel.)	Abb. 33. m die Verbindungslinie der Mitten der Diagonalen	$F = \frac{h_1 + h_2}{2} D = \frac{D D_1 \sin \varphi}{2}$ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ $= D^2 + D_1^2 + 4 m^2$
Kreisviereck	a, b, c, d die 4 Seiten $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$	$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ $D D_1 = ac + bd$
Trapez	a, b die parallelen Seiten h die Höhe	$F = \frac{a + b}{2} h = \frac{D D_1 \sin \varphi}{2}$
Parallelogramm	a, b die Seiten h der Abstand der Seiten b γ der Winkel	$F = bh = ab \sin \gamma$ $= \frac{1}{2} D D_1 \sin \varphi$ $2(a^2 + b^2) = D^2 + D_1^2$
Rechteck	a, b die Seiten	$F = ab = \frac{1}{2} D^2 \sin \varphi$
Rhombus	a Seite γ Winkel	$F = a^2 \sin \gamma$ $= \frac{1}{2} D D_1$
3. Vieleck	$x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3 \ldots x_n y_n$ die Koordinaten der n Ecken in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz [Die Summe der inneren Winkel beträgt $(n - 2)\,180^0$].	$F = \pm \frac{1}{2} \{ (x_2 y_1 - x_1 y_2) + (x_3 y_2 - x_2 y_3) + (x_4 y_3 - x_3 y_4) + \cdots$ $\cdots + (x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n) + (x_1 y_n - x_n y_1) \}$ F kann auch bestimmt werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittels Diagonalen.

Gebilde	Bezeichnung der Abmessungen	Flächeninhalt F
Regelmäfsiges Vieleck (Vrgl. die nachst. Tafel.)	R der Halbmesser des umliegenden, r der des einliegenden Kreises $a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ die Seite n die Anzahl der Seiten $\varphi = 180^0 : n$ U der Umfang	$F = {}^1/_4\, n a^2 \operatorname{ctg} \varphi$ $= {}^1/_2\, n R^2 \sin 2\varphi$ $= n r^2 \operatorname{tg} \varphi.$ $U = n a = 2 n R \sin \varphi$ $= 2 n r \operatorname{tg} \varphi.$ Der Winkel des Vielecks $= 180^0 - 2\varphi$

n	$\frac{F}{a^2}$	$\frac{F}{R^2}$	$\frac{F}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{r}{a}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000	1,7321	3,4641	0,5000	0,2887
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	1,4142	2,0000	0,7071	0,5000
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361	1,1756	1,4531	0,8090	0,6882
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,1547	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099	0,8678	0,9631	0,9010	1,0383
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824	0,7654	0,8284	0,9239	1,2071
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642	0,6840	0,7279	0,9397	1,3737
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515	0,6180	0,6498	0,9511	1,5388
12	11,196	3,0000	3,2154	1,9319	1,0353	0,5176	0,5359	0,9659	1,8660
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223	0,4158	0,4251	0,9781	2,3523
16	20,109	3,0615	3,1826	2,5629	1,0196	0,3902	0,3978	0,9808	2,5137
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1962	1,0125	0,3129	0,3168	0,9877	3,1569
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086	0,2611	0,2633	0,9914	3,7979
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1011	1,0048	0,1960	0,1970	0,9952	5,0766
48	183,08	3,1326	3,1461	7,6449	1,0021	0,1308	0,1311	0,9979	7,6285
64	325,69	3,1365	3,1441	10,190	1,0012	0,0981	0,0983	0,9988	10,178

Gebilde	Bezeichnung der Abmessungen	Flächeninhalt F
4. Kreis (Tafel für F und U s. S. 1 bis 23.)	r der Halbmesser d der Durchmesser U der Umfang	$F = \pi r^2 = {}^1/_4\, \pi d^2 = {}^1/_4\, U d$ $= 0{,}785\,398\,163\,4\, d^2$ $U = \pi d.$
Kreisring (Für F ist die Tafel auf S. 1 bis 23 zu benutzen.)	R äufserer, r innerer } Halbmesser D äufserer, d innerer } Durchmesser ϱ mittlerer Halbmesser δ Ringbreite	$F = \pi (R^2 - r^2)$ $= {}^1/_4\, \pi (D^2 - d^2)$ $= {}^1/_4\, \pi D^2 - {}^1/_4\, \pi d^2$ $= 2 \pi \varrho \delta$
Kreisabschnitt (Tafel s. S. 36 u. 37.)	r der Halbmesser φ^0 der Zentriwinkel in Grad b die Bogenlänge s die Sehnenlänge h die Bogenhöhe	$F = {}^1/_2\, r^2 \left(\frac{\varphi^0 \pi}{180} - \sin \varphi\right)$ $= \frac{r(b-s) + s h}{2}$

Gebilde	Bezeichnung der Abmessungen	Flächeninhalt F
Kreis-ausschnitt (Für F kann die Tafel auf S. 1 bis 23 benutzt werden.)	r der Halbmesser b die Bogenlänge φ^0 der zum Bogen b gehörende Zentriwinkel in Grad φ der dem Halbmesser 1 entsprechende Bogen	$F = {}^1/_2\, b r$ $= \frac{\varphi^0}{360} \pi r^2$ $= {}^1/_2\, \varphi r^2$ $\varphi = \frac{\varphi^0 \pi}{180}$ $\quad b = \frac{\varphi^0 \pi}{180} r$
Kreis-Ringstück	Abb. 34.	$F = \frac{\varphi^0 \pi}{360} (R^2 - r^2)$ $= \frac{\varphi^0 \pi}{180} \varrho \delta$ $= \varphi \varrho \delta$

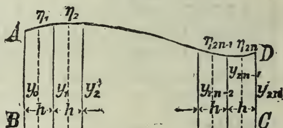
5. Kegelschnitte. Ellipse und Ellipsenabschnitt; Hyperbel und Hyperbelabschnitt s. S. 99 u. f. Parabelabschnitt s. S. 105.

Die Flächen anderer Kurven s. S. 108 bis 115.

6. Beliebige Fläche.

α. Die Fläche sei begrenzt auf drei Seiten durch gerade Linien, von denen $AB = y_0$ und $CD = y_{2n}$ (s. Abb. 35) winkelrecht zu BC stehen. Man teile BC in eine **gerade** Anzahl ($2n$) gleicher Teile h, errichte in den Teilpunkten Ordinaten $y_1, y_2 \ldots y_{2n-1}$ und bezeichne die mittleren Höhen der so gebildeten Flächenteile mit $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{2n}$, so ermittelt sich näherungsweise der Inhalt der Fläche $ABCD$ aus einer der folgenden, nach fortschreitender Genauigkeit geordneten Formeln:

Abb. 35.



1. $F = h\,({}^1/_2\, y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{2n-2} + y_{2n-1} + {}^1/_2\, y_{2n})$.
2. $F = h\,\Sigma\,(\eta)$.
3. $F = {}^1/_3\, h\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$.
4. $F = {}^3/_8\, h\,(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + \cdots + 2y_{m-3} + 3y_{m-2} + 3y_{m-1} + y_m)$.
5. $F = h\,\Sigma\,[\eta + {}^1/_{12}\,(y_0 - \eta_1) + {}^1/_{12}\,(y_{2n} - \eta_{2n})]$.
6. $F = h\,\Sigma\,[\eta + {}^1/_{72}\,(8y_0 + \eta_2 - 9\eta_1) + {}^1/_{72}\,(8y_{2n} + \eta_{2n-1} - 9\eta_{2n})]$.

In Formel 4. ist die Anzahl der Ordinaten $m + 1 = 3n + 1$; also ist die Anzahl m der gleichen Teile h durch 3 teilbar.

Formel 3., die sogen. **Simpsonsche Regel,** liefert in dem Falle genaue Werte, wenn y eine ganze Funktion höchstens dritten

Grades seines Abstandes von einem beliebigen Punkte ist; alsdann braucht nur y_m, die mittlere Ordinate zwischen y_0 und y_{2n}, gemessen oder berechnet zu werden. Es ist, wenn H die ganze Höhe BC bezeichnet,

$$F = {}^1/_6\, H\,(y_0 + 4\,y_m + y_{2n}).$$

β. Hat man 5 je um h voneinander abstehende Ordinaten y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 gemessen oder berechnet, so ist auch

$$F = {}^2/_{45}\, h\,[7\,(y_0 + y_4) + 32\,(y_1 + y_3) + 12\,y_2].$$

Diese Formel ist **genau** richtig, wenn y eine ganze Funktion höchstens **fünften** Grades seines Abstandes von einem beliebigen Punkte ist.

γ. Weitere Näherungsformeln finden sich auf S. 80 u. 81, insofern das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ den Inhalt der Fläche $ABCD$ darstellt, wenn BC die x-Achse, $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve AD ist und a und b die zu AB und DC gehörigen Abszissen sind.

δ. **Verfahren von Tschebyscheff** (sehr genau) s. Abteil. II, Abschn. Schiffbau, bei der Berechnung der Verdrängung usw.

B. Inhalte und Oberflächen von Körpern.

Die vorstehenden Regeln für eine beliebige Fläche gelten auch für den Inhalt eines von zwei parallelen Ebenen begrenzten Körpers, wenn unter $y_0 \ldots . y_{2n}$ die Flächeninhalte der durch parallele Ebenen gebildeten Querschnitte verstanden werden.

Körper	Bezeichnung der Abmessungen	Inhalt $= V$ Oberfläche $= O$ Mantelfläche $= M$
1. Prisma	F Grundfläche, h Höhe	$V = Fh$
Würfel	a Kante, d Diagonale $d^2 = 3\,a^2$.	$V = a^3$ $O = 6\,a^2$
Schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma	a, b, c die Längen der drei parallelen Kanten N der Querschnitt, winkelrecht zu den Kanten	$V = {}^1/_3\,(a + b + c)\,N$

Schief abgeschnittenes n-seitiges Prisma (und schief abgeschnittener Zylinder). Ist l die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Grundflächen, N der zu l winkelrechte Querschnitt, so ist $V = Nl$.

Rechtwinkliges Parallelepipedon	a, b, c die Längen der drei Kanten einer Ecke d die Diagonale	$V = abc$ $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ $O = 2\,(ab + ac + bc)$

Körper	Bezeichnung der Abmessungen	Inhalt $= V$ Oberfläche $= O$ Mantelfläche $= M$
2. Pyramide	F Grundfläche, h Höhe	$V = \frac{1}{3} F h$
Dreiseitige Pyramide	$x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ die Koordinaten von drei Eckpunkten; der Anfangspunkt liegt in der vierten Ecke.	$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
Abgestumpfte Pyramide	F, f die parallelen Endflächen h ihr Abstand A und a zwei entsprechende Seiten zu F und f	$V = \frac{1}{3} h (F + f + \sqrt{Ff})$ $= \frac{1}{3} h F \left(1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right)$ **)
3. Obelisk (Abb. 36)	Abb. 36.	$V = \frac{1}{6} h [(2a + a_1) b + (2a_1 + a) b_1]$ $= \frac{1}{6} h [ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1 b_1]$
4. Keil (Abb. 37)	Abb. 37.	$V = \frac{1}{6} (2a + a_1) b h$
5. Zylinder	F Grundfläche, h Höhe	$V = F h$
Kreiszylinder	r der Halbmesser der Grundfläche h die Höhe	$V = \pi r^2 h$ $M = 2 \pi r h$ $O = 2 \pi r (r + h)$
Schief abgeschn. gerader Kreiszylinder	h_1 die kürzeste Zylinderseite h_2 die längste " r der Halbmesser d. Grundfl.	$V = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2}$ $M = \pi r (h_1 + h_2)$
Zylinderhuf*) (Abb. 38)	Abb. 38.	$V = \frac{2}{3} r^2 h$ $M = 2 r h$ Der Schnitt geht durch den Mittelpunkt der Grundfläche; der Grundrifs ist also ein Halbkreis, d. h. $a = b = r$ (Vrgl. Fufsnote).

*) Ist der Huf-Grundrifs gröfser oder kleiner als ein Halbkreis, $2a$ seine gerade Seite (Hufkante), b die Länge des Lotes vom Fufspunkte von h auf $2a$, 2φ der Zentriwinkel des Huf-Grundrisses in Grad, so ist allgemein

$$V = \frac{h}{3b}\left[a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b - r)\frac{\varphi \pi}{180}\right]; \qquad M = \frac{2rh}{b}\left[(b - r)\frac{\varphi \pi}{180} + a\right].$$

**) S. C. d. B. 1899 S. 68.

Körper	Bezeichnung der Abmessungen	Inhalt $= V$ Oberfläche $= O$ Mantelfläche $= M$
Hohlzylinder (Rohr)	R der äufsere Halbmesser r der innere Halbmesser h die Höhe $s = R - r$ die Dicke $\varrho = \frac{1}{2}(R + r)$ der mittlere Halbmesser	$V = \pi h (R^2 - r^2)$ $= \pi h s (2R - s)$ $= \pi h s (2r + s)$ $= 2 \pi h s \varrho$
6. Kreiskegel	r der Halbmesser der Grundfläche h die Höhe s die Seite	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r s$ $s = \sqrt{r^2 + h^2}$
Abgestumpfter Kreiskegel	Wie vorstehend; ferner R der Halbmesser der anderen Grundfläche $\sigma = R + r$ $\delta = R - r$ $s = \sqrt{\delta^2 + h^2}$	$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$ $= \frac{h}{4}\left[\pi \sigma^2 + \frac{1}{3}(\pi \delta^2)\right]$ $M = \pi s \sigma$
7. Kugel (Für V ist die Tafel S. 35, für O Tafel S. 1 bis 23 zu benutzen.)	r der Halbmesser, u. zw. $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0{,}620351 \sqrt[3]{V}$ $d = 2r$ der Durchmesser	$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = 4{,}188\,790\,205\, r^3$ $= \frac{1}{6} \pi d^3 = 0{,}523\,598\,776\, d^3$ $O = 4 \pi r^2 = \pi d^2$ $= 4 \times$ Inhalt des gröfsten Kreises
Hohlkugel (Tafel S. 35)	R äufserer, r innerer Halbm. D „ d „ Durchm.	$V = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$ $= \frac{1}{6} \pi (D^3 - d^3)$
Kugelabschnitt (Kugelkalotte)	h die Höhe des Abschnittes r der Halbmesser der Kugel a der Halbmesser der Grundfläche	$V = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + h^2)$ $= \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$ $M = 2 \pi r h = \pi (a^2 + h^2)$ $a^2 = h (2r - h)$
Kugelzone	h die Höhe der Zone r der Halbmesser der Kugel a, b die Halbmesser der Endflächen; $(a > b)$	$V = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2)$ $M = 2 \pi r h$ $r^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2$
Kugelausschnitt (Abb. 39)	Abb. 39.	$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$ $= 2{,}094\,395\,102\,4\, r^2 h$ $O = \pi r (2h + a)$
Kugelzweieck	φ^0 der Winkel, den die begrenzenden gröfsten Kugelkreise bilden.	$M = \frac{\varphi^0}{90} \pi r^2$ $= 0{,}034\,906\,6\, \varphi^0 r^2$

Körper	Bezeichnung der Abmessungen	Inhalt $= V$ Oberfläche $= O$ Mantelfläche $= M$
Kugeldreieck	ε^0 der sphärische Exzefs, d. h. Ueberschufs der Winkelsumme über 180°	$M = \frac{\varepsilon^0}{180} \pi r^2$ $= 0{,}0174533\, \varepsilon^0 r^2$
8. Ellipsoid	a, b, c die 3 Halbachsen	$V = {}^4/_3\, \pi a b c$
Umdrehungs-ellipsoid	1) wenn $2a$ die Drehachse: 2) „ $2b$ „ „ :	$V = {}^4/_3\, \pi a b^2$ $V = {}^4/_3\, \pi a^2 b$
9. Umdrehungs-Paraboloid	r der Halbmesser der Grundfläche h die Höhe	$V = {}^1/_2 \pi r^2 h = 1{,}570796\, r^2 h$ = der Hälfte des Kreiszylinders für r und h
Abgestumpftes Paraboloid	R, r die Halbmesser der parallelen Endflächen h die Höhe	$V = {}^1/_2\, \pi (R^2 + r^2) h$ = Mittelfläche $\times$ Höhe
10. Zylindrischer Ring (Abb. 40)	Abb. 40. (R, R, r, r, D) $d = 2r$	$V = 2\pi^2 R r^2 = 19{,}739\, R r^2$ $= {}^1/_4 \pi^2 D d^2 = 2{,}4674\, D d^2$ $O = 4\pi^2 R r = 39{,}478\, R r$ $= \pi^2 D d = 9{,}8696\, D d$
11. Kübel	Endflächen beliebige Ellipsen mit den Halbachsen a, b und a_1, b_1	$V = {}^1/_6\, \pi h [2(ab + a_1 b_1) + a b_1 + a_1 b]$
12. Fafs	D der Durchmesser am Spund d der Bodendurchmesser h die Höhe	$V = {}^1/_{12}\, \pi h (2D^2 + d^2)$ angenähert für kreisförmige Dauben $V = {}^1/_{15}\, \pi h (2D^2 + Dd + {}^3/_4\, d^2)$ genau für parabolische Dauben
13. Kappen-gewölbe (preufsisches)	s die halbe Spannweite r der innere Gewölbehalbmesser δ die Gewölbestärke h die Pfeilhöhe l die Länge des Gewölbes	$V = \frac{\varphi^0 \pi}{360} (2 r \delta + \delta^2) l,$ wenn $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{r - h}$
14. Kreuzgewölbe über dem Rechtecke $2S \times 2s$	s, r, δ, h, $2S$ (statt l) und φ die Bezeichnungen unter 13. für die eine Kappe S, R, Δ, h, $2s$, ψ dieselben Abmessungen für die andere Kappe	$V = \frac{\varphi^0 \pi}{360} (2 r \delta + \delta^2) S + \frac{\psi^0 \pi}{360} (2 R \Delta + \Delta^2) s$ $\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{r-h};\ \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{S}{R-h}\right).$

15. Wird von der Kugelzone (S. 131) der abgestumpfte Kegel mit den Halbmessern a und b der Endflächen und der Höhe h fortgenommen, so ist, wenn s die Kegelseite, der Inhalt des übrigbleibenden Ringes, $V = {}^1/_6 \pi h s^2$.

16. Prismatoide, d. s. Körper, begrenzt von zwei parallelen Grundflächen F_0 und F_{2n} und beliebig vielen Seitenflächen (Dreiecken, Trapezen, Parallelogrammen und windschiefen Flächen) werden nach der Simpsonschen Regel (S. 128) berechnet: $V = {}^1/_6\, H\, (F_0 + 4\, F_m + F_{2n})$.

Beispiele: 1. Sind bei einem **Obelisken** von der Höhe h (vrgl. S. 130) die Grundflächen Trapeze mit den Mittelparallelen m und m_1 und den Höhen c und c_1, so ist

$$V = {}^1/_6\, h\, [(2\, m + m_1)\, c + (2\, m_1 + m)\, c_1]$$
$$= {}^1/_6\, h\, [m\, c + (m + m_1)(c + c_1) + m_1\, c_1].$$

2. **Wegerampe.** Ist h die Höhe des Hauptdammes, b die Wegebreite der Rampe, $1:n$ das Neigungsverhältnis der Rampe, $1:m$ das Böschungsverhältnis des Hauptdammes und der Rampe, so ist

$$V = {}^1/_6\, h^2\, (n - m)\, [3\, b + 2\, h\, m\, (1 - m:n)],$$

z. B. ist für $n = 45$ und $m = 1{,}5$: $V = 21{,}75\, h^2\, (b + 0{,}9667\, h)$.

17. Guldinsche (Pappussche) Regeln.*)

1. Bezeichnet

s die Länge einer Kurve, die sich um eine in ihrer Ebene liegende, sie nicht schneidende Achse dreht,

x_0 den Abstand ihres Schwerpunktes von der Achse,

so ist der Flächeninhalt der erzeugten **Umdrehungsfläche**

$$M = 2\pi\, x_0\, s$$
$$= \text{Weg des Schwerpunktes} \times \text{Länge der Kurve}.$$

2. Bezeichnet

F den Inhalt einer ebenen Fläche, die sich um eine in ihrer Ebene liegende, sie nicht schneidende Achse dreht,

x_0 den Abstand ihres Schwerpunktes von der Achse,

so ist der Inhalt des erzeugten **Umdrehungskörpers**

$$V = 2\pi\, x_0\, F$$
$$= \text{Weg des Schwerpunktes} \times \text{Inhalt der Fläche}.$$

3. Für zwei parallele Umdrehungsachsen im Abstand a ist allgemein, wenn sich M_1 und V_1 auf die eine, M_2 und V_2 auf die andere Achse beziehen,

$$M_1 = 2\pi\, a\, s \pm M_2 \quad \text{und} \quad V_1 = 2\pi\, a\, F \pm V_2.$$

Hierbei gilt $-$, wenn s oder F zwischen den parallelen Achsen liegt; im andern Falle gilt $+$.

4. Ist allgemein $y = f(x)$ die Gleichung der Meridianlinie in bezug auf die Umdrehungsachse als x-Achse und sind M und V von zwei, in den Abständen x_1 und x_2 vom Anfangspunkte der Koordinaten zur x-Achse winkelrecht gelegten Ebenen begrenzt, so ist

$$M = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\, d s \quad \text{und} \quad V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\, d x.$$

*) Vrgl. auch Chr. Nehls, Ueber den Flächen- und Rauminhalt der durch Bewegung von Kurven und Flächen erzeugten Flächen- und Raumgröfsen, Archiv der Mathematik und Physik, 2. Reihe, Bd. XIII, 1894.

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist das Differential des Bogens der Meridianlinie.

5. Stellen sich s oder F als algebraische Summen von Kurvenlängen $s_1, s_2, s_3 \ldots$ oder von Flächeninhalten $F_1, F_2, F_3 \ldots$ dar, deren Schwerpunktsabstände $x_{01}, x_{02}, x_{03} \ldots$ von der Umdrehungsachse bekannt sind, so ist

$$M = 2\pi\,(s_1 x_{01} + s_2 x_{02} + s_3 x_{03} + \ldots) \text{ bzw.}$$
$$V = 2\pi\,(F_1 x_{01} + F_2 x_{02} + F_3 x_{03} + \ldots).$$

6. Für Teile der Kreisdrehung sind (in 1. bis 5.) die Werte von M und V mit $\varphi^0 : 360$ zu multiplizieren, wenn φ^0 der Zentriwinkel der Drehung in Grad ist. (Vrgl. z. B. **13.** S. 132.)

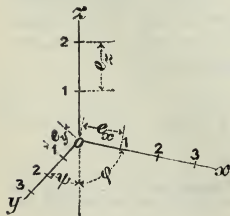
7. Die vorstehenden Regeln sind für jede beliebige Bewegung des Schwerpunktes sinngemäfs anwendbar, wenn die Ebene der sich bewegenden Fläche stets zur Richtung der Bewegung winkelrecht bleibt.

VIII. PARALLEL-PERSPEKTIVE.

1. Um einen körperlichen Gegenstand durch eine Zeichnung darzustellen, die einen möglichst vollständigen Einblick in die Gestalt und den Zusammenhang seiner Teile gewährt, bedient man sich mit Vorteil der Parallelprojektion, die zwar weniger naturgetreue, aber leichter herstellbare Bilder liefert als die Zentralprojektion. Die Herstellung geschieht am besten nach dem sogen. **axonometrischen Verfahren.** Man nimmt drei zueinander rechtwinklige Achsen, auf die man den Körper bezieht, und in jeder einen Mafsstab an, projiziert die Achsen samt den Mafsstäben und trägt alle Strecken, die im Körper einer Achse parallel sind, in der Zeichnung parallel der Projektion jener Achse nach dem zugehörigen Mafsstabe auf. Die z-Achse wird lotrecht genommen.

2. Bei **schiefer Projektion** können die Achsenrichtungen und die Längeneinheiten der Mafsstäbe beliebig angenommen werden, vorausgesetzt, dafs höchstens zwei Achsenrichtungen gleich sind und die Längeneinheit höchstens eines Achsenmafsstabes null ist (Satz von Pohlke).

Abb. 41.



Einfache Fälle (Bezeichnungen s. Abb. 41):

1) $e_x = e_z = 1$; $e_y = 1,\ {}^1/_2,\ {}^1/_3$;
$\varphi = 90^0$; $\psi = 45^0,\ 60^0$.
(Kavalierperspektive.)

2) $e_x = e_y = e_z = 1$; $\varphi + \psi = 90^0$.
(Militärperspektive).

3. Treten an dem Körper nicht blofs gerade Linien und ebene Flächen auf, sondern Kreise in verschiedenen Stellungen, Kreiszylinder-, Kreiskegel-, Kugel- und beliebige Umdrehungsflächen, so ist **rechtwinklige Projektion** vorzuziehen. Bei dieser sind die Verhältnisse der Längeneinheiten der Achsenmafsstäbe durch die Achsenrichtungen und umgekehrt letztere durch erstere bestimmt. In folgender Tafel sind für die gebräuchlichsten Verhältnisse*) die nötigen Angaben zusammengestellt. Es bezeichnet

e die Längeneinheit des wahren Mafsstabes der Zeichnung,

e_x, e_y, e_z die Längeneinheiten der Achsenmafsstäbe,

φ und ψ die spitzen Winkel zwischen der x- bzw. y-Achse und der z-Achse.

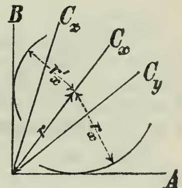
Rechtwinklige Projektionen.

Art der Projektion.	$e_x : e_y : e_z$	$e_z : e$	ctg φ (angenähert)	ctg ψ (angenähert)
Isometrische Projektion.	1 : 1 : 1	0,8165	$\varphi = \psi = 60^0$	
Dimetrische Projektionen.	$1 : {}^1/_2 : 1$	0,9428	1 : 8	7 : 8
	$1 : {}^1/_3 : 1$	0,9733	1 : 18	17 : 18
	$1 : {}^1/_4 : 1$	0,9847	1 : 32	31 : 32
Trimetrische Projektionen.	${}^5/_6 : {}^2/_3 : 1$	0,9670	1 : 5	1 : 3
	${}^9/_{10} : {}^1/_2 : 1$	0,9853	1 : 11	1 : 3

Die letzte Spalte dient zur Konstruktion der Achsenrichtungen.

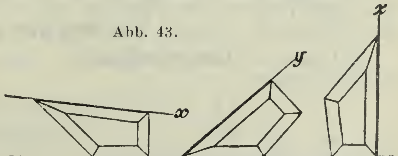
4. Man bezeichne mit r_x, r_y, r_z die Strecken, die, mit dem x-, y-, z-Mafsstabe gemessen, die gleiche Längenzahl r ergeben (so dafs also $r_z = r\,(e_x : e)$, usw.). Ohne Benutzung der Achsenmafsstäbe können diese Strecken auch durch nebenstehende Verkleinerungsvorrichtung (Abb. 42) gefunden werden, in der die Strahlen C_x, C_y, C_z gegen A unter solchen Winkeln gezogen sind, dafs ihre Sinus die Werte $e_x : e$, $e_y : e$, $e_z : e$ haben.

Abb. 42.



*) Für gewöhnliche Fälle empfiehlt sich die Anwendung der Projektion $1 : {}^1/_2 : 1$, der einfachsten nächst der isometrischen Projektion, die meist unschöne Bilder liefert. Es bringt grofsen Gewinn an Zeit, wenn man die Parallelen zu den Achsen mittels eines besonderen, hierneben in den drei zu benutzenden Stellungen abgebildeten Schiebevierecks (Abb. 43) zeichnet.

Abb. 43.



ZWEITER ABSCHNITT.

A. MECHANIK STARRER KÖRPER.

I. GEOMETRISCHE BEWEGUNGSLEHRE. (PHORONOMIE.)

Unter geometrischer Bewegungslehre (Phoronomie) versteht man die Aufstellung der Beziehungen, die bei einer Bewegung zwischen den beiden Grundgröfsen (Weglänge und Zeit) und den daraus abgeleiteten Gröfsen (Geschwindigkeit und Beschleunigung) bestehen.

A. Bewegung eines Punktes.

I. Geradlinige Bewegung.

a. Allgemeines.

1. Auf der Bahn des Punktes wird ein Nullpunkt O und eine positive Richtung gewählt (im Sinne der Bewegung, wenn diese ihre Richtung nicht wechselt). Die Bewegung ist bestimmt, sobald die Entfernung des bewegten Punktes von O für jede Zeit t bekannt ist: $s = f(t)$ **(Stellungsgleichung).**

Trägt man auf der Bahn die Stellen ein, wo sich der Punkt zur Zeit $t = 0, 1, 2$ . . sk (wenn die sk als Zeiteinheit gewählt wird) befindet, so erhält man die **Zeitteilung** auf der Bahn.

2. Zeichnerisch wird der Verlauf der Bewegung dargestellt, indem man die Wege s als Funktion der Zeiten t in ein rechtwinkliges Koordinatennetz einträgt: **Zeit-Weg-Kurve** (ZWK) (s. Abb. 1, S. 137).

3. Unter der **Geschwindigkeit** v eines Punktes zur Zeit t versteht man den Bruch

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\text{im Zeitelement zurückgelegter Weg}}{\text{Zeitelement}},$$

wofür aus der Zeit-Weg-Kurve

$$v = \operatorname{tg}\alpha = \text{Ansteigungsverhältnis der ZWK folgt (s. Abb. 1).}$$

Werden die Werte v als Funktion der Zeit t in einem rechtwinkligen Koordinatennetz aufgetragen, so ergibt sich die **Zeit-Geschwindigkeits-Kurve** (ZGK).

Mifst man die Wege in **m**, die Zeiten in **sk**, so erhält man die Geschwindigkeiten in **m/sk** (für Eisenbahngeschwindigkeiten üblich: km/st; für Krangeschwindigkeiten: m/min, im CGS-System [s. S. 156]: cm/sk).

4. Unter der **Beschleunigung** p eines Punktes zur Zeit t versteht man den Bruch

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{\text{Zunahme der Geschwindigkeit im Zeitelement}}{\text{Zeitelement}} = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

wofür aus der Zeit-Geschwindigkeits-Kurve

$p = \operatorname{tg} \beta =$ Ansteigungsverhältnis der ZGK folgt (s. Abb. 1).

Werden die Werte p als Funktion der Zeit t in einem rechtwinkligen Koordinatennetz aufgetragen, so ergibt sich die **Zeit-Beschleunigungs-Kurve** (ZBK).

Mifst man die Wege in **m**, die Zeiten in **sk**, so erhält man die Beschleunigung in **m/sk²** (im CGS-System [s. S. 156] in cm/sk²).

Geschwindigkeit und Beschleunigung sind **gerichtete Gröfsen (Vektorgröfsen)**, s. S. 156.

5. Bei einer beliebigen geradlinigen Bewegung bestehen demnach die folgenden **„phoronomischen Grundgleichungen“:**

Die Differentialgleichungen

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

und die aus den beiden ersten folgende

$$v\,dv = p\,ds$$

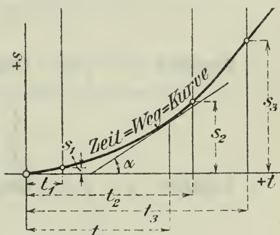
sowie die zugehörigen Integralgleichungen

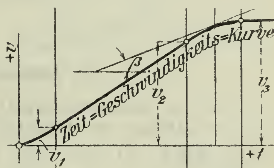
$$s - s_0 = \int_0^t v\,dt$$

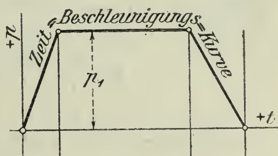
$$v - v_0 = \int_0^t p\,dt$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} p\,ds.$$

Abb. 1.







Nach den beiden ersten Integralgleichungen sind Weg bzw. Geschwindigkeit gleich der Fläche aus der ZGK bzw. ZBK, begrenzt durch die Ordinaten für $t = 0$ und $t = t$.

b. Grundaufgaben.

1. **Gegeben:** $s = f(t)$; **Gesucht:** v, p.

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

2. **Gegeben:** $v = f(t)$; **Gesucht:** s, p.

$$s = s_0 + \int_0^t v\,dt \qquad p = \frac{dv}{dt}$$

3. **Gegeben:** $v = f(s)$; **Gesucht:** p, t.

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v} \qquad p = v\,\frac{dv}{ds}$$

4. **Gegeben:** $p = f(t)$; **Gesucht:** s, v.

$$v = v_0 + \int_0^t p\,dt \qquad s = s_0 + \int_0^t v\,dt$$

5. **Gegeben:** $p = f(s)$; **Gesucht:** v, t.

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} p\,ds} \qquad t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v}$$

6. **Gegeben:** $p = f(v)$; **Gesucht:** s, t.

$$s = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v}{p}\,dv \qquad t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{p}$$

c. Besondere Bewegungen.

1. Ist die Geschwindigkeit unveränderlich, die Beschleunigung also null, so vollführt der Punkt eine **gleichförmige Bewegung.**

Die ZWK ist eine zur Zeitachse unter dem Winkel α geneigte Gerade,

die ZGK eine zur Zeitachse parallele Gerade.

$$p = 0$$

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \operatorname{tg}\alpha = \text{unveränderlich}$$

$$s = s_0 + vt.$$

(Anwendung der ZWK: graphische Eisenbahnfahrpläne.)

2. Ist die Beschleunigung (oder Verzögerung, p negativ) unveränderlich (d. h. die Geschwindigkeits-Zu- oder Abnahme in den einzelnen Zeiteinheiten unveränderlich), so vollführt der Punkt eine **gleichmäfsig beschleunigte** (oder **verzögerte**) **Bewegung.**

Die ZWK ist eine Parabel,
die ZGK eine zur Zeitachse unter dem Winkel β geneigte Gerade und die ZBK eine zur Zeitachse parallele Gerade.

$$p = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \operatorname{tg} \beta = \text{unveränderlich}$$

$$v = v_0 + p\,t$$

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} p t^2 = s_0 + \frac{v_0 + v}{2}\, t \quad \text{und}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = p\,(s - s_0).$$

d. Beispiele.

1. Anfahren eines Strafsenbahnwagens, einer Fördermaschine oder drgl., s. Abb. 1, S. 137.

1. Abschnitt 0 bis t_1: die Beschleunigung wächst von 0 bis zu einem Gröfstwert, etwa nach einer geraden Linie (ZGK eine Parabel, ZWK eine Kurve dritter Ordnung).

2. Abschnitt t_1 bis t_2: Beschleunigung unveränderlich (ZGK eine Gerade, ZWK eine Parabel, vrgl. c., 2.).

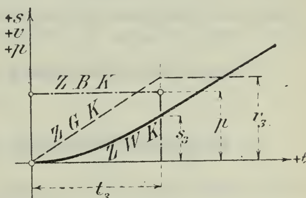
3. Abschnitt t_2 bis t_3: die Beschleunigung nimmt von ihrem Gröfstwert bis auf 0 ab, etwa nach einer geraden Linie (ZGK und ZWK wie unter 1).

Damit ist der Anlauf beendet. Es folgt der Beharrungszustand (Beschleunigung = 0; Geschwindigkeit unveränderlich; ZWK eine gegen die Zeitachse geneigte Gerade, vrgl. c., 1.).

Vielfach begnügt man sich bei der Beurteilung der Anlaufverhältnisse mit den einfacheren Diagrammen nach Abb. 2.

2. Periodische Bewegung (Grundgesetz für elastische Schwingungen, s. auch S. 195) (s. Abb. 3) nach dem Gesetz $s = r \sin(\omega t + \varphi)$, woraus

Abb. 2.



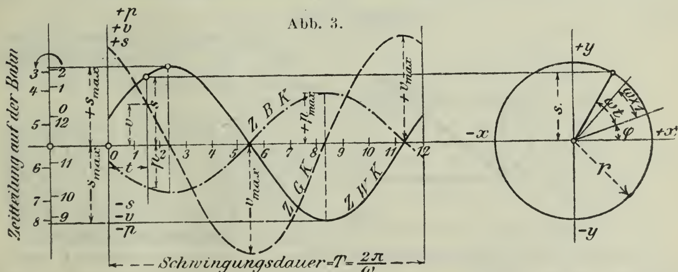
$$v = \frac{ds}{dt} = \omega r \cos(\omega t + \varphi)$$

$$p = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 r \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 s.$$

Wenn ωt um 2π gewachsen ist, d. h. nach Verlauf der Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$, nehmen s, v und p wieder ihre ursprünglichen Werte an. T heifst die **Schwingungsdauer.**

Die Bewegung wird veranschaulicht durch eine um einen Endpunkt kreisende Strecke r, die in jeder Zeiteinheit den Winkelweg ω

Abb. 3.



zurücklegt. Die Projektion dieser Strecke auf die y-Achse ist gleich dem Wege s (vrgl. Polardiagramme der Wechselstromtechnik und kreisende Bewegung eines Punktes, S. 141).

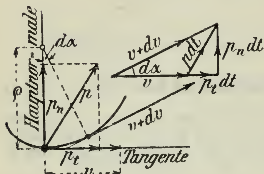
3. Eine gleichmäfsig beschleunigte Bewegung ist die des **freien Falls** (im luftleeren Raum); Näheres hierüber s. S. 192.

II. Krummlinige Bewegung.

a. Allgemeine Gesetze.

1. Wegen der Schwierigkeit der Bogenlängenbestimmung verliert die Zeit-Weg-Kurve bei der krummlinigen Bewegung ihre Anwendbarkeit. An ihre Stelle tritt der **Geschwindigkeitsrifs (Hodograph):** Von einem beliebigen Punkt als Pol aus werden die augenblicklichen Geschwindigkeiten der Gröfse und Richtung nach aufgetragen. Die Tangenten des Geschwindigkeitsrisses geben die Richtungen der augenblicklichen Beschleunigungen an; diese fällt also im allgemeinen nicht mit der in der Tangente an die Bahn liegenden Richtung der Geschwindigkeit zusammen.

Abb. 4.



(Anwendung des Geschwindigkeitsrisses nur für ebene krummlinige Bewegung, da er für Bewegungen im Raum eine Raumkurve wird und eine einfache Darstellung nicht ermöglicht.)

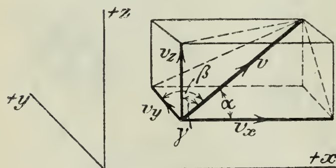
2. Zerlegt man die Beschleunigung p in einem bestimmten Bahnpunkte mit Hülfe eines Parallelogramms (s. Abb. 4 u. vrgl. III, S. 143) in Richtung der Tangente und der Hauptnormalen (s. Abschn. Mathem. S. 94) in diesem Punkte, so dafs die Gesamtbeschleunigung die Diagonale des Rechtecks bildet, dann ergeben sich aus Abb. 4 durch einfache mathematische Beziehungen (mit $\cos d\alpha = 1$, $\sin d\alpha = d\alpha$)

die **Tangentialbeschleunigung** $p_t = \frac{dv}{dt}$ { **Gröfsen**änderung der Geschwindigkeit,

die **Normalbeschleunigung** $p_n = \frac{v^2}{\varrho}$ (oder Zentripetalbeschleunigung) { **Richtungs**änderung der Geschwindigkeit, (ϱ = erster Krümmungshalbmesser, s. Abschn. Mathem. S. 95).

und $$p^2 = p_t^2 + p_n^2.$$

Abb. 5.



Die Normalbeschleunigung ist stets zum Krümmungsmittelpunkte der Bahnkurve hin gerichtet.

Ist die Bahn eine ebene Kurve, so liegen p_t und p_n in der Ebene der Kurve; ist die Bahn doppelt gekrümmt, so liegen p_t und p_n in der Krümmungsebene (s. Abschnitt Mathem. S. 120).

3. Wird die Geschwindigkeit v oder die Beschleunigung p eines Punktes unter Annahme eines rechtwinkligen Koordinatennetzes, das auch der Gleichung der Bahnkurve zugrunde liegt, auf die drei Achsen x, y, z im Raume (in der Ebene x, y) projiziert, d. i. mit Hülfe eines

rechtwinkligen Parallelpipeds in Richtung der Achsen zerlegt, so gilt für die projizierten Bewegungen (s. Abb. 5)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v \cos \alpha \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = v \cos \beta \qquad v_z = \frac{dz}{dt} = v \cos \gamma$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$p_x = \frac{d v_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = p \cos \lambda \qquad p_y = \frac{d v_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = p \cos \mu$$

$$p_z = \frac{d v_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = p \cos \nu$$

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2.$$

(λ, μ, ν sind die Winkel zwischen p und den Achsen.)

b. Kreisende Bewegung.

1. Bewegt sich ein Punkt auf einem Kreise vom Halbmesser r (s. Abb. 6), und beschreibt der Fahrstrahl im Zeitelement dt den Winkelweg $d\gamma$ (in Bogenmafs, d. h. als Bogen am Halbmesser 1 gemessen), so ist

die **Winkelgeschwindigkeit** $\omega = \dfrac{d\gamma}{dt}$

die **Winkelbeschleunigung** $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\gamma}{dt^2}$.

Der Punkt vollführt eine **ungleichförmige Drehbewegung** (Rotation), wenn ε nicht $= 0$ ist.

Es ist

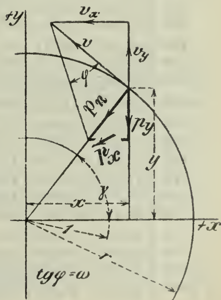
die Umfangsgeschwindigkeit $v = \dfrac{ds}{dt} = r \dfrac{d\gamma}{dt} = r\omega$

die Tangentialbeschleunigung $p_t = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = r \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} = r\varepsilon$

die Normalbeschleunigung $p_n = \dfrac{v^2}{r} = r\omega^2$.

Mifst man die Zeit in **sk**, die Winkel in **Bogenmafs** (unbenannte Zahl), so erhält man die Winkelgeschwindigkeiten in Einheiten **1/sk** und die Winkelbeschleunigungen in Einheiten **1/sk²**.

Abb. 6.



2. Bei **gleichförmiger Drehbewegung** werden in gleichen Zeiteinheiten gleiche Winkelwege zurückgelegt, also $\varepsilon = 0$. Es wird meist mit der **Umlaufzahl** gerechnet, die fast stets auf die **Minute** bezogen wird. Bei nUml./min wird dann die

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dfrac{n 2\pi}{60} \left(\dfrac{1}{\text{sk}}\right)$

und die **Umlaufzahl** $n = \dfrac{60\omega}{2\pi} \left(\dfrac{1}{\text{min}}\right)$.

Tafel über die zu bestimmten Umlaufzahlen gehörenden Winkelgeschwindigkeiten s. f. S.

Winkelgeschwindigkeit ω für $n = 0$ bis $n = 509$ Umläufe in der Minute.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,1047	0,2094	0,3142	0,4189	0,5236	0,6283	0,7330	0,8378	0,9425
10	1,0472	1,1519	1,2566	1,3614	1,4661	1,5708	1,6755	1,7802	1,8850	1,9897
20	2,0944	2,1991	2,3038	2,4086	2,5133	2,6180	2,7227	2,8274	2,9322	3,0369
30	3,1416	3,2463	3,3510	3,4558	3,5605	3,6652	3,7699	3,8746	3,9794	4,0841
40	4,1888	4,2935	4,3982	4,5029	4,6077	4,7124	4,8171	4,9218	5,0265	5,1313
50	5,2360	5,3407	5,4454	5,5501	5,6549	5,7596	5,8643	5,9690	6,0737	6,1785
60	6,2832	6,3879	6,4926	6,5973	6,7021	6,8068	6,9115	7,0162	7,1209	7,2257
70	7,3304	7,4351	7,5398	7,6445	7,7493	7,8540	7,9587	8,0634	8,1681	8,2729
80	8,3776	8,4823	8,5870	8,6917	8,7965	8,9012	9,0059	9,1106	9,2153	9,3201
90	9,4248	9,5295	9,6342	9,7389	9,8437	9,9484	10,053	10,158	10,263	10,367
100	10,472	10,577	10,681	10,786	10,891	10,996	11,100	11,205	11,310	11,414
110	11,519	11,624	11,729	11,833	11,938	12,043	12,147	12,252	12,357	12,462
120	12,566	12,671	12,776	12,881	12,985	13,090	13,195	13,299	13,404	13,509
130	13,614	13,718	13,823	13,928	14,032	14,137	14,242	14,347	14,451	14,556
140	14,661	14,765	14,870	14,975	15,080	15,184	15,289	15,394	15,499	15,603
150	15,708	15,813	15,917	16,022	16,127	16,232	16,336	16,441	16,546	16,650
160	16,755	16,860	16,965	17,069	17,174	17,279	17,383	17,488	17,593	17,698
170	17,802	17,907	18,012	18,117	18,221	18,326	18,431	18,535	18,640	18,745
180	18,850	18,954	19,059	19,164	19,268	19,373	19,478	19,583	19,687	19,792
190	19,897	20,001	20,106	20,211	20,316	20,420	20,525	20,630	20,735	20,839
200	20,944	21,049	21,153	21,258	21,363	21,468	21,572	21,677	21,782	21,886
210	21,991	22,096	22,201	22,305	22,410	22,515	22,619	22,724	22,829	22,934
220	23,038	23,143	23,248	23,353	23,457	23,562	23,667	23,771	23,876	23,981
230	24,086	24,190	24,295	24,400	24,504	24,609	24,714	24,819	24,923	25,028
240	25,133	25,237	25,342	25,447	25,552	25,656	25,761	25,866	25,970	26,075
250	26,180	26,285	26,389	26,494	26,599	26,704	26,808	26,913	27,018	27,122
260	27,227	27,332	27,437	27,541	27,646	27,751	27,855	27,960	28,065	28,170
270	28,274	28,379	28,484	28,588	28,693	28,798	28,903	29,007	29,112	29,217
280	29,322	29,426	29,531	29,636	29,740	29,845	29,950	30,055	30,159	30,264
290	30,369	30,473	30,578	30,683	30,788	30,892	30,997	31,102	31,206	31,311
300	31,416	31,521	31,625	31,730	31,835	31,940	32,044	32,149	32,254	32,358
310	32,463	32,568	32,673	32,777	32,882	32,987	33,091	33,196	33,301	33,406
320	33,510	33,615	33,720	33,824	33,929	34,034	34,139	34,243	34,348	34,453
330	34,558	34,662	34,767	34,872	34,976	35,081	35,186	35,291	35,395	35,500
340	35,605	35,709	35,814	35,919	36,024	36,128	36,233	36,338	36,442	36,547
350	36,652	36,757	36,861	36,966	37,071	37,176	37,280	37,385	37,490	37,594
360	37,699	37,804	37,909	38,013	38,118	38,223	38,327	38,432	38,537	38,642
370	38,746	38,851	38,956	39,060	39,165	39,270	39,375	39,479	39,584	39,689
380	39,794	39,898	40,003	40,108	40,212	40,317	40,422	40,527	40,631	40,736
390	40,841	40,945	41,050	41,155	41,260	41,364	41,469	41,574	41,678	41,783
400	41,888	41,993	42,097	42,202	42,307	42,412	42,516	42,621	42,726	42,830
410	42,935	43,040	43,145	43,249	43,354	43,459	43,563	43,668	43,773	43,878
420	43,982	44,087	44,192	44,296	44,401	44,506	44,611	44,715	44,820	44,925
430	45,029	45,134	45,239	45,344	45,448	45,553	45,658	45,763	45,867	45,972
440	46,077	46,181	46,286	46,391	46,496	46,600	46,705	46,810	46,914	47,019
450	47,124	47,229	47,333	47,438	47,543	47,647	47,752	47,857	47,962	48,066
460	48,171	48,276	48,381	48,485	48,590	48,695	48,799	48,904	49,009	49,114
470	49,218	49,323	49,428	49,532	49,637	49,742	49,847	49,951	50,056	50,161
480	50,265	50,370	50,475	50,580	50,684	50,789	50,894	50,999	51,103	51,208
490	51,313	51,417	51,522	51,627	51,732	51,836	51,941	52,046	52,150	52,255
500	52,360	52,465	52,569	52,674	52,779	52,883	52,988	53,093	53,198	53,302

Ferner wird die

Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\gamma}{dt} = r\,\omega$

Tangentialbeschleunigung $p_t = 0$

Normal-(Zentripetal-)Beschleunigung $p_n = \frac{v^2}{r} = r\,\omega^2$

und (vrgl. a., 3. S. 140 und Abb. 6)

$x = r \cos\gamma$ $\qquad$ $y = r \sin\gamma$

$v_x = -\,\omega\,r \sin\gamma$ $\qquad$ $v_y = +\,\omega\,r \cos\gamma$

$p_x = -\,\omega^2\,r \cos\gamma = -\,\omega^2\,x$ $\qquad$ $p_y = -\,\omega^2\,r \sin\gamma = -\,\omega^2\,y$

Gesamtbeschleunigung $p = p_n = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = r\,\omega^2$

Geschwindigkeitsrifs: Kreis mit dem Halbmesser $r\,\omega$.

3. Ist die Drehbewegung ungleichförmig, besteht aber eine Gesetzmäfsigkeit derart, dafs sich jede volle Umdrehung in der gleichen Zeit vollzieht und bei gleichen Stellungen des Punktes auf dem Kreise gleiche Geschwindigkeiten herrschen, so genügt es häufig, die Bewegung als gleichförmige Drehbewegung zu betrachten und nur die gröfsten Abweichungen davon durch den **Ungleichförmigkeitsgrad** δ (s. auch Abschn. Maschinenteile) zu berücksichtigen. Dieser ist bestimmt durch

$$\delta = \frac{v_{max} - v_{min}}{v} = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega},$$

worin v und ω die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit der zugrunde gelegten gleichförmigen Drehbewegung, v_{max} und ω_{max} die gröfsten, v_{min} und ω_{min} die kleinsten Werte der tatsächlichen Drehbewegung bezeichnen.

Man drückt auch die Ungleichförmigkeit der Bewegung durch die Aenderung des Winkels aus, der von einem fest mit dem Körper verbundenen Halbmesser und einem mit gleichförmiger Bewegung mit $\omega = \pi\,n : 30$ umlaufenden Halbmesser gebildet wird.

III. Zusammensetzung der Bewegungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

a. Allgemeines.

1. Bewegt sich ein Punkt auf einer Bahnlinie, die selbst in Bewegung begriffen ist, so vollführt er eine **zusammengesetzte Bewegung.** Unter der **Zusammensetzung** der beiden Teilbewegungen (Bewegung des Punktes auf der Bahnlinie und Bewegung der Bahnlinie gegen den ruhend angenommenen Raum) versteht man die Ermittlung der Bewegung des Punktes im Raume (Mittelbewegung, resultierende Bewegung). Ist der Raum, auf den die Bewegung der bewegten Bahn bezogen wird, selbst in Bewegung, so sind drei Bewegungen zusammenzusetzen, usw.

Jede Teilbewegung kommt voll zur Geltung und wird nicht von der anderen beeinflufst: **Prinzip der Unabhängigkeit.**

2. Aus der Geschwindigkeit des Punktes auf der Bahn und der Geschwindigkeit der Bahn an dieser Stelle ergibt sich

Abb. 7.

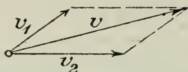
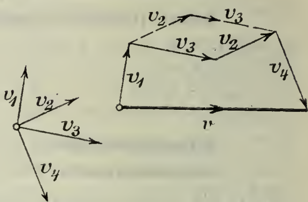


Abb. 8.



die **Mittelgeschwindigkeit** nach Gröfse und Richtung als Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten die gegebenen Geschwindigkeiten nach Gröfse und Richtung sind Abb. 7 **(Parallelogrammgesetz)**. Sind mehr als zwei Bewegungen vorhanden, so ergibt sich die Mittelgeschwindigkeit als Schlufslinie des ebenen oder räumlichen Vielecks, das aus den nach Gröfse und Richtung in beliebiger Reihenfolge aneinandergesetzten Geschwindigkeiten gebildet wird: geometrische Addition (Abb. 8). (Pfeile der gegebenen Geschwindigkeiten gleichsinnig, der Mittelgeschwindigkeit diesen entgegengesetzt.)

3. In der gleichen Weise wie unter 2. die Mittelgeschwindigkeit wird die **Mittelbeschleunigung** eines Punktes aus den Teilbeschleunigungen gefunden.

Bei der **Zusammensetzung krummliniger Bewegungen** können zu den Beschleunigungen der einzelnen Teilbewegungen Zusatzbeschleunigungen auftreten (vrgl. **b. 2.,** α und β, unten).

4. Die Zusammensetzung kann auch rechnerisch erfolgen, indem man die einzelnen projizierten Bewegungen (s. S. 140 u. 141) addiert und dann die drei (in der Ebene zwei) sich ergebenden Bewegungen nach den S. 141 gegebenen Gleichungen zu einer vereinigt.

b. Besondere Fälle.

1. Zusammensetzung geradliniger Bewegungen.

α. Zwei geradlinige, **gleichförmige Bewegungen** ergeben wieder eine geradlinige, gleichförmige Bewegung. Die Richtung und Gröfse des in einer bestimmten Zeit t zurückgelegten Weges ist die Diagonale eines Parallelogramms, das aus den der Zeit t entsprechenden Wegstrecken der Teilbewegungen gebildet ist.

β. **Eine gleichförmige und eine gleichmäfsig beschleunigte Bewegung** ergeben (wenn ihre Richtungen nicht zusammenfallen) eine **krummlinige Bewegung** (Parabel). Die augenblickliche Geschwindigkeit und Beschleunigung ergeben sich nach dem Parallelogrammgesetze (s. **a.**, 2. u. 4., oben). (Wurfbewegung ohne Luftwiderstand, S. 196).

2. Zusammensetzung krummliniger Bewegungen.

α. Bewegt sich ein Punkt auf einer krummlinigen Bahn, und bewegt sich diese so, dafs sie stets ihrer ursprünglichen Lage parallel ist (Schiebung), so ergeben sich die resultierenden Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nach dem Parallelogrammgesetz.

β. Führt die Bahn des Punktes eine **Drehung***) um eine feste Achse aus, so gilt das Parallelogrammgesetz nur für die Zusammensetzung unendlich kleiner Wege und die augenblicklichen Geschwindigkeiten.

Für die **Beschleunigunge** gilt folgendes:

Hat der betrachtete Punkt den augenblicklichen Abstand r von der Drehachse, die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung p auf der bewegten Bahnlinie, während letztere die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung ε hat, so setzt sich die wahre Beschleunigung durch geometrische Addition (s. u. III, a, 2, S. 144) zusammen aus:

1. der Beschleunigung p;
2. der Tangentialbeschleunigung $r\,\varepsilon$;
3. der Zentripetalbeschleunigung $r\,\omega^2$, radial nach der Drehachse gerichtet (auch erste Zusatzbeschleunigung genannt);
4. einer Beschleunigung $2\,\omega\,v \sin\alpha$, winkelrecht zur Drehachse und winkelrecht zu v im Sinne der Drehung; dabei ist α der Winkel zwischen v und der Drehachse (zusammengesetzte Zentripetalbeschleunigung oder zweite Zusatzbeschleunigung).

Ist die bewegte Bahnlinie eine ebene Kurve und bewegt sie sich in ihrer Ebene, so ist $\alpha = 90^0$, daher die zusammengesetzte Zentripetalbeschleunigung unter 4 gleich $2\,\omega\,v$.

(Anwendung bei der Bestimmung der Wasserbewegung in den Laufrädern der Turbinen.)

IV. Relativbewegung.

Bewegt sich ein Punkt P in einem Raum S, der seinerseits eine Bewegung gegen den festen Raum Σ hat, so nennt man die Bewegung von P gegen S die **Relativbewegung** von P, die Bewegung von S die **Fahrzeugbewegung,** und die wahre (zusammengesetzte) Bewegung von P seine **Absolutbewegung.**

Zwischen Relativ-, Fahrzeug- und Absolut-Wegen, -Geschwindigkeiten und -Beschleunigungen bestehen die unter III entwickelten Beziehungen.

Ist aus der Absolut- und der Fahrzeugbewegung die Relativbewegung zu bestimmen, so setze man die Absolut-Gröfsen (-Wege, -Geschwindigkeiten, -Beschleunigungen) mit den in **entgegengesetztem Sinne** genommenen Fahrzeuggröfsen nach dem Parallelogrammgesetze zusammen.

Vollführt aber das **Fahrzeug S eine Drehbewegung,** so gilt diese Regel nur für die Geschwindigkeiten. Um die **Relativbeschleunigung** zu erhalten, mufs man zur Absolutbeschleunigung aufser der entgegengesetzten Tangentialbeschleunigung $r\,\varepsilon$ auch die entgegengesetzte Zentripetalbeschleunigung $r\,\omega^2$ (Zentrifugalbeschleunigung) und die entgegengesetzte, zusammengesetzte Zentripetalbeschleunigung $2\,\omega\,v \sin\alpha$ (zusammengesetzte Zentrifugalbeschleunigung) hinzufügen (vrgl. **b. 2.,** β, S. 144/5).

B. Bewegung starrer Körper.

I. Elementarbewegungen.

1. Bewegt sich ein Körper so, dafs alle seine Punkte kongruente und parallele Bahnen beschreiben, so erfährt der Körper eine **Schiebung** (fortschreitende Bewegung).

*) Näheres über die Entwicklung und vereinfachten Fall s. Keck Vorträge über Mechanik, III. Teil, 1898, S. 36 u. f.

Ist die Bewegung unendlich klein (Weg $= ds$, Zeit $= dt$), so heifst sie **Elementarschiebung.** Es ist

$$\frac{ds}{dt} = v_s = \text{Schiebungsgeschwindigkeit},$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = p_s = \text{Schiebungsbeschleunigung}.$$

2. Bewegt sich ein Körper so, dafs alle seine Punkte Kreise beschreiben, deren Ebenen winkelrecht zu einer Geraden g stehen, die zugleich die Mittelpunkte aller Kreise enthält, so erfährt der Körper eine **Drehung** um die Achse g.

Ist die Bewegung unendlich klein (Drehwinkel $= d\gamma$, Zeit $= dt$), so heifst sie **Elementardrehung.** Der Weg ds eines Punktes im Abstande r von der Drehachse ist

$ds = r\, d\gamma$, und ferner

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega = \text{Winkelgeschwindigkeit der Elementardrehung},$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \varepsilon = \text{Winkelbeschleunigung der Elementardrehung (vrgl. S. 141)}.$$

3. Jede **allgemeine Elementarbewegung** (unendlich kleine Bewegung) eines Körpers läfst sich auf eine Elementardrehung und eine Elementarschiebung längs der Drehachse, die zusammen eine **Elementarschraubung** ergeben, zurückführen (s. II, 2, S. 147).

4. Die Bewegung eines Körpers im Raume ist durch die Bewegung **dreier** Punkte des Körpers, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmt (Bewegungsdreieck).

5. Sind die Bahnen sämtlicher Punkte eines Körpers parallel zu einer festen Ebene, so erfährt er eine **ebene Bewegung** (s. auch S. 150 u. f.). Die Bewegung ist durch die zweier Punkte bestimmt (Bewegungsstrecke). Jede **ebene Elementarbewegung** ist als eine Drehung um einen augenblicklich festliegenden Punkt anzusehen; liegt dieser in unendlicher Entfernung, so ist die Bewegung eine Schiebung. Die endliche ebene Bewegung ist eine ununterbrochene Aufeinanderfolge von Drehungen um im allgemeinen wechselnde Drehpunkte (s. auch II, 3 u. 5, S. 147).

II. Zusammensetzung der Elementarbewegungen.

Vollführt ein Körper um eine Achse eine Elementardrehung oder eine Elementarschiebung längs einer solchen, und unterliegt die Achse selbst einer Elementardrehung oder -schiebung, so vollführen seine Punkte im allgemeinen eine **Elementarschraubung,** d. h. eine Elementardrehung um eine augenblicklich feste (neue) Achse und eine Elementarschiebung längs derselben.

Je nach Art der Teilbewegungen kann die zusammengesetzte (resultierende) Bewegung eine Elementar-Schiebung, -Drehung oder -Schraubung sein.

1. Die **Zusammensetzung zweier Schiebungen** ergibt wieder eine Schiebung, deren Richtung und Gröfse mit Hülfe des Parallelogrammgesetzes (wie S. 144) gefunden wird, ebenso Geschwindigkeit und Beschleunigung.

2. Die Zusammensetzung einer **Drehung** mit der Winkelgeschwindigkeit ω und einer **Schiebung längs der Drehachse** mit der Geschwindigkeit $v_s = \frac{ds}{dt}$ ergibt eine Schraubung um diese Achse.

Ein Punkt im Abstand r von der Drehachse beschreibt ein Schraubenlinienelement von der Länge $dl = \sqrt{ds^2 + r^2 d\alpha^2}$, die Geschwindigkeit der Schraubung ist also

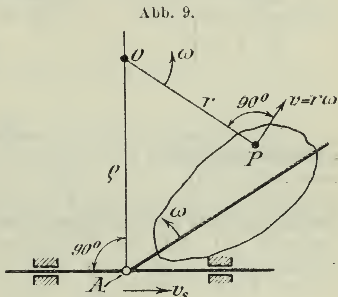
$$v = \sqrt{v_s^2 + (r\omega)^2}.$$

Der Steigungswinkel φ der Schraubenlinie gegen eine Ebene winkelrecht zur Drehachse ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_s}{r\omega}.$$

3. Eine **Drehung** mit der Winkelgeschwindigkeit ω und eine **Schiebung** mit der Geschwindigkeit v_s **winkelrecht zur Drehachse** A ergeben eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine zu A im Abstande $\varrho = v_s : \omega$ parallele Achse O, die mit A in einer zu v_s winkelrechten Ebene liegt. Die resultierende Drehung ist gleichsinnig mit der gegebenen. Abb. 9 (Kreuzkopfende einer Schubstange).

Abb. 9.



4. Eine **Drehung** mit der Winkelgeschwindigkeit ω und eine **Schiebung** mit der Geschwindigkeit v_s **unter dem Winkel** α **zur Drehachse** A geneigt (s. Abb. 10, S. 148), ergeben eine Schraubung um eine zur Achse A parallele Achse O, die im Abstande $\varrho = v_s \sin\alpha : \omega$ in einer Ebene durch die Achse $A \perp$ zur Ebene des $\sphericalangle\, \alpha$ nach der sich aus Abb. 10 ergebenden Seite hin liegt. Die Winkelgeschwindigkeit der mit der ursprünglichen gleichsinnigen Drehung um O ist ω, die Schiebungsgeschwindigkeit längs O ist $v_s' = v_s \cos\alpha$.

5. **Zwei Drehungen** mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 um die **parallelen Achsen** A_1 und A_2 mit dem Abstande a ergeben eine Drehung um eine mit A_1 und A_2 in derselben Ebene liegende und zu ihnen parallele Achse O (Abb. 11, S. 148). Die resultierende Winkelgeschwindigkeit ist $\omega = \omega_1 + \omega_2$, und die Abstände a_1 und a_2 der resultierenden Achse O von A_1 und A_2 sind

$$a_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\, a \qquad a_2 = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}\, a,$$

wobei in sämtliche Gleichungen die Winkelgeschwindigkeiten mit Vorzeichen entsprechend dem Drehsinn (+ im Sinne der Uhrzeigerbewegung, — im entgegensetzten Sinne) einzusetzen sind. (In

Abb. 11, Kurbelende einer Schubstange, ist ω_2 negativ: ungleichsinnige Drehungen.)

Ist im Falle ungleichsinniger Drehungen dem Zahlenwerte nach $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ (**Drehungspaar**), so folgt als resultierende Bewegung eine **Schiebung** mit der Geschwindigkeit $v_s = a\,\omega$ winkelrecht zur Ebene $A_1 A_2$.

Abb. 10.

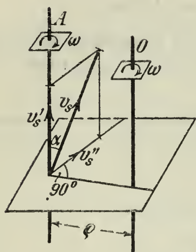


Abb. 11.

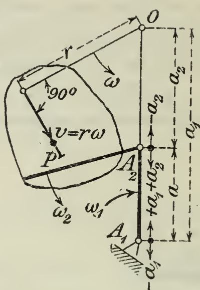
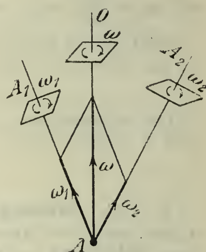
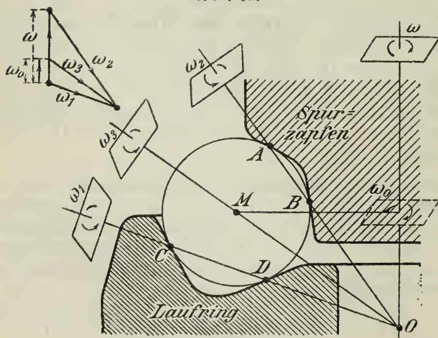


Abb. 12.



6. Die Zusammensetzung **zweier Drehungen** ω_1 und ω_2 um **sich schneidende Achsen** $A A_1$ und $A A_2$ (Abb. 12) liefert eine Drehung um eine Achse $A O$, in der Ebene $A A_1 A_2$. Die Richtung von $A O$ und die Gröfse der resultierenden Winkelgeschwindigkeit findet man aus dem **Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten**, indem man in beliebigem Mafsstab auf $A A_1$ die Winkelgeschwindigkeit ω_1 und auf $A A_2$ die Winkelgeschwindigkeit ω_2, beide von A aus abträgt, u. zw. nach demjenigen Raumteil weisend, von dem aus die Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung erscheint. Die ω_1 und ω_2 darstellenden Graden heifsen **Drehungsstrecken.** Die Diagonale des aus den Strecken ω_1 und ω_2 gebildeten Parallelogrammes liefert die Drehungsstrecke der resultierenden Drehung und somit deren Richtung, Winkelgeschwindigkeit und Sinn.

Abb. 13.

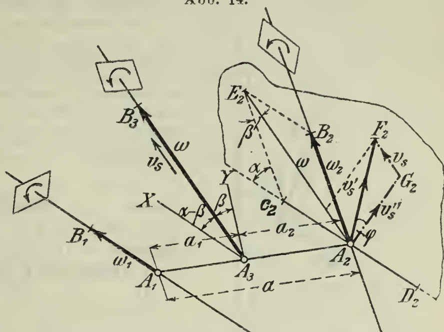


Beispiel: Bewegung der Kugeln in einem Kugellager, s. Abb. 13. Die Winkelgeschwindigkeit ω des Spurzapfens gibt mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 der Kugel um die bewegliche Achse $A B$ die resultierende Winkelgeschwindigkeit ω_1 um die in dem Laufring augenblicklich festliegende Achse $C D$. Ebenso ergeben die Winkelgeschwindigkeit ω_0 des Kugelmittelpunktes und die Winkel-

geschwindigkeit ω_3 der Drehung um die bewegliche Mittelpunktachse MO zusammengesetzt die Winkelgeschwindigkeit ω_1. (Soll die Kugel an den Berührungspunkten nur rollen, so müssen sich AB und CD auf der Achse des Spurzapfens schneiden.)

7. Zwei Drehungen ω_1 und ω_2 **um sich** unter dem $\sphericalangle\ \alpha$ **kreuzende Achsen** (in Abb. 14 durch die Drehungsstrecken, s. u. 6, $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ dargestellt) mit dem kürzesten Abstand $A_1 A_2 = a$, setzt man zusammen, indem man in A_2 die Drehungsstrecken $A_2 C_2$ und $A_2 D_2$ gleich und parallel $A_1 B_1$ einander entgegengesetzt (sich also in ihrer Wirkung aufhebend) anträgt; $A_2 B_2$ und $A_2 C_2$ nach 6, S. 148 zur Drehungsstrecke $A_2 E_2$ (Winkelgeschwindigkeit ω) zusammensetzt; das Drehungspaar $A_1 B_1$ und $A_2 D_2$ nach 5, S. 148 oben durch eine zur Ebene $A_1 B_1 A_2 D_2$ winkelrechte Schiebung mit der Geschwindigkeit $v_s' = a\,\omega_1 = A_2 F_2$ ersetzt; $v_s' = A_2 F_2$ zerlegt in $A_2 G_2 = v_s'' \perp A_2 E_2$ und $G_2 F_2 = v_s \parallel A_2 E_2$; endlich $v_s'' = A_2 G_2$ entsprechend 3, S. 147 mit $\omega = A_2 E_2$ zu einer Drehungsstrecke $A_3 B_3 = \omega \parallel A_2 E_2$ zusammensetzt. Ergebnis: Schraubung um die Achse $A_3 B_3$ mit ω und Schiebung mit v_s längs der Achse $A_3 B_3$; $\sphericalangle$ der Achse $A_3 B_3$ mit $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ siehe Abb. 14.

Abb. 14.



$A_2 A_1 \perp A_2 C_2 \perp A_2 F_2$; $A_2 E_2 \perp A_2 G_2$; $A_2 F_2 \parallel G_2 F_2$

Es liegen nach der Zeichnung (Abb. 14) $A_2\,C_2\,D_2\,E_2\,F_2\,G_2$ in einer Ebene $\perp A_1 A_2$. Daraus folgt

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\,\omega_1\,\omega_2 \cos\alpha}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \omega_2 \sin\alpha : \omega \qquad v_s' = a\,\omega_1 \qquad \varphi = \alpha - \beta$$

$$v_s = v_s' \sin\varphi = v_s' \sin(\alpha-\beta) = a\,\frac{\omega_1\,\omega_2}{\omega} \sin\alpha$$

$$v_s'' = v_s' \cos\varphi = a\,\omega_1 \cos(\alpha-\beta) = a\,\omega_1 \sqrt{1 - \frac{\omega_2^2 \sin^2\alpha}{\omega^2}} = \frac{a\,\omega_1(\omega_1 + \omega_2 \cos\alpha)}{\omega}$$

$$a_2 = \frac{v_s''}{\omega} = a\,\frac{\omega_1(\omega_1 + \omega_2\cos\alpha)}{\omega^2}$$

$$a_1 = a - a_2 = a\,\frac{\omega_2(\omega_2 + \omega_1\cos\alpha)}{\omega^2}.$$

Lage von A_3: α ist der $\sphericalangle$ zwischen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ (in Abb. 14 $< 90^0$; bei entgegengesetzter Drehrichtung von ω_1 oder ω_2 würde $\alpha > 90^0$ sein).

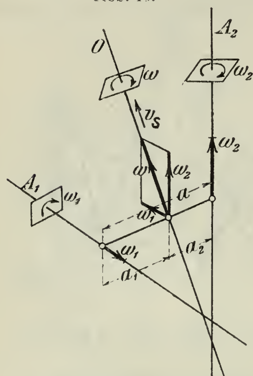
$\alpha < 90^0$: A_3 stets zwischen A_1 und A_2.

$\alpha > 90^0$: A_3 innerhalb $A_1 A_2$, wenn a_1 und a_2 positiv,
A_3 außerhalb $A_1 A_2$ nach A_2, wenn a_2 negativ, nach A_1, wenn a_1 negativ.

Soll die **Mittelbewegung eine reine Drehung** mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 sein (Drehungsübertragung zwischen zwei windschiefen Achsen durch **Schraubenräder**. Uebersetzungsverhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, Abstand der Achsen a und Winkel der Achsen $\alpha = \sphericalangle$

zwischen $+\omega_1$ und $+\omega$, s. o. u. Lage von A_3, gegeben) (Abb. 15), so mufs um die bewegliche Zwischenachse O eine Schraubung erfolgen mit der Winkelgeschwindigkeit ω und der Schiebungsgeschwindigkeit v_s (Gleitgeschwindigkeit der Zahnflanken); die Zwischenachse (Berührungslinie der Zahnflanken) teilt die Strecke a in zwei Teile a_1 u. a_2.

Abb. 15.



Die Werte für ω, v_s, a_1 und a_2 ergeben sich aus den obigen Gleichungen für die Zusammensetzung zweier Drehungen unter Beachtung der Gesetze über Relativbewegungen (s. S. 145), indem als gegeben zu betrachten sind die Fahrzeugbewegung um A_1 und als Absolutbewegung die (zusammengesetzte) Bewegung um A_2, gesucht die Relativbewegung um O; statt ω_1 ist also überall in den Gleichungen $-\omega_1$ einzusetzen.

In der unter 7, S. 149 gezeigten Weise lassen sich **beliebig viele Drehungen** = Drehungsstrecken (wie Kräfte) und **Schiebungen** = Drehungspaare (wie Kräftepaare von **beliebiger Lage** zusammensetzen (vrgl. S. 161 u. f.). Man erhält im allgemeinen eine Schraubenbewegung, deren Achse mit der Zentralachse einer anstelle der Drehungsstrecken und -paare gedachten Kräftegruppe zusammenfällt.

Drehungen und Schiebungen (Drehungspaare) sind wie Kräfte und Kräftepaare zusammenzusetzen (vrgl. S. 159 u. f.).

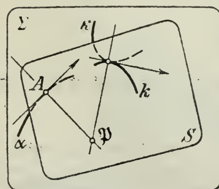
III. Ebene Bewegung (kinematische Geometrie)

a. Erklärungen und Grundbegriffe.

Die ebene Bewegung eines Körpers (Erklärung S. 146) wird ersetzt durch die Bewegung einer Ebene S (bewegtes System), die auf der festen Ebene Σ gleitet. Die bewegte Ebene enthält **Systempunkte** A, B, C . . . und **Systemkurven** k, l, m . . .

Paust man die Systempunkte A, B, C . . . in ihren verschiedenen Lagen, die sie im Laufe der Zeit einnehmen, auf die feste Ebene durch, so erhält man auf dieser die **Punktbahnen** α, β, γ . . .; paust man ebenso die Systemkurven k, l, m . . . in ihren verschiedenen Lagen auf die feste Ebene durch, so werden diese Pausen umhüllt von den **Hüllbahnen** $\varkappa$, λ, μ . . . (s. Abb. 16).

Abb. 16.



Der Uebergang aus einer Lage von S in die unendlich benachbarte besteht in einer Drehung um den **augenblicklichen Drehpunkt** oder **Pol** $\mathfrak{P}$ (vrgl. I, 5, S. 146).

Durch den Pol gehen die Normalen aller von den Systempunkten augenblicklich beschriebenen Punktbahnelemente und ebenso die Normalen auf den Bogenelementen, in denen sich augenblicklich die Systemkurven und ihre Hüllbahnen berühren (s. Abb. 16).

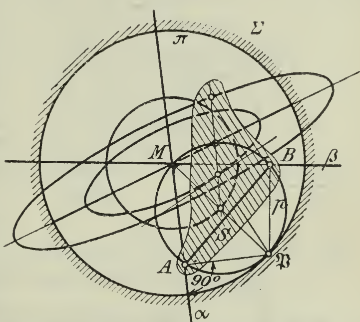
Im Pol kann man sich für das betrachtete, unendlich kleine Zeitelement die Ebenen S und Σ durch einen Gelenkbolzen verbunden denken.

Der Pol ist eindeutig bestimmt durch die Normalen zweier Punktbahnen oder die Berührungsnormalen zweier Hüllbahnen und ihrer Systemkurven.

Alle Punkte der **bewegten** Ebene, die nach und nach zu Polen werden, bilden eine Systemkurve, die **Polkurve** (bewegliche Polbahn); die Punkte der festen Ebene, die im Laufe der Zeit zu Polen werden, bilden die **Polbahn** (feste Polbahn, **Leitkurve**). Sie ist die Hüllbahn der Polkurve.

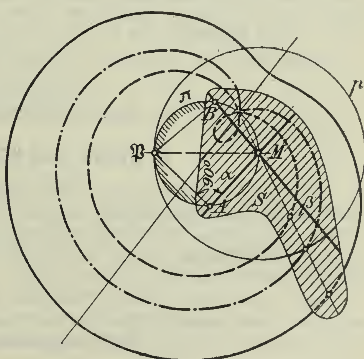
Bei der Bewegung rollt die Polkurve auf der Polbahn, ohne zu gleiten (daher auch für Polbahn und Polkurve der gemeinschaftliche Name **Rollkurven**). Für eine bestimmte Bewegung gibt es nur ein Rollkurvenpaar.

Abb. 17.



Hält man in einem bestimmten Augenblick die Ebene S fest und läfst Σ sich auf S bewegen derart, dafs die **gegenseitige** (relative) **Bewegung** von S und Σ dieselbe bleibt wie vordem, so erhält man die **umgekehrte Bewegung.** Die Systempunkte A, B, Γ . . . in Σ beschreiben jetzt Bahnkurven auf S, die im allgemeinen anderer Art sind, wie die Bahnkurven der ursprünglichen Bewegung. Die Systemkurven α, β, γ . . . gleiten jetzt durch die festen Punkte A, B, C . . . hindurch, diese Punkte sind also die Hüllbahnen jener Systemkurven. Die Systemkurven $\varkappa, \lambda, \mu$ . . . erhalten als Hüllbahnen die Kurven k, l, m . . . Die Polbahn wird zur Polkurve und umgekehrt.

Abb. 18.



Beispiel. Cardanisches Problem (Abb. 17): Eine Ebene bewegt sich so auf einer anderen, dafs zwei Punkte A und B der bewegten Ebene stets auf zwei sich im Punkte M schneidenden Geraden α und β der festen Ebene gleiten.

Pol 𝔓 Schnittpunkt der in A und B auf α und β errichteten Lote.

Polkurve: Kreis p durch A, B und M **Polbahn**: Kreis π mit dem doppelten Halbmesser von p und dem Mittelpunkt M.

Punktbahnen: Für alle auf der Polkurve p liegenden Punkte der durch den betreffenden Punkt gehende Durchmesser der Polbahn π; für alle übrigen Punkte Ellipsen, insbesondere für den Mittelpunkt von p ein Kreis um M.

Umkehrung (Abb. 18): Eine Ebene bewegt sich so auf einer anderen, dafs zwei einen starren Winkel bildende Geraden α und β durch zwei Punkte A und B der festen Ebene ständig gleiten.

Pol 𝔓: Schnittpunkt der in A und B auf α und β errichteten Lote. **Polkurve:** Kreis π. **Polbahn:** Kreis p. **Punktbahnen:** Paskalsche Kurven*); insbesondere beschreiben die Punkte auf der Polkurve Kardioiden mit Rückkehrpunkt (Spitze); Punkte aufserhalb der Polkurve beschreiben Punktbahnen mit isoliertem Punkt; Punkte innerhalb der Polkurve solche mit Schleife.

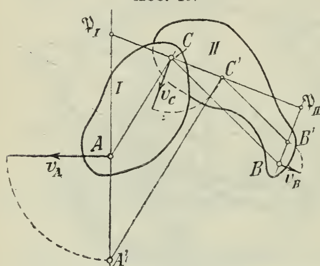
b. Geschwindigkeitszustand.

Für die augenblickliche Geschwindigkeit der Punkte $A, B, C \ldots$ einer starren Ebene gilt

$$v_A = r_a \omega \qquad v_B = r_b \omega \qquad v_C = r_c \omega \ldots$$

wo ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit um den Pol 𝔓 und $r_a, r_b, r_c \ldots$ die Längen der Polstrahlen 𝔓A, 𝔓B, 𝔓$C \ldots$ bedeuten.

Abb. 19.



Dreht man v_A, v_B, $v_C \ldots$ um die Punkte $A, B, C \ldots$ in demselben Sinne um 90^0, bis sie in die Polstrahlen fallen, so bilden die Endpunkte $A', B', C' \ldots$ dieser Strecken (der **lotrechten Geschwindigkeiten**) eine der Figur $A, B, C \ldots$ ähnliche und ähnlich gelegene Figur mit dem Aehnlichkeitspunkt 𝔓. Es ist daher $A'B' \| AB$, $A'C' \| AC \ldots$

Anwendungs-Beispiel: Zwei ebene Scheiben I und II (Abb. 19) sind im Punkte C gelenkig miteinander verbunden. Für die Punkte A und B der Scheiben sind die augenblicklichen Geschwindigkeiten v_A und v_B gegeben. Es sind die Pole 𝔓$_I$ und 𝔓$_{II}$ für die Bewegung von I und II gegen die feste Zeichenebene zu bestimmen.

𝔓$_I$ liegt auf der Normalen zu v_A in A, 𝔓$_{II}$ auf der Normalen zu v_B in B. Da C beiden Ebenen gemeinschaftlich ist, liegt der Endpunkt C der lotrechten Geschwindigkeit von C auf einer Parallelen durch A' zu AC und auf einer Parallelen durch B' zu BC, also im Schnittpunkt beider. CC' schneidet AA' in 𝔓$_I$ und BB' in 𝔓$_{II}$. (Beim Umklappen von v_A und v_B denselben Drehsinn beachten!)

(Anwendung dieser Aufgabe in der kinematischen Fachwerktheorie.)

c. Beschleunigungszustand.

1. Wende- und Wechselkreis,

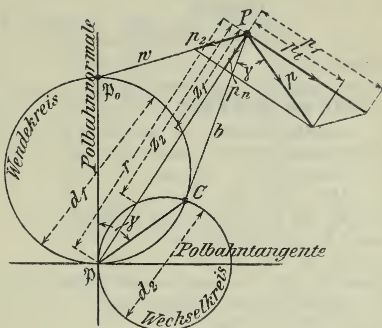
Alle Punkte der starren Ebene, die augenblicklich **keine Normal-(Zentripetal-)beschleunigung** haben, die also augenblicklich Wendepunkte ihrer Bahn beschreiben (Krümmungshalbmesser $\varrho = \infty$), liegen auf dem **Wendekreis,** einem Kreise, der die Polbahntangente im augenblicklichen Pol berüht (s. Abb. 20).

Denkt man sich einen Punkt die Polbahn so durchlaufen, dafs er stets mit dem augenblicklichen Pol zusammenfällt, so nennt man seine Geschwindigkeit u die **Wechselgeschwindigkeit des Poles.**

---

*) Anwendung bei der Beurteilung der Meyerschen Expansionsschiebersteuerung mittels des Zeunerschen Diagramms.

Zwischen der augenblicklichen Wechselgeschwindigkeit u, der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung um den Pol und dem Durchmesser d_1 des augenblicklichen Wendekreises besteht die Gleichung $d_1 = u : \omega$.



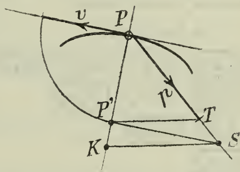
Alle Punkte der starren Ebene, die augenblicklich **keine Tangentialbeschleunigung** haben, also in zwei aufeinanderfolgenden gleichen Zeitelementen gleiche Bahnelemente durchlaufen, liegen auf dem **Wechselkreis,** einem Kreise, der die Polbahnnormale im augenblicklichen Pol berührt (s. Abb. 20). Der Durchmesser d_2 des Wechselkreises ist $d_2 = u\omega : \varepsilon$, wo ε die augenblickliche Winkelbeschleunigung der Drehung um den Pol ist.

2. Die Gesamtbeschleunigung p eines beliebigen Punktes P der bewegten Ebene, Wende- und Beschleunigungspol.

Die Gesamtbeschleunigung ergibt sich (Abb. 20)

1. als Resultierende der Normalbeschleunigung $p_n = z_1 \omega^2$ und der Tangentialbeschleunigung

$$p_t = z_2\,\varepsilon = z_2 \frac{d\omega}{dt}.$$



z_1 und z_2 sind die auf dem Normalstrahl $\mathfrak{P}P$ gemessenen Entfernungen des Punktes P vom Wende- und Wechselkreise.

2. als Resultierende der Beschleunigung $p_1 = r\varepsilon$ winkelrecht zum Normalstrahl und der nach dem **Wendepol** $\mathfrak{P}_0$ hin gerichteten Beschleunigung $p_2 = w\omega^2$, wo $w = \mathfrak{P}_0 P$ ist.

Pol $\mathfrak{P}$ hat die Gesamtbeschleunigung $d_1\omega^2$ nach $\mathfrak{P}_0$ hin.

3. gleich $b\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ $(b = \overline{CP})$ und mit CP den Winkel $\gamma = C\mathfrak{P}\mathfrak{P}_0$ bildend, für den $\operatorname{tg}\gamma = \varepsilon : \omega^2$ ist.

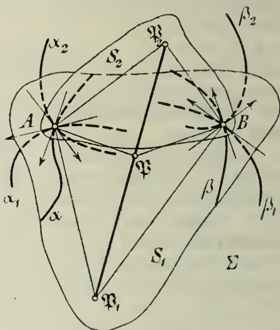
Für den Schnittpunkt C von Wende- und Wechselkreis, den **Beschleunigungspol,** ist die Gesamtbeschleunigung null.

4. Ist die winkelrechte Geschwindigkeit PP' von P, der Krümmungsmittelpunkt K der Bahn von P sowie die Richtung der Gesamt-

beschleunigung p gegeben, so findet man $p = PT$ durch die Konstruktion Abb. 21, worin $P'P = v$, $P'S \perp P'P$ und $P'T \parallel KS$ ist.

d. Komplane Bewegung dreier Ebenen.

Abb. 22.



Für technische Anwendungen (kinematische Fachwerktheorie) kommt lediglich in Betracht der

Satz der drei Pole: Beschreiben die augenblicklich in A und B zusammenfallenden Punkte der beiden beweglichen Ebenen S_1 und S_2 (Abb. 22) die Kurven α_1, α_2 und β_1, β_2 auf der festen Zeichenebene Σ, und beschreiben ferner die Punkte A und B der beweglichen Ebene S_2 die Kurven α und β auf der beweglichen Ebene S_1, so liegen die drei Pole

$\mathfrak{P}_1 =$ Pol von S_1 gegen $\Sigma =$ Schnittpunkt der Normalen in A und B auf α_1 und β_1,

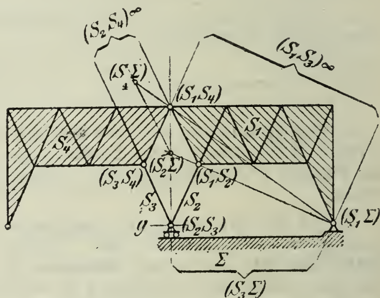
$\mathfrak{P}_2 =$ Pol von S_2 gegen $\Sigma =$ Schnittpunkt der Normalen in A und B auf α_2 und β_2,

$\mathfrak{P} =$ Pol von S_2 gegen $S_1 =$ Schnittpunkt der Normalen in A und B auf α und β

in einer Geraden.

Beispiel: Für das Fachwerk (Abb. 23) sind sämtliche Pole der beweglichen Scheiben S_1, S_2, S_3, S_4 gegen die Widerlagerscheibe (feste Zeichenebene) Σ und außerdem die Pole der Scheiben gegeneinander zu bestimmen.

Abb. 23.



Von den 11 Polen

$(S_1\Sigma)$	$(S_2\Sigma)$	$(S_3\Sigma)$	$(S_4\Sigma)$
(S_1S_4)	(S_2S_4)	(S_3S_4)	
(S_1S_3)	(S_2S_3)		
(S_1S_2)			

sind die stark Umrahmten unmittelbar gegeben. Die übrigen findet man wie folgt:

$$\text{Es liegt Pol } (S_1S_3) \text{ auf } \left\{\begin{array}{l} (S_1S_2)\,(S_2S_3) \\ \hline (S_1S_4)\,(S_3S_4) \end{array}\right.$$

$$\text{„ „ „ } (S_2S_4) \text{ „ } \left\{\begin{array}{l} (S_2S_1)\,(S_4S_1) \\ \hline (S_2S_3)\,(S_4S_3) \end{array}\right.$$

$$\text{„ „ „ } (S_2\Sigma) \text{ „ } \left\{\begin{array}{l} \perp \text{ auf } g \text{ durch } (S_2S_3) \\ \hline (S_2S_1)\,(\Sigma S_1) \end{array}\right.$$

$$\text{Es liegt Pol } (S_3\Sigma) \text{ auf } \left\{\begin{array}{l} \perp \text{ auf } g \text{ durch } (S_2S \\ \hline (S_3S_1)\,(\Sigma S_1) \end{array}\right.$$

$$\text{„ „ „ } (S_4\Sigma) \text{ „ } \left\{\begin{array}{l} (S_4S_1)\,(\Sigma S_1) \\ \hline (S_4S_2)\,(\Sigma S_2) \end{array}\right.$$

II. PHYSIKALISCHE MECHANIK.

A. Allgemeine Gesetze (Erfahrungsgesetze).

1. **Trägheitsgesetz** (**Galilei**, 1638). Jede Masse bleibt ohne äufsere Einwirkungen in Ruhe oder bewegt sich geradlinig und gleichförmig.

Die Ursache der Bewegungsänderung eines Körpers (Beschleunigung, Verzögerung oder Richtung) heifst **Kraft.** (Dynamischer Kraftbegriff.)

2. **Gesetz der Schwere** (**Galilei-Newton**). Ein frei im luftleeren Raume fallender Körper vollführt eine gleichmäfsig beschleunigte Bewegung. — Die Fallbeschleunigung g ist an demselben Ort für alle Körper gleich, u. zw. für das mittlere Deutschland (Breite 50°)

$$g = 9{,}81 \text{ m/sk}^2.$$

Am frei fallenden Körper wirkt somit eine Kraft, sein **Gewicht** (oder die Schwerkraft).

Für geringe Fallhöhen ist g unveränderlich, u. zw.

$$g = 9{,}806056 - 0{,}025028 \cos 2\varphi - 0{,}000003\, h,$$

worin φ die geographische Breite und h die Höhe über dem Meeresspiegel, womit für $h = 0$ und

$\varphi = 0^0$ g am Aequator $= g_a = 9{,}781$ m/sk²,
$\varphi = 45^0$ g $= g_m = 9{,}806$ m/sk²,
$\varphi = 90^0$ g an den Polen $= g_p = 9{,}831$ m/sk²

wird und $g_p - g_a = {}^1/_{196}\, g_m$.

Zahlenwerte, welche g enthalten, s. S. 43.

3. **Beziehungen zwischen Masse, Beschleunigung und Kraft.** Unter dem Einflufs einer **gleichbleibenden Kraft** vollführt ein Körper eine **gleichmäfsig beschleunigte Bewegung.**

Für mäfsige Fallhöhen ist also die Anziehungskraft der Erde unveränderlich, da nach dem Gesetz der Schwere die Fallbewegung dann gleichmäfsig beschleunigt ist (Atwoodsche Fallmaschine).

Die an demselben Körper von verschiedenen Kräften erzeugten Beschleunigungen verhalten sich wie die Kräfte, so dafs

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{P_2}{p_2} = \cdots \text{unveränderl.} = m; \left(\frac{P_1,\ P_2 \ldots \text{ wirkende Kräfte}}{p_1,\ p_2 \ldots \text{ erzeugte Beschleunigungen}}\right).$$

Das für jeden Körper unveränderliche Verhältnis m zwischen angreifender Kraft und hervorgebrachter Beschleunigung heifst die **Masse des Körpers.**

Dynamische Grundgleichung (**Newton**, 1687): **Kraft = Masse × Beschleunigung.**

Diese Gleichung gilt, welcher Art auch die am Körper wirkende Kraft sein mag (elastische Kraft, Schwerkraft, magnetische oder elektrische Kraft), insbesondere gilt auch

$$\text{Gewicht} = \text{Masse} \times \text{Fallbeschleunigung}; \quad G = mg,$$

$$\text{Masse} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Fallbeschleunigung}}; \quad m = \frac{G}{g}.$$

Für die Gewichte zweier Körper gilt

$$G_1 = m_1 g; \quad G_2 = m_2 g, \text{ also } \frac{m_1}{m_2} = \frac{G_1}{G_2},$$

d. h. die Massen zweier Körper verhalten sich wie ihre Gewichte.

Kräfte sind wie Geschwindigkeiten und Beschleunigungen (s. S. 137) **gerichtete Gröfsen,** d. h. zu ihrer vollständigen eindeutigen Bestimmung ist aufser der Angabe ihrer absoluten Gröfse (Zahlenwert) die ihrer Wirkungslinie und ihrer Richtung in dieser nötig.

4. Hängt man einen Körper an einen elastischen Faden, so erfährt dieser eine Verlängerung, deren Ursache Kraft heifst (hier im besonderen die Schwerkraft), oder allgemein: Die Ursache einer Formänderung ist eine **Kraft.** (Statischer Kraftbegriff.)

An dem aufgehängten Körper wirkt in diesem Falle aufser seinem Gewicht, unter dessen Einflufs er freifallend die Beschleunigung g annehmen würde, noch eine **vom Faden ausgeübte Kraft** (dessen Spannkraft), die ihm die gleiche, entgegengesetzt gerichtete Beschleunigung erteilt, so dafs der Körper in Ruhe bleibt. Die beiden Kräfte sind gleich grofs.

5. **Wechselwirkungs-Gesetz (Newton,** 1687**).** Die beiden Kräfte, die zwei Körper gegenseitig aufeinander ausüben, fallen in dieselbe Gerade, sind gleich grofs und entgegengesetzt gerichtet.

Die Kraftübertragung kann dabei in beliebiger Weise erfolgen: durch Massenanziehung s. u., unmittelbare Berührung, durch Vermittlung eines Zwischengliedes, elektrische oder magnetische Anziehung.

Gesetz der allgemeinen **Massenanziehung (Newton,** 1685). Zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 in der Entfernung r voneinander ziehen sich mit einer Kraft P proportional dem Produkt aus den Massen und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung an:

$$P = k \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

B. Technisches und physikalisches Mafssystem.

Wird die Kraft bezw. die Masse als neuer Grundbegriff zu der Länge und der Zeit hinzugefügt, so erhält man das technische bzw. das physikalische Mafssystem.

Angaben für Geschwindigkeit und Beschleunigung s. S. 137, für Arbeit S. 187, Leistung S. 190; ferner auch Abschn. Elektrotechnik: Einleitung.

1. **Technisches Mafssystem.** Als **Einheit der Kraft** ist die Anziehungskraft der Erde in Paris auf 1 cdm destilliertes Wasser von 4° C

gewählt ($g = 9,806$ m/sk²). Diese Einheit heifst das **Kilogramm-Gewicht** (1 kg), kurz als Kilogramm bezeichnet.

Dafür ist als Urmafs ein in Paris aufbewahrter Platinzylinder angefertigt, nach dem andere Urmafse für die einzelnen Staaten hergestellt sind.

Nimmt man als Längeneinheit das m, als Zeiteinheit die sk, demnach als Beschleunigungseinheit 1 m/sk², so erhält man als Einheit der Masse

$$\frac{1 \text{ Krafteinheit}}{1 \text{ Beschleunigungseinheit}} = 1 \text{ kg} \frac{\text{sk}^2}{\text{m}}.$$

2. **Physikalisches Mafssystem.** Als Einheit der **Masse** ist die eines cdm destillierten Wassers von 4° C gleich der des in Paris aufbewahrten Platinzylinders gewählt. Diese Einheit heifst 1 **Kilogramm-Masse** (1 kg).

Wählt man als Beschleunigungseinheit 1 m/sk², so wird die Einheit der Kraft

$$1 \text{ Masseneinheit} \times 1 \text{ Beschleunigungseinheit} = 1 \text{ kg m/sk}^2.$$

Im **C-G-S-System** ist die Einheit der Länge 1 cm, die Einheit der Zeit 1 sk, die Einheit der Masse 0,001 kg = 1 Gramm-Masse (Gramm, 1 g), wonach die Einheit der Kraft

$$1 \text{ g cm/sk}^2 = 1 \textbf{ Dyn}.$$

Da die Masse $1 \text{ g} = \frac{1}{1000} \text{kg} \frac{1}{9,81 \text{ m/sk}^2}$ ist, so ist

$$1 \text{ kg} = 981\,000 \text{ Dyn}; \; 1 \text{ Dyn} = 0,000\,001\,019 \text{ kg}.$$

III. STATIK STARRER KÖRPER.

A. Allgemeine Begriffe.

1. Unter Statik starrer Körper versteht man die Aufstellung der Beziehungen, die zwischen den auf einen ruhenden Körper wirkenden Kräften bestehen (oder — im Sonderfall — auf einen in geradliniger gleichförmiger Schiebungsbewegung befindlichen Körper).

Ueber den „Kraft"-Begriff und Mafs der Kräfte s. physikalische Mechanik S. 155 u. f.

Unter einem starren Körper versteht man eine Vereinigung von Massenpunkten, die in ihrer gegenseitigen Lage keine Aenderung durch den Einflufs irgendwelcher Kräfte erfahren.

Vollkommen starre Körper gibt es nicht; Voraussetzung für die Anwendbarkeit der für starre Körper abgeleiteten Sätze der Statik ist eine so geringe Formänderung der Körper unter Einflufs der Kräfte, dafs die Lagenänderung der Angriffpunkte ohne merklichen Einflufs ist.

2. Wenn die Kräfte an dem Körper keine Bewegung oder Bewegungsänderung (also keine Beschleunigung oder Verzögerung) hervorrufen, so müssen sie sich nach dem Trägheitsgesetz von Galilei (s. S. 155) in ihrer Gesamtwirkung aufheben: sie halten sich das **Gleichgewicht.**

Das Gleichgewicht heifst **gesichert (stabil),** wenn der Körper und mit ihm die auf ihn wirkenden Kräfte, unendlich wenig aus ihrer Lage gebracht, wieder in diese zurückkehren (wenn positive Arbeit zur Lagenänderung aufzuwenden ist); **unentschieden (indifferent),** wenn die Kräfte auch für die neue Lage im Gleichgewicht bleiben (keine Arbeit zur Lagenänderung nötig ist); **unsicher (labil),** wenn sich der Körper weiter von der innegehabten Gleichgewichtslage entfernt (wenn negative Arbeit aufzuwenden ist).

Ueber **Standfestigkeit** und **Stabilitätsmoment** siehe S. 169.

3. **Aeufsere und innere Kräfte.** Die Kräfte, mit denen die einzelnen Massenpunkte eines Körpers aufeinander einwirken, heifsen innere Kräfte, alle anderen äufsere.

Wird ein unter der Wirkung von Kräften stehender Körper K von Körpern gestützt, so treten an den Berührungspunkten (Auflager, Widerlager) und im Inneren von K Formänderungen und Kräfte auf. Die Formänderungen dauern so lange an, bis an allen Stellen Gleichgewicht herrscht. (K befindet sich im Spannungszustande, vrgl. IV. Abschn. Festigkeitslehre.)

Die vom Körper K auf die Stützkörper ausgeübten Kräfte, **Auflagerdrücke,** sind gleich grofs und entgegengesetzt gerichtet den von den Stützkörpern auf K übertragenen Kräften, **Lagerwiderstände** (s. Wechselwirkungsgesetz von Newton, S. 156), **Stützenwiderstände, Lagerreaktionen;** die Wirkung der Stützkörper auf K wird vollständig durch diese Lagerwiderstände ersetzt, die zu den äufseren Kräften des Körpers K zu rechnen sind.

Alle Kräfte in der Natur erscheinen paarweise als Gegenkräfte (in derselben Geraden liegend, gleich grofs, einander entgegengesetzt gerichtet). Betrachtet man einen Körper, also ein bestimmtes Gebiet, so treten darin die inneren Kräfte paarweise auf, hingegen die äufseren Kräfte einzeln, da deren Gegenkräfte aufserhalb des Gebietes liegen; z. B. immer die Gewichte der Körper, deren Gegenkräfte am Mittelpunkt der Erde angreifen. Trennt man einen im Spannungszustande befindlichen Körper durch einen Schnitt in zwei Teile, so werden die an den Schnittstellen auftretenden Kräfte, die für den ganzen Körper innere sind, zu äufseren in bezug auf die beiden Teile.

Die inneren Kräfte bilden ein Gleichgewichtsystem; folglich müssen auch bei einem unter dem Einflufs von Kräften in Ruhe befindlichen gestützten Körper die äufseren Kräfte und die Stützwiderstände im Gleichgewicht sein — dient zur Bestimmung der bei technischen Aufgaben stets als Unbekannte auftretenden Stützwiderstände (s. S. 167) — und für jeden Teil eines Körpers gilt ebenso: die äufseren Kräfte, die Stützwiderstände und die Kräfte an den Schnittstellen sind im Gleichgewicht — dient zur Bestimmung der Spannkräfte (s. S. 176 u. Abschn. Festigkeitslehre).

4. Bei einem **starren Körper** darf man stets in einer beliebigen Geraden zwei beliebige gleich grofse, einander entgegengesetzt wirkende **Kräfte hinzufügen,** und jede Kraft in Richtung ihrer

Wirkungslinie beliebig **verschieben**, ohne dafs in der Wirkung der Kräfte auf den Körper eine Aenderung eintritt (soweit nicht die inneren Kräfte des Körpers — Festigkeit — in Frage kommen).

B. Zusammensetzung, Zerlegung, und Gleichgewicht der Kräfte.

Zeichnerische Behandlung s. S. 169 u. f.

Die **Mittelkraft** mehrerer an einem starren Körper angreifenden Kräfte ist die Kraft, welche dieselbe Wirkung hervorruft wie die einzelnen Kräfte in ihrer Gesamtheit (z. B. dieselbe Beschleunigung dem Körper erteilt wie die einzelnen Kräfte zusammen).

a. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt.

1. **Die Mittelkraft R zweier in einem Punkt angreifenden Kräfte** P_1 und P_2 wird der Gröfse und Richtung nach durch die Diagonale des aus P_1 und P_2 gebildeten Parallelogramms dargestellt (wie unmittelbar aus $P_1 = m p_1$ und $P_2 = m p_2$ und der Zusammensetzung zweier Beschleunigungen, s. 3, S. 144, folgt).

Nach Abb. 24 ist demnach

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos \alpha}.$$

Für $\alpha = 90^0$ (Abb. 25)

wird $R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$; $\cos \varphi = P_1 : R$; $\sin \varphi = P_2 : R$

für $\alpha = 0^0$ „ $R = P_1 + P_2$ } Kräfte in einer Geraden.
für $\alpha = 180^0$ „ $R = P_1 - P_2$ }

Abb. 24.

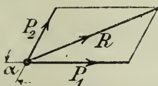
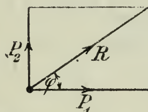


Abb. 25.



2. Umgekehrt läfst sich unter sinngemäfser Anwendung der Gleichungen unter 1 **eine Kraft** R in zwei sich auf R schneidende und mit R in einer Ebene liegende **Seitenkräfte zerlegen** und durch Wiederholung in drei sich in einem Punkte auf R schneidende, nicht in einer Ebene liegende.

Für mehr als zwei sich in einem Punkte schneidende Richtungen in der Ebene und mehr als drei im Raum ist die Aufgabe unbestimmt. S. auch S. 173.

3. **Mittelkraft R der in einem Punkt angreifenden Kräfte** P_1, P_2 . . . . P_n: Man zerlegt jede der gegebenen Kräfte P_i in der Richtung dreier rechtwinkligen Koordinatenachsen in die Seitenkräfte

$$X_i = P_i \cos \alpha_i \qquad Y_i = P_i \cos \beta_i \qquad Z_i = P_i \cos \gamma_i,$$

worin α_i, β_i, γ_i die Winkel zwischen P_i und den positiven Koordinatenachsen sind; addiert algebraisch die Seitenkräfte zu drei Einzelkräften

$$X = \Sigma (X_i) \qquad Y = \Sigma (Y_i) \qquad Z = \Sigma (Z_i)$$

und bildet die Mittelkraft

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

deren Richtungswinkel α β γ mit den positiven Achsen bestimmt sind durch

$$\cos \alpha = X : R \qquad \cos \beta = Y : R \qquad \cos \gamma = Z : R.$$

Liegen die **Kräfte in einer Ebene,** so werden in den vorstehenden Gleichungen die Gröfsen $Z = 0$, $Z_i = 0$, $\gamma = 90^0$, $\gamma_i = 90^0$ und $\beta = 90 - \alpha$, $\beta_i = 90 - \alpha_i$.

Gleichgewicht herrscht, wenn $R = 0$, d. h. wenn

im Raume (3 Bedingungsgleichungen)

$$X = \Sigma (P_i \cos \alpha_i) = 0; \quad Y = \Sigma (P_i \cos \beta_i) = 0; \quad Z = \Sigma (P_i \cos \gamma_i) = 0$$

in der Ebene (2 Bedingungsgleichungen)

$$X = \Sigma (P_i \cos \alpha_i) = 0 \qquad Y = \Sigma (P_i \sin \alpha_i) = 0.$$

b. Momente von Kräften, Kräftepaare.

Zeichnerische Behandlung s. S. 169 u. f.

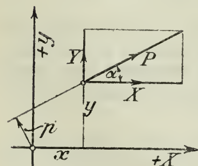
1. Das statische **Moment** M **einer Einzelkraft** P, **bezogen auf einen Punkt** A ist das Produkt aus der Kraft P und dem winkelrechten Abstande des Punktes A von der Wirkungslinie der Kraft P.

Das Moment ist positiv, wenn P um A im Sinne der Uhrzeigerbewegung dreht, negativ im entgegengesetzten Fall.

Mifst man die Kräfte in kg, die Längen in cm, so ist die Einheit des **Kraftmomentes** = 1 cmkg.

Im C-G-S-System (s. S. 157) ist die Einheit des Kraftmomentes = 1 cm Dyn = 1 g $\frac{\text{cm}^2}{\text{sk}^2}$ = 1 Erg.

Abb. 26.



Die algebraische Summe der Momente mehrerer Kräfte in einer Ebene, bezogen auf den Punkt A (s. Abb. 27) ist gleich dem Moment der Mittelkraft dieser Einzelkräfte, bezogen auf A (s. a. S. 159, Erklärung der Mittelkraft). Nach Abb. 26 ist das Moment M der Kraft P, bezogen auf den Koordinatenanfang

$$M = Pp = Xy - Yx = P (y \cos \alpha - x \sin \alpha)$$

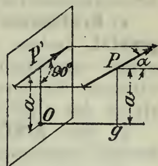
und die Summe der Momente der Kräfte P_1, P_2 . . . P_i . . . P_n

$$M = \Sigma (P_i p_i) = \Sigma (X_i y_i) - \Sigma (Y_i x_i) = \Sigma [P_i (y_i \cos \alpha_i - x_i \sin \alpha_i)].$$

Es ist also die Gesamtwirkung der Momente mehrerer Kräfte gleich der algebraischen Summe der einzelnen Momente.

2. Das statische **Moment** M **einer Einzelkraft** P **bezogen auf eine Gerade (Achse)** g (s. Abb. 27) ist das Produkt aus der Projektion P' der Kraft P auf eine zur Geraden g winkelrechten Ebene und dem kürzesten Abstande a der Kraft P von der Geraden g.

Abb. 27.



Ist α der Winkel zwischen der Kraft P und der Geraden g, so ist

$$M = Pa \sin\alpha.$$

Das Moment ist positiv, wenn P, von einer bestimmten, als positiv zu betrachtenden Seite der Geraden (Achse) g aus gesehen, im Sinne der Uhrzeigerbewegung dreht; negativ bei entgegengesetzter Drehung.

3. Zwei gleich grofse parallele und entgegengesetzt gerichtete Kräfte P, P heifsen ein **Kräftepaar.**

α) Ein Kräftepaar läfst sich nicht auf eine Einzelkraft zurückführen.

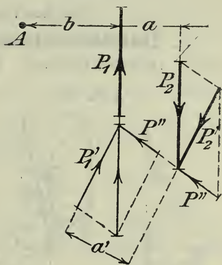
Zerlegt man, Abb. 28, P_1 in die Kräfte P_1' und P'', so ergibt P'' mit P_2 die Kraft P_2', die gleich, parallel und entgegengesetzt P_1' ist, also wiederum ein Kräftepaar ergibt; auf welche Weise man auch die Zusammensetzung versucht, stets ergibt sich ein neues Kräftepaar.

Das Kräftepaar mufs demnach als selbständiger Begriff eingeführt werden.

β) Die Wirkung eines Kräftepaares mit den Einzelkräften P, P im Abstande a auf einen Körper in bezug auf einen beliebigen Drehpunkt A in der Ebene des Kräftepaares oder auf eine beliebige zu ihr winkelrechten Achse g kommt dem Moment M einer Einzelkraft in bezug auf A oder g gleich, deren Gröfse und Abstand so zu wählen sind, dafs $M = Pa$ ist, wie sich ohne weiteres aus Abb. 28 für den beliebig gewählten Punkt und 1, S. 160 ergibt,

$$M = -Pb + P(a + b) = Pa.$$

Abb. 28.



Unter dem **Moment eines Kräftepaares** versteht man daher das Produkt aus der Kraft P und dem Abstand (Arm, Breite) a der beiden Kräfte.

Mafseinheiten für Kräftepaare wie für Momente von Einzelkräften s. S. 160 unter 1.

Man bezeichnet das Moment als positiv oder negativ, je nachdem die Drehung des Kräftepaares im Sinne der Uhrzeigerbewegung oder entgegengesetzt erscheint.

γ) Die auf der Ebene eines Kräftepaares Pa in einem beliebigen Punkt errichtete Winkelrechte, deren Länge in einem zu wählenden Mafsstab $l = M = Pa$ ist, und die nach der Seite der Raumes hinweist, von der aus gesehen das Paar ein positives Moment hat, heifst **Achse** oder **Achsenstrecke des Kräftepaares** und ersetzt voll das Kräftepaar.

δ) **Verlegung eines Kräftepaares.** Jedes Kräftepaar darf beliebig in seiner Ebene verschoben und in eine Parallelebene zu seiner Wirkungsebene verlegt werden, oder: alle Verlegungen sind statthaft,

bei denen die Achse in ihrer Richtung oder parallel verschoben wird. Arm und Kraft dürfen verändert werden, wenn das Moment und der Drehsinn derselbe bleibt, d. h. wenn die Gröfse und Richtung des Achsenmomentes dieselben bleiben.

ε) **Kräftepaare** werden mit Hülfe ihrer Achsenstrecken **zusammengesetzt,** indem man diese an einen beliebigen gemeinsamen Angriffpunkt verschiebt und wie Kräfte behandelt. In parallelen Ebenen wirkende Kräftepaare ergeben demnach ein Kräftepaar, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Einzelmomente ist.

ζ) Ein **Kräftepaar** Pa und eine **Kraft** Q **in derselben Ebene** werden zusammengesetzt, indem man das Kräftepaar Pa in ein gleichwertiges Paar $Qb = Pa$ verwandelt und dieses so verschiebt, dafs die gegebene Kraft Q von der einen Kraft des neuen Paares aufgehoben wird. Es verbleibt dann eine gegen die gegebene Kraft Q um die Strecke b parallel verschobene Kraft gleicher Gröfse und gleichen Sinnes.

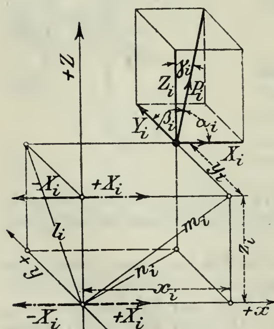
Umgekehrt kann eine **Kraft** Q von einem Angriffspunkt A **parallel** mit sich an den Angriffspunkt B verschoben werden, wenn man in B zwei einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte von der Gröfse Q und parallel zur Wirkungsgeraden der gegebenen Kraft anbringt. Man erhält dann an Stelle von Q am Punkt A eine gleichgerichtete, gleichsinnige und gleichgrofse Kraft Q am Punkte B und ein Kräftepaar vom Moment $M = Qb$, wenn b der Abstand zwischen A und der Kraftrichtung in B ist.

c. Kräfte mit verschiedenem Angriffspunkt.

Zeichnerische Behandlung siehe S. 169 u. f.

1. **Zusammensetzung der Kräfte.** Man zerlegt jede Kraft P_i in die drei rechtwinkligen Komponenten $X_i = P_i \cos \alpha_i$; $Y_i = P_i \cos \beta_i$; $Z_i = P_i \cos \gamma_i$ (Abb. 29) und trägt im Koordinatenanfange in der X-Achse die Kräfte $+X_i$ und $-X_i$, in der Y-Achse die Kräfte $+Y_i$ und $-Y_i$, in der Z-Achse die Kräfte $+Z_i$ und $-Z_i$ an. Die Kraft P_i ist dann ersetzt durch drei Seitenkräfte X_i, Y_i, Z_i und drei Kräftepaare mit den Momenten $X_i l_i$; $Y_i m_i$; $Z_i n_i$.

Abb. 29.



Trägt man noch die Kräfte $+X_i$ und $-X_i$ im Abstande x_i vom Koordinatenanfange auf der Z-Achse parallel zur X-Achse auf, so wird das Kräftepaar $X_i l_i$ ersetzt durch die Kräftepaare $X_i y_i$, dessen Achsenstrecke in Richtung der $+Z$-Achse, und $X_i z_i$, dessen Achsenstrecke in Richtung der $-Y$-Achse liegt (s. S. 161, 3, γ und ε).

Es tritt daher	für $X_i l_i$	$+X_i y_i$	und	$-X_i z_i$
entsprechend	für $Y_i m_i$	$+Y_i z_i$	und	$-Y_i x_i$
	für $Z_i n_i$	$+Z_i x_i$	und	$-Z_i y_i$.

Durch Zusammensetzen der Seitenkräfte nach 3, S. 159 und der Kräftepaare nach 3 ε, S. 162, ergeben sich die Seitenkräfte

$$X = \Sigma(X_i) \qquad Y = \Sigma(Y_i) \qquad Z = \Sigma(Z_i)$$

mit der Mittelkraft $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$,

die Momente bezogen auf die Koordinatenachsen

$$M_x = \Sigma(Y_i z_i - Z_i y_i);\ M_y = \Sigma(Z_i x_i - X_i z_i);\ M_z = \Sigma(X_i y_i - Y_i x_i),$$

deren Mittelmoment $M_r = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$ ist.

Die Winkel α, β, γ zwischen der Mittelkraft R und den Achsen und die Winkel λ, μ, ν zwischen der Achsenstrecke des resultierenden Kräftepaares M_r und den Koordinatenachsen sind bestimmt durch

$$X = R\cos\alpha \qquad Y = R\cos\beta \qquad Z = R\cos\gamma$$

$$M_x = M_r\cos\lambda \qquad M_y = M_r\cos\mu \qquad M_z = M_r\cos\nu.$$

Die Mittelkraft R und die Achsenstrecke des resultierenden Kräftepaares M_r schliefsen den Winkel φ ein, für den

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{RM_r} \text{ ist.}$$

Wird die Achenstrecke M_r in die Komponenten $M' = M_r \sin\varphi$ und $M'' = M_r\cos\varphi$ zerlegt, von denen $M' \perp R$ ist, so ergibt das M' entsprechende Kräftepaar, welches in einer Ebene mit der Mittelkraft R liegt, mit dieser zusammengesetzt eine um die Strecke $M' : R$ in der Ebene des Kräftepaares M' parallel verschobene Kraft R.

Die Zusammensetzung von Kräften im Raume mit verschiedenem Angriffspunkt ergibt demnach im allgemeinen eine in einer bestimmten Geraden des Raumes wirkende Kraft R und ein Kräftepaar vom Momente M'' in einer Ebene winkelrecht zu diesen Geraden.

Die Gerade heifst die **Zentralachse** des Kräftesystems, das Moment M'' das **Hauptmoment.**

Die Gleichung der Zentralachse (s. Abb. 29a und Abschn. Mathem. S. 116 u. 117) lautet

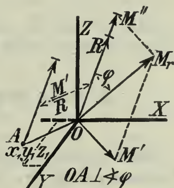
$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}, \quad \text{worin}$$

$$x_1 = \frac{M_r}{R}(\cos\beta\cos\nu - \cos\mu\cos\gamma)$$

$$y_1 = \frac{M_r}{R}(\cos\gamma\cos\lambda - \cos\nu\cos\alpha)$$

$$z_1 = \frac{M_r}{R}(\cos\alpha\cos\mu - \cos\lambda\cos\beta,$$

Abb. 29a.



die Gleichung für die Ebene des Hauptmomentes (s. Abschn. Mathem. S. 117 unter 7 γ) lautet

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0.$$

Das Kräftesystem ergibt nur ein Moment, wenn $R = 0$, d. h. wenn

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0,$$

und nur eine Einzelkraft, wenn $M'' = 0$, d. h. wenn

$$XM_x + YM_y + ZM_z = 0.$$

Für ein **ebenes Kräftesystem** ist

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad Z = 0, \quad M = M_z.$$

Die Mittelkraft R aus X und Y ergibt mit dem Moment M eine einzige parallele Kraft R gleicher Gröfse und Sinnes wie die Mittelkraft im Abstande $a = M : R$ (vrgl. ζ S. 162).

Ein ebenes Kräftesystem läfst sich demnach stets durch eine Einzelkraft oder (wenn die Mittelkraft $R = 0$ wird) durch ein Kräftepaar ersetzen.

2. Ein starrer Körper befindet sich unter der Einwirkung beliebiger Kräfte im **Gleichgewicht,** wenn für diese $R = 0$ und $M = 0$ ist, d. h. wenn folgende sechs Bedingungsgleichungen erfüllt sind:

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z = 0 \text{ und}$$
$$M_x = 0 \qquad M_y = 0 \qquad M_z = 0.$$

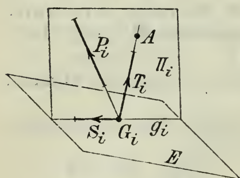
Bei einem ebenen Kräftesystem herrscht Gleichgewicht, wenn folgende drei Bedingungsgleichungen erfüllt sind:

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad M = 0.$$

3. Ein beliebiges **räumliches Kräftesystem** läfst sich im allgemeinen wie folgt auf zwei sich kreuzende Kräfte zurückführen.

Man wählt beliebig eine Ebene E und einen aufserhalb derselben gelegenen Punkt A und legt durch jede Kraft P_i und den Punkt A eine Ebene Π_i, die E in der Geraden g_i schneidet, die ihrerseits von P_i im Punkte G_i geschnitten wird (Abb. 30). Man zerlegt P_i in zwei Seitenkräfte S_i und T_i, die in den Geraden g_i und $G_i A$ liegen. Verfährt man so mit allen Kräften des gegebenen Systems, so erhält man ein Kräftesystem S_i in der Ebene E und ein Kräftesystem T_i, dessen sämtliche Kräfte durch A gehen. Beide Systeme lassen sich auf je eine Einzelkraft S und T in den Geraden s und t zurückführen, die sich im allgemeinen kreuzen.

Abb. 30.



Da A und E beliebig gewählt sind, läfst sich das Kräftesystem auf unendlich viele Weisen durch zwei sich kreuzende Kräfte ersetzen.

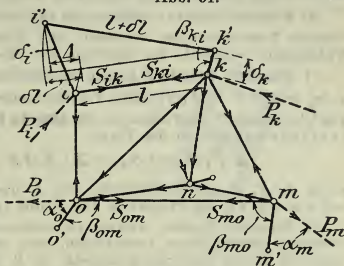
d. Satz der willkürlichen und Satz der virtuellen Verschiebungen.

Eine unter dem Einflufs äufserer Kräfte (s. S. 158) stehende Massengruppe, d. i. eine Anzahl von Massenpunkten, die aufeinander durch gegenseitige Kräfte (innere Kräfte, s. S. 158) einwirken, ist im Gleichgewicht, wenn jeder ihrer Massenpunkte in Ruhe ist (oder sich gleichförmig und geradlinig bewegt, s. S. 155 u. 158).

1. **Satz der willkürlichen Verschiebung:** Erteilt man jedem der Massenpunkte des im Gleichgewicht befindlichen Systems, auf das die beliebigen äufseren Kräfte P und die inneren Kräfte S in Richtung der Verbindungslinien der Massenpunkte wirken, eine **völlig willkürliche**

unendlich kleine Verschiebung $i\,i' = \delta_i$ (Abb. 31) und bildet die Produkte aus den in jedem Punkt i angreifenden Kräften und aus der Projektion der Verschiebungen δ_i auf die zugehörigen Kraftrichtungen, so mufs wegen des Gleichgewichtes der Kräfte an jedem Massenpunkt die Summe der Arbeiten der dort angreifenden Kräfte bei der Verschiebung $= 0$ sein (s. S. 187), also auch für das ganze System, und es besteht die Gleichung

Abb. 31.



$$\Sigma P_i \delta_i \cos \alpha_i + \Sigma (S_{ik} \delta_i \cos \beta_{ik} + S_{ki} \delta_k \cos \beta_{ki}) = 0 \quad . \quad . \quad (1),$$

worin α_i den Winkel zwischen P_i und δ_i, β_{ik} den Winkel zwischen S_{ik} und δ_i, β_{ki} den Winkel zwischen S_{ki} und δ_k bezeichnet.

Nach Abb. 31 ist

$$\delta_i \cos \beta_{ik} + \delta_k \cos \beta_{ki} = -\Delta = \sim -(l' - l) = \sim -\delta l$$

(genau bei unendlich kleinen Verschiebungen), und da

$$S_{ik} = S_{ki} = S, \text{ so ist}$$

$$\Sigma P_i \delta_i \cos \alpha_i - \Sigma S \delta l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Gleichungen (1) und (2) stellen den Satz der willkürlichen Verrückungen dar: Die Summe der Arbeiten der im Gleichgewicht befindlichen äufseren und inneren Kräfte bei völlig willkürlichen unendlich kleinen Verschiebungen der Angriffpunkte ist null.

2. **Satz der virtuellen Verschiebung:** In den praktisch wichtigen Fällen sind die Massenpunkte nicht frei beweglich, sondern ihre Bewegung an bestimmte durch analytisch-geometrische Gleichungen ausdrückbare Bedingungen gebunden.

Die Beschränkung der Bewegungsmöglichkeit kann durch Kräfte hervorgerufen gedacht werden (bedingte Kräfte). Bei einer willkürlichen Verschiebung würden dann für die bedingten und die übrigen (unbedingten) Kräfte die Gleichungen unter 1 gelten.

Erteilt man aber den einzelnen Massenpunkten unendlich kleine, mit den einschränkenden Bedingungen **verträgliche** Verschiebungen, d. i. eine **virtuelle Verschiebung**, so ergibt sich die Summe der Arbeiten der bedingten Kräfte, die **virtuellen Arbeiten**, für sich $= 0$ und ebenso die Summe der Arbeiten der unbedingten Kräfte für sich $= 0$, welch letztere Bedingung für die Untersuchung des Gleichgewichts allein erforderlich ist.

Der Satz der virtuellen Verschiebungen lautet dann:

Die Summen der Arbeiten der an einer Massengruppe im Gleichgewicht befindlichen unbedingten Kräfte ist bei einer unendlich kleinen virtuellen Verschiebung gleich null.

Die Beschränkungen freier Beweglichkeit können sein:

α) Einzelne Punkte i liegen fest: $x_i = a_i$, $y_i = b_i$, $z_i = c_i$; virtuelle Verschiebungen erfordern, dafs diese Punkte ruhen; die Widerstände an ihnen leisten also bei virtueller Verschiebung dann auch keine Arbeit.

β) Einzelne Punkte i müssen sich auf bestimmten Flächen bewegen: $f(x_i\, y_i\, z_i) = 0$; virtuelle Verschiebungen erfordern, dafs diese Punkte auf den Flächen bleiben, deren Widerstände senkrecht zur Richtung der Fläche leisten also dann auch keine Arbeit.

γ) Einzelne Punkte i haben unveränderlichen Abstand: $(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 = r_{ik}{}^2$; virtuelle Verschiebungen erfordern, dafs r_{ik} unveränderlich bleibt. Aus Gleichung (2) folgt dann für den **starren Körper** ($\delta l = 0$) der Satz der virtuellen Verschiebungen in der Form

$$\Sigma P_i \delta_i \cos \alpha_i = \Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

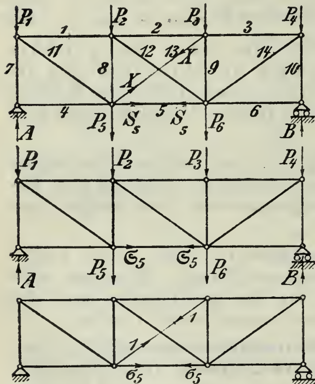
worin X, Y, Z die Seitenkräfte von P nach drei rechtwinkligen Koordinatenachsen und δx, δy, δz die Projektion von δ sind (s. auch S. 187).

δ) Einzelne Punkte wirken so aufeinander, dafs sie bei einer virtuellen Verschiebung gleiche Wege zurücklegen, und ferner sind die auf sie wirkenden Kräfte paarweise gleich und entgegengesetzt (z. B. Zahnräder und Zahndruck an der Eingriffflanke); bei virtueller Verschiebung leisten diese Kräfte also auch keine Arbeit.

Beispiel 1, für den Satz der willkürlichen Verschiebung: **Berechnung des innerlich statisch unbestimmten Fachwerkes,** Abb. 32.

Wenn die Spannkraft X in dem „überzähligen" Stabe 13 bekannt ist, können die übrigen Stabkräfte (statisch bestimmt) zeichnerisch oder rechnerisch ermittelt werden. Man denke sich den überzähligen Stab entfernt und bestimme die Stabkräfte $\mathfrak{S}$ in dem nunmehr statisch bestimmten Fachwerk. Dann bestimme man die durch die an den beiden Endpunkten des überzähligen Stabes in Richtung desselben angebrachten Kräfte = 1 hervorgerufenen Stabkräfte σ. Die im Stabe i wirklich auftretende Spannkraft ist dann $S_i = \mathfrak{S}_i + \sigma_i X$, wie aus der Konstruktion der Kräftepläne (s. S. 175) oder aus den Gleichgewichtsbedingungen (Gleichungen ersten Grades in den unbekannten äufseren und Stabkräften) folgt.

Abb. 32.



Auf das von den beiden Lasten 1 und den Spannkräften σ gebildete Gleichgewichtsystem wird die Gleichung (2) S. 165 angewandt und als willkürliche Verschiebung der Knotenpunkte die gewählt, die durch die Formänderung des Trägers (ohne den Stab 13) infolge der äufseren Kräfte hervorgerufen wird. Die Längenänderung des Stabes i, der die Spannkraft $S_i = \mathfrak{S}_i + \sigma_i X$ erhält, ist nach der Festigkeitslehre

$$\delta l_i = \frac{S_i l_i}{E_i f_i} = \frac{\mathfrak{S}_i l_i}{E_i f_i} + X \frac{\sigma_i l_i}{E_i f_i} \quad (4),$$

wo f_i den Querschnitt und E_i den Elastizitätsmodul des Stabes i bedeuten (s. Festigkeitslehre). Für den überzähligen Stab ($\delta l = \Delta$; $S = X$; $\mathfrak{S} = 0$; $\sigma = 1$; $l = L$; $f = F$ ist

$$\Delta = (X \cdot L) : (E \cdot F) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nach Gl. (2) S. 165 ist $-1 \, . \, \Delta - \Sigma \sigma_i \, \delta \, l_i = 0$, woraus durch Einsetzen der Werte für Δ und $\delta \, l_i$ aus Gl. (4) u. (5) und Ausführung der Summation nur über die notwendigen Stäbe x zu bestimmen ist.

Beispiel 2, für den Satz der virtuellen (und willkürlichen) Verschiebung: **Schiefe Ebene,** Abb. 33. Der Körper k hat das Gewicht G, die Reibungszahl zwischen k und der schiefen Ebene E (s. S. 227) ist $f = \operatorname{tg} \varphi$; wie grofs mufs P sein, damit k sich gleichförmig auf E aufwärts bewegt (Gleichgewicht, s. S. 155 u. 158)? Bei der virtuellen

Verschiebung $AB = a$ wird der Normaldruck N eine bedingte Kraft, nicht aber etwa die Reibung fN, und aus Abb. 33 folgt

$$-Ga\sin\alpha + Pa\sin\beta - fNa = 0, \quad \text{oder} \quad P\sin\beta = G\sin\alpha + fN \quad (6).$$

Die Bestimmung des darin unbekannten N kann nicht mittels virtueller, sondern nur durch eine willkürliche Verschiebung erfolgen, z. B. $AC = b$. Dann gehört N und fN zu den unbedingten Kräften, und es ist

$$-Gb\cos\alpha - Pb\cos\beta + Nb + fN.0 = 0,$$

oder

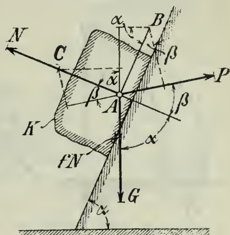
$$N = G\cos\alpha + P\cos\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und aus Gleichung 6 und 7

$$P = G\,\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\sin\beta - f\cos\beta}$$

$$= G\,\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)}.$$

Abb. 33.



C. Kräfte an gestützten starren Körpern.

Allgemeines über innere und äufsere Kräfte, Stützenwiderstände s. u. 3, S. 158.

Bestimmung der Stützwiderstände (statisch bestimmte und unbestimmte Körper).

Sobald die Aufgabe gelöst ist, die Stützen durch Kräfte zu ersetzen (Bestimmung der Stützwiderstände), werden diese wie die übrigen gegebenen Kräfte als äufsere Kräfte in die Rechnung eingeführt; man hat es also dann mit Kräften an einem freien Körper zu tun, wie unter B, S. 159 u. f.

1. **Arten der Stützung** einer ebenen Scheibe (Träger, Fachwerk). Jeder Stützwiderstand erfordert wie jede Kraft zu seiner vollständigen Bestimmung die Angaben 1) seiner Gröfse, 2) seiner Richtung, 3) eines Punktes seiner Wirkungsgeraden (Angriffspunkt); je nach Art der Lagerung sind keine, eine oder zwei dieser Angaben bekannt.

α) Bei einer **festen Einspannung** (Flächenlager) Abb. 34 bei A) sind Angriffpunkt, Richtung und Gröfse des Stützwiderstandes unbekannt.

β) Bei einem **Kipplager** (festes Auflagergelenk) (Abb. 35 bei A) ist der Angriffpunkt des Stützwiderstandes durch die Mitte des Gelenkbolzens gegeben, unbekannt Gröfse und Richtung.

γ) Bei einem **Berührungslager** (bewegliche Einspannung) (Abb. 36 bei A) ist die Richtung des Stützwiderstandes gegeben, unbekannt Angriffpunkt und Gröfse.

δ) Bei einem **Berührungskipplager** (bewegliches Auflagergelenk) (Abb. 35 u. 36 bei B u. Abb. 37) sind Richtung und Angriffpunkt des Stützwiderstandes gegeben, unbekannt die Gröfse.

Häufig wird ein Berührungskipplager durch einen gelenkig angeschlossenen Stab (Pendelsäule oder Zugstange) ersetzt. Der Stützwiderstand fällt in die Achse des Stabes.

2. Greifen die äufseren Kräfte und Stützwiderstände an einer **ebenen Scheibe** (Träger, Fachwerk) in der Ebene derselben an, so stehen die

drei Gleichgewichtbedingungen $\Sigma H = 0$; $\Sigma V = 0$; $\Sigma M = 0$ (oder gleichwertig hiermit eine Seitenkräfte- und zwei Momentengleichungen oder drei Momentengleichungen) zur Bestimmung der Stützwiderstände zur Verfügung.

Die Stützwiderstände fester Stützpunkte sind stets als äufsere Kräfte in die Rechnung einzuführen.

Abb. 34.

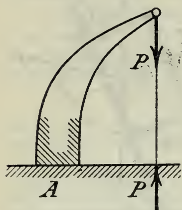
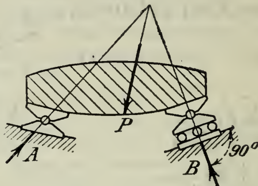


Abb. 35.

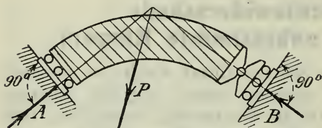


Der Träger heifst **äufserlich statisch bestimmt,** wenn die Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Stützwiderstände genügen. Die Auflagerung mufs dann erfolgen

α) bei Stützung an einer Stelle durch feste Einspannung (Abb. 34),

β) bei Stützung an zwei Stellen durch ein Kipp- und ein Berührungskipplager (Abb. 35) oder durch ein Berührungskipp- und ein Berührungslager (Abb. 36).

Abb. 36.

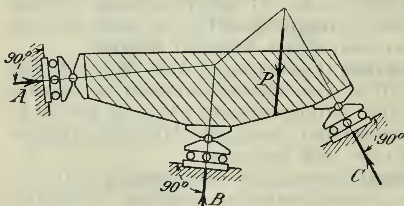


γ) bei Stützung an drei Stellen durch drei Berührungskipplager, deren Normalen sich nicht in demselben Punkte schneiden (Abb. 37).

Schneiden sich die Normalen in einem Punkt, so ist der Träger um diesen Punkt drehbar (nicht fest gelagert), und die Stützkräfte sind nicht bestimmbar (vrgl. S. 159).

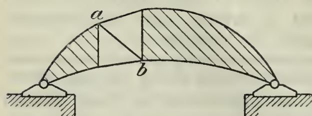
Verlangen die Auflager-Bedingungen weniger als drei Gleichungen, so ist der Körper nur dann im Gleichgewicht, wenn die äufseren Kräfte (ohne die Stützwiderstände) die fehlenden Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts an und für sich erfüllen.

Abb. 37.



3. Genügen die Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Stützwiderstände nicht, so heifst der Träger **äufserlich statisch unbestimmt.** Die Stützwiderstände lassen sich nur unter Beachtung der Formänderung finden.

Abb. 38.



4. **Kennzeichnend für die statisch bestimmten Lagerungen** ist, dafs mit dem Verschwinden der äufseren Kräfte auch die Stützwiderstände null werden. Dies ist nicht der Fall bei einem **äufserlich statisch unbestimmten** Träger; z. B. einem Zweigelenkbogen (Abb. 38), bei dem ohne die Wirkung

äufserer Kräfte, z. B. durch Temperaturänderung oder Anspannen des Stabes ab sowohl Kräfte innerhalb des Trägers als auch Stützwiderstände (Horizontalschübe) hervorgerufen werden.

5. Bilden mehrere (z. B. gelenkartig verbundene) Körper ein starres System, **Fachwerk,** so sind die an den Verbindungsstellen der einzelnen Teile auftretenden Drücke und Gegendrücke als innere Kräfte anzusehen, die für die Bestimmung der Stützwiderstände des Systems nicht in Betracht kommen.

Stützwiderstände eines vollwandigen und eines gegliederten Trägers sind unter sonst gleichen Umständen gleich.

Diese Drücke und Gegendrücke sind dagegen mafsgebend für die Bestimmung der Kräfte innerhalb einer Konstruktion. Lassen sich dieselben nicht mit Hülfe der Gleichgewichtsbedingungen durch Zerlegung des Systems in die einzelnen Teile bestimmen, so heifst das System (Träger) **innerlich statisch unbestimmt;** dabei kann die Auflagerung statisch bestimmt oder unbestimmt sein. Auch hier können Spannungen in den Stäben auftreten, ohne das äufsere Kräfte wirken. Die Bestimmung der Kräfte ist nur möglich unter Beachtung der Formänderung (s. Beispiel 1 zu d auf S. 166).

Näheres s. Abteil. III, Abschn. Statik der Baukonstruktionen.

6. An Stelle der drei Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts in der Ebene (s. o. unter 2) treten im Raume sechs Gleichungen (s. S. 164), die zur Bestimmung der Stützwiderstände sinngemäfs wie unter 1 bis 5, angegeben, anzuwenden sind.

7. Stützt sich ein Körper in drei Punkten, so kann die Lagerung so getroffen werden, dafs die Stützdrücke statisch bestimmbar sind. Bei mehr als drei Stützpunkten ist die Lagerung statisch unbestimmt. Die durch die äufsersten Stützpunkte gelegten Geraden sind die **Dreh- oder Kippkanten,** die Fläche des Vielecks heifst **Stützfläche.**

Die **Standfestigkeit** (Stabilität) ist gesichert, wenn die Mittelkraft der äufseren angreifenden Kräfte (einschliefslich Gewicht) die stützende Ebene innerhelb der Stützfläche trifft. Ein Mafs der Standfestigkeit ist das **Stabilitätsmoment,** d. i. das Moment der Mittelkraft in bezug auf die nächstgelegene Kippkante. Ist das Gewicht die einzige äufsere Kraft, so mufs also das Lot durch den Schwerpunkt des Körpers die Stützfläche treffen. (Ueber Schwerpunkt s. S. 178 u. f.)

Unter dem **dynamischen Stabilitätsmoment** versteht man das Produkt $A = Gh$ aus dem Gewicht G des Körpers und der Strecke h, um die der Schwerpunkt beim Kippen um die nächstgelegene Kippkante gehoben wird, bis er senkrecht über derselben liegt (A ist die zum Kippen des Körpers aufzuwendende Arbeit, s. S. 186).

D. Grundaufgaben der graphischen Statik (zeichnerische Zusammensetzung der Kräfte).

Eine Kraft wird durch eine Gerade mit bestimmter Lage, ihre Richtung durch Angabe eines Pfeiles und ihre Gröfse durch bestimmte Länge der Geraden dargestellt.

a. Kräftezug, Krafteck.

1. Das Parallelogramm zweier sich schneidender Kräfte (Abb. 24) führt unmittelbar zur graphischen Zusammensetzung mittels des **Kräftedreiecks**, Abb. 39; R heifst die **Schlufsseite** und gibt die Mittelkraft nach Gröfse und Richtung an; ihre Lage ist durch den Angriffspunkt O (Schnittpunkt) der Kräfte gegeben. Durch wiederholte Anwendung des Kräftedreiecks und unter Fortlassung der einzelnen Dreieckschlufsseiten R_{1-2}, R_{1-3} ... findet man die Mittelkraft R der in einer Ebene liegenden, sich in einem Punkte schneidenden Kräfte P_1, P_2 ... P_n (Abb. 40a) der Gröfse und Richtung nach, indem man von einem beliebigen Punkte O ausgehend (Abb. 40b) die Kräfte in beliebiger Reihenfolge der Gröfse und Richtung nach so aneinanderfügt, dafs die die Richtung bezeichnenden Pfeile gleichsinnig verlaufen **(Kräftezug, Krafteck).** Die Gröfse und Richtung der im Angriffspunkt der gegebenen Kräfte angreifenden Mittelkraft ist durch die Schlufsseite des Kräftezuges gegeben; ihr Richtungspfeil ist ungleichsinnig mit denen der gegebenen Kräfte.

Abb. 39.

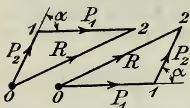
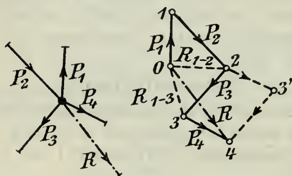


Abb. 40a u. b.



2. **Gleichgewicht** herrscht, wenn $R = O$ ist, d. h. wenn sich der Kräftezug von selbst schliefst, oder zu den Kräften P_1, P_2 ... P_n mufs eine Kraft R' hinzugefügt werden, deren Richtung und Gröfse die Schlufsseite bestimmt, wobei alle Pfeile gleichsinnig laufen müssen.

Kehrt man im geschlossenen Kräftezug einen aller gleichsinnigen Pfeile um, so ist die betreffende Kraft die Mittelkraft aller übrigen.

3. Liegen die Kräfte nicht in einer Ebene, so wird der Kräftezug ein räumliches Vieleck. Zeichnet man die Projektionen der Kräfte auf zwei beliebige Ebenen (Grundrifs und Aufrifs), so sind die Schlufslinien der projizierten Kräfte die Projektionen der Schlufslinie des räumlichen Kräftezuges.

Beispiel: Stabkräfte im dreibeinigen Bockgerüst s. S. 177 Abb. 52; nimmt man die Umkehrung der Aufgabe: P_1, P_2, P_3 bekannt, gesucht R, so zeigt die Abb. 55b unter Fortlassung der Hülfskonstruktion sofort den obigen Satz von den Projektionen der Schlufslinien.

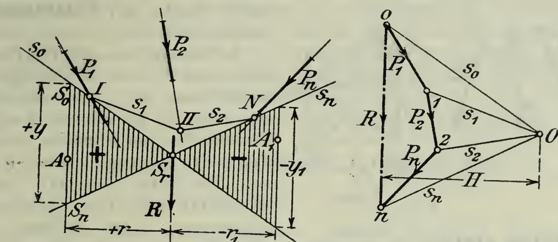
b. Seileck (Seilpolygon), Pol.

1. **Zusammensetzung beliebiger Kräfte in der Ebene:** Gröfse, Richtung, Sinn der Mittelkraft R_{1-n} der Kräfte P_1, P_2 . . . P_n (Abb. 40a) bleiben bei Parallelverschiebung nach einem gemeinsamen Schnittpunkt unverändert (vrgl. S. 162 unter 1. und lassen sich demnach mit Hülfe des Kräftezuges (s. oben, a 1 u. Abb. 40b) bestimmen.

Die Lage von R findet man wie folgt: von einem beliebigen Punkt O, dem **Pol,** in Abb. 41b ziehe man die Polstrahlen $O0$, $O1$,

$O2 \ldots On$ und in Abb. 41a den Linienzug $s_0, s_1, s_2 \ldots s_n$ derart, dafs die in Abb. 40a u. b gleichbenannten Linien parallel sind, wobei die Lage von s_0 in Abb. 41a beliebig ist. Durch den Schnittpunkt von s_0 und s_n mufs R_{1-n} gehen, womit die Lage bestimmt ist.

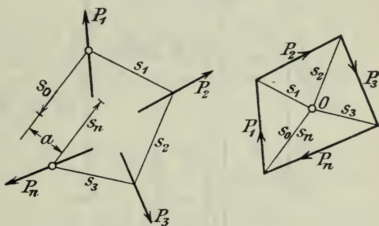
Abb. 41a u. b.



Beweis der Richtigkeit des Verfahrens (s. Abb. 40a u. b): P_1 wird mittels des Kräftedreiecks $O01$ in I in $0O = s_0$ und $O1 = s_1$ zerlegt; dann wird mittels des Kräftedreiecks $O12$ in II $O1 = s_1$ mit P_2 zu $O2 = s_2$ zusammengesetzt usw., und endlich die verbleibenden Kräfte $0O = s_0$ und $On = s_n$ mittels des Kräftedreiecks $O0n$ zu R_{1-n}; durch den Schnittpunkt der Richtungslinien dieser Kräfte s_0 und s_n in Abb. 41a wird die Lage von R_{1-n} bestimmt.

Das Liniengebilde $O012 \ldots n$ heifst **Kräfteplan,** die Geraden $s_0, s_1, s_2 \ldots s_n$ in Abb. 41b **Seilstrahlen,** der Linienzug $s_0, s_1, s_2 \ldots s_n$ in Abb. 40a **Seileck oder Seilpolygon.**

Abb. 42a u. b.

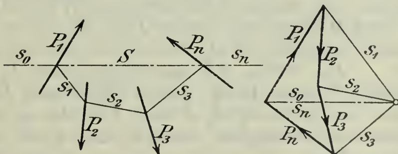


2. Folgende drei Fälle können eintreten:

α) Der Endpunkt des Kraftecks im Kräfteplan fällt **nicht** auf den Anfangspunkt (allgemeiner Fall); Ergebnis: Einzelkraft (Abb. 41a u. b).

β) Der Endpunkt des Kraftecks im Kräfteplan fällt auf den Anfangspunkt, und die äufsersten Seileckseiten sind parallel; Ergebnis: Kräftepaar (Abb. 42a u. b, Kräftepaar $= s_0\, a = s_n\, a$).

Abb. 43a u. b.

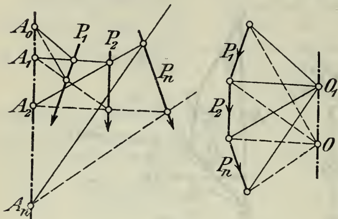


γ) Der Endpunkt des Kraftecks im Kräfteplan fällt auf den Anfangspunkt, und die äufsersten Seileckseiten fallen zusammen, d. h. Krafteck und Seileck sind von selbst geschlossen; Ergebnis: **Gleichgewicht** (Abb. 43a u. b).

Die beiden zusammenfallenden äufsersten Seiten des Seilecks heifsen dann die **Schlufslinie** (S) des Seilecks.

3. Zeichnet man zu einer Kräftegruppe (Abb. 44) Kräfteplan und Seileck je mit einem Pol O_1 und O_2, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seileckseiten sämtlich auf einer zu $O_1\,O_2$ parallelen Geraden $A_0\,A_n$, der **Polarachse** der beiden Seilecke.

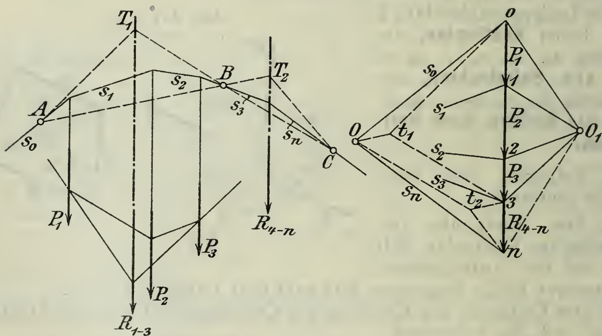
Abb. 44.



4. Nimmt man als Pol den Anfangspunkt des Kräftezuges im Kräfteplan, so geben die Seiten des Seilecks jeweils die Lage der Mittelkräfte aus allen der betreffenden Seite vorangehenden Kräften an. Die letzte Seite fällt mit der Mittelkraft aus allen Einzelkräften zusammen. Das Seileck heifst dann **Mittelkraftlinie** (Anwendung: Drucklinie in Gewölben, Dreigelenkbogen, Stützmauern).

5. Der Pol O ist so zu bestimmen, dafs **das Seileck durch drei gegebene Punkte** ABC **geht** (Anwendung: Mittelkraftlinie = Drucklinie beim Dreigelenkbogen). Abb. 45a u. b für Parallelkräfte: Man be-

Abb. 45a u. b.



stimme mit einem beliebigen Pol O_1 die Mittelkraft R_{1-3} der zwischen A und B liegenden Kräfte $P_1\,P_2\,P_3$, und ebenso mit O_1 (oder auch einem anderen Pol O_2) R_{4-n} der zwischen B und C liegenden Kräfte $P_4 \ldots P_n$. Ziehe AB bis Schnittpunkt T_2 mit R_{4-n}, CB bis Schnittpunkt T_1 mit R_{1-3}, ferner $T_1 A$ und $T_2 C$. Zerlege in Abb. 45b R_{1-3} in Richtung $T_1 A$ und $T_1 C$, R_{4-n} in Richtung $T_2 A$ und $T_2 C$; ziehe die Parallelen durch t_1 und t_2 in Abb. 45b, so ist O der gesuchte Pol.

Das Seileck für Pol O durch ABC ist für s_0, R_{1-3}, R_{4-n} und s_n Mittelkraftlinie. Beim Dreigelenkbogen stellen s_0 und s_n die Kämpferdrücke, s_3 die Kraft am Mittelgelenk dar.

c. Statisches Moment eines beliebigen ebenen Kräftesystems.

Erklärung des statischen Moments s. S. 160, unter b, 1.

Das resultierende Moment der Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$ (Abb. 41a) in bezug auf den Punkt A bestimmt, indem man nach S. 170, b 1 den Kräfteplan (Abb. 41b) und das Seileck (Abb. 41a) zeichnet. Das **Moment** M der Mittelkraft R bezogen auf A ist dann gleich dem Produkt aus dem Abstand H des Poles O von der Mittelkraft R im Kräfteplan und der Strecke y, die von den beiden äufsersten Seilstrahlen s_0 und s_n auf einer Parallelen zur Mittelkraft durch A abgeschnitten wird: $M = Rr = Hy$ (die Gleichung folgt ohne weiteres aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $0\,O\,n$ und $S_0\,S_r\,S_n$).

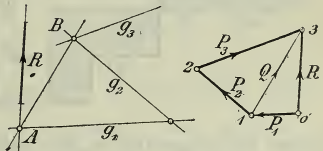
H ist im Kräftemafsstab, y im Längsmafsstab zu messen, oder umgekehrt.

d. Zerlegung der Kräfte in der Ebene.

(Siehe auch S. 159, unter a, 2.)

α) Zwei der Lage nach gegebene parallele Kräfte A, B zu finden, die den ihnen parallelen Kräften $P_1, P_2 \ldots P_n$ das Gleichgewicht halten: Zeichne Kräfteplan und Seileck (Abb. 47a u. b, S. 174); ziehe in 47a die Schlufslinie S, gegeben durch die Schnittpunkte der zugehörigen (hier äufsersten) Seilstrahlen mit den Richtungen von A und B, dann in Abb. 47b durch O eine Parallele zu S, welche $P_1 + P_2 + \ldots P_n$ in A und B teilt.

Abb. 46a u. b.



β) **Kraftzerlegung nach drei** sich nicht in einem Punkte schneidenden **Richtungen (Verfahren von Culmann)**; Abb. 46a u. b: R soll in drei in die Geraden $g_1\,g_2\,g_3$ fallenden Kräfte zerlegt werden.

R schneidet g_1 in A, g_1 und g_2 schneiden sich in B; zerlege R nach g_1 und AB in P_1 und Q und dann Q in B nach g_2 und g_3 in P_2 und P_3.

Die Zerlegung in mehr als drei sich nicht in einem Punkte schneidenden, in einer Ebene liegenden Richtungen ist unbestimmt.

e. Anwendungsbeispiele.

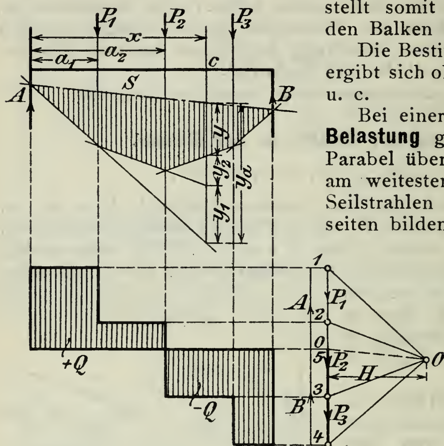
1. Bestimmung des **Schwerpunktes** ebener Flächen s. u. b, S. 180, des **Trägheitsmoments** s. u. b, 3, S. 217 u. f., die Ermittlung der **Spannungsverteilung** in ebenen Querschnitten s. u. 3. Abschn., Festigkeitslehre.

2. **Biegungsmomente und Querkräfte** eines statisch bestimmten geraden Balkens auf 2 Stützen mit zu seiner Achse winkelrechten **Einzelkräften** (Abb. 47a bis c): Bei entsprechenden Auflagerbedingungen (s. S. 167 u. f.) müssen die Stützkräfte A u. B parallel P_1, P_2, P_3 sein und mit diesen, damit der Balken im Gleichgewicht ist. ein geschlossenes Krafteck (Abb. 47b) bilden, ferner müssen die Schlufsseiten des Seil-

ecks (s. 2γ, S. 171) zusammenfallen (Abb. 47a). Zieht man zu diesen zusammenfallenden Schlufsseiten (Schlufslinie des Seilecks) im Kräfteplan (Abb. 47b) durch Pol O eine Parallele, so teilt diese $\Sigma P_1, P_2 \ldots P_n$ durch O in die Stützdrücke A u. B. Es ist im Punkt c

$$M = A\,x - P_1\,(x - a_1) - P_2\,(x - a_2) = H\,(y_a - y_1 - y_2) = H\,y.$$

Abb. 47a bis c.



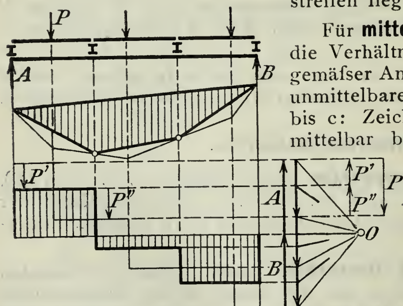
Die zwischen dem Seileck und der Schlufslinie eingeschlossene Fläche stellt somit die **Momentenfläche** für den Balken dar.

Die Bestimmung der Querkräfte Q ergibt sich ohne weiteres aus Abb. 47b u. c.

Bei einer **gleichmäfsigen stetigen Belastung** geht das Seileck in eine Parabel über; die den im Kräfteplan am weitesten nach aufsen liegenden Seilstrahlen entsprechenden Seileckseiten bilden Tangenten der Parabel.

Bei einer **ungleichmäfsigen stetigen Belastung** unterteile man diese in hinreichend schmale Streifen gleicher Breite, in deren Schwerpunkten man sich die stetige Last zu Einzellasten vereinigt denkt, zeichnet hierfür das Seileck, dessen Seiten die Tangenten zu dem wahren Seileck sind und von ihm an den unter den Grenzlinien der Belastungsstreifen liegenden Punkten berührt wird.

Abb. 48a bis c.



Für **mittelbare Belastung** ergeben sich die Verhältnisse ohne weiteres bei sinngemäfser Anwendung aus den Regeln für unmittelbare Belastung, siehe Abb. 48a bis c: Zeichne das Seileck für den unmittelbar belasteten Balken; die Eckpunkte des Seilecks für den mittelbar belasteten liegen auf jenem unter den Stützpunkten der Zwischenträger. Die nicht schraffierten Teile der Momentenfläche des unmittelbar belasteten Balkens ergeben sofort die Momentenflächen der Zwischenträger.

Ermittlung der Querkräfte und Momente für **bewegliche Lasten**, siehe Abteil. III, Abschnitt Statik der Baukonstruktionen.

3. **Cremonasche Kräftepläne:** Bestimmung der **Stabkräfte eines statisch bestimmten ebenen Fachwerks (Dreiecknetzes) mit ruhender Belastung.**

Abb. 49a u. b.

α) Vorausgesetzt wird, dafs die **belastenden** (äufseren) **Kräfte in den Knotenpunkten angreifen** oder durch Zwischenträger auf diese übertragen werden, und dafs die Knotenpunkte reibungsfreie Gelenke sind (die Stabkräfte demnach mit den Stabachsen zusammenfallen müssen: Druck- oder Zugbeanspruchungen). Damit das ganze System im Gleichgewicht ist, müssen die äufseren Kräfte für sich (Bestimmung der Auflagerwiderstände s. auch S. 168) und die an jedem Knotenpunkt angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein.

Sind z. B. an dem Knotenpunkt III Abb. 49a die Stabkräfte in 8 und 2 und P_2 bekannt, so ergeben sich die unbekannten Stabkräfte in 3 und 9 aus dem Krafteck III in Abb. 48b. Sind die äufseren Kräfte bekannt, so kann man der Reihe nach für alle Knotenpunkte die Kraftecke zeichnen (Cremonascher Kräfteplan, da Cremona zuerst darauf hinwies).

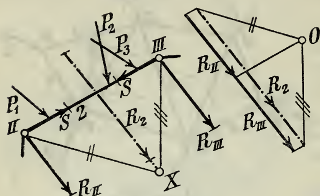
Das Verfahren ist in Abb. 49a u. b angewandt. Man zeichnet das Fachwerksystem in passend gewähltem Mafsstab, bestimmt mittels Kräfteplans und Seilecks die Auflagerwiderstände (in den meisten praktischen Fällen ist die Bestimmung der Auflagerkräfte durch symmetrische Anordnung usw. ohne Seileck möglich und, um die Abbildung übersichtlich zu erhalten, in Abb. 49a u. b fortgelassen), fängt dann mit einem Knotenpunkt, der nur zwei Stäbe aufweist, z. B. I an, den Cremonaschen Kräfteplan zu zeichnen. Man beachte zur Erzielung übersichtlicher Kräftepläne mit der Mindestzahl der erforderlichen Linien: die an den Knotenpunkten angreifenden Kräfte müssen stets in der Reihenfolge aneinandergesetzt werden, in der man sie bei Umkreisung des Knotenpunktes trifft; die äufseren Kräfte sind als aufserhalb des Fachwerks liegend zu betrachten (wie in Abb. 49a gezeichnet).

Sind auf Grund des Kräfteplanes die Kräfte gegen den Knotenpunkt gerichtet, so erfährt der betreffende Stab eine Druckbeanspruchung (z. B. alle Stäbe Abb. 49a); sind sie vom Knotenpunkt weggerichtet, eine Zugbeanspruchung.

β) **Greifen die Kräfte nicht in den Knotenpunkten an,** sondern unmittelbar an den Stäben, z. B. an Stab 2, Abb. 49a, so vereinige man je die Kräfte an jedem Stabe zu einer Mittelkraft R_2, Abb. 50a. Von R_2 werden durch den Stab auf die Knoten II III Kräfte R_{I} R_{II}

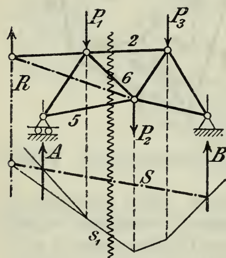
und S ausgeübt, von denen R_I und R_{II} parallel R_2, S gleich und entgegengesetzt in der Stabachse liegen. R_I und R_{II} bestimmt man durch Annahme eines beliebigen Punktes x auf R_2 und Zeichnung des Kraft- und Seilecks nach Abb. 50a u. b. Hat man alle Knotenpunktskräfte R_I R_{II} bestimmt, so findet man die Kräfte S, wie unter 1. angegeben. Die Beanspruchung der Stäbe ist dann bekannt, und die Ermittlung der Spannungen erfolgt nach Abschnitt Festigkeitslehre: Biegungs- und Druck- (Zug-) Beanspruchung.

Abb. 50a u. b.



Das vorstehende Verfahren ist auch anzuwenden, wenn einzelne Stäbe des Fachwerks wiederum aus Dreiecknetzen bestehen, in deren Knotenpunkten die Kräfte angreifen. Man denkt sich an Stelle des Dreiecknetzes zunächst einen Stab, bestimmt R_1, R_2, S und danach die Stabkräfte des Dreiecknetzes.

Abb. 51a u. b.



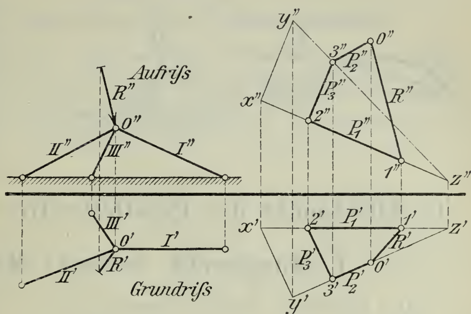
4. Bestimmung der **Stabkräfte eines Dreiecknetzes** (s. u. 3α) **nach dem Verfahren von Cullmann** (Abb. 51); denkt man sich einen Schnitt geführt, der das Fachwerk in zwei Teile mit je einem Auflager zerlegt, so müssen an jedem Teil die äufseren Kräfte und die in den geschnittenen Stäben sich das Gleichgewicht halten (s. S. 158). Setzt man die äufseren Kräfte $A\,P_1\,P_2$ mit Hülfe des Kraft- und Seilecks, Abb. 51a u. b zu einer Resultierenden R zusammen und zerlegt diese in die drei Richtungen der geschnittenen Stäbe nach dem Verfahren von Cullmann, s. d., S. 173 und Abb. 51a u. b, so sind die Stabkräfte bestimmt.

5. Bestimmung der **Kräfte in Balken und Fachwerken mit beweglicher Belastung in Stützmauern und Gewölben,** s. Abteil. III, Abschnitt Statik der Baukonstruktionen.

6. **Spannkräfte im dreibeinigen Bockgerüst** (räumliches Krafteck), Abb. 52a stellt in Aufrifs und Grundrifs das Bockgerüst dar, R' und R'' die Projektionen der am Knotenpunkt 0 angreifenden Kraft. In den Projektionen des sich zu denkenden räumlichen Kraftecks auf Aufrifs- und Grundrifsebene müssen die entsprechenden Punkte untereinander liegen (Abb. 54b). Ausgehend von den Projektionen von R ist R' und R'' (Abb. 54b) gegeben und die untereinander liegenden Punkte $0'$ und $0''$ sowie $1'$ und $1''$. Die Richtungen von P_1' und P_1'' bzw. P_2' und P_2'' sind parallel I' und I'' bzw. II' und II'', ebenso

$P_3' \parallel$ III' und $P_3'' \parallel$ III''; wenn einer der Punkte 3', 3'', 2', 2'' bestimmt, sind die Kräfte bestimmt. Nehme beliebig x' an und vervollständige das Krafteck 0' 1' x' y' 0', zeichne die Projektionen zu x' und y', so fällt im allgemeinen y'' nicht auf P_2''. Läfst man x' nach 1' wandern bis z', so wandert y'' auf der Geraden y'' z''; ist y'' bis zum Schnittpunkt von y'' z'' mit P_2'' in 3'' gelangt, so ist dann die Bedingung erfüllt, dafs die Kraftecke 0' 1' 2' 3' 0' und 0'' 1'' 2'' 3'' 0'' Projektionen des räumlichen Kraftecks sind, da dann ihre Eckpunkte sämtlich untereinander liegen.

Abb. 52a u. b.



7. **Verwandlung von Flächen** (Hülfsaufgaben der graphischen Statik):

α) **Dreieck in Dreieck** mit Grundlinie a_1 (bzw. Höhe h_1), Abb. 53: mache $BC_1 = a_1$, ziehe C_1A und $CA_1 \parallel C_1A$ (bzw. ziehe zu BC Parallele im Abstand h_1, Schnitt mit AB in A_1, ziehe A_1C und $AC_1 = A_1C$), so ist $\triangle\ A_1BC_1$ das gesuchte.

Abb. 53.

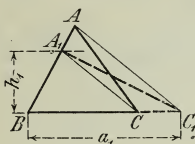
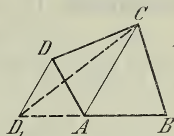


Abb. 54.



Macht man die Grundlinie = 2 (bzw. die Höhe = 2), so gibt die Höhe (bzw. die Grundlinie) sofort den Flächeninhalt.

β) **Viereck und Vieleck in Dreieck,** Abb. 54: $DD_1 \parallel CA$, $\triangle\ BCD_1$ das gesuchte; für das Vieleck wiederholte Anwendung.

γ) **Rechteck in Quadrat,** Abb. 55: entweder mit Kreis K_1 oder K_2; c die gesuchte Quadratseite.

δ) **Kreis-Aus- und Abschnitt in Dreieck,** Abb. 56: Ziehe in A Berührende an den Kreis, trage beliebiges Mafs x von B nach A ab bis A', dann die gleiche Zahl Teile bis B_1, ziehe $BB_2 \parallel OA$ und B_1O und B_2O, so ist $\triangle\ OAB_1$ = Kreisausschnitt, $\triangle\ OB_1B_2$ = Kreisabschnitt. Nimmt man $x = \frac{1}{6}\ \overline{OA}$, so ist mathematisch der Fehler gegenüber der wahren Bogenlänge $^1/_{700}$.

Abb. 55.

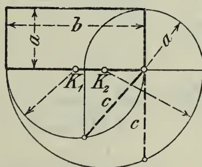
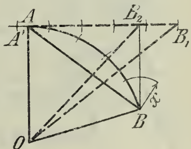


Abb. 56.



ε) **Parabelabschnitt oder beliebiger flacher Bogen in Dreieck,** Abb. 57: Ziehe CD AB als Berührende des Parabelbogens, AC und BD einander parallel sonst beliebig gerichtet, so ist der Parabelabschnitt $= ^2/_3$ Parallelogramm $ABCD$. Ziehe beliebig BE, mache $EF = ^1/_3\ BE$, so ist $\triangle\ ABF$ = Parabelabschnitt (Linien aC und BD sind

nicht erforderlich!). Jeder flache Bogen kann hinreichend genau als Parabel aufgefafst werden. (Fehler beim Kreisbogen: bei 30° Zentriwinkel 0,6 vH, 45° 0,8 vH, 57° 1,25 vH zu klein).

Abb. 57.

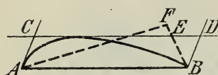
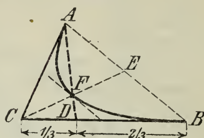


Abb. 58.



ζ) **Parabeldreieck in Dreieck,** Abb. 58: AC und BC Berührende des Parabelbogens. Mache $CD = \frac{1}{3}\,CB$, so ist $\triangle\, ACD =$ Parabeldreieck. (Ist E die Mitte von AB, so ist Schnitt F von AD und CE ein Punkt der Parabel, in dem die Berührende parallel AB.)

C. Mittelpunkt der Parallelkräfte; Schwerpunkt.

I. Mittelpunkt, statische Momente.

1. Die Mittelkraft R zweier gleichsinnigen parallelen Kräfte P_1 und P_2 (Abb. 59) teilt die Verbindungslinie der Angriffpunkte $A_1\,A_2$ im Punkte S in die Teile a_1 und a_2 (Konstruktion s. Abb. 59), für die

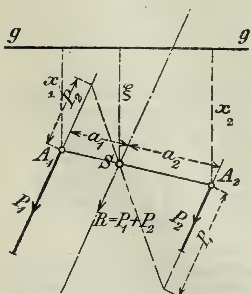
$$P_1\,a_1 = P_2\,a_2.$$

Die Lage von S ist völlig unabhängig von der Richtung der Parallelkräfte, d. h. dreht man P_1 und P_2 unter Beibehaltung der parallelen Richtung beliebig um die Punkte A_1 und A_2, so geht die Mittelkraft R stets durch denselben Punkt S, den **Mittelpunkt der Parallelkräfte** P_1 und P_2.

Zieht man in der Ebene der Kräfte P_1 und P_2 eine beliebige Gerade gg, von der die Punkte A_1, A_2 und S die Abstände x_1, x_2 und ξ haben, so ist

$$P_1\,x_1 + P_2\,x_2 = R\,\xi = (P_1 + P_2)\,\xi \qquad \xi = \frac{P_1\,x_1 + P_2\,x_2}{P_1 + P_2}.$$

Abb. 59.



2. Entsprechend ist für beliebig viele (n) gleichsinnige Parallelkräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$ im Raume, deren Angriffspunkte die Abstände $x_1, x_2 \ldots x_n$ und deren Mittelpunkt den Abstand ξ von einer beliebigen Ebene haben,

$$\xi\,\Sigma\,(P) = \Sigma\,(Px).$$

Für zwei weitere beliebige Ebenen (Abstände $y_1,\ y_2 \ldots y_n,\ \eta;\ z_1,\ z_2 \ldots z_n,\ \zeta$) gilt ebenso

$$\eta\,\Sigma\,(P) = \Sigma\,(Py) \qquad \zeta\,\Sigma\,(P) = \Sigma\,(Pz).$$

Durch die sich aus den Gleichungen ergebenden Abstände von den 3 Ebenen, die zweckmäfsig als Koordinatenebenen eines rechtwinkligen Koordinatensystemes gewählt werden, ist der Mittelpunkt der Parallelkräfte bestimmt.

3. Die Produkte $P_1 x_1$, $P_2 x_2$ . . . heifsen die **statischen Momente** der Kräfte P_1, P_2 . . . , bezogen auf die Ebene (durch die y-z-Achsen).

II. Allgemeines über den Schwerpunkt.

1. Die an den einzelnen Teilchen eines Körpers angreifenden Gewichte der Körperteile können als Parallelkräfte angesehen werden. Der Mittelpunkt dieser Parallelkräfte heifst der **Schwerpunkt** des Körpers.

2. Bezeichnet man die Gewichte der einzelnen Körperteilchen mit G_1, $G_2 \ldots Gi \ldots$, das Gesamtgewicht mit $G = G_1 + G_2 + \ldots Gi + \ldots$, so ist demnach

$$\xi\, G = \Sigma\,(Gi\,xi) \qquad \eta\, G = \Sigma\,(Gi\,yi) \qquad \zeta\, G = \Sigma\,(Gi\,zi).$$

3. Für **homogene** Körper, bei denen das Gewicht der Raumeinheit γ (spezifisches Gewicht) unveränderlich ist, folgt $G_1 = \gamma\, V_1$, $G_2 = \gamma\, V_2$ . . . , $G = \gamma\, V$ wo V_1, V_2 . . . , V die Inhalte der Teilchen und des ganzen Körpers bezeichnen, und demnach

$$\xi\, V = \Sigma\,(Vi\,xi) \qquad \eta\, V = \Sigma\,(Vi\,yi) \qquad \zeta\, V = \Sigma\,(Vi\,zi) \quad \text{oder}$$

$$\xi\, V = \int x\,dV \qquad \eta\, V = \int y\,dV \qquad \zeta\, V = \int z\,dV.$$

4. Für **homogene Stoff-Flächen,** bei denen das Gewicht der Flächeneinheit unveränderlich ist, folgt

$$\xi\, F = \int x\,dF \qquad \eta\, F = \int y\,dF \qquad \zeta\, F = \int z\,dF.$$

5. Für **homogene Stoff-Linien,** bei denen das Gewicht der Längeneinheit unveränderlich ist, folgt

$$\xi\, l = \int x\,dl \qquad \eta\, l = \int y\,dl \qquad \zeta\, l = \int z\,dl.$$

6. Geht eine Koordinatenebene (z. B. die y-z-Ebene) durch den Schwerpunkt hindurch, so ist $\xi = 0$; $\Sigma\,(Gi\,xi) = 0$; woraus folgt:

α) die Summe der statischen Momente für eine durch den Schwerpunkt gehende Ebene bzw. Gerade (Schwerebene bzw. -Achse) ist gleich null; und

β) Hat ein homogenes Gebilde eine Symmetrieebene, Symmetrieachse oder einen Mittelpunkt, so liegt der Schwerpunkt in diesen.

7. Der Schwerpunkt eines aus 2 Teilen bestehenden Gebildes liegt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Teile (der beiden Gebilden gemeinsamen Schwerachse), und teilt diese im Verhältnis der Gewichte, bei homogenen Körpern im Verhältnis der Inhalte (Flächen, Längen), wie S. 178, Abb. 59, für zwei Kräfte angegeben ist.

III. Schwerpunktermittlung beliebiger homogener Gebilde.

a. Durch Rechnung.

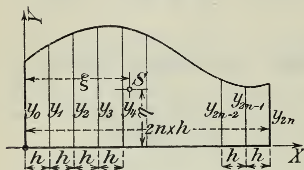
1. **Beliebige ebene Fläche** (Abb. 60). Man zerlege die Fläche durch Parallelen zur y-Achse in eine **gerade** ($2\,n$) Anzahl Streifen von gleicher Breite h, dann ist näherungsweise

$$\xi = h\,\frac{1\cdot 4y_1 + 2\cdot 2y_2 + 3\cdot 4y_3 + 4\cdot 2y_4 + \cdots (2n-2)\,2y_{2n-2} + (2n-1)\,4y_{2n-1} + 2ny_{2n}}{y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + \cdots + 2\,y_{2n-2} + 4\,y_{2n-1} + y_{2n}}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\,\frac{y_0{}^2 + 4\,y_1{}^2 + 2\,y_2{}^2 + 4\,y_3{}^2 + \cdots + 2\,y_{2n-2}{}^2 + 4\,y_{2n-1}{}^2 + y_{2n}{}^2}{y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + \cdots + 2\,y_{2n-2} + 4\,y_{2n-1} + y_{2n}}.$$

Ist der allgemeine Ausdruck für die Gröfse y eine ganze Funktion höchstens zweiten Grades des Abstandes von der y-Achse, so ist die Formel genau richtig, und es brauchen nur die beiden Endparallelen und die mittlere Parallele in Rechnung gezogen zu werden.

Abb. 60.



2. **Beliebiger Körper.** Die vorstehende Formel unter 1. für ξ gilt auch näherungsweise für den Abstand des Schwerpunktes eines Körpers von einer Ebene, die den Körper begrenzt oder berührt, wenn man ihn durch Ebenen, die zur ersten parallel sind, in eine **gerade** Anzahl ($2\,n$) Teile von gleicher Dicke h zerlegt und in die Formel statt der y die Flächeninhalte der entsprechenden Parallelschnitte einsetzt.

b. Durch Zeichnung.

1. **Linien** und ebene **Flächen:** Man zerlege die Linie oder Fläche in Teile, deren Schwerpunktlagen bekannt sind. Die Gröfsen dieser Teile (Längen bzw. Flächeninhalte) betrachtet man als Parallelkräfte, die in den Schwerpunkten der einzelnen Teile angreifen. Läfst man diese Parallelkräfte einmal wagerecht, das andere Mal senkrecht (oder auch in zwei beliebigen anderen Richtungen) wirken und sucht jedesmal mit Hülfe des Seil- und Kräftezuges die Mittelkraft auf (s. b, 1, S. 170), so erhält man den Schwerpunkt des ganzen Gebildes im Schnittpunkt der beiden gefundenen Mittelkräfte. Bei Flächen pflegt man die einzelnen Teile in Rechtecke von derselben Grundlinie zu verwandeln (Reduzieren auf dieselbe Basis, s. S. 177) und die Höhen dieser Rechtecke als Parallelkräfte anzusehen, mit denen wie vorstehend zu verfahren ist.

Körper zerlegt man entsprechend in Teilkörper, deren in ihren Schwerpunkten angreifende Gewichte wieder ein Parallelkräftesystem bilden. Projiziert man die Parallelkräfte mit ihren Angriffspunkten auf zwei zueinander winkelrechte Ebenen und sucht zu den beiden projizierten Parallelkräftesystemen die Mittelpunkte auf, so erhält man in ihnen die senkrechten Projektionen des Körperschwerpunktes.

c. Besondere Fälle.

1. Kreist eine ebene Kurve von der Länge l um eine in ihrer Ebene liegende Achse, so folgt aus den Pappus-Guldinschen Regeln der Schwerpunkts-Abstand ϱ der Kurve von der Drehachse

$\varrho = \frac{O}{l\,2\pi}$, wenn O (die Oberfläche des Umdrehungskörpers) bekannt ist.

2. Kreist eine ebene Fläche vom Inhalt F um eine in ihrer Ebene liegende Achse, so folgt aus den Pappus-Guldinschen Regeln der Schwerpunktabstand ϱ der Fläche von der Drehachse

$\varrho = \frac{V}{F\,2\pi}$, wenn V (der Inhalt des Umdrehungskörpers) bekannt ist.

3. Ist S der gemeinschaftliche Schwerpunkt zweier Körper mit den Gewichten G_1 und G_2 und den Schwerpunkten S_1 und S_2, so ist

$$SS_1 : SS_2 = G_2 : G_1$$

und S_1SS_2 eine Gerade.

Zur Bestimmung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes mehrerer Körper ist das Vorstehende sinngemäfs anzuwenden, indem man sich die Gewichte G_1 und G_2 in S vereinigt denkt, dann den gemeinschaftlichen Schwerpunkt von $(G_1 + G_2)$ und G_3 bestimmt, usw. (Auch kann der Satz von den statischen Momenten [u. I. 2., S. 178] angewendet werden.)

Entsprechend für beliebige Flächen und Linien.

IV. Schwerpunktlagen für die technisch wichtigsten Linien, Flächen und Körper.

In den nachfolgenden Abbildungen ist der Schwerpunkt mit S bezeichnet.

a. Schwerpunkt von Linien.

1. **Gerade Strecke:** S liegt im Mittelpunkte der Strecke.

2. **Dreieckumfang:** Sind A_1, B_1, C_1 die Mittelpunkte der Seiten a, b, c, so liegt S im Mittelpunkt des dem Dreieck $A_1B_1C_1$ eingeschriebenen Kreises.

Der Abstand ξ_a des Schwerpunktes von der Seite a ist

$$\xi_a = \frac{h_a}{2} \frac{b+c}{a+b+c},$$

worin h_a die zur Seite a gehörende Höhe ist.

3. **Parallelogrammumfang:** S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen.

4. **Kreisbogen:** (Abb. 61). S liegt auf der Halbierungslinie des Zentriwinkels in der Entfernung

$$\xi = r\,\frac{s}{b} = r\,\frac{\sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha} \text{ vom Mittelpunkt,}$$

$$\operatorname{arc}\alpha = \frac{\alpha^0}{180^0}\pi = \left\{\begin{array}{l}\text{Bogenmaſs des halben}\\ \text{Zentriwinkels.}\end{array}\right.$$

Abb. 61.

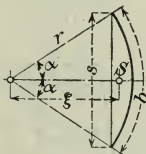
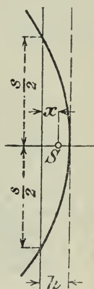


Abb. 62.



Halbkreisbogen:

$$\xi = 2\,r : \pi = 0{,}6366\,r$$

Viertelkreisbogen:

$$\xi = 2\,r\sqrt{2} : \pi = 0{,}9003\,r$$

Sechstelkreisbogen:

$$\xi = 3\,r : \pi = 0{,}9549\,r.$$

5. **Beliebiger flacher Bogen:** (Abb. 62). Abstand $x \sim {}^2/_3\,h$.

Genauigkeit: Nach vorstehender Formel wird x um weniger als 0,5 vH beim Sechstelkreisbogen und als 1,1 vH beim Viertelkreisbogen zu grofs, als wenn es auf Grund der Gl. unter 4. berechnet wird.

b. Schwerpunkt von Flächen.

1. **Dreieck:** S liegt im Schnittpunkt der Mittellinien. Abstand des Schwerpunktes von einer Seite gleich einem Drittel der zugehörigen Höhe.

Sind die Koordinaten der Eckpunkte x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3, so sind die Koordinaten des Schwerpunktes

$$\xi = {}^1/_3\,(x_1 + x_2 + x_3) \qquad \eta = {}^1/_3\,(y_1 + y_2 + y_3).$$

Sind z_1, z_2, z_3 die Abstände der Eckpunkte von einer Ebene, so ist der Abstand des Schwerpunktes von dieser

$$\zeta = {}^1/_3\,(z_1 + z_2 + z_3).$$

2. **Parallelogramm:** S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen.

3. **Trapez:** α) S liegt auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte M und N der parallelen Seiten a und b (s. Abb. 63). Die Abstände h_a und h_b sind

$$h_a = \frac{h}{3}\,\frac{a + 2b}{a + b} \qquad h_b = \frac{h}{3}\,\frac{2a + b}{a + b};$$

daraus die Konstruktion: auf den Verlängerungen der parallelen Seiten trage man $BE = a$, $CF = b$ ab. EF schneidet MN in S.

Abb. 63.

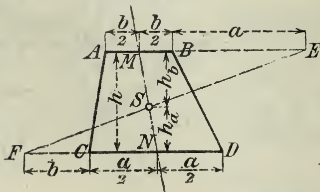
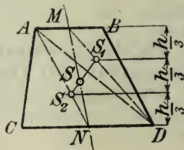


Abb. 64.



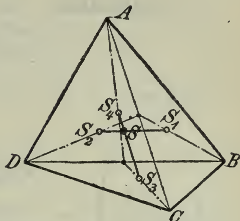
β) Man zerlegt das Trapez in 2 Dreiecke (Abb. 64) mit den Schwerpunkten S_1 und S_2. $S_1 S_2$ schneidet MN in S.

γ) Steht eine der nichtparallelen Seiten des Trapezes winkelrecht zu den parallelen Seiten a und b, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Winkelrechten

$$\xi = {}^1/_3 \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

Abstand von den parallelen Seiten s. unter α.

Abb. 65.



4. **Viereck:** Man zerlege das Viereck durch die eine Diagonale in zwei Dreiecke mit den Schwerpunkten S_1 und S_2 (Abb. 65), durch die andere Diagonale in zwei Dreiecke mit den Schwerpunkten S_3 und S_4. S_1S_2 und S_3S_4 schneiden sich in S (dabei ist $S_1S_2 \parallel BD$; $S_3S_4 \parallel CA$, so dafs man nur die Schwerpunkte S und S_3 zu bestimmen braucht).

5. **Vieleck:** α) Wende sinngemäfs das unter 4 angegebene Verfahren an mit Beachtung des Satzes unter 7., S. 179

oder β) nach dem allgemeinen Verfahren u. **b.**, S. 180.

Regelmäfsiges Vieleck: Der Schwerpunkt liegt im Mittelpunkt des um- bzw. einbeschriebenen Kreises.

Abb. 66.

6. **Kreisabschnitt:** (Abb. 66). Es ist

$$\xi = \frac{s^3}{12\,F} = \frac{2}{3}\,r\,\frac{\sin^3\alpha}{F} = \frac{4}{3}\,\frac{r\sin^3\alpha}{\operatorname{arc}2\alpha - \sin 2\alpha},$$

worin $F = {}^1/_2\, r^2 (\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha)$ der Inhalt des Kreisabschnittes und

$$\operatorname{arc} 2\alpha = 2\,\frac{\alpha^0}{180^0}\,\pi.$$

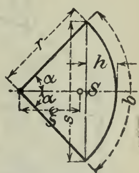
7. **Kreisausschnitt:** (Abb. 67)

$$\xi = \frac{2}{3}\,r\,\frac{s}{b} = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha} = 38{,}1972\,\frac{r\sin\alpha}{\alpha^0} = \frac{r^2 s}{3\,F},$$

worin $F = r^2 \operatorname{arc}\alpha$ der Flächeninhalt des Ausschnittes.

Halbkreisfläche: $\xi = \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi} = 0{,}4244\,r$

Abb. 67.



Viertelkreisfläche: $\xi = \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{\pi}\,r = 0{,}6002\,r$

Sechstelkreisfläche: $\xi = \frac{2}{\pi}\,r = 0{,}6366\,r.$

8. **Kreisringstück:** (Abb. 68)

$$\xi = \frac{2}{3}\,\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha} = 38{,}1972\,\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^0}.$$

9. **Ellipsenabschnitt:** (Abb. 69). Die Schwerpunkte S der symmetrischen Ellipsenabschnitte A_1B_1C und A_2B_2C fallen mit dem

Schwerpunkt des Abschnittes ABC eines Kreises zusammen, dessen Durchmesser die zur Sehne des Ellipsenabschnittes senkrechte Hauptachse ist.

10. **Parabelfläche:** (Abb. 70)

$$\xi_1 = {}^3/_5\, a \qquad \eta_1 = {}^3/_8\, b \text{ für } S_1$$
$$\xi_2 = {}^3/_{10}\, a \qquad \eta_2 = {}^3/_4\, b \text{ für } S_2.$$

Abb. 68.

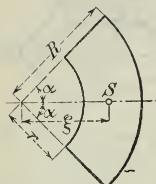


Abb. 69.

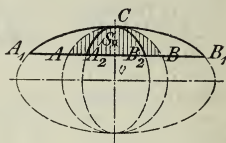
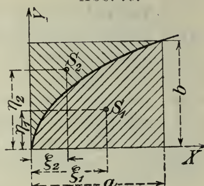


Abb. 70.



11. **Kugelzone und Kugelhaube:** S liegt in der Mitte der Höhe.

12. **Mantel der Pyramide oder des Kegels:** S liegt in der Verbindungslinie des Schwerpunktes der Grundfläche mit der Spitze (Schwerachse), um ein Drittel der Höhe von der Grundfläche entfernt.

13. **Mantel des abgestumpften Kreiskegels:** Ist h die Höhe des Kegelstumpfes, r der Halbmesser der oberen, R der der unteren Endfläche, so ist der Schwerpunktabstand von dieser

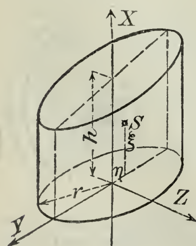
$$\xi = \frac{h}{3}\,\frac{R + 2r}{R + r}.$$

c. Schwerpunkt von Körpern.

1. **Prisma und Zylinder mit parallelen Endflächen:** S liegt in der Mitte der Verbindungslinie zwischen den Schwerpunkten der Endflächen.

2. **Schief abgeschnittener gerader Kreiszylinder:** Es sei (Abb. 71) die x-y-Ebene die Symmetrieebene,
h die Länge der Achse,
r der Halbmesser des Grundkreises,

Abb. 71.



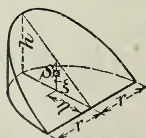
α der Neigungswinkel der schiefen Schnittfläche gegen die Grundfläche,

so ist

$$\eta = \frac{1}{4}\,\frac{r^2 \operatorname{tg}\alpha}{h}.$$

$$\xi = \frac{h}{2} + \frac{1}{8}\,\frac{r^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{h}.$$

Abb. 72.



3. **Zylinderhuf:** (Abb. 72).

$$\eta = {}^3/_{16}\, \pi r \qquad \xi = {}^3/_{32}\, \pi h.$$

Hufmantel: $\eta = {}^1/_4 \pi r$

$$\xi = {}^1/_8 \pi h.$$

Hohler Huf: (R, r, H, h)

$$\eta = {}^3/_{16}\,\pi\,\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} \qquad \xi = {}^3/_{32}\,\pi\,\frac{H^4 - h^4}{H^3 - h^3}.$$

4. **Pyramide und Kegel:** S liegt in der Schwerachse (vrgl. 12 auf S. 184) um ein Viertel der Höhe von der Grundfläche entfernt.

5. **Pyramidenstumpf:** Ist h die Höhe des Pyramidenstumpfes, und sind A und B die Endflächen, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Fläche A

$$\xi = \frac{h}{4}\,\frac{A + 2\sqrt{AB} + 3B}{A + \sqrt{AB} + B}.$$

6. **Abgestumpfter Kreiskegel:** Ist h die Höhe des Kegelstumpfes, und sind R und r die Halbmesser der Endflächen, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Endfläche mit dem Halbmesser R

$$\xi = \frac{h}{4}\,\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

7. **Obelisk:** (Abb. 36, S. 130). Der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche ab ist

$$\xi = \frac{h}{2}\,\frac{ab + ab_1 + a_1 b + 3\,a_1 b_1}{2\,ab + ab_1 + a_1 b + 2\,a_1 b_1}.$$

8. **Keil:** Mit $b_1 = 0$ folgt aus vorstehender Formel der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche ab zu

$$\xi = \frac{h}{2}\,\frac{a + a_1}{2a + a_1}.$$

9. **Kugelabschnitt:** Bezeichnungen wie in Abb. 66, S. 183.

$$\xi = \frac{3}{4}\,\frac{(2r - h)^2}{3r - h}.$$

Diese Formel gilt auch für den Abschnitt desjenigen **Umdrehungsellipsoids,** dessen Drehungsachse gleich dem Durchmesser der Kugel ist. Der Abstand von der Fläche des Schnittkreises mit dem Durchmesser $s = 2\varrho$ ist

$$\xi' = \frac{h}{2}\,\frac{h^2 + 2\varrho^2}{h^2 + 3\varrho^2} = \frac{h}{4}\,\frac{4r - h}{3r - h}.$$

Halbkugel: $\xi = {}^3/_8\, r.$

Halbe Hohlkugel: $\xi = \frac{3}{8}\,\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}.$

10. **Kugelausschnitt:** Bezeichnungen wie in Abb. 67, S. 183; h die Höhe der Kalotte.

$$\xi = {}^3/_8\,(1 + \cos\alpha)\, r = {}^3/_8\,(2r - h).$$

11. **Umdrehungsparaboloid:** Ist die Achse der erzeugenden Parabel die Umdrehungsachse, h der Abstand des Scheitels von der Endfläche, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Endfläche

$$\xi = {}^1/_3\, h.$$

12. **Dreiachsiges Ellipsoid** mit den Halbachsen a; b, c. Für einen Oktanten ist

$$\xi = {}^3/_8\, a \qquad \eta = {}^3/_8\, b \qquad \zeta = {}^3/_8\, c.$$

IV. DYNAMIK STARRER KÖRPER.

Unter Dynamik starrer Körper wird die Aufstellung der Beziehungen zwischen Weg, Zeit und Kraft (bzw. Masse) von in **Bewegung** befindlichen Körpern verstanden.

A. Grundbegriffe und allgemeine Gesetze.

a. Arbeit und lebendige Kraft.

1. Erweitert man die für die beliebige geradlinige Bewegung eines Punktes nach S. 139 geltende Gleichung

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} p\, ds$$

mit der Masse m des Punktes, so folgt

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} P ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin $P = mp$ die am Punkte in der Wegrichtung wirkende Kraft bezeichnet.

Für die krummlinige Bewegung folgt ebenso

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} P_t ds = \int_{s_0}^{s} P \cos\varphi\, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin $P_t = P\cos\varphi$ die Tangentialseitenkraft der Kraft = Seitenkraft in Richtung von ds und φ = Winkel (P, ds) ist.

$\int_{s_0}^{s} P ds$ bzw. $\int_{s_0}^{s} P\cos\varphi\, ds = A$ heifst die **Arbeit der** veränderlichen **Kraft P auf dem Wege s_0** bis s.

Pds bzw. $P\cos\varphi\, ds$ heifst die **Elementararbeit** von P auf dem Wege ds.

Die Ausführung der Integration setzt voraus, dafs P und φ als Funktionen von s gegeben sind.

Im technischen Mafssystem (s. S. 156) mifst man die Wege in **m**, die Kräfte in **kg**, und man erhält die Arbeit in **mkg**. Im C-G-S-System (s. S. 157) mifst man die Masse in **gr**, die Beschleunigung in cm/sk², den Weg in cm und man erhält die Einheit der Arbeit in

$$\mathrm{gr}\,\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sk}^2} = \mathrm{cm\ Dyn} = \mathrm{Erg}.$$

2. **Die Summe der Arbeiten mehrerer an einem Punkte wirkender Kräfte auf einem bestimmten Wege des Punktes ist gleich der Arbeit der Mittelkraft auf demselben Wege.**

(Die Kräfte setzen sich nach dem Parallelogrammgesetz zusammen, die Arbeiten addieren sich algebraisch. Kraft = Vektorgröfse [gerichtete Gröfse]; Arbeit = skalare Gröfse [allein durch den Zahlenwert bestimmt], s. a. S. 156.)

Schliefst die Kraft P, deren Seitenkräfte X, Y, Z sind, mit dem Wege ds den Winkel φ ein und sind dx, dy, dz die Komponenten vom Wege ds, der mit den Koordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν bildet, so ist demnach

$$A = \int_{s_0}^{s} P\cos\varphi\, ds = \int_{s_0}^{s} X\cos\lambda\, ds + \int_{s_0}^{s} Y\cos\mu\, ds + \int_{s_0}^{s} Z\cos\nu\, ds$$

$$= \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Wirken mehrere Kräfte auf einen Punkt, so ist die Arbeit auf dem Wege s_0 bis s

$$A = \Sigma \int_{s_0}^{s} P_i \cos\varphi_i\, ds = \Sigma \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (X_i\,dx + Y_i\,dy + Z_i\,dz).$$

3. Wird ein Körper entgegen der Wirkung einer Kraft bewegt ($\varphi > 90^0$), so wird die von der Kraft geleistete Arbeit negativ, der Körper nimmt diese Arbeit auf.

[Z. B. Die Arbeit zum Heben eines Körpers vom Gewicht G um die Höhe h ist $A = Gh$, dabei die Arbeit der Schwerkraft $A = -Gh$.]

4. Der Ausdruck $m\frac{v^2}{2}$ heifst die **lebendige Kraft** des Massenpunktes (seine **kinetische Energie** oder **Arbeitsvermögen**).

Der Ausdruck Arbeitsvermögen bedeutet, dafs ein Körper mit der Masse m und der Geschwindigkeit v eine Kraft, deren Arbeit gleich $-\frac{1}{2}mv^2$ ist, zu überwinden vermag, bis er zur Ruhe kommt.

Mifst man im technischen Mafssystem (s. S. 156) die Massen in kg sk²/m, die Geschwindigkeiten in m/sk, so erhält man die lebendige Kraft in mkg, also in Arbeitseinheiten, ebenso im C-G-S-System (s. S. 157) die Masse in gr, die Geschwindigkeit in cm/sk, die lebendige Kraft dann in $\mathrm{gr}\,\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sk}^2}$.

5. Aus Gleichung (1) und (2) S. 186 folgt das **Prinzip der lebendigen Kraft:**

Die Aenderung der lebendigen Kraft eines Punktes bei Zurücklegung irgend eines Weges ist gleich der auf diesem Wege geleisteten Arbeit der am Punkt angreifenden Kräfte.

Das Prinzip der lebendigen Kraft ermöglicht oftmals die Umgehung der schwierigen Integration auf der rechten Seite von Gleichung (2).

b. Kräftefunktion und Potential.

1. Wenn sich die Seitenkräfte X, Y, Z einer Kraft P, deren Angriffspunkt die Koordinaten x, y, z hat, als partielle Differentialquotienten nach x, y und z der Funktion $U = F(x, y, z)$ darstellen lassen, wenn also

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \text{ ist,}$$

so heifst die Funktion U die zur Kraft P gehörige **Kräftefunktion** oder **Potentialfunktion.** Sie ist eine nur von der Lage des Angriffspunktes von P abhängige Funktion.

Bei einer beliebigen Bewegung des Angriffspunktes ergibt sich die geleistete Arbeit unabhängig von der Art des Weges zu

$$A = \int\limits_{x_0, y_0, z_0}^{x_1, y_1, z_1} (X dx + Y dy + Z dz) = \int\limits_{x_0, y_0, z_0}^{x_1, y_1, z_1} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right)$$

$$= \int\limits_{U_0}^{U_1} dU = U_1 - U_0$$

und nach **a.**

$$A = m \frac{v_1^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} = U_1 - U_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

2. Beschreibt der Körper eine geschlossene Bahn, so nimmt die Potentialfunktion wieder ihren Anfangswert an; es mufs also auch die Geschwindigkeit wieder v_0 werden, gleichgültig welcher Weg beschrieben ist. Man nennt deshalb Gleichung (3) das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft, wofür auch die Form

$$\frac{m v_1^2}{2} + V_1 = m \frac{v^2}{2} + V = \text{unveränderlich} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$V_1 = -U_1$, $V = -U$ heifsen die **potentielle Energie** von P im Punkte x_1, y_1, z_1 bzw. x, y, z.

3. Die Gleichung $U = F(x, y, z) =$ unveränderlich stellt die Gleichung einer Fläche gleichen Potentials, einer **Niveaufläche,** dar. Die eine Schar von Niveauflächen (U_1, U_2 ...) winkelrecht schneidenden Linien heifsen **Kraftlinien.** Die in einem Punkt ausgeübte Kraft steht immer winkelrecht auf der zugehörigen Niveaufläche und berührt die Kraftlinie.

4. Wirken auf einen Punkt mehrere Kräfte P_1, P_2 . . ., deren jede eine Kräftefunktion U_1, U_2 . . . hat, so ist die Kräftefunktion der Mittelkraft $U = U_1 + U_2 + \cdots$

Beispiel 1. Wirkt auf den Massenpunkt **(Aufpunkt)** eine anziehende oder abstofsende Kraft, die von einem festen Punkt O ausgeht und eine Funktion des Abstandes des Massenpunktes von O ist, $P = f(r)$, so ist die Kräftefunktion

$$U = F(r) = \int f(r)\, dr.$$

Befindet sich im Punkte O die Masse (oder magnetische oder elektrische Menge) $= m$, im Aufpunkt die Masse (oder magnetische oder elektrische Menge) $= 1$, so ist nach dem Newtonschen (oder Coulombschen) Gesetz

$P = k \frac{m \cdot 1}{r^2}$; demnach wird die Kräftefunktion

$$U = k m \int \frac{dr}{r^2} = -k \frac{m}{r} + C.$$

Nimmt man für die obere Grenze $r = \infty$, so wird

$$U_\infty - U_r = +k \frac{m}{r} = V.$$

V ist das (Newtonsche) **Potential** der Masse 1 im Punkte r und ist gleich der entgegen der Kraft P zu leistenden Arbeit bei Bewegung des Punktes von dem Punkte $r = r$ bis $r = \infty$.

Uebt an Stelle des Punktes O ein ausgedehnter Körper die anziehenden Kräfte auf den Massenpunkt m_1 aus, so wird das Potential $V = k m_1 \int \frac{dm}{r}$.

Für eine Kugel vom Halbmesser R und dem spez. Gewicht γ $\left(\text{Masse} = {}^4/_3 \pi R \frac{\gamma}{g}\right)$ *) ist in einem äufseren Punkt $(r > R)$ das Potential der Masse m_1

$$V_a = k m_1 \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{1}{r},$$

in einem inneren Punkt $(r < R)$

$$V_i = k m_1 \cdot 2 \pi \frac{\gamma}{g} \left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right).$$

Beispiel 2. Das Gewicht G eines Körpers ist an demselben Orte der Erde bei geringen Höhenunterschieden nahezu unveränderlich. Demnach ist die Kräftefunktion für die Erdschwere in der Höhe z über einen beliebig gewählten O-Punkt

$$U = G z + U_0.$$

Setzt man die Kräftefunktion für den O-Punkt, deren Wert nicht bestimmbar ist, willkürlich $= 0$, so ist

$$U = G z;$$

die **potentielle Energie** wird also

$$V = -U = -G z$$

und nach Gleichung (4)

$$m \frac{v^2}{2} - G z = m \frac{v_0^2}{2} - G z_0 = \text{unveränderlich (vrgl. a., S. 187).}$$

c. Leistung.

1. Legt der Angriffspunkt einer Kraft P in dem Zeitteilchen dt den Weg ds zurück, wobei die Elementararbeit

$$dA = P \cos \varphi \, ds$$

verrichtet wird, so nennt man den Quotienten

$$L = \frac{dA}{dt} = P v \cos \varphi, \qquad \text{worin } v = \frac{ds}{dt}$$

die augenblickliche Geschwindigkeit ist, die **Leistung** oder den **Effekt** von P zur Zeit t.

Die Leistung ist wie die Arbeit (s. S. 187) eine skalare Gröfse.

Die **mittlere Leistung** während der Zeit $\tau = t_1 - t_0$ ist

$$L_m = \frac{1}{\tau} \int_{s_0}^{s_1} P \cos \varphi \, ds.$$

*) g = Beschleunigung der Schwerkraft.

Mifst man die Arbeit in **mkg**, die Zeit in **sk**, so erhält man die Leistung in **mkg/sk**. Die am meisten zur Leistungsmessung gebrauchte technische Einheit ist die **Pferdestärke** (PS) = 75 **mkg/sk**. Im CGS-System (s. S. 157 u. S. 187) ergibt sich die Leistung in gr cm^2/sk^3 = Erg/sk.

Die in der Elektrotechnik gebräuchliche Einheit ist

1 Watt = 10^7 Erg/sk;

für gröfsere Leistungen 1 Kilowatt = 1000 Watt.

Es ist **1 PS** = 75 mkg/sk = **735,46 Watt.**

Mit Hülfe der Leistung ergibt sich die in der Zeit t_0 bis t_1 geleistete Arbeit zu

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt \text{ und } = L\,(t_1 - t_0), \text{ wenn } L \text{ unveränderlich ist.}$$

Mifst man die Leistung in PS, die Zeit in st bzw. sk, so ergibt sich die Arbeit in Pferdekraftstunden (PS st) bzw. Pferdekraftsekunden (PS sk) und entsprechend Wattstunde, Hektowattstunde, Kilowattstunde (Kw st) bzw. Kilowattsekunde (Kw sk).

d. Zeichnerische Darstellung der Arbeit und Leistung.

Entsprechend den beiden Gleichungen

$$A = \int_{s_0}^{s_1} P_t\,ds \quad \text{und} \quad A = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt$$

ergeben sich zwei Diagramme für die Arbeit.

1. Man trägt die Wege s als Abszissen, die jeweilige Gröfse der Tangentialkraft P_t (in Richtung des Weges) als Ordinaten einer Kurve in rechtwinkligen Koordinaten auf. Das von den beiden zu s_0 und s_1 gehörigen Ordinaten sowie der Kurve und der Abszissenachse eingeschlossene Flächenstück F stellt die auf dem Wege s_0 bis s_1 verrichtete Arbeit dar. Verwandelt man die Fläche F in ein Rechteck mit der Grundlinie $s_1 - s_0$ und der Höhe P_0, so ist P_0 die mittlere Kraft, die, unveränderlich auf dem ganzen Wege wirkend, die gleiche Arbeit verrichtet wie die veränderliche Kraft P_t.

Anwendung: Indikator-Diagramme der Kolbenkraftmaschinen, Formänderungsarbeit bei Festigkeitsmaschinen.

2. Man trägt die Zeiten t als Abszissen, die Leistungen L als Ordinaten einer Kurve auf. Das von den beiden zu t_0 und t_1 gehörigen Ordinaten, der Kurve und der Abszissenachse eingeschlossene Flächenstück stellt die in der Zeit t_0 bis t_1 verrichtete Arbeit dar.

(Bestimmung der mittleren Leistung entsprechend der der mittleren Kraft unter 1.)

Anwendung: Diagramm für das Einrücken einer Reibkupplung

e. Bewegungsgröfse und Kraftantrieb.

1. Die phoronomische Grundgleichung für die geradlinige Bewegung

$$\frac{dv}{dt} = p$$

liefert mit $m\,dt$ multipliziert und integriert

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} P\,dt \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

Das Produkt mv heifst die **Bewegungsgröfse** (Bewegungsmenge) des Massenpunktes m zur Zeit t.

Der Ausdruck $P\,dt$ heifst **Elementarantrieb** der Kraft P im Zeitelement dt, $\int_{t_0}^{t} P\,dt$ der **Antrieb der Kraft** P in der Zeit t_0 bis t.

Die Aenderung der Bewegungsgröfse während der Zeit t ist gleich dem Antriebe der Kraft P während derselben Zeit.

Dieser Satz kann auf die krummlinige Bewegung ausgedehnt werden und nimmt dann bei der für die zahlenmäfsige Ausrechnung erforderlichen Zerlegung der Geschwindigkeit und Kraft nach rechtwinkligen Koordinatenachsen die Form an

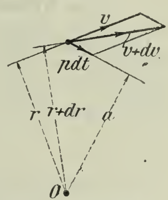
$$mv_x - mv_{x_0} = \int_{t_0}^{t} X\,dt;\quad mv_y - mv_{y_0} = \int_{t_0}^{t} Y\,dt;\quad mv_z - mv_{z_0} = \int_{t_0}^{t} Z\,dt.$$

Die Bewegungsgröfse bzw. der Antrieb der Kraft sind gerichtete Gröfsen, u. zw. übereinstimmend mit der Geschwindigkeit bzw. der Kraft.

f. Flächensatz.

1. Nimmt bei einer ebenen Bewegung die Geschwindigkeit eines Punktes in der Zeit dt von v auf $v + dv$ zu, so kann die Aenderung durch Hinzutreten einer Geschwindigkeit $p\,dt$ erzeugt gedacht werden, wobei p die augenblickliche Gesamtbeschleunigung ist (Abb. 73). Für das Geschwindigkeitsparallelogramm ergibt der Momentensatz (s. S. 160, da es hierfür gleichgültig ist, ob die Strecken als Kräfte oder Geschwindigkeiten aufgefafst werden) in bezug auf den beliebigen Punkt (Pol) O

Abb. 73.



$$vr + p\,dt\,a = (v + dv)(r + dr),$$

woraus

$$pa = \frac{d(vr)}{dt}.$$

Erweitert man die Gleichung mit der Masse m, so folgt

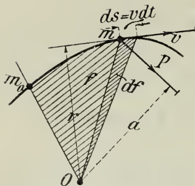
$$Pa = m\frac{d(vr)}{dt} = \frac{d(mvr)}{dt}$$

d. h. für jeden beliebigen Pol ist die Aenderung des Momentes der Bewegungsgröfse in einem Zeitteilchen (dt) gleich dem augenblicklichen Moment der Kraft.

Bezeichnet man die von dem Fahrstrahl Om bestrichene Fläche, von einer beliebigen Nullage Om_0 an gerechnet, mit f (Abb. 74), so ist

$$df = \frac{r\,v\,dt}{2} \quad \text{also} \quad m\,v\,r = 2\,m\,\frac{df}{dt} \quad \text{und}$$

Abb. 74.



$$\frac{d\,(m\,v\,r)}{dt} = P\,a = 2\,m\,\frac{d^2 f}{dt^2}$$

$\frac{df}{dt}$ heifst **Flächen-** (Sektoren-) **Geschwindigkeit** und ist gleich dem Moment der Bewegungsgröfse, geteilt durch $2m$.

$\frac{d^2 f}{dt^2}$ heifst **Flächen-** (Sektoren-) **Beschleunigung** und ist gleich dem Moment der Kraft, geteilt durch $2m$.

2. Geht die Kraft P stets durch einen festen Punkt O (**Zentralbewegung**), so ist in bezug auf diesen als Pol das Moment der Kraft $= 0$, also

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 0 \qquad \frac{df}{dt} = c = \text{unveränderlich} \qquad f = ct + c',$$

d. h. in gleichen Zeiten werden gleiche Flächenräume bestrichen. Vrgl. **erstes Keplersches Gesetz** für die Planetenbewegung, 1609 und 1619:

Die Planeten bewegen sich in ebenen Bahnen, in deren Ebene die Sonne liegt.

Der von der Sonne nach dem Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

Zweites und drittes Gesetz s. S. 197 bis 199.

B. Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einflufs von Kräften.

a. Geradlinige Bewegung eines Massenpunktes.

Alle am Punkte angreifenden Kräfte müssen stets eine in die Richtung der Geraden fallende Mittelkraft P ergeben. Ist P als Funktion der Zeit t oder des Weges s oder der Geschwindigkeit v gegeben, so ist die Beschleunigung

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{P}{m}.$$

Die Grundaufgaben S. 138 ergeben aus p die Gröfsen v, s und t.

Beispiel 1. Freier Fall im luftleeren Raum.

Auf einen im luftleeren Raum freifallenden Körper wirkt nur die Schwerkraft (Anziehungskraft der Erde), die für geringe Fallhöhen unveränderlich ist und demnach dem Körper eine mit $p = +g$ gleichmäfsig beschleunigte Bewegung erteilt (Werte für g s. S. 155).

Rechnet man die Zeit vom Beginn des Fallens, so erhält man für die nach t sk erlangte Geschwindigkeit v und für die durchfallene Höhe h (**Geschwindigkeitshöhe** zu v)

$$v = g\,t = \sqrt{2\,g\,h} \quad \text{und} \quad h = \frac{g}{2}\,t^2 = \frac{v^2}{2\,g}.$$

Tafel der zu bestimmten Geschwindigkeiten gehörenden Fallhöhen s. S. 193.
Tafel der zu bestimmten Fallhöhen gehörenden Geschwindigkeiten s. S. 194.

**Geschwindigkeits- (Fall-) Höhen h in m
für Endgeschwindigkeiten v zwischen 0 und 1000 m/sk.**

$h = v^2/2g \qquad g = 9{,}81$ m/sk².

v	h	v	h	v	h	v	h	v	h
0	0,00000	40	81,5494	80	326,198	285	4139,91	645	21204,1
1	0,05097	41	85,6779	81	334,404	295	4435,52	655	21866,7
2	0,20387	42	89,9083	82	342,712	300	4587,16	665	22539,5
3	0,45872	43	94,2406	83	351,121	305	4741,34	675	23222,5
4	0,81549	44	98,6748	84	359,633	315	5057,34	685	23915,7
5	1,27421	45	103,211	85	368,247	325	5383,54	695	24619,0
6	1,83486	46	107,849	86	376,962	335	5719,93	700	24974,5
7	2,49745	47	112,589	87	385,780	345	6066,51	705	25332,6
8	3,26198	48	117,431	88	394,699	355	6423,29	715	26056,3
9	4,12844	49	122,375	89	403,721	365	6790,26	725	26790,3
10	5,09684	50	127,421	90	412,844	375	7167,43	735	27534,4
11	6,16718	51	132,669	91	422,069	385	7554,79	745	28288,7
12	7,33945	52	137,819	92	431,397	395	7952,34	755	29053,3
13	8,61366	53	143,170	93	440,826	400	8154,94	765	29828,0
14	9,98981	54	148,624	94	450,357	405	8360,09	775	30612,9
15	11,4679	55	154,179	95	459,990	415	8778,03	785	31408,0
16	13,0479	56	159,837	96	469,725	425	9206,17	795	32213,3
17	14,7299	57	165,596	97	479,562	435	9644,50	800	32619,8
18	16,5138	58	171,458	98	489,501	445	10093,0	805	33028,8
19	18,3996	59	177,421	99	499,541	455	10551,7	815	33854,5
20	20,3874	60	183,486	100	509,684	465	11020,6	825	34690,4
21	22,4771	61	189,653	105	561,927	475	11499,7	835	35536,4
22	24,6687	62	195,923	115	674,057	485	11989,0	845	36392,7
23	26,9623	63	202,294	125	796,381	495	12488,5	855	37259,2
24	29,3578	64	208,767	135	928,899	500	12742,1	865	38135,8
25	31,8552	65	215,341	145	1071,61	505	12998,2	875	39022,7
26	34,4546	66	222,018	155	1224,52	515	13518,1	885	39919,7
27	37,1560	67	228,797	165	1387,61	525	14048,2	895	40827,0
28	39,9592	68	235,678	175	1560,91	535	14588,4	900	41284,4
29	42,8644	69	242,661	185	1744,39	545	15138,9	905	41744,4
30	45,8716	70	249,745	195	1938,07	555	15699,5	915	42672,0
31	48,9807	71	256,932	200	2038,74	565	16270,4	925	43609,8
32	52,1917	72	264,220	205	2141,95	575	16851,4	935	44557,8
33	55,5046	73	271,611	215	2356,01	585	17442,7	945	45516,1
34	58,9195	74	279,103	225	2574,34	595	18044,1	955	46484,5
35	62,4363	75	286,697	235	2814,73	600	18348,6	965	47463,1
36	66,0551	76	294,393	245	3059,38	605	18655,3	975	48451,8
37	69,7757	77	302,192	255	3314,22	615	19277,5	985	49450,8
38	73,5984	78	310,092	265	3579,26	625	19909,5	995	50460,0
39	77,5229	79	318,094	275	3854,48	635	20551,7	1000	50968,4

Endgeschwindigkeiten v in m/sk
für Geschwindigkeits- (Fall-) Höhen h zwischen 1 und 1000 m.

$v = \sqrt{2gh}$ $g = 9{,}81$ m/sk².

h	v	h	v	h	v	h	v	h	v
1	4,42945	41	28,3623	81	39,8650	210	64,1888	610	109,399
2	6,26418	42	28,7061	82	40,1103	220	65,6993	620	110,292
3	7,67202	43	29,0458	83	40,3542	230	67,1759	630	111,435
4	8,85889	44	29,3816	84	40,5032	240	68,6207	640	112,057
5	9,90454	45	29,7136	85	40,8375	250	70,0357	650	112,929
6	10,8499	46	30,0420	86	41,0770	260	71,4227	660	113,795
7	11,7192	47	30,3668	87	41,3151	270	72,7832	670	114,653
8	12,5284	48	30,6881	88	41,5519	280	74,1188	680	115,506
9	13,2883	49	31,0061	89	41,7873	290	75,4308	690	116,352
10	14,0071	50	31,3209	90	42,0214	300	76,7202	700	117,192
11	14,6908	51	31,6326	91	42,2542	310	77,9884	710	118,026
12	15,3440	52	31,9412	92	42,4858	320	79,2364	720	118,855
13	15,9706	53	32,2469	93	42,7160	330	80,4649	730	119,677
14	16,5730	54	32,5497	94	42,9451	340	81,6750	740	120,494
15	17,1553	55	32,8496	95	43,1729	350	82,8673	750	121,305
16	17,7178	56	33,1469	96	43,3995	360	84,0429	760	122,111
17	18,2630	57	33,4416	97	43,6250	370	85,2021	770	122,912
18	18,7925	58	33,7337	98	43,8493	380	86,3458	780	123,708
19	19,3075	59	34,0232	99	44,0724	390	87,4746	790	124,498
20	19,8091	60	34,3105	100	44,2945	400	88,5889	800	125,284
21	20,2983	61	34,5951	105	45,3883	410	89,6895	810	126,064
22	20,7759	62	34,8775	110	46,4564	420	90,7767	820	126,840
23	21,2428	63	35,1577	115	47,5005	430	91,8510	830	127,611
24	21,6998	64	35,4356	120	48,5224	440	92,9129	840	128,378
25	22,1472	65	35,7113	125	49,5227	450	93,9627	850	129,140
26	22,5858	66	35,9850	130	50,5037	460	95,0010	860	129,897
27	23,0161	67	36,2566	135	51,4655	470	96,0281	870	130,650
28	23,4384	68	36,5262	140	52,4099	480	97,0443	880	131,399
29	23,8535	69	36,7938	145	53,3376	490	98,0500	890	132,143
30	24,2611	70	37,0594	150	54,2492	500	99,0454	900	132,883
31	24,6621	71	37,3232	155	55,1462	510	100,031	910	133,620
32	25,0567	72	37,5851	160	56,0284	520	101,007	920	134,352
33	25,4452	73	37,8452	165	56,8973	530	101,974	930	135,080
34	25,8279	74	38,1035	170	57,7529	540	102,931	940	135,804
35	26,2050	75	38,3601	175	58,5961	550	103,880	950	136,525
36	26,5767	76	38,6150	180	59,4272	560	104,820	960	137,241
37	26,9433	77	38,8682	185	60,2470	570	105,752	970	137,954
38	27,3049	78	39,1198	190	61,0555	580	106,675	980	138,664
39	27,6619	79	39,3698	195	61,8539	590	107,591	990	139,369
40	28,0143	80	39,6182	200	62,6418	600	108,499	1000	140,071

Beispiel 2. Freier Fall mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Der Luftwiderstand W sei dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional.

$W = mgv^2 : k^2$, worin k die Geschwindigkeit bedeutet, für welche $W = G = mg$ wird; m ist die Masse und G das Gewicht des Massenpunktes.

Aus dieser Annahme folgt

1) für den Fall eines Körpers aus der Höhe h

die Endgeschwindigkeit $$v = k\sqrt{1 - e^{-\frac{2gh}{k^2}}}$$

und die Falldauer $$t = \frac{k}{g}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{v}{k} = \frac{k}{g}\ln\left\{e^{\frac{gh}{k^2}} + \sqrt{e^{\frac{2gh}{k^2}} - 1}\right\}$$
$$= \frac{k}{g}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(\mathfrak{Cof}\,\frac{gh}{k^2} + \mathfrak{Sin}\,\frac{gh}{k^2}\right)$$

vrgl. hierzu die Hyperbelfunktionen S. 65. e s. S. 48.

2) wenn ein Körper mit der Geschwindigkeit c nach oben geworfen wird,

die Steighöhe $$h = \frac{k^2}{2g}\ln\left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right)$$

und die Steigdauer $$t = \frac{k}{g}\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k}.$$

Kommt der Körper in derselben Wagerechten wieder an, so besitzt er die Endgeschwindigkeit
$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{k^2}}}.$$

Die Geschwindigkeit k in m/sk ergibt sich aus der Formel
$$k^2 = \frac{2g^2m}{\psi\gamma F} = \frac{2gG}{\psi\gamma F}$$
worin F die senkrecht zur Bewegungsrichtung genommene gröfste Querschnittfläche des Körpers in qm, γ das Gewicht von 1 cbm Luft (= 1,293 kg), m die Masse des Körpers, G das Gewicht in kg, ψ einen von der Gestalt des Körpers abhängigen Erfahrungskoeffizienten (für kugelförmige Körper $\psi = 0{,}5$) bedeutet.

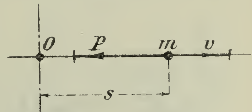
B e i s p i e l: Für eine Gufseisenkugel (1 cbm wiegt 7250 kg) vom Halbmesser r (in m) wird
$$k = 541{,}6\sqrt{r}\ \text{m/sk}.$$

Beispiel 3. Geradlinige Schwingung.

Ein Punkt der Masse m befinde sich zur Zeit t in der Entfernung s von der Anfangslage O (zur Zeit $t = 0$) (Abb. 75); eine Kraft P proportional dem Ausschlage s, $P = ks$, sei bestrebt, den Punkt in seine Anfangslage zurückzuführen (G e s e t z d e r e l a s t i s c h e n S c h w i n g u n g e n).

Das Prinzip der lebendigen Kraft liefert mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 zur Zeit $t = 0$:

Abb. 75.



$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_0^s(-P\,ds) = -k\int_0^s s\,ds = -k\frac{s^2}{2}$$

also $$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}s^2}.$$

v wird $= 0$ (Umkehr des Punktes) für $s = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = r$ (r = Schwingungsweite, Amplitude).

Damit wird $$v = v_0\sqrt{1 - \left(\frac{s}{r}\right)^2} = \frac{ds}{dt}$$

woraus $$t = \frac{r}{v_0} \arcsin \frac{s}{r} \quad \text{oder} \quad s = r \sin \frac{v_0 t}{r}.$$

S. auch S. 139 **d.**, 2.

b. Freie krummlinige Bewegung eines Massenpunktes.

1. Der Punkt mit der Masse m habe zur Zeit t die Koordinaten x, y, z, die Geschwindigkeit v mit den Komponenten v_x, v_y, v_z und die Beschleunigung p mit den Komponenten p_x, p_y, p_z. Die Mittelkraft P der auf ihn wirkenden Kräfte habe die Seitenkräfte X, Y, Z.

Die Bewegungsgleichungen für die Projektionen auf den Achsen, woraus sich die Mittelbewegung nach S. 140 ergibt, folgen aus **a.** S. 192 zu

$$p_x = \frac{X}{m} = \frac{d v_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad p_y = \frac{Y}{m} = \frac{d v_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$p_z = \frac{Z}{m} = \frac{d v_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

(Für eine ebene Bewegung in der xy-Ebene fällt die dritte Gleichung fort.)

Zerlegt man die Kraft P nach Richtung der Tangente und der Normalen (bei doppelt gekrümmten Kurven der Hauptnormalen, d. i. derjenigen, die in der durch zwei aufeinanderfolgende Bahnelemente bestimmten Schmiegungsebene liegt und nach dem Krümmungsmittelpunkt hinweist, s. S. 119) in die **Tangentialkraft** P_t und die **Normal-** oder **Zentripetalkraft** P_n, so gilt, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser der Bahn und φ den Winkel zwischen P und der Bewegungsrichtung bedeutet,

$$P_t = P \cos \varphi = m \frac{dv}{dt} \qquad P_n = P \sin \varphi = m \frac{v^2}{\varrho}$$

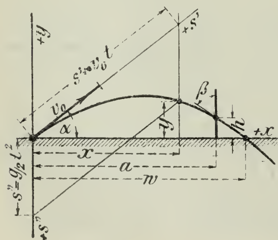
P_t erteilt der Masse m die **Tangentialbeschleunigung** $p_t = \frac{P_t}{m} = \frac{dv}{dt}$

P_n erteilt der Masse m die **Normalbeschleunigung** $p_n = \frac{P_n}{m} = \frac{v^2}{\varrho}$.

Beispiel 1. Wurfbewegung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Auf einen Massenpunkt wirke augenblicklich eine Kraft, die dem Punkt im Augenblick ihres Aufhörens zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α zur Wagerechten erteilt. Dauernd wirkt auf den Punkt die Schwerkraft, wodurch er lotrecht die Beschleunigung $-g$ erhält (s. Abb. 76).

Abb. 76.



Die Wurfbewegung setzt sich demnach aus einer gleichförmigen und gleichmäfsig beschleunigten (bzw. verzögerten) Bewegung zusammen.

Wege
$$x = v_0 t \cos \alpha \qquad y = v_0 t \sin \alpha - \tfrac{1}{2} g t^2$$
woraus die Gleichung der Bahnlinie
$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 v_0^2} \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} \quad \textbf{(Parabel)}$$

Wurfzeit (für $y = 0$) $$t = \frac{2 v_0}{g} \sin \alpha$$

Wurfweite (für $y = 0$) $\qquad w = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$

Schufswinkel für eine vorgeschriebene Wurfweite bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 folgt aus

$$\sin 2\alpha = \frac{g}{v_0^2} w$$

(zwei Winkel α_1 und α_2, die sich zu 90° ergänzen, flacher Schufs, Bogenschufs).

Gröfste Wurfweite

$$w_{\max} = \frac{v_0^2}{g} = \text{doppelte Geschwindigkeitshöhe ergibt sich für } \alpha = 45^0.$$

Geschwindigkeiten

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - g t \qquad v = \sqrt{v_0^2 - 2 g y}.$$

Höchster Bahnpunkt (für $v_y = 0$)

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \qquad x = \frac{w}{2} \qquad y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha.$$

Eine Wand im Abstande a wird in der Höhe $h = a \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2 v_0^2} \frac{a^2}{\cos^2\alpha}$

mit der Geschwindigkeit . . . . $v = \sqrt{v_0^2 - 2 g h}$

nach Ablauf der Zeit . . . . $t = \frac{a}{v_0 \cos\alpha}$

unter dem Winkel β getroffen, wo . . $\quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{2} \frac{\frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha - a}{\frac{v_0^2}{2g} \cos^2\alpha}$.

Beispiel 2. Wurfbewegung mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes.*)

Bezeichnungen wie Beispiel 1. Ueber die Gröfse k s. S. 195.

Vorausgesetzt ist ein so kleiner Winkel α, dafs für den Bogen näherungsweise die wagerechte Projektion gesetzt werden kann.

Zur Zeit t ist in diesem Falle

$$x = \frac{k^2}{g} \ln\left(1 + \frac{g v_0 \cos\alpha}{k^2} t\right), \text{ also } t = \frac{k^2}{g v_0 \cos\alpha}\left(e^{\frac{g x}{k^2}} - 1\right)$$

$$y = x\left\{\operatorname{tg}\alpha + \frac{k^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}\right\} - \frac{k^4}{g v_0^2 \cos^2\alpha}\left(e^{\frac{2 g x}{k^2}} - 1\right).$$

Für den Scheitel der Flugbahn ist

$$x = \frac{k^2}{2g} \ln\left(1 + \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2 k^2}\right) \qquad (t \text{ und } y \text{ wie unter 1.})$$

Die Wurfweite a wird erreicht mit einem Winkel α, der sich bestimmen läfst aus

$$\sin 2\alpha = \frac{k^4}{2 g v_0^2 a}\left(e^{\frac{2 g a}{k^2}} - \frac{2g}{k^2} a - 1\right),$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen, s. S. 48.

Beispiel 3: Zweites Keplersches Gesetz (s. a. S. 192): Jeder Planet beschreibt eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht, oder allgemeiner (nach Newton): wirken auf einen Massenpunkt m eine von einer zentralen Masse m_1 ausgehende Anziehungskraft, und ist ihm durch eine Momentankraft irgend eine Geschwindigkeit v_0 erteilt, so bewegt er sich um die zentrale Masse auf einem Kegelschnitt, in dessen Brennpunkt diese liegt. Die Masse m wird nach dem Newtonschen Gesetz (s. S. 156) von der Masse m_1 mit der Kraft $P = k_1 \frac{m m_1}{r^2}$ oder $\frac{m k}{r^2}$ angezogen

*) Vrgl. auch G. Holzmüller, Flugbahn der Geschosse usw., Z. d. V. d. I. 1895 810 u. f.

(s. Abb. 77). m habe durch irgend eine Momentenkraft beim Anfang der Bewegung im Abstand r_0 von m_1 die Geschwindigkeit v_0 erhalten, ferner zur Zeit t den Abstand r und die Geschwindigkeit v.

Dann ist nach **f.** 2 S. 192 und Abb. 77 $df = \frac{r^2}{2} d\alpha = c\, dt$, oder

$$r^2 d\alpha = 2\, c\, dt \quad \dots \dots \quad (1)$$

und nach **b.** 1 S. 188 (s. a. Beisp. 1)

$$U = \int P\, dr + C = \frac{m k}{r} + C$$

Abb. 77.

ferner

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = U - U_0 = \frac{m k}{r} - \frac{m k}{r_0}.$$

Daraus folgt

$$v^2 = \frac{2k}{r} - \left(\frac{2k}{r_0} - v_0^2\right)$$

und die unveränderliche Klammergröfse $= q$ gesetzt, sowie unter Beachtung von Abb. 77

$$v^2 = \frac{2k}{r} - q = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dr^2 + r^2\, d\alpha^2}{dt^2} \quad . \quad (2)$$

dt aus Gleichung 1 in 2 eingesetzt, ergibt die Differentialgleichung der Bahnlinie

$$\frac{2k}{r} - q = \frac{dr^2 + r^2\, d\alpha^2}{r^4\, d\alpha^2}\, 4\, c^2$$

oder

$$d\alpha = \frac{2\, c\, dr}{\sqrt{2\, k r^3 - q r^4 - 4\, c^2 r^2}},$$

woraus durch Integration

$$\alpha = \arccos \frac{\frac{4\, c^2}{k r} - 1}{\sqrt{1 - q \frac{4\, c^2}{k^2}}} + \alpha_1,$$

worin α_1 = Integrationskonstante

oder

$$r = \frac{\frac{4\, c^2}{k}}{1 + \sqrt{1 - q \frac{4\, c^2}{k^2}} \cos(\alpha - \alpha_1)}.$$

Nach S. 102 ist die Form der Polargleichung eines Kegelschnitts, bezogen auf den Brennpunkt als Pol und eine Hauptachse als 0-Achse $r' = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \alpha'}$, in welche Gleichung die obige übergeht, wenn man statt der bisherigen 0-Achse eine solche unter dem $\sphericalangle\, \alpha - \alpha_1 - \alpha$ nimmt, $1 - q \frac{4\, c^2}{k^2} = \varepsilon^2$ setzt, womit $a = \frac{k}{q}$ wird.

Bemerkung: Bei Anwendung der Gleichungen unter **b.** 1 (S. 188) kommt man auf schwierige Differentialgleichungen. Dieses Beispiel zeigt, wie man durch Anwendung der Allgemeinen Gesetze die Aufgaben oft wesentlich vereinfachen kann; so kann man auch jede Integration umgehen wie folgt:

Nach **f.** 1 S. 191 und 192 und Abb. 77 ist $m v h = 2\, m \frac{df}{dt}$ und demnach nach **f.** 2 S. 192

$$m\, v\, h = 2\, m c, \quad v\, h = \text{unveränderlich} = v_0\, h_0,$$

womit ohne weiteres aus dem ersten Teil von Gleichung 2 folgt

$$\frac{v^2 h^2}{h^2} = \frac{v_0^2 h_0^2}{h^2} = \frac{2k}{r} - q \quad \text{oder} \quad h^2 = r \frac{v_0^2 h_0^2}{2k - q r}$$

dieses ist Gleichung eines Kegelschnitts, und zwar

Hyperbel für $q < 0$ oder $2\,k < r_0\,v_0^2$
Parabel „ $q = 0$ „ $2\,k = r_0\,v_0^2$
Ellipse „ $q > 0$ „ $2\,k > r_0\,v_0^2$.

Beispiel 4. Drittes Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Sonnenentfernung (genauer der grofsen Halbachsen ihrer Bahnen).

Nach **f.** 2, S. 192, ist $df = c\,dt$, und $f = c\,t + c'$, oder für einen Umlauf $t = F : c$, worin F die Fläche der Ellipse. Da $F = ab\pi$, $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$, $2\,c = \sqrt{a\,k\,(1-\varepsilon^2)}$ nach Beispiel 3, so ist $t = 2\,\pi \cdot \frac{a^{3/2}}{\sqrt{k}}$. Es ist demnach $t_1^2 : t_2^2 = a_1^3 : a_2^3$.

c. Unfreie Bewegung eines Massenpunktes.

Ist der Massenpunkt gezwungen, auf einer Führungsfläche oder einer Führungslinie zu bleiben, so fügt man zu den gegebenen äufseren Kräften den **Bahnwiderstand** (Zwangskraft) hinzu und behandelt dann die Bewegung wie eine freie (s. o. u. **b.**).

1. Bei **vollkommen glatter Führungslinie** ist der Bahnwiderstand winkelrecht zur Bahn.

Zerlegt man die gegebene äufsere Kraft P (Abb. 78, S. 200) nach Richtung der Bahntangente und winkelrecht dazu in die beiden Seitenkräfte

$$P_t = P\cos\alpha \quad\text{und}\quad P_n = P\sin\alpha,$$

so ist

$$P_t = m\frac{dv}{dt} = mp_t,$$

und der Normalwiderstand N der Bahn mufs mit P_n eine Mittelkraft ergeben, die gleich der Zentripetalkraft der freien Bewegung auf einer der festen Bahn gleichen Linie ist. Die Mittelkraft geht also durch den Krümmungsmittelpunkt der Bahn, und es ist

$$C = m\frac{v^2}{\varrho} = mp_n.$$

Die Gegenkraft $(-N)$ zum Bahnwiderstand N heifst **Bahndruck** (Druck auf die Bahn), die Gegenkraft $(-C)$ zur Zentripetalkraft C heifst **Zentrifugalkraft** (Fliehkraft). [Zentrifugalkraft als Trägheitskraft s. S. 208.]

Die Mittelkraft aus P_n und der Zentrifugalkraft $(-C)$ ist der Bahndruck $(-N)$.

S. auch Gleichungen unter **2.**

2. Bei den Führungen der Technik tritt stets aufser dem Normalwiderstand N ein Tangentialwiderstand F, die **Reibung,** auf; sie ist der Bewegungsrichtung entgegengesetzt und kann proportional dem Normalwiderstand (bzw. Normalbahndruck) angenommen werden

$$F = \mu\,N$$

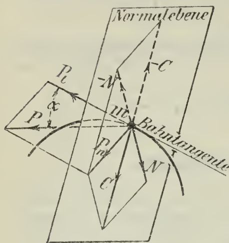
μ heifst Reibungszahl oder Reibungskoeffizient der gleitenden Bewegung (s. S. 227 u. f.).

An der Bahn greift die gleich grofse Gegenkraft $(-F)$ an, welche die Bahn in Richtung der Bewegung zu verschieben sucht.

Die Tangentialkraft wird jetzt (vrgl. Abb. 78)

$$T = P_t - F = P \cos \alpha - \mu N.$$

Abb. 78.



α) Zur Zeit t habe der Punkt m die Koordinaten x, y, z, die gegebene Kraft P die Seitenkräfte X, Y, Z, der Bahnwiderstand N die Seitenkräfte N_x, N_y, N_z in Richtung der Koordinatenachsen, und es seien $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ die Gleichungen der **Führungslinie.**

Da das Bahnelement ds (die Bewegungsrichtung) die Richtungscosinus $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ hat, also F die entgegengesetzten, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N_x - \mu N \frac{dx}{ds} \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N_y - \mu N \frac{dy}{ds}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N_z - \mu N \frac{dz}{ds} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Hierzu treten zur Bestimmung der Unbekannten die Gleichungen

$$\varphi(x, y, z) = 0 \qquad \psi(x, y, z) = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

$$N_x\, dx + N_y\, dy + N_z\, dz = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Gleichung (3) sagt aus, dafs N senkrecht zur Bahn (ds) steht (s. anal. Geom.).

β) Liegt eine **Führungsfläche** $\varphi(x, y, z) = 0$ vor, so tritt zu dem Normalwiderstand N der Bahn ebenfalls der Tangentialwiderstand $F = \mu N$ hinzu. Zerlegt man P nach der Flächennormalen und winkelrecht dazu in P_n und P_t, so ist wieder

$$P_t - F = m\frac{dv}{dt} = mp_t \text{ und weiter}$$

$$P_n + N = C = m\frac{v^2}{\varrho} = mp_n \text{ (algebraische Addition).}$$

Die analytischen Bewegungsgleichungen lauten wie unter α; an Stelle Gleichung (2) und (3) tritt

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$N_x : N_y : N_z = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Die beiden Proportionen (3) sagen aus, dafs N senkrecht zur Fläche steht (s. anal. Geom.).

γ) Das Prinzip der lebendigen Kraft liefert, da der Normal-Bahnwiderstand N keine Arbeit leistet,

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} [(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) - \mu N\, ds]$$

$$= \int_{s_0}^{s} P \cos \varphi \, ds - \int_{s_0}^{s} F \, ds.$$

Existiert für die Kraft P eine Potentialfunktion U, so ist

$$m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} = U - U_0 - \int_{s_0}^{s} F \, ds,$$

und da das letzte Integral, die **Reibungsarbeit,** nie verschwindet, so kann bei Beschreibung einer geschlossenen Kurve die lebendige Kraft nie wieder ihren ursprünglichen Wert annehmen.

Ist $\mu = 0$, so nimmt das Prinzip der lebendigen Kraft die Form wie bei der freien Bewegung an, d. h. bei Aufstellung der Arbeitsgleichungen genügt es, nur die gegebenen äufseren Kräfte zu berücksichtigen.

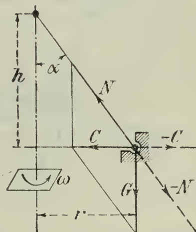
Beispiel 1. Bewegung eines Massenpunktes in einem wagerechten Kreise, Kegelpendel

Auf den Massenpunkt wirke aufser der Schwerkraft G keine äufsere Kraft; die Führungsrinne mit dem Halbmesser r sei vollkommen glatt.

Die Tangential-Seitenkraft ist $= 0$, daher $p_t = 0$. Die Normal-Seitenkraft ist gleich der Schwerkraft G.

Diese mufs mit dem Bahnwiderstand N zusammen die Zentripetalkraft C ergeben. Aus Abb. 79 folgt

Abb. 79.



$$N^2 = G^2 + C^2 = G^2 + \left(m \frac{v^2}{r}\right)^2 = G^2 + (m\,\omega^2 r)^2$$

$$N = m \sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2},$$

worin v die Umfangs-, ω die Winkelgeschwindigkeit (s. S. 141) $g = 9{,}81$ m/sk² bedeutet.

N bildet mit der Achse des Kreises einen Winkel α, für den

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C}{G} = \frac{v^2}{rg} = \omega^2 \frac{r}{g}.$$

Ist die Schwerkraft $= 0$, so ist der radial nach **aufsen** wirkende Bahndruck

$$- N = 0{,}10194\, G \frac{v^2}{r} = 0{,}10194\, G\, w^2 r = 4{,}02435 \frac{G\, r}{T^2} = 0{,}001118\, G\, r\, n^2,$$

worin G das Gewicht des Massenpunktes, n die Uml./min, T die Umlaufzeit bedeuten.

Soll die kreisförmige Bewegung durch ein Pendel **(Kegelpendel)** erzwungen werden, so mufs die **Pendelhöhe**

$$h = r : \operatorname{tg} \alpha = g\, r^2 : v^2 = g : \omega^2 = 894{,}565\ (\text{m/sk}^2) : n^2$$

sein. Die Umlaufzeit T ist

$$T = 2\pi \frac{r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Beispiel 2. Bewegung eines Massenpunktes in einem senkrechten Kreis (mathematisches Pendel).

Ist (Abb. 80. S. 202) l die Länge des gewichtlosen Fadens, α der halbe Ausschlagwinkel (Elongation), h die Steig- oder Fallhöhe des Punktes, so ist die **Dauer einer einfachen Schwingung** T, d. h. die Zeit zwischen zwei Durchgängen durch die Lotrechte

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots\right].$$

Bei $\alpha \leqq 8^0$ ist hinreichend genau

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

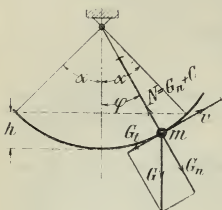


Abb. 80.

d. h. die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Schwingungsweite (isochron oder tautochron trifft genau zu für das Zykloidenpendel).*)

Die Länge des **Sekundenpendels** in m ist

$$l = g : \pi^2,$$

d. h. für die mittlere Breite Deutschlands, $\varphi = 50^0$, und Meereshöhe ($g = 9{,}81$ m/sk²)

$$l = 0{,}994 \text{ m}.$$

Die Geschwindigkeit im tiefsten Punkt ist

$$v = \sqrt{2\,g\,h},$$

also die Spannkraft des Fadens (Bahndruck) im tiefsten Punkte am gröfsten, u. zw.

$$-N = m\,g + m\frac{v^2}{l} = m\,g\,\frac{l + 2\,h}{l}$$

Ist $\alpha > 90^0$, so wird die Spannkraft in der Nähe $^2/_3\,(h - l)$ über dem Aufhängepunkt gleich null (Bewegungsumkehr). — Ist die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte $\geqq \sqrt{5\,l\,g}$, so durchläuft der Punkt den ganzen Kreis. Die Spannkraft $-N$ nimmt im höchsten Punkt ihren kleinsten, jedoch immer noch positiven Wert an.

3. Fall auf geneigter Geraden (schiefer Ebene).

Es ergibt sich sofort aus Abb. 81 mit den beiden äufseren auf den Massenpunkt m wirkenden Kräften $G = m\,g$ und K

$$P_t = K \sin\beta - G \sin\alpha$$
$$P_n = K \cos\beta + G \cos\alpha.$$

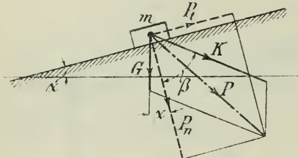


Abb. 81.

Da wegen der Bewegung auf einer Geraden ($\rho = \infty$) die Zentrifugalkraft gleich null ist, so wird der Bahnwiderstand N gleich grofs und entgegengesetzt gerichtet zu P_n.

Unter Berücksichtigung der Reibung mit der Reibungszahl μ wird die Tangentialkraft

$$T = P_t - F = (K \sin\beta - G \sin\alpha) - \mu\,(K \cos\beta + G \cos\alpha).$$

Die Beschleunigung wird demnach bei der Aufwärtsbewegung

$$p = p_t = \frac{T}{m} = -g\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + \frac{K}{G}\,g\,(\sin\beta - \mu\cos\beta),$$

bei der Abwärtsbewegung

$$p = +g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{K}{G}\,g\,(\sin\beta + \mu\cos\beta).$$

Ist $K = 0$, so ist bei der Abwärtsbewegung

$$p_t = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

und p_t wird gleich null, d. h. der Massenpunkt bleibt in Ruhe bzw. die Bewegung ist gleichförmig, wenn $\operatorname{tg}\alpha = \mu$. ($\alpha$ = Reibungswinkel.)

---

*) Ein Zykloidenpendel erhält man folgendermafsen: Zeichnet man die gemeine Zykloide (Abb. 20 S. 108) so, dafs der Kurvenzweig nach unten gerichtet ist, und aufserdem den links von A gelegenen Zweig, so bilden diese die festen Führungs-Anschläge für das in A befestigte Pendel von der Länge $l = 4\,r$. Der Massenpunkt des Pendels beschreibt eine der Führungszykloide kongruente Kurve (deren Evolvente).

C. Bewegung einer Massenpunktgruppe unter der Einwirkung von Kräften.

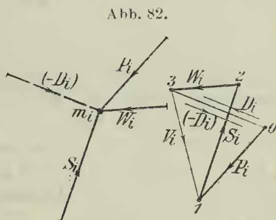
I. Allgemeine Sätze.

a. D'Alembertsches Prinzip.

Der i^{te} Punkt der Gruppe mit der Masse m_i unterliege der gegebenen **äufseren Kraft** P_i. Die übrigen Punkte der Gruppe mögen auf ihn mit einer Kraft S_i (**innere Kraft** oder Spannkraft) wirken, aufserdem werde von einer Führungsfläche oder -Linie, an die m_i gebunden ist, der **Bahnwiderstand** W_i auf m_i ausgeübt (Abb. 82). Dann ist die Mittelkraft von P_i, S_i und W_i die **Beschleunigungskraft** D_i, die sich aus der am Punkte m_i beobachtbaren Beschleunigung p_i ergibt zu

$$D_i = m_i p_i.$$

Abb. 82.



Eine der Beschleunigungskraft D_i gleich grofse und entgegengesetzte Kraft $(-D_i)$ würde demnach zusammen mit P_i, S_i und W_i Gleichgewicht am Punkte m_i hervorbringen. Die (fingierte) Kraft $(-D_i)$ heifst **Trägheitswiderstand** oder **Massendruck** des Punktes m_i. Danach folgt:

(1) An jedem einzelnen Massenpunkt der Gruppe halten sich die äufsere Kraft P_i, die innere Kraft S_i, der Bahnwiderstand W_i und der Trägheitswiderstand $(-D_i)$ das Gleichgewicht.

An der Massenpunktgruppe als Ganzes sind die **inneren (Spann-) Kräfte** S_i im Gleichgewicht (s. Erklärung unter I., S. 158), demnach folgt:

(2) **Die äufseren Kräfte P, die Bahnwiderstände W und die Trägheitswiderstände $(-D)$ aller Punkte der Gruppe sind im Gleichgewicht.**

Wird die äufsere Kraft P_i in die Seitenkräfte D_i und V_i (Abb. 82) zerlegt, so wirkt nur die Seitenkraft D_i beschleunigend. V_i heifst die **verlorene Kraft** am Punkt m_i. Wird P_i durch die Seitenkräfte D_i und V_i ersetzt, so geht der erste Satz über in:

(3) An jedem einzelnen Massenpunkt der Gruppe halten sich die innere Kraft S_i, der Bahnwiderstand W_i und die verlorene Kraft V_i das Gleichgewicht

und der zweite Satz

(4) **Die Bahnwiderstände W und die verlorenen Kräfte V aller Punkte der Gruppe sind im Gleichgewicht.**

Durch Anwendung des d'Alembertschen Prinzipes (Einführung der Massendrücke) wird jede Aufgabe der Dynamik in eine solche der Statik verwandelt.

Die Komponenten der Massendrücke nach den drei Koordinatenachsen sind

$$(-D_x) = -m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (-D_y) = -m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (-D_z) = -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Mit Hülfe des Satzes der virtuellen Verrückungen (s. S. 165) kann demnach Satz (1) ausgedrückt werden durch die Gleichung

$$\Sigma\left[\left(X + S_x + W_x - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y + S_y + W_y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z + S_z + W_z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0,$$

worin δx, δy, δz die Koordinatenänderungen bei einer virtuellen Verrückung sind, X, Y, Z die Seitenkräfte der äufseren Kräfte, S_x, S_y, S_z die der inneren, und W_x, W_y, W_z die der Bahnwiderstände nach den drei Koordinatenachsen.

Diese Gleichung umfafst alle Fälle des Gleichgewichts und der Bewegung **(Grundgleichung der Mechanik).**

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma P\delta s \cos(P, \delta s)$$

ist die virtuelle Arbeit der äufseren Kräfte,

$$\Sigma(S_x\delta x + S_y\delta y + S_z\delta z) = \Sigma S\ \delta s\ \cos(S, \delta s) = -\Sigma S_r\delta l_r \quad \text{(s. S. 165)}$$

ist die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte (bei elastischen Verbindungen der Punkte die virtuelle Formänderungsarbeit),

$$\Sigma(W_x\delta x + W_y\delta y + W_z\delta z) = \Sigma W\delta s \cos(W, \delta s) = -\Sigma\mu N\delta s$$

ist die virtuelle Reibungsarbeit, wenn N die Normalseitenkraft des Bahnwiderstandes ist (s. S. 199).

Ist die Punktgruppe **starr,** so ist die Arbeit der inneren Kräfte $= 0$, desgleichen bei vollkommen glatter Bahn die Reibungsarbeit. Das d'Alembertsche Prinzip erhält dann die Form

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0$$

(bei virtueller Verschiebung, d. h. Verschiebung in den Führungsflächen oder -Linien).

b. Prinzip der lebendigen Kraft und deren Erhaltung.

1. Die lebendige Kraft (oder kinetische Energie) einer Gruppe von Massenpunkten ist die Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen Punkte $\left(\Sigma m\frac{v^2}{2}\right)$.

2. Die Zunahme der lebendigen Kraft bei irgend einer Bewegung der Punktgruppe ist gleich der Arbeit der äufseren Kräfte $+$ Arbeit der inneren Kräfte $+$ Arbeit der Bahnwiderstände (Reibungsarbeit).

Das Prinzip der lebendigen Kraft lautet dann allgemein

$$\Sigma m \frac{v^2}{2} - \Sigma m \frac{v_0^{\,2}}{2} = \Sigma \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (X dx + Y dy + Z dz) +$$

$$\Sigma \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (S_x dx + S_y dy + S_z dz +$$

$$\Sigma \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (W_x dx + W_y dy + W_z dz) \cdot$$

(Bedeutung der Gröfsen s. u. **a.**)

3. Ist die Massengruppe **starr** (starrer Körper), so ist die Arbeit der inneren Kräfte $= 0$. Sind keine Führungen vorhanden oder sind diese vollkommen glatt, so ist auch die Reibungsarbeit $= 0$. Dann ist das Prinzip der lebendigen Kraft

$$\Sigma m \frac{v^2}{2} - \Sigma m \frac{v_0^{\,2}}{2} = \Sigma \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (X dx + Y dy + Z dz).$$

4. Fehlen beim starren Körper die Bahnwiderstände und haben die äufseren Kräfte P eine Potentialfunktion U, so gilt das Prinzip der **Erhaltung** der lebendigen Kraft

$$\Sigma m \frac{v^2}{2} - \Sigma m \frac{v_0^{\,2}}{2} = U - U_0.$$

Ist die Massengruppe **nicht starr,** so gilt das Erhaltungsgesetz, wenn auch die inneren Kräfte eine Kräftefunktion haben

$$\Sigma m \frac{v^2}{2} - \Sigma m \frac{v_0^{\,2}}{2} = U^{(a)} - U_0^{(a)} + U^{(i)} - U_0^{(i)}, \text{ z. B.}$$

Gruppe elektrisch geladener Punkte, auf die von aufsen noch weitere elektrische Kräfte ausgeübt werden, oder unser Planetensystem unter der Einwirkung äufserer Himmelskörper.

c. Schwerpunktsätze.

Aus den Gleichungen für die Koordinaten des Schwerpunktes (s. S. 179) folgt

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Sigma \left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right); \quad m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \Sigma \left(m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right); \quad m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \Sigma \left(m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right),$$

worin $m = \Sigma m_i$ die Gesamtmasse der Punktgruppe bedeutet. Aus den Bewegungsgleichnungen für den einzelnen Punkt

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + S_{xi} + W_{xi} \qquad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + S_{yi} + W_{yi}$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + S_{zi} + W_{zi}$$

folgt unter Beachtung, dafs an der Massenpunktgruppe die inneren Kräfte im Gleichgewicht sind, also

$$\Sigma(S_{x}i) = 0 \qquad \Sigma(S_{y}i) = 0 \qquad \Sigma(S_{z}i) = 0$$

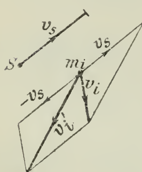
$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma(X + W_x); \quad m\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma(Y + W_y); \quad m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma(Z + W_z),$$

d. h. der Schwerpunkt einer Massenpunktgruppe bewegt sich so, als ob in ihm die Gesamtmasse der Gruppe vereinigt wäre und alle äufseren Kräfte und Bahnwiderstände parallel zu ihren wirklichen Lagen an ihm angriffen. (Prinzip der Bewegung des Schwerpunktes.)

Auf Grund dieses Satzes führt der Schwerpunkt auch den Namen **Massenmittelpunkt.**

Sind keine Führungen vorhanden und sind die an dem Schwerpunkt parallel verschobenen äufseren Kräfte im Gleichgewicht — die äufseren Kräfte in ihren wirklichen Lagen brauchen kein Gleichgewichtsystem zu bilden, dürfen vielmehr ein Kräftepaar ergeben —, so bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig oder bleibt in Ruhe. (Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.)

Abb. 83.



2. Ist v_s die Geschwindigkeit des Schwerpunktes S (Abb. 83), v_i die Geschwindigkeit des Punktes m_i sowie v_i' die Relativ-Geschwindigkeit von m_i in bezug auf den Schwerpunkt, so erhält man die lebendige Kraft der gesamten Gruppe als Summe der lebendigen Kraft des Schwerpunktes (mit der Masse m) und der Summe der den Relativ-Geschwindigkeiten der einzelnen Massenpunkte entsprechenden lebendigen Kräfte, d. h.

$$\Sigma m_i \frac{v_i^2}{2} = m\frac{v_s^2}{2} + \Sigma m_i \frac{(v_i')^2}{2}.$$

d. Prinzip der Flächen.

1. Bildet man die Momente der Beschleunigungskräfte D und der Bewegungsgröfsen mv sämtlicher Massenpunkte einer Gruppe in bezug auf eine beliebige Gerade l (s. S. 161) und wendet auf diese die Betrachtungen u. f. S. 191 an, so ist für die Gerade l

$$\frac{d}{dt}\Sigma(mv_{\mathrm{I}}r_{\mathrm{I}}) = \Sigma M = \Sigma D_{\mathrm{I}}a_{\mathrm{I}},$$

worin D_{I} und mv_{I} die wirksamen Teile von D und mv und a_{I} und r_{I} deren Abstand von l bezeichnen. D ist die Mittelkraft aus P, S und W (s. S. 203). Fehlen die Führungen ($W_i = 0$), so ist, da für die im Gleichgewicht befindlichen Kräfte S die Momentensumme $= 0$ ist,

$$\Sigma D_{\mathrm{I}}a_{\mathrm{I}} = \frac{d}{dt}(\Sigma mv_{\mathrm{I}}r_{\mathrm{I}}) = P_{\mathrm{I}}b_{\mathrm{I}},$$

worin P_{I} die wirksame Seitenkraft von P und b_{I} deren Abstand von l bezeichnen, d. h. die Aenderung der Momentensumme der

Bewegungsgröfsen in einem Zeitteilchen (dt) ist gleich der augenblicklichen Summe der Momente der äufseren Kräfte.

2. Ist die Momentensumme für die äufseren Kräfte $= 0$, indem diese $= 0$ sind, oder alle durch die Gerade l gehen (Sonderfall alle Kräfte parallel l), so ist die Momentensumme der Bewegungsgröfsen und die Summe der auf eine zur Geraden l winkelrechten Ebene projizierten Flächengeschwindigkeiten (s. f. S. 192) unveränderlich. (Prinzip der Flächen.)

Gehen die äufseren Kräfte sämtlich durch einen Punkt (oder sind sie sämtlich $= 0$), so gilt dieser Satz für jede durch den Punkt gelegte Ebene in bezug auf diesen Punkt als Drehpunkt.

II. Bewegung eines starren Körpers.

a. Lebendige Kraft eines starren Körpers.

1. Bei einer **Schiebung** haben alle Punkte des Körpers gleichgrofse und gleichgerichtete Geschwindigkeit v. Die lebendige Kraft ist

$$E = \frac{v^2}{2} \Sigma m_i = m \frac{v^2}{2},$$

wo m die Gesamtmasse des Körpers ist.

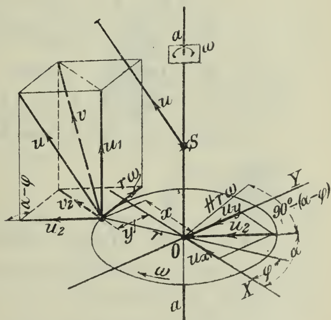
2. Bei einer **Drehung** um eine **feste Achse** mit der Winkelgeschwindigkeit ω hat jedes im Abstande r von der Drehachse befindliche Massenteilchen dm die Geschwindigkeit $v = r\omega$. Demnach ist die lebendige Kraft

$$E = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 \, dm = J \frac{\omega^2}{2}.$$

Der Ausdruck $J = \int r^2 \, dm$, erstreckt über alle Massenteilchen des Körpers, heifst dessen **Trägheitsmoment, bezogen auf die Drehachse** (Näheres s. S. 213 u. f.).

3. Eine **beliebige Bewegung** des Körpers kann durch eine Schiebung mit der Geschwindigkeit u und eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Schwerpunktachse $a - a$, die im allgemeinen nicht mit der Schiebungsrichtung zusammenfällt, ersetzt werden (s. S. 146 und Abb. 84).

Abb. 84.



Die lebendige Kraft ist dann

$$E = m \frac{u^2}{2} + J \frac{\omega^2}{2}.$$

Aus der Abbildung, in der aa winkelrecht zu OX und OY und u_1 parallel aa ist, folgt für die Geschwindigkeit v des Massenteilchens dm im Abstande r von der Drehachse

$$v^2 = u_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2 + r^2\omega^2 - 2 u_2 r \omega \sin(\alpha - \varphi)$$
$$= u^2 + r^2\omega^2 - 2\omega u_y x + 2 \omega u_x y,$$

mithin $E = \int dm \frac{v^2}{2} = m \frac{u^2}{2} + J \frac{\omega^2}{2} - \omega u_y \int x\,dm + \omega u_x \int y\,dm.$

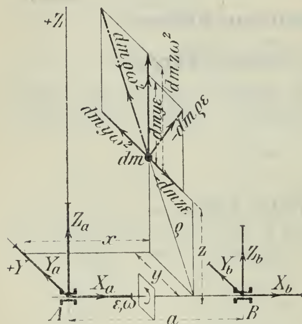
Da die Ebenen (X, a) und (Y, a) Schwerebenen sind, so ist

$$\int x\,dm = 0 \qquad \int y\,dm = 0$$ (s. S. 179).

b. Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

1. Stützwiderstände. Freie Achsen. Die Drehachse des Körpers sei in den Punkten A und B gelagert und das Trägheitsmoment bezogen auf dieselbe J, die gesamte Masse des Körpers m. Die Mittelkraft aller äufseren Kräfte habe die Seitenkräfte X, Y, Z und die Momente M_x, M_y, M_z bezogen auf die Achsen des Koordinatensystems, dessen Lage nach Abb. 85 angenommen sei (s. S. 162).

Abb. 85.



Ist ω die Winkelgeschwindigkeit und ε die Winkelbeschleunigung der Drehung, so hat ein Massenteilchen dm im Abstande ϱ von der Drehachse (s. S. 141) die Tangentialbeschleunigung $\varrho\varepsilon$ und die Normalbeschleunigung $\varrho\omega^2$ und demnach die Trägheitswiderstände $dm\,\varrho\varepsilon$ und $dm\,\varrho\omega^2$, ersterer tangential entgegen der Zunahme der Geschwindigkeit, letzterer radial nach aufsen gerichtet.

Die Seitenkräfte der **Stützwiderstände** in A und B ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen des d'Alembertschen Prinzips.

$$X_a + X_b + X = 0$$
$$Y_a + Y_b + Y - \int dm\,z\varepsilon + \int dm\,y\omega^2 = 0$$
$$Z_a + Z_b + Z + \int dm\,y\varepsilon + \int dm\,z\omega^2 = 0$$
$$M_x - \int y\,dm\,y\varepsilon - \int z\,dm\,z\varepsilon + \int z\,dm\,y\omega^2 - \int y\,dm\,z\omega^2 = 0$$
$$M_y + aZ_b + \int x\,dm\,y\varepsilon + \int x\,dm\,z\omega^2 = 0$$
$$M_z - aY_b + \int x\,dm\,z\varepsilon - \int x\,dm\,y\omega^2 = 0.$$

Daraus folgt

$$X_a + X_b = -X \qquad\qquad M_x = (J_x + J_y)\,\varepsilon = J\varepsilon \text{ (s. S. 215)}$$
$$Y_a + Y_b = -Y + mz_0\varepsilon - my_0\omega^2 \qquad Z_b = (-M_y - J_{xy}\varepsilon - J_{xz}\omega^2) : a$$
$$Z_a + Z_b = -Z - my_0\varepsilon - mz_0\omega^2 \qquad Y_b = (+M_z + J_{xz}\varepsilon - J_{xy}\omega^2) : a$$

worin x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes, $a = \overline{AB}$ die Entfernung der Stützpunkte und J_{xy} bzw. J_{xz} die Zentrifugalmomente (s. S. 215) sind.

Die Seitenkräfte X_a und X_b sind im allgemeinen einzeln nicht bestimmbar (s. S. 107 u. f.); ist aber z. B. B ein Halslager (nur Führung), A ein Spurlager (Führung und Stützung), so ist $X_b = 0$, folglich $X_a = -X$.

Sind die winkelrecht zur Drehachse gerichteten Seitenkräfte der Stützwiderstände $Y_a = Y_b = Z_a = Z_b = 0$, so heifst die Drehachse eine **freie Achse.** Dies ist z. B. der Fall, wenn keine äufseren Kräfte vorhanden sind ($X = Y = Z = 0$, $M_x = M_y = M_z = 0$), der Schwerpunkt in der Drehachse liegt ($y_0 = 0$, $z_0 = 0$) und die Drehachse eine Hauptträgheitsachse ist (s. S. 214) ($J_{xy} = J_{xz} = 0$).

Die Zusammensetzung der Seitenkräfte der radial auftretenden Trägheitswiderstände, der **Zentrifugalkraft** $dm\varrho\omega^2$ der Massenteilchen, ergibt

in der Y-Richtung die Seitenkraft $C_y = m y_0 \omega^2$
in der Z-Richtung die Seitenkraft $C_z = m z_0 \omega^2$

(wie wenn die Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt ist).

C_y liegt in der Entfernung $x_1 = (J_{xy}) : (m x_0)$ von der yz-Ebene,
$z_1 = (J_{yz}) : (m x_0)$ von der xy-Ebene,
C_z liegt in der Entfernung $x_2 = (J_{zx}) : (m z_0)$ von der yz-Ebene,
$y_2 = (J_{yz}) : (m z_0)$ von der zx-Ebene.

Im allgemeinen ergeben C_x und C_y wegen $x_1 \gtrless x_2$ keine Einzelkraft; ist aber $x_1 = x_2$, so folgt die **Zentrifugalkraft** des ganzen Körpers zu

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = m r_0 \omega^2,$$

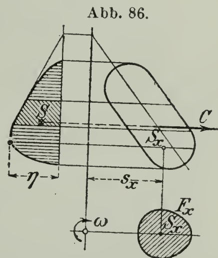
worin r_0 der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse ist.

Im allgemeinen greift C **nicht** im Schwerpunkt an.

Sonderfall. Der Körper habe eine durch die Drehachse gehende Symmetrieebene. Ein Schnitt winkelrecht zur Drehachse habe den Flächeninhalt F_x und den Schwerpunktabstand s_x von der Drehachse. Trägt man in der aus der Abb. 86 ersichtlichen Weise die Produkte $F_x s_x = \eta$ als Ordinaten einer Kurve auf, so erhält man das **Diagramm der Zentrifugalkräfte.** Durch den Schwerpunkt S der von der Kurve und der Achse eingeschlossenen Fläche geht die Zentrifugalkraft des Körpers.

(Anwendung zur Bestimmung der Zentrifugalkräfte der Regulatorstangen. Das Diagramm wird bei unveränderlichem Querschnitt ein Trapez, s. das mittlere Stück in Abb. 86.)

Abb. 86.



2. Aus der unter 1. aufgeführten Gleichung

$$M_x = J\varepsilon = J\frac{d\omega}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

folgen die **Bewegungsgesetze** für die Drehung. M_x ist das Moment der äufseren Kräfte, bezogen auf die Drehachse (s. S. 162). Das Prinzip der Erhaltung der kinetischen Energie ergibt

$$A = \int_0^{\varphi} M\,d\varphi = J\left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2}\right).$$

3. **Reduktion der Massen.** Schreibt man statt Gleichung (1)

$$\frac{M_x}{r} = \frac{J}{r^2} r\varepsilon = P = m_r p_t,$$

worin p_t die Tangentialbeschleunigung am Halbmesser r und P die dem Moment M_x entsprechende Umfangskraft bedeutet, so heifst $m_r = J : r^2$ die auf den Halbmesser r **reduzierte Masse** des Körpers.

Unter **Schwungmoment** (GD^2) eines Körpers versteht man das Produkt aus seinem Gewicht (G in kg) und dem Quadrat des Trägheitsdurchmessers D (in m, $D = 2\sqrt{J : m}$, $m = G : g$, $g = 9{,}81$ m/sk², Beschleunigung durch die Schwere). Aus dem Schwungmoment folgt die auf den Halbmesser r reduzierte Masse $m_r = \frac{(GD^2)}{4 r^2 g}$.

Macht ein Körper mit dem Trägheitsmoment J oder dem Schwungmoment (GD^2) n_1 Uml./min, so ist seine auf den Halbmesser r und eine Drehachse mit n_2 Uml./min reduzierte Masse

$$m_r = \frac{J}{r^2}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \frac{(GD^2)}{4 r^2 g}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2.$$

(Anwendung: Reduktion der Motormassen, Vorgelege usw. bei Kranen, Winden usw. auf die Seilmittellinie zur Bestimmung der Massendrücke beim Anfahren und Bremsen.)

4. Die **Arbeit** bei der Drehung um den Winkel φ ist

$$A = \int_0^\varphi M\, d\varphi = \int_0^s P\, ds \qquad \begin{cases} s = r\varphi \\ P = M : r. \end{cases}$$

5. Die augenblickliche **Leistung** ist

$$L = M\omega = Pv.$$

Macht der Körper bei gleichförmiger Drehung n Uml./min, so ist

$$N = M\frac{2\pi n}{60 \cdot 75} = Pr\frac{2\pi n}{4500}$$

$$M = Pr = \frac{60 \cdot 75}{2\pi}\,\frac{N}{n} = 716{,}197\,\frac{N}{n},$$

worin N die Leistung in PS, M das Drehmoment in mkg, P in kg, r in m.

$\frac{N}{n}$ heifst **Leistungs-** oder **Effektquotient.**

6. Bezeichnet bei einem **physischen Pendel** J das Trägheitsmoment, bezogen auf die Drehachse, m die Masse, e den Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse, so heifst $l = \frac{J}{me}$ die **reduzierte Pendellänge.** Das physische Pendel schwingt in derselben Weise wie ein mathematisches Pendel von der Masse m am Faden von der Länge l (s. S. 201). Trägt man auf der Verbindungslinie Aufhängungspunkt — Schwerpunkt vom ersteren aus die Strecke l ab, so heifst der Endpunkt der Schwingungsmittelpunkt des Pendels, eine durch ihn zur Aufhängungs- (Dreh-) Achse parallele Gerade die Schwingungsachse. Vertauscht man Aufhängungsachse und Schwingungsachse, so bleibt die Schwingungszeit dieselbe.

Man benutzt das physische Pendel zur **Bestimmung der Trägheitsmomente** von unregelmäfsig zusammengesetzten Körpern oder Querschnitten.*) Ist n die Anzahl der einfachen Schwingungen/min, G in kg das Gewicht und e in **cm** die Entfernung zwischen Schwerpunkt und Drehachse, so ist das auf die Drehachse bezogene Trägheitsmoment des Körpers oder Querschnittes

$$J = \frac{60^2}{\pi^2} \frac{G e}{n^2} = 36\,476 \frac{G e}{n^2}$$

und das Trägheitsmoment für die parallele Schwerachse

$$J_s = 36476 \frac{G e}{n^2} - \frac{G}{g} e^2.$$

Glockenstühle. Ist G das Gewicht einer in gewöhnlicher Weise aufgehängten Glocke nebst Klöppel, so ist nach Köpcke der beim Läuten auftretende

gröfste wagerechte Schub $H_{max} = 1{,}56\,G$ bei 50° Ausschlag und
gröfste lotrechte Druck $V_{max} = 3{,}11\,G$ bei 0° Ausschlag.

Bei H_{max} ist $V = \sim G$.

Vorausgesetzt ist ein gröfster Ausschlag von 110°.

c. Drehung eines Körpers um eine veränderliche Achse.

Berührt ein Körper während seiner Bewegung einen ruhenden Körper, so kann die Bewegung ein Rollen, oder ein Gleiten, oder beides zugleich sein. Die Bewegung läfst sich in allen den Fällen ermitteln, wo es möglich ist, sie in eine Drehung um eine im bewegten Körper festliegende Achse und in eine fortschreitende Bewegung (Schiebung) oder in zwei Drehungen um in ihrer Lage bestimmte Achsen zu zerlegen (s. S. 146 u. f.).

Beispiel. Ein homogener Kreiszylinder von der Masse m, dem Trägheitsmoment J, bezogen auf seine Achse, und dem Halbmesser r rollt eine schiefe Ebene herunter (Abb. 87). Normalwiderstand der Bahn $= N = G \cos\alpha$; Tangential-Widerstand der gleitenden Reibung $N_t \leq \mu_0 N$, bezw. $= \mu N$ (vrgl. S. 226), Widerstandsmoment der rollenden Reibung $= Nf$ (vrgl. S. 231).

Die Bewegung setzt sich zusammen aus einer Schiebung parallel der schiefen Ebene mit der Beschleunigung des Schwerpunktes $= p_s$ und einer Drehung um die im Körper feste Zylinderachse mit der Winkelbeschleunigung ε. Somit ist nach S. 192 und 209

$$P = G \sin\alpha - N_t; \text{ woraus } \quad p_s = \frac{G \sin\alpha - N_t}{m} = g \sin\alpha - \frac{N_t}{m} \text{ und}$$

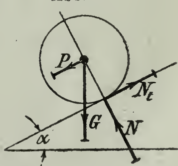
$$M = N_t r - Nf; \text{ woraus } \quad \varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{N_t r - Nf}{J}.$$

Fall I. Soll reines Rollen stattfinden, so mufs die Beschleunigung der augenblicklich berührenden Mantellinie $p_s - \varepsilon r = 0$ sein,

$$\text{also } g \sin\alpha - \frac{N_t}{m} = \frac{N_t r^2 - N f r}{J}$$

$$N_t = G \cos\alpha \cdot \frac{J \operatorname{tg}\alpha + m r f}{J + m r^2} = \frac{1}{3} G \cos\alpha \left(\operatorname{tg}\alpha + 2 \frac{f}{r}\right)$$

Abb. 87.



*) S. Kalep, Bestimmung des Trägheitsmomentes sich drehender Maschinenteile (Trommeln, Riemenscheiben, Schwungräder), Civilingenieur 1892, Heft 5 S. 380.

und $N_t \leqq \mu_0 N$, also

$$\frac{1}{3} G \cos\alpha \left(\operatorname{tg}\alpha + 2\frac{f}{r}\right) \leqq \mu_0 G \cos\alpha, \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \leqq 3\mu_0 - 2\frac{f}{r}.$$

Dann wird

$$P = \frac{2}{3} G \left(\sin\alpha - \frac{f}{r}\cos\alpha\right); \quad p_s = \frac{2}{3} g \left(\sin\alpha - \frac{f}{r}\cos\alpha\right); \quad \varepsilon = \frac{p_s}{r}.$$

Für die Bewegung eines Zylinders auf wagerechter ebener Bahn ($\alpha = 0$) lautet die Bedingung reinen Rollens

$$\text{Zugkraft } Z \leqq G \left(3\mu_0 - 2\frac{f}{r}\right),$$

wobei $\mu_0 > \frac{2}{3}\frac{f}{r}$ sein mufs.

Fall II. Ist $\operatorname{tg}\alpha > 3\mu$, so erfolgt gleichzeitig Rollen und Gleiten.

Es wird $\qquad N_t = \mu N = \mu G \cos\alpha; \qquad P = G\sin\alpha - \mu G \cos\alpha,$

$$p_s = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha); \quad \varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{G\cos\alpha}{J}\left(\mu r - f\right) = \frac{2g\cos\alpha}{r}\left(\mu - \frac{f}{r}\right).$$

d. Drehung eines Körpers um einen festen Punkt.

Verschiebt man die äufseren, angreifenden Kräfte nach dem festen Drehpunkt, so wird die Mittelkraft durch den Stützwiderstand aufgehoben. Das durch die Verschiebung der Kräfte entstehende Mittel-Kräftepaar M erzeugt eine Winkelbeschleunigung ε um eine Achse, die im allgemeinen nicht mit der Achse des Kräftepaares zusammenfällt. Nur wenn die Achse des Kräftepaares eine durch den festen Punkt des Körpers gehende Hauptträgheitsachse (s. S. 214) ist, fallen die Achsen der Drehung und des Kräftepaares zusammen und es ist

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{J},$$

worin J das Trägheitsmoment bezogen auf die Drehachse ist.

Bei allgemeiner Lage des Kräftepaares ist die Drehachse die Verbindungslinie des Schwerpunktes mit dem Berührungspunkt einer Berührungsebene, die parallel zur Kräftepaar-Ebene an das Trägheitsellipsoid (s. S. 214) für den festen Punkt gelegt wird.

e Bewegung eines freien Körpers.

Die Bewegung setzt sich zusammen aus einer Schiebung mit der Schwerpunktbeschleunigung p_s, die sich nach S. 192 bestimmt, und einer Drehung um eine Schwerachse.

Für die Winkelbeschleunigung gilt sinngemäfs dasselbe wie bei der Bewegung um einen festen Drehpunkt (s. u. **d.**), an dessen Stelle der Schwerpunkt tritt und an die Stelle des Trägheitsellipsoides für den Drehpunkt das Zentralellipsoid (s. S. 214).

D. Trägheits- und Zentrifugalmomente.

I. Sätze über Trägheits- und Zentrifugalmomente und deren Bestimmung.

a. Allgemeines.

1. Die Summe der Produkte aus den Massenteilchen eines Körpers dm und dem Quadrat ihrer Entfernung r von einer angenommenen Achse heifst das **Trägheitsmoment J des Massenkörpers,** bezogen auf diese Achse

$$J = \int r^2 \, dm.$$

Das Trägheitsmoment ergibt sich stets als positive Gröfse.

Mifst man die Längen in **cm**, die Massen in **kg sk²/cm**, so erhält man das Massen-Trägheitsmoment in **cm kg/sk²** [im C-G-S-System (s. S. 156) in gr cm²].

Setzt man $J = m\varrho^2$, wo m die Gesamtmasse des Körpers ist, so heifst ϱ der **Trägheitshalbmesser** (Trägheitsarm) der Masse m.

Besteht ein Körper (Fläche, Linie) aus mehreren (n) Teilen, so ist sein Trägheitsmoment gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Teile, bezogen auf dieselbe Achse

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots + J_n.$$

Sind diese Teile homogen, einander gleich und symmetrisch zur Achse gelegen, so ist

$$J_1 = J_2 = J_3 = \ldots = J_n = (J : n).$$

2. Trägheitmomente für parallele Achsen.

Ist J_s das Trägheitsmoment eines Körpers von der Masse m, bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse, J das Trägheitsmoment, bezogen auf eine im Abstande e parallele Achse, so ist

$$J = J_s + me^2 \qquad J_s = J - me^2.$$

Bei parallelen Achsen hat also die Schwerpunktachse das kleinste Trägheitsmoment.

Sind J_1 und J_2 die Trägheitsmomente zweier Körper, bezogen auf zwei parallele Schwerachsen, so ist das Trägheitsmoment des aus beiden Körpern zusammengesetzten Körpers für die neue parallele Schwerachse derselben

$$J = J_1 + J_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} e^2,$$

worin e den Abstand der parallelen Schwerachsen der beiden Körpermassen m_1 und m_2 bedeutet.

3. Das Massenteilchen dm habe die Koordinaten x, y, z, eine beliebige, durch den Koordinatenanfang gehende Achse bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ. Dann ist das Trägheitsmoment in bezug auf diese Achse

$$J = \cos^2\alpha \int (y^2 + z^2)\, dm + \cos^2\beta \int (z^2 + x^2)\, dm + \cos^2\gamma \int (x^2 + y^2)\, dm$$
$$- 2 \cos\beta \cos\gamma \int yz\, dm - 2 \cos\gamma \cos\alpha \int zx\, dm - 2 \cos\alpha \cos\beta \int xy\, dm.$$

Setzt man

$$\int (y^2 + z^2)\, dm = A \qquad \int (z^2 + x^2)\, dm = B \qquad \int (x^2 + y^2)\, dm = C$$
$$\int yz\, dm = D \qquad \int zx\, dm = E \qquad \int xy\, dm = F,$$

so sind A, B, C die Trägheitsmomente, bezogen auf die Koordinatenachsen; D, E, F heifsen die **Zentrifugalmomente** (Begründung dieser Benennung s. S. 208) in bezug auf die Koordinatenebenen xy und zx, yz und xy und zx und yz.

Das Zentrifugalmoment kann positiv, null oder negativ sein.

Mifst man die Längen in **cm**, die Massen in **kg sk²/cm**, so erhält man das (Massen-) Zentrifugalmoment in **cm kg/sk²** (im C-G-S-System in gr cm²).

Das Trägheitsmoment wird

$$J = A \cos^2\alpha + B \cos^2\beta + C \cos^2\gamma - 2D \cos\beta \cos\gamma$$
$$- 2E \cos\gamma \cos\alpha - 2F \cos\alpha \cos\beta.$$

Trägt man auf der Achse vom Koordinatenanfang aus die Strecke $\varrho = 1 : \sqrt{J}$ ab, so erhält man für die Koordinaten ξ, η, ζ des Endpunktes von ϱ die Gleichung

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\zeta\xi - 2F\xi\eta = 1,$$

d. i. ein Ellipsoid mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfang O (Poinsotsches **Trägheitsellipsoid** für den Punkt O).

Im Sonderfall geht das Trägheitsellipsoid in ein Umdrehungsellipsoid oder eine Kugel über.

Für jeden Punkt des Raumes gibt es im allgemeinen drei mit den Achsen des Trägheitsellipsoides zusammenfallende, zueinander winkelrechte Achsen, für die das Trägheitsmoment einen gröfsten oder kleinsten Wert annimmt; sie heifsen die **Hauptträgheitsachsen**, die zugehörigen Trägheitsmomente die **Hauptträgheitsmomente.**

Hat ein Körper eine Symmetrieebene, so ist jede Winkelrechte zu dieser eine Hauptträgheitsachse. Hat ein Körper eine Symmetriachse, so ist diese eine der drei Hauptträgheitsachsen für jeden ihrer Punkte.

Das Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt heifst **Zentralellipsoid.**

4. Nimmt man die Achsen des Trägheitsellipsoides als Koordinatenachsen, so ist die Gleichung derselben

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

worin A, B, C die Hauptträgheitsmomente sind.

Die Zentrifugalmomente D, E, F bezogen auf je zwei der Hauptträgheitsachsen sind $= 0$.

Das Trägheitsmoment J für eine Achse, welche die Winkel α, β, γ mit den Hauptträgheitsachsen einschliefst, ist

$$J = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

5. Das **Trägheitsmoment** J **eines geometrischen Körpers** ergibt sich aus dem des Massenkörpers, wenn an Stelle des Massenteilchens dm das **Volumteilchen** dv gesetzt wird:

$$J = \int r^2\, dv.$$

Eine entsprechende Bedeutung haben die **Trägheitsmomente geometrischer Flächen** (statt dm das Flächenteilchen df) und **Linien** (statt dm das Längenteilchen dl).

Mifst man die Länge in **cm**, demnach die Fläche in **qcm** und das Volumen in **ccm**, so erhält man das Trägheitsmoment einer geometrischen Linie in **cm**[3], einer geometrischen Fläche in **cm**[4], eines geometrischen Körpers in **cm**[5].

6. Trägheits- und Zentrifugalmomente ebener Flächen.

α) Das Trägheitsmoment eines ebenen Flächenstückes F, bezogen auf eine in der Ebene liegende Achse heifst das **achsiale (äquatoriale) Trägheitsmoment** von F, bezogen auf diese Achse; das Trägheitsmoment, bezogen auf eine zur Ebene winkelrechte Achse heifst das **polare Trägheitsmoment** J_p von F, bezogen auf den Pol O, den Schnittpunkt der Achse und der Ebene.

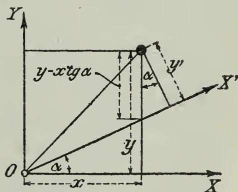
Wählt man O zum Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatennetzes, so ergibt sich für das polare Trägheitsmoment

$$J_p = \int r^2\, df = \int x^2\, df + \int y^2\, df = J_y + J_x.$$

J_x und J_y sind die achsialen Trägheitsmomente von F, bezogen auf die x- und die y-Achse.

β) Der Wert des **achsialen** Trägheitsmomentes ändert sich nicht, wenn die Fläche F oder Teile derselben parallel zur Achse verschoben werden; der des **polaren** ändert sich nicht, wenn F oder Teile davon um den Pol gedreht werden.

Abb. 88.



γ) Achsiale Trägheitsmomente für parallele Achsen s. unter **2.** S. 213, wo statt m die Fläche F zu setzen ist.

δ) Achsiale Trägheitsmomente für Achsen durch einen Punkt. Bezogen auf eine mit der x-Achse den Winkel α bildende Achse OX' (Abb. 88) wird das achsiale Trägheitsmoment

$$J_\alpha = \int (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2\, df = J_x\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha,$$

worin $J_{xy} = \int xy\, df$ das **Zentrifugalmoment** von F, bezogen auf die x- und y-Achse ist.

Trägt man auf der Achse O[illegible] die Strecke $\varrho = 1 : \sqrt{J\alpha}$ vom Nullpunkt aus ab, so erhält man für die Koordinaten ξ, η des Endpunktes von ϱ die Gleichung

$$J_x \xi^2 + J_y \eta^2 - 2\, J_{xy}\, \xi\, \eta = 1,$$

d. i. die Gleichung einer Ellipse, der **Trägheitsellipse,** mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt.

Die Winkel α_0 und $90^0 + \alpha_0$, welche die zueinander winkelrechten Ellipsenachsen, die **Hauptträgheitsachsen,** mit den Achsen des Koordinatennetzes einschliefsen, sind zu bestimmen aus

$$\operatorname{tg} 2\,\alpha_0 = \frac{2\, J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Die Trägheitsmomente für diese Achsen, die **Hauptträgheitsmomente,** sind

$$\left.\begin{matrix} J_{\max} = A \\ J_{\min} = B \end{matrix}\right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_x}{2}\right)^2 + J_{xy}{}^2}.$$

Die Achse für $J_{\max}$ heifst **erste,** die für $J_{\min}$ **zweite Hauptachse.**

Wählt man die Trägheitshauptachsen zu Koordinatenachsen, so wird das Trägheitsmoment für eine unter dem Winkel α gegen die x-Achse geneigte Gerade

$$J\alpha = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha$$

und die Gleichung der Trägheitsellipse $A\xi^2 + B\eta^2 = 1$, da für die Trägheitshauptachsen das Zentrifugalmoment $J_{xy} = 0$ ist.

Die Trägheitsellipse für den Schwerpunkt von F heifst **Zentralellipse.**

ε) Setzt man $A = Fa^2$, $B = Fb^2$, $J\alpha = Fr^2$, so heifsen a und b die **Trägheitshalbmesser** (-arme) für die Hauptachsen, r der Trägheitshalbmsseer für die Achse unter dem Winkel α.

Zieht man im Abstande r von der unter dem Winkel α gegen die x-Achse geneigten Achse eine Parallele zu dieser und macht dasselbe für alle durch den Punkt O gehenden Achsen, so erhält man die Tangenten einer **zweiten** (der Culmannschen) **Trägheitsellipse,** die besonders in der graphischen Statik vielfach Verwendung findet.

Erste und zweite Trägheitsellipse sind ähnlich und ähnlich gelegen, da das Verhältnis der kleinen und grofsen Achsen bei beiden $= \sqrt{A} : \sqrt{B}$ ist.

η) Trägt man auf der durch den Schwerpunkt S gehenden ersten Hauptachse von S aus beiderseits die Länge c, bestimmt aus

$$A - B = Fc^2,$$

ab, so erhält man die **Festpunkte** F_1 und F_2 der Fläche F. Für diese haben die Trägheitsmomente, bezogen auf alle durch sie gehenden Achsen denselben Wert A, die Trägheitsellipse ist sonach ein Kreis.

ζ) Berechnung des Zentrifugalmomentes J_{xy} für rechtwinklige Achsen. Bezieht sich J'_{xy} auf zwei rechtwinklige Schwer-

achsen SX' und SY' einer ebenen Fläche F, so ist J_{xy} für zwei neue, um ξ, η parallel verschobene Achsen OX und OY

$$J_{xy} = J'_{xy} + F\xi\eta.$$

Da für die Hauptachsen eines Rechtecks (als Symmetrieachsen) $J'_{xy} = 0$ ist, so folgt für Flächen, die aus einzelnen Rechtecken f_1, f_2, f_3 . . . . mit parallelen Seiten gebildet sind, bezogen auf zwei mit den Rechteckseiten parallelen Achsen

$$J_x = \Sigma f\xi\eta.$$

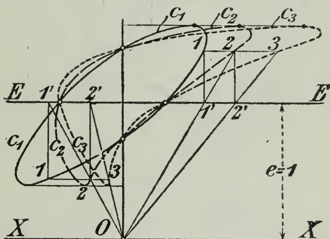
Zerlegt man beliebige Flächen in schmale Streifen f, parallel zu einer Achse OX oder OY, so kann man sie als Rechtecke auffassen und erhält

$$J_{xy} = \int xy\, df \sim \Sigma f\xi\eta.$$

b. Bestimmung der Trägheitsmomente ebener Flächenstücke.*)

1. Verfahren von Nehls.**) Zur Achse XX, für die das Trägheitsmoment der von der Linie C_1 begrenzten Fläche F bestimmt werden soll, zieht man im Abstande $e = 1$ die Parallele $E - E$ (Abb. 89). Die Winkelrechte $1'1$ auf EE liefert die Gerade $O\,1'\,2$ und das Lot $2'\,2$ die Gerade $O\,2'\,3$ usw. (Punkt O beliebig auf XX). Die von der Kurve c_2 umschlossene Fläche stellt das statische Moment von F, bezogen auf XX dar, die von der Kurve c_3 umschlossene Fläche das gesuchte Trägheitsmoment.

Abb. 89.



2. Verfahren von Mohr. Man zerlegt die Fläche F durch zur Achse $Z - Z$ parallele Schnitte in so schmale Streifen, dafs diese als Rechtecke oder Trapeze aufgefafst werden können, und verwandelt dieselben in Rechtecke mit derselben Grundlinie a und den Höhen h_1, h_2, h_3 . . . (s. S. 177 u. Abb. 90, S. 218). Man betrachtet diese Höhen als parallel zur Achse wirkende, in den Schwerpunkten der Streifen angreifende Kräfte und zeichnet dazu Kräfte- und Seileck mit der Polweite a_1 (s. S. 170 u. f.). Die zwischen den beiden äufsersten Seilstrahlen (die sich nach S. 180 auf einer Schwerachse $X - X$ schneiden) und dem Seileck eingeschlossene Fläche sei $= F_0$; es ist dann das Trägheitsmoment, bezogen auf die Schwerpunktachse $X - X$: $J_x \sim 2\,a\,a_1\,F_0$,

---

*) Darstellung der Trägheitsmomente von Flächen und Körpern durch die Inhalte parabolisch begrenzter Körper s. Holzmüller, Ingenieur-Mathematik, Bd. I; u. Bantlin, Z. d. V. d. I. 1896 S. 950 u. f.

**) Vrgl. Chr. Nehls, Graphisch-mechanische Bestimmung von statischen und Trägheitsmomenten, Deutsche Bauztg. und Civilingenieur 1874; ders., Ueber graphisch-mechanisches Integrieren, Civilingenieur 1875; ders., Ueber graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik, Dresden 1877, G. Kühtmann. Ferner Aufsätze von Chr. Nehls in der Zeitschr. f. Bauwesen 1879 u. 1889.

woraus nach S. 215 das Trägheitsmoment für die $Z-Z$-Achse zu bestimmen ist. Man erhält J_x um so genauer, je schmaler man die einzelnen Streifen wählt, wodurch das Seileck in die gestrichelte Kurve übergeht, welche das Seileck in den durch die Schnitte getroffenen Punkten berührt.

Durch Einzeichnen der Kurve in das Seileck unter Beachtung dieser Beziehung kann man die Fläche F_0 völlig genau genug bei Annahme weniger Schnitte bestimmen (vrgl. Abb. 90).

3. Verfahren von Culmann. Fafst man die von den Seilstrahlen auf der XX-Achse abgeschnittenen Strecken b_1, b_2, b_3 (s. u. **2.** und Abb. 90) als Parallelkräfte auf, die in den entsprechenden Schwerpunkten der Teilflächen angreifen, und zeichnet mit der Polweite a_2 ein zweites Kräfte- und Seileck, so schneiden die beiden äufsersten Seilstrahlen auf $X-X$ eine Strecke i_x ab, für die

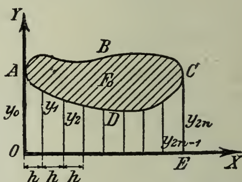
$$J_x \sim a\, a_1\, a_2\, i_x.$$

Abb. 90.

J_x weicht vom wahren Wert um ebensoviel ab wie F_0 von der zwischen den äufsersten Seilstrahlen und der Kurve liegenden Fläche (s. u. **2.**).

4. Rechnerisch ergibt sich das Trägheitsmoment eines beliebigen Flächenstücks F_0 (Abb. 91) als Unterschied der Trägheitsmomente der beiden Teile (s. S. 213) $ABCEO$ und $ADCEO$. Für $ADCEO$ ist entsprechend der Simpsonschen Regel (S. 121) angenähert

Abb. 91.



$$J_x = \tfrac{1}{9}\, h\, [y_0^3 + 4\, y_1^3 + 2\, y_2^3 + 4\, y_3^3 + \ldots\ldots + 4\, y_{2n-1}^3 + y_{2n}^3]$$
$$J_y = \tfrac{1}{3}\, h^3\, [1^2 . 4\, y_1 + 2^2 . 2\, y_2 + 3^2 . 4\, y_3 + 4^2 . 2\, y_4 + \ldots\ldots + (2\,n-1)^2\, 4\, y_{2n-1} + (2\,n)^2\, y_{2n}].$$

Entsprechend ergibt sich das Trägheitsmoment für $ABCEO$.

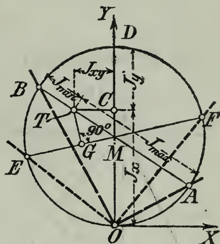
c. Trägheitskreis von Mohr-Land.*)

Sind für zwei rechtwinklige Achsen OX und OY (Abb. 92) die Trägheitsmomente Jx und Jy und das Zentrifugalmoment Jxy gegeben,

*) S. Civilingenieur 1887 S. 43 und 1888 S. 123 (Sonderabdruck durch A. F. Felix, Leipzig) u. Z. f. B. S. 550, Sonderabdruck durch Wilh. Ernst & Sohn, Berlin).

so mache man $OC = J_x$, $CD =$ [illegible]$T \perp OY$ und $= J_{xy}$. Der über $OD = J_x + J_y = J_p$ (dem [illegible]en Trägheitsmoment, bezogen auf O) als Durchmesser beschriebene Kreis mit dem Mittelpunkt M heifst der **Trägheitskreis** für den Punkt O als Pol; der Punkt T heifst **Trägheitshauptpunkt.** Der durch T gehende Durchmesser liefert die beiden Trägheitshauptachsen OA mit $J_{\max} = TA$ und OB mit $J_{\min} = TB$.

Abb. 92.



Für zwei beliebige aufeinander senkrecht stehende Achsen, z. B. OE und OF, liefert das Lot TG von T auf den Durchmesser EF das Zentrifugalmoment und die Strecken EG bzw. FG die Trägheitsmomente, bezogen auf OE bzw. OF.

II. Trägheitsmomente technisch wichtiger Linien, Flächen und Körper.

(Ausführlichere Angaben über Trägheitsmomente üblicher Querschnittformen s. im Abschn. IV., Festigkeitslehre unter Biegungsfestigkeit, sowie im Abschn. V., Stoffkunde, bei den deutschen Normalprofilen.)

Im folgenden bedeutet m die Gesamtmasse des Gebildes. Es sind **homogene Gebilde** vorausgesetzt, so dafs $m = \gamma V : g$, wo γ das spezifische Gewicht des Körperstoffes, V den Rauminhalt des Körpers und g die Fallbeschleunigung bezeichnet.

Der Zeiger bei J bezeichnet in den folgenden Angaben die Achse, auf die das Trägheitsmoment J bezogen ist. J' bedeutet überall ein polares Trägheitsmoment.

1. Gerade Strecke von der Länge $2l$, deren Mitte auf der Achse X liegt, und die mit der Achse den Winkel α bildet,

$$J_x = {}^1\!/_3 m\,(l \sin\alpha)^2 = {}^2\!/_3 l^3 \sin^2\alpha.$$

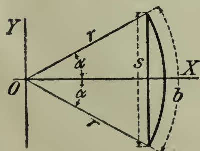
Für $\alpha = 90^0$ (d. h. $2l$ senkrecht zur Achse)

$$J_x^{(1)} = {}^1\!/_3\, m\, l^2 = {}^2\!/_3\, l^3.$$

Für eine gerade Strecke l, deren einer Endpunkt auf der Achse X liegt, ist entsprechend

$$J_x = {}^1\!/_3\, m\,(l \sin\alpha)^2 = {}^1\!/_3\, l^3 \sin^2\alpha \quad \text{und} \quad J_x^{(1)} = {}^1\!/_3\, m l^2 = {}^1\!/_3 l^3.$$

Abb. 93.



2. Kreislinie: polares Trägheitsmoment, bezogen auf den Mittelpunkt $J_o' = m r^2 = 2\pi r^3$, achsiales in bezug auf einen Durchmesser $J_d = {}^1\!/_2\, J_o'$.

Kreisbogen. (Abb. 93.)

$$J_x = {}^1\!/_2\, m r^2 \left(1 - \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\operatorname{arc}\alpha}\right)$$

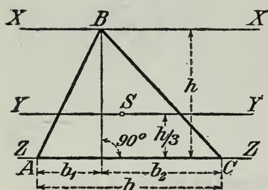
$$J_y = {}^1\!/_2\, m [illegible] + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{arc}\alpha}\Big).$$

$$J_m' = J_x + J_y = m r^2$$

$$\left(m = 2r \operatorname{arc}\alpha = 2r\,\frac{\pi\alpha^0}{180^0}\right)$$

3. Dreieckfläche. S ist der Schwerpunkt des Dreiecks (Abb. 94).

Abb. 94.



$$J_x = {}^1\!/_2\, m h^2 = {}^1\!/_4\, b h^3$$
$$J_y = {}^1\!/_{18}\, m h^2 = {}^1\!/_{36}\, b h^3$$
$$J_z = {}^1\!/_6\, m h^2 = {}^1\!/_{12}\, b h^3$$
$$J'_B = {}^1\!/_4\, b h^3 + {}^1\!/_{12}\,(b_1^3 + b_2^3)\,h$$
$$J'_S = {}^1\!/_{36}\, b h^3 + {}^1\!/_{12}\,(b_1^3 + b_2^3)\,h - {}^1\!/_{18}\, b h\,(b_2 - b_1)^2.$$

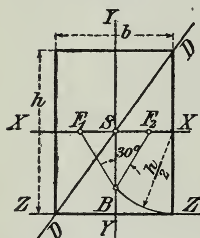
4. Viereckfläche. (Vrgl. **2.**, S. 126, Abb. 31)

$$J_D = {}^1\!/_{12}\, D\,(h_1^3 + h_2^3).$$

Parallelogramm. (Bezeichnungen s. S. 126 und **2.**)

$$J_D = {}^1\!/_{48}\, D\,(D_1 \sin\varphi)^3$$

Abb. 95.



Rhombus. $J_D = {}^1\!/_{48}\, D D_1^3.$

Rechteck. (Abb. 80) $J_D = {}^1\!/_{48}\, D^4 \sin^3\varphi.$

$$J_x = {}^1\!/_{12}\, m h^2 = {}^1\!/_{12}\, b h^3$$
$$J_y = {}^1\!/_{12}\, m b^2 = {}^1\!/_{12}\, b^3 h$$
$$J'_S = {}^1\!/_{12}\, m\,(b^2 + h^2) = {}^1\!/_{12}\,(b^3 h + b h^3)$$
$$J_z = {}^1\!/_3\, m h^2 = {}^1\!/_3\, b h^3.$$

Für eine beliebige Achse ergibt sich das Trägheitsmoment mittels der Festpunkte F_1 und F_2 nach η, S. 216. Man findet F_1 und F_2 nach Abb. 95, indem man $XB = {}^1\!/_2\, h$ macht und BF_1 und BF_2 unter 30^0 gegen YY zieht.

Quadrat. Seitenlänge $= h$. Es ist

$$J_x = J_y = {}^1\!/_{12}\, h^4 \qquad J'_S = {}^1\!/_6\, h^4 \qquad J_z = {}^1\!/_3\, h^4 \qquad J_D = {}^1\!/_{12}\, h^4 = J_x.$$

5. Regelmäfsiges Vieleck. Ist m der Flächeninhalt, a die Seite, R der Halbmesser des umschriebenen, r der des eingeschriebenen Kreises, so ist für eine beliebige, durch den Mittelpunkt O gehende Aequator-Achse

$$J_x = {}^1\!/_{24}\, m\,(6R^2 - a^2) = {}^1\!/_{48}\, m\,(12 r^2 + a^2)$$

ferner $J_o' = 2 J_x$ $\qquad (m = F$ s. S. 126.)

6. Kreisfläche. Durchmesser $= d$. Es ist für einen Durchmesser als x-Achse

$$J_x = {}^1\!/_4\, m r^2 = {}^1\!/_4\, \pi r^4 = {}^1\!/_{64}\, \pi d^4 \qquad J_o' = {}^1\!/_2\, m r^2 = {}^1\!/_2\, \pi r^4.$$

Halbkreisfläche: Es ist für den begrenzenden Durchmesser als x-Achse

$$J_x = J_y = {}^1\!/_4\, m r^2 = {}^1\!/_8\, \pi r^4.$$

Für den Mittelpunkt O: $J_o' = {}^1\!/_2\, m r^2 = {}^1\!/_4\, \pi r^4.$

Für den Schwerpunkt S

$$J_s' = {}^1/_2\, m r^2 \left(1 - \frac{32}{9\pi^2}\right) = 0{,}639[illegible] = {}^1/_4\, \pi r^4 \left(1 - \frac{32}{9\pi^2}\right) = 0{,}5025\, r^4.$$

7. Kreisringfläche. Aeufserer Halbmesser $= R$, innerer $= r$, mittlerer $= \varrho$, Ringbreite $= \delta$. Es ist für einen Durchmesser als Achse

$$J_x = {}^1/_4\, m\,(R^2 + r^2) = {}^1/_4\, \pi\,(R^4 - r^4) = \pi \varrho \delta\,(\varrho^2 + {}^1/_4\, \delta^2)$$

$$J_o' = 2 J_x = {}^1/_2\, m\,(R^2 + r^2) = {}^1/_2\, \pi\,(R^4 - r^4).$$

8. Kreisabschnitt. Bezeichnungen wie in Abb. 93, S. 219.

$$J_x = {}^1/_4\, m r^2 \left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{\sin^3\alpha \cos\alpha}{(\operatorname{arc}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}\right)$$

$$J_y = {}^1/_4\, m r^2 \left(1 + \frac{2\sin^3\alpha \cos\alpha}{(\operatorname{arc}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}\right)$$

$$J_o' = {}^1/_2\, m r^2 \left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{\sin^3\alpha \cos\alpha}{(\operatorname{arc}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}\right).$$

Für den Schwerpunkt S ist $\quad J_s' = J_o' - m\,.\,\overline{OS}^2$

$m = F$ s. S. 127. $\overline{OS}$ s. S. 183.

9. Kreisausschnitt. Bezeichnungen wie in Abb. 93, S. 219.

$$J_x = {}^1/_4\, m r^2 \left(1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{arc}\alpha}\right) = {}^1/_4\, r^4 \left(1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{arc}\alpha}\right) \operatorname{arc}\alpha$$

$$J_y = {}^1/_4\, m r^2 \left(1 + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{arc}\alpha}\right) = {}^1/_4\, r^4 \left(1 + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{arc}\alpha}\right) \operatorname{arc}\alpha$$

$$J'_o = {}^1/_2\, m r^2 = {}^1/_4\, b r^3 = {}^1/_2\, r^4 \operatorname{arc}\alpha = \frac{\pi \alpha^0}{360^0}\, r^4 = \frac{\pi r^4}{2n},$$

wenn der Kreisausschnitt der n^{te} Teil der Kreisfläche.

Für den Schwerpunkt S als Pol ist

$$J_s' = {}^1/_2\, m r^2 \left(1 - \frac{8}{9}\,\frac{s^2}{b^2}\right) = {}^1/_4\, b r^3 \left(1 - \frac{8}{9}\,\frac{s^2}{b^2}\right)$$

$$= {}^1/_2\, r^4 \left(1 - \frac{8}{9}\,\frac{\sin^2\alpha}{(\operatorname{arc}\alpha)^2}\right) \operatorname{arc}\alpha.$$

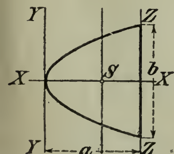
10. Ellipsenfläche. Für den Durchmesser $2a$ als x-Achse, Durchmesser $2b$ als y-Achse ist

$$J_x = {}^1/_4\, m b^2 = {}^1/_4\, \pi a b^3; \quad J_y = {}^1/_4\, m a^2 = {}^1/_4\, \pi a^3 b.$$

Für den Mittelpunkt O als Pol

$$J_o' = {}^1/_4\, m\,(a^2 + b^2) = {}^1/_4\, \pi a^3 b \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Abb. 96.



11. Parabelfläche (Abb. 96).

$$J_x = {}^1/_5\, m b^2 = {}^4/_{15}\, a b^3 \qquad J_y = {}^3/_7\, m a^2 = {}^4/_7\, a^3 b$$

$$J_z = {}^8/_{35}\, m a^2 = {}^{32}/_{105}\, a^3 b$$

$$J_s = {}^{12}/_{175}\, m a^2 = {}^{16}/_{175}\, a^3 b \qquad J_s' = J_x + J_s.$$

12. Gerades Prisma und [illegible] Zylinder mit dem zu den Seiten senkrechten Querschnitte F [illegible]r Höhe h. Die zu den parallelen Endflächen winkelrechte z-A[illegible]geht durch den Schwerpunkt S des Körpers und ist parallel zu den [illegible]iten; die Achse QQ steht in S auf ZZ senkrecht. Die Trägheitsmomente von F seien i_q, bezogen auf QQ, und i_z, bezogen auf ZZ. Für den Körper ist

$$J_q = {}^1/_{12}\, F h^3 + h i_q \quad \text{und} \quad J_z = h i_z.$$

13. Rechtwinkliges Parallelepipedon. Für die z-Achse = Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Endflächen, deren Seiten a und b und deren Abstand c sind, ist

$$J_z = {}^1/_{12}\, m\,(a^2 + b^2) = {}^1/_{12}\, a b c\,(a^2 + b^2).$$

Für die durch den Schwerpunkt parallel zu a verlaufende Achse QQ

$$J_q = {}^1/_{12}\, m\,(b^2 + c^2) = {}^1/_{12}\, a b c\,(b^2 + c^2).$$

Würfel (Kante $= a$) $J_z = J_q = {}^1/_6\, a^5$.

14. Rechtwinklige Pyramide. Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten a und b, Höhe $= h$. Für die z-Achse = Verbindungslinie der Spitze mit der Mitte der Grundfläche ist

$$J_z = {}^1/_{20}\, m\,(a^2 + b^2) = {}^1/_{60}\, a b h\,(a^2 + b^2).$$

Für die Schwerache QQ parallel zu a

$$J_q = {}^1/_{20}\, m\,({}^3/_4\, h^2 + b^2) = {}^1/_{60}\, a b h\,({}^3/_4\, h^2 + b^2).$$

15. Gerader Kreiszylinder. Halbmesser der Grundfläche $= r$, Höhe $= h$, Achsen s. u. **12.**

$$J_z = {}^1/_2\, m r^2 = {}^1/_2\, \pi r^4 h.$$

$$J_q = {}^1/_4\, m\,({}^1/_3\, h^2 + r^2) = {}^1/_4 \pi r^2 h\,({}^1/_3\, h^2 + r^2).$$

Zylindermantel $J_z = m r^2 = 2 \pi r^3 h \qquad J_q = {}^1/_2\, m\,(r^2 + {}^1/_6\, h^2)$.

16. Hohlzylinder. R und r der äufsere und innere Halbmesser, h die Höhe, $\delta = R - r$ die Dicke, $\varrho = {}^1/_2\,(R + r)$ der mittlere Halbmesser. Achsen s. u. **12.**

$$J_z = {}^1/_2\, m\,(R^2 + r^2) = {}^1/_2\, \pi h\,(R^4 - r^4)$$
$$= m\,(\varrho^2 + {}^1/_4\, \delta^2) = 2 \pi h \delta \varrho\,(\varrho^2 + {}^1/_4\, \delta^2)$$
$$J_q = {}^1/_4\, m\,(R^2 + r^2 + {}^1/_3\, h^2) = {}^1/_8\, m\,(4\,\varrho^2 + \delta^2 + {}^2/_3\, h^2).$$

17. Gerader Kreiskegel. Höhe $= h$, Seite $= s$. Achsen s. u. **12.**

$$J_z = {}^3/_{10}\, m r^2 = {}^1/_{10}\, \pi r^4 h$$

$$J_q = {}^3/_{20}\, m\,(r^2 + {}^1/_4\, h^2) = {}^1/_{20}\, \pi r^2 h\,(r^2 + {}^1/_4\, h^2).$$

Mantelfläche $J_z = {}^1/_2\, m r^2 = {}^1/_2\, \pi s r^3$.

18. Abgestumpfter Kreiskegel. Höhe $= h$, Seite $= s$, Halbmesser der Grundflächen $= R$ und r. Achsen s. u. **12.**

$$J_z = {}^3/_{10}\, m\, \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = {}^1/_{10}\, \pi h\, \frac{R^5 - r^5}{R - r}$$
$$= {}^1/_{10}\, \pi h\,(R^4 + R^3 r + R^2 r^2 + R r^3 + r^4).$$

Mantelfläche $J_z = {}^1/_2\, M\,(R^2 + r^2) = {}^1/_2\, \pi s\, \dfrac{R^4 - r^4}{R - r}$

$$= {}^1/_2\, \pi s\,(R^3 + R^2 r + R r^2 + r^3).$$

19. Kugel. Halbmesser $= r$. [illegible]urchmesser als Achse ist

$$J = {}^2/_5\, m [illegible].$$

Hohlkugel. R der äußere, [illegible]ere Halbmesser

$$J = {}^2/_5\, m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} [illegible] (R^5 - r^5).$$

Halbkugel. Liegt der Anfang[illegible]t der Koordinaten im Mittelpunkte, und ist r der Halbmesser, so ist

$$J_x = J_y = J_z = {}^2/_5\, m r^2 = {}^4/_{15}\, \pi r^5.$$

Kugeloberfläche. Für jeden Durchmesser als Achse ist

$$J = {}^2/_3\, m r^2 = {}^8/_3\, \pi r^4.$$

20. Kugelabschnitt von der Höhe h; Kugelhalbmesser $= r$. Bezogen auf die Symmetrieachse ist

$$J_z = m h \frac{2 r^2 - 1{,}5\, r h + 0{,}3\, h^2}{3 r - h} = {}^1/_3\, \pi h^3 (2 r^2 - 1{,}5\, r h + 0{,}3\, h^2).$$

21. Kugelausschnitt. Höhe der Kalotte $= h$; Kugelhalbmesser $= r$. Bezogen auf die Symmetrieachse ist

$$J_z = {}^1/_5\, m (3 r h - h^2) = {}^2/_{15}\, \pi r^2 h^2 (3 r - h).$$

22. Dreiachsiges Ellipsoid. Vrgl. auch S. 125. Bezogen auf die mit dem Durchmesser $2 c$ zusammenfallende z-Achse ist

$$J_z = {}^1/_5\, m (a^2 + b^2) = {}^4/_{15}\, \pi a b c (a^2 + b^2).$$

Entsprechend ist für die mit den Durchmessern $2\, a$ und $2\, b$ zusammenfallenden Achsen

$$J_x = {}^1/_5\, m (b^2 + c^2) \text{ und } J_y = {}^1/_5\, m (a^2 + c^2).$$

23. Umdrehungsellipsoid. Sind a und b die Halbachsen, so ist, wenn $2\, b$ die Drehachse des Umdrehungskörpers,

$$J_a = {}^2/_5\, m a^2 = {}^8/_{15}\, \pi a^4 b,$$

wenn $2\, a$ die Drehachse des Umdrehungskörpers

$$J_b = {}^2/_5\, m b^2 = {}^8/_{15}\, \pi a b^4.$$

24. Umdrehungsparaboloid. Höhe $= h$. Bezogen auf die Parabelachse (als Drehachse) ist

$$J_z = {}^1/_3\, m r^2 = {}^1/_6\, \pi r^4 h.$$

Bezogen auf die dazu winkelrechte Achse durch den Schwerpunkt ist

$$J_q = {}^1/_6\, m (r^2 + {}^1/_3\, h^2) = {}^1/_{36}\, \pi r^2 h (3 r^2 + h^2).$$

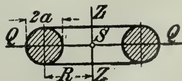
25. Ring (Abb. 97). Ring mit rechteckigem Querschnitt s. **17.**, S. 222 Hohlzylinder.

Ist der Querschnitt ein Kreis mit dem Halbmesser a, so ist

$$J_z = m (R^2 + {}^3/_4\, a^2) = {}^1/_2\, \pi^2 R a^2 (4 R^2 + 3\, a^2)$$

$$J_q = m ({}^1/_2\, R^2 + {}^5/_8\, a^2) = \pi^2 R a^2 (R^2 + {}^5/_4\, a^2).$$

Abb. 97.



Ist der Querschnitt [illegible]e mit den Halbachsen a und b und dabei die Achse $2b$ [illegible]Z, so ist

$$J_z = m\,(R[illegible] \ldots \pi^2 R a b\,(4R^2 + 3a^2)$$
$$J_q = m\,(\tfrac{1}{2}R^2 + [illegible] \ldots \pi^2 R a b\,(R^2 + \tfrac{5}{4}b^2).$$

E. [illegible]Stofs.

Die gerade Linie, die im [illegible]ungspunkte zweier sich stofsenden Körper zur gemeinsamen Berührungsebene winkelrecht steht, heifst Stofslinie. Befinden sich die Schwerpunkte der Körper in dieser Linie, so heifst der Stofs ein **zentrischer** oder **Zentralstofs,** im anderen Falle ein **exzentrischer Stofs.** Sind die Bewegungsrichtungen beider Schwerpunkte zur Stofslinie parallel, so heifst der Stofs **gerade,** im anderen Falle **schief.**

a. Gerader, zentrischer Stofs.

Zwei Massen m_1 und m_2 mit den gleich gerichteten Geschwindigkeit v_1 und v_2 treffen aufeinander. Zwischen v_1 und v_2 und den Geschwindigkeiten nach dem Stofse, c_1 und c_2, besteht dann die Beziehung

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 c_1 + m_2 c_2.$$

Den Quotienten $\frac{c_2 - c_1}{v_1 - v_2} = k$ nennt man die **Stofsziffer** oder den Koeffizienten der Stofselastizität; die Gröfse hängt von den elastischen, bzw. plastischen Eigenschaften der stofsenden Körper ab und ist für den vollkommen unelastischen Stofs $= 0$, für den vollkommen elastischen $= 1$, so dafs im allgemeinen $0 \leqq k \leqq 1$; Bestimmung von k s. u. **3.** S. 225.

1. Vollkommen unelastischer Stofs.

Die beiden Massen bewegen sich nach dem Stofse mit der gemeinsamen Geschwindigkeit

$$c = c_1 = c_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Der Verlust an lebendiger Kraft beträgt für beide Körper zusammen

$$E = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2.$$

2. Vollkommen elastischer Stofs

Der Verlust an lebendiger Kraft E ist gleich null. Die Geschwindigkeiten nach dem Stofse betragen

$$c_1 = \frac{(m_1 - m_2)\,v_1 + 2\,m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{(m_2 - m_1)\,v_2 + 2\,m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Für $v_2 = 0$ wird

$$c_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\,v_1.$$

Ist $m_1 = m_2$, so wird $c_1 = v_2$ und $c_2 = v_1$.

3. Unvollkommen elastischer Stofs.

Haben die beiden Körper die Stofsziffer k, so ist

$$c_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 (v_1 - v_2) k}{m_1 + m_2}$$

$$c_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 (v_1 - v_2) k}{m_1 + m_2}$$

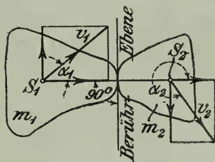
$$E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2).$$

Die Stofsziffer k ergibt sich aus $k^2 = h_1 : h$, worin h_1 die Höhe bezeichnet, bis zu der eine Kugel zurückprallt, wenn man sie aus der Höhe h auf eine wagerechte ebene, fest liegende Platte (also Masse $= \infty$ anzusehen) niederfallen läfst. Die Gröfse von k^2 hängt wesentlich ab von der Geschwindigkeit, mit der die Kugel auftrifft, d. h. von h. Bei mäfsigen Geschwindigkeiten ist für Elfenbein $k = {}^8/_9$, für Stahl und Kork $k = {}^5/_9$, für Glas $k = {}^{15}/_{16}$, Holz $k = {}^1/_2$ für $v \sim 2{,}8$ m/sk.

b. Schiefer, zentrischer Stofs.

Man zerlege v_1 und v_2, Abb. 98, in die Geschwindigkeiten $v_1 \cos \alpha_1$ und $v_1 \sin \alpha_1$ bzw. $v_2 \cos \alpha_2$ und $v_2 \sin \alpha_2$ nach der Richtung der Stofslinie und senkrecht dazu. Die beiden Geschwindigkeiten $v_1 \sin \alpha_1$ und $v_2 \sin \alpha_2$ bleiben, falls von der Reibung abgesehen wird, ungeändert. $v_1 \cos \alpha_1$ und $v_2 \cos \alpha_2$ ändern sich nach den Regeln des geraden, zentrischen Stofses in c_1' und c_2'; c_1' und c_2' ergeben alsdann mit $v_1 \sin \alpha_1$ und $v_2 \sin \alpha_2$ zusammengesetzt die Geschwindigkeiten nach dem Stofse.

Abb. 98.



c. Gerader, exzentrischer Stofs.

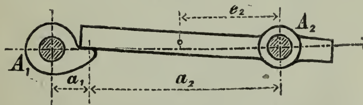
(Besonderer praktisch wichtiger Fall.)

Zwei um parallele Achsen A_1 und A_2 (Abb. 99) sich drehende Körper treffen mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 zusammen.

Die Trägheitsmomente der beiden Körper, bezogen auf die Drehachsen, seien J_1 und J_2. Es gelten alsdann die Formeln für den geraden, zentrischen Stofs (s. u. **a.** 1—3), wenn man statt der Massen die auf den Stofspunkt bezogenen Massen (s. S. 210)

$$\frac{J_1}{a_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{J_2}{a_2^2}$$

Abb. 99.



einführt und statt der Geschwindigkeiten v_1 und v_2 die Werte $a_1 \omega_1$ und $a_2 \omega_2$. Die Geschwindigkeit c_1 und c_2 nach dem Stofs haben dann die Punkte der Körper in der Stofslinie. Soll die Uebertragung der Stofswirkung (Prellung) auf die Achse A_2 vermieden werden, so müssen Stofspunkt und Drehpunkt A_2 in derselben Beziehung zueinander stehen wie Schwingungs-

mittelpunkt und Aufhängu[illegible]beim physischen Pendel (s. S. 210), d. h., es mufs $a_2 = \frac{J_2}{m_2 e_2}$ sein, [illegible] e_2 den Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse bedeutet.

d. Schiefer, exzentrischer Stofs.

Man zerlege, wie unter **b.**, die Geschwindigkeiten nach der Stofslinie und senkrecht dazu. Nur die ersten beiden Komponenten sind bei der Benutzung der Formeln unter **c.** in Rechnung zu setzen.

V. REIBUNGSWIDERSTÄNDE.

A. Reibungszahlen.

a. Reibung der Ruhe.

Stützt sich ein Körper unter dem Einflusse einer äufseren Kraft gegen einen anderen Körper, so kann er auch dann noch im Gleichgewicht sein, wenn die Richtung der Kraft mit der Stütz- oder Berührungsnormalen einen Winkel einschliefst, der kleiner oder gleich einem bestimmten Winkel ϱ_0 ist. Der Winkel ϱ_0, der **Reibungswinkel der Ruhe** oder **Grenzwinkel der Reibungsstützung,** hängt von der Rauhigkeit der Oberflächen ab. Die Stützkraft ist stets von der gleichen Gröfse und Richtung wie die äufsere Kraft. Durch Zerlegung der gesamten Stützkraft in zwei Seitenkräfte nach der Berührungsnormalen und senkrecht zu dieser erhält man die normale Stützkraft N und die tangentiale Stützkraft W_r; W_r ist die Reibungsstützung. Wie aus Vorstehendem folgt, ist

$$W_r \leq N \operatorname{tg} \varrho_0 \leq N \mu_0 ,$$

$\mu_0 = \operatorname{tg} \varrho_0$ wird als **Reibungszahl** oder **Reibungskoeffizient der Ruhe** bezeichnet.

Wenn die äufsere Kraft, die auch die Mittelkraft mehrerer Kräfte sein kann, um mehr als den Grenzwinkel ϱ_0 von der Normalen abweicht, so kann die tangentiale Stützkraft den Gleichgewichtzustand nicht herbeiführen. Die beiden Körper müssen sich gegeneinander verschieben.

Tafel der Reibungszahlen der Ruhe für verschiedene Baustoffe s. S. 228 und 229.

b. Gleitende Reibung.

1. Verschieben sich zwei Körper, die mit der Normalkraft N aneinander geprefst werden, gegeneinander, so ist dabei ein mit der Bewegungsrichtung zusammenfallender, aber entgegengesetzt wirkender Widerstand, der **Reibungswiderstand** W, zu überwinden.

Berühren sich die Körper in einer endlichen Fläche (z. B. niedere Elementenpaare), so ist die gegenseitige Bewegung eine rein gleitende, der Reibungswiderstand die sogen. **gleitende Reibung;** berühren sie sich in einer Linie (z. B. höhere Elementenpaare), so kann die Be-

wegung sowohl gleitend als rolle[illegible] die Berührungslinie sein; die letztere Bewegung erzeugt die **ro[illegible]de** oder **wälzende Reibung** (s. S. 231). Bei Berührung in einem Punkte unterscheidet man aufser der gleitenden und rollenden Bewegung noch die praktisch unwichtige bohrende Bewegung um die Normale.

2. Man pflegt im allgemeinen die Gröfse des Reibungswiderstandes W in Abhängigkeit vom Normaldruck N auszudrücken und schreibt

$$W = \mu N,$$

worin μ die **Reibungszahl** oder der **Reibungskoeffizient der gleitenden Bewegung** heifst.

μ ist abhängig von dem Stoff der aufeinander gleitenden Körper, der Beschaffenheit der Oberflächen, den Schmiermitteln zwischen den sich berührenden Flächen, ferner von der auf die Flächeneinheit ausgeübten Pressung, von der Geschwindigkeit der Reibungsbewegung und von der Temperatur. Der Widerstand der gleitenden Reibung W wächst also im allgemeinen nicht in gleichbleibendem Verhältnis mit dem Normaldruck N.

μ ist stets kleiner als μ_0.

3. Die Mittelkraft von W und N bildet mit der Normalen einen Winkel ϱ, den **Reibungswinkel**, für den

$$\operatorname{tg} \varrho = \mu \text{ ist.}$$

Der Kreiskegel vom Oeffnungswinkel 2ϱ und der Normalen als Achse wird **Reibungskegel** genannt.

4. Ist ein Körper unter dem Einflufs einer Kraft oder vermöge seiner Trägheit in Bewegung, so ist seine Verschiebung durch eine weitere noch so kleine Kraft, z. B. rechtwinklig zur Gleitrichtung in der Bewegungsebene, im Sinne dieser Kraft möglich, wobei der Reibungswiderstand seine Richtung so ändert, dafs seine Komponente in der Richtung der ablenkenden Kraft dieser gleich wird.

5. Reibungszahlen der gleitenden Bewegung für einige Metalle bei höheren Flächendrücken und wenig gefetteten Oberflächen, nach Rennie.

Bemerkung: Die Oberflächen wurden geschmiert und dann abgewischt, so dafs **keine dazwischen befindliche Schmiere** die innige Berührung verhindern konnte.

Flächendruck in kg/qcm	Schweifseisen auf Schweifseisen	Gufseisen auf Schweifseisen	Stahl auf Gufseisen	Messing auf Gufseisen	Flächendruck in kg/qcm	Schweifseisen auf Schweifseisen	Gufseisen auf Schweifseisen	Stahl auf Gufseisen	Messing auf Gufseisen
	$\mu =$					$\mu =$			
8,79	0,140	0,174	0,166	0,157	34,10	0.403	0,366	0,356	0,221
13,08	0,250	0,275	0,300	0,225	36,77	0,409	0,366	0,357	0,223
15,75	0,271	0,292	0,333	0,219	39,37		0,367	0,358	0,233
18,28	0,285	0,321	0,340	0,214	42,18	Flächen	0,367	0,359	0,234
20,95	0,297	0,329	0,344	0,211	44,58	ange-	0,367	0,367	0,235
23,62	0,312	0,333	0,347	0,215	47,25	griffen	0,376	0,403	0,233
26,22	0,350	0,351	0,351	0,206	49,92	.	0,434		0,234
27,42	0,376	0,363	0,353	0,205	55,12	.	Flächen angegriffen	Flächen angegriffen	0,232
31,50	0,395	0,365	0,354	0,208	57,65	.			0,273

6. Reibungszahlen μ und [illegible] für niedrige Flächendrücke (0,96 bis 1,37 kg/qcm), nach Morin u. a.

Reibende Körper	Lage der Fasern*)	Reibungszahl der gleitenden Bewegung: μ				Reibungszahl der Ruhe: μ_0			
		trocken	wenig fettig	geschmiert	mit Wasser	trocken	wenig fettig	geschmiert	mit Wasser
Metall auf Metall.									
Bronze auf Bronze .	.	0,20	.	.	.	.	.	.	.
„ auf Gufseisen . . .	.	0,21	.	.	.	.	.	.	.
„ auf Schweifseisen .	.	.	0,16	.	.	.	.	.	.
Gufseisen auf Gufseisen oder Bronze .	.	.	0,15	.	0,31	.	0,16	.	.
Schweifseisen auf Gufseisen od. Bronze	.	0,18	.	.	.	0,19	.	.	.
Schweifseisen auf Schweifseisen	.	0,44	.	.	.	.	0,13	.	.
Stahl auf Stahl . . .	.	.	.	.	.	0,15	.	.	.
Verschied. Körper.									
Gufseisen auf Eiche . .	=	0,49	0,19	(trock. Seife)	0,22	.	.	.	0,65
Schweifseisen auf Eiche	=	.	.	0,08 (Talg)	0,26	.	.	0,11 (Talg)	0,65
Messing auf Eiche . .	=	.	.	.	.	0,62	.	.	.
Eiche auf Eiche . .	=	0,48	.	0,16	(Seife)	0,62	.	0,44	(trock. Seife)
	ǂ	0,34	.	.	0,25	0,54	.	.	0,71
	⊥	0,19	.	.	.	0,43	.	.	.
Rindsleder auf Eiche	Leder flach	.	.	.	.	0,61	.	.	.
	Leder hochktg.	0,33	.	.	0,29	0,43	.	.	0,79
Rindsleder als Kolbenliderung (Vrgl. S. 230)	flach	0,56	0,23	0,15 (Oel, Seife)	0,36	.	.	0,12 (Oel, Seife)	0,62
Lederriemen auf Eichentrommel	=	0,27	.	.	.	Vrgl. S. 247.	0,47	.	.
„ auf Gufseisen .	flach	0,56	.	.	0,36		0,28	0,12	0,38
Hanfseil a. rauhem Holz	.	.	.	.	.	0,50	.	.	.
„ „ poliertem „	.	.	.	.	.	0,33	.	.	.

*) = bedeutet, dafs die Bewegung in der Richtung der Fasern beider Körper, ǂ, dafs sie senkrecht gegen die Faser des gleitenden Körpers erfolgt, und ⊥ bedeutet, dafs sich Hirnholz auf Langholz in der Faserrichtung des Langholzes bewegt.

Reibende Körper	Lage der Fasern	Reibungszahl der gleitenden Bewegung: μ trocken	wenig fettig	ge-schmiert	mit Wasser	Reibungszahl der Ruhe: μ_0 trocken	wenig fettig	ge-schmiert	mit Wasser
Eiche, Weifsbuche und Pockholz auf poliertem Granit oder poliertem Messing	=	.	.	.	.	.	.	Flächendrucke = 3,25 kg/qcm (trocken)	0,53
	‡	.	.	.	.	.	.		0,49 (Pockholz 0,40)
Steine oder Ziegel auf Ziegel	.	glatt bearbeitet . . .				0,53—0,73			
	.	mit frischem Mörtel . .				0,50—0,70		.	.
Steine u. Kies auf Walzeisen		.	.	.	.	0,42—0,49		.	.
Steine und Kies auf Holz		.	.	.	.	0,46—0,60		.	.
Mauerwerk auf Beton	.	.	.	.	.	0,76	.	.	.
Mauerwerk auf gewachsenem Boden	.	trocken und hart . . .				0,65	.	.	.
	.	mittel				0,45	.	.	.
	.	nafs und lettig . . .				0,30	.	.	.
Stahl auf Eis	.	0,014	.	.	.	0,027	.	.	.

7. Reibungszahlen für besondere Fälle.

1. **Schubkurbelgetriebe** (Gesamtreibungswiderstand im Mittel $\mu = 0{,}05$.
2. Eiserne **Radreifen** auf trockenen eisernen **Schienen**, nach Poirée.

(Eisenbahnwagen von 3400 bis 8400 kg Gewicht.)

Geschwindigkeit v in km/st	16,56	26,28	31,68	51,48	72,00	79,20
Reibungszahl . . . . $\mu =$	0,209	0,206	0,171	0,145	0,136	0,112 .

3. Gufseiserne **Bremsklötze** an stählernen **Radreifen**, nach Galton.

Geschwindigkeit v in km/st	Beginn	8,05	16,09	40,03	72,36	96,48
Reibungszahl . . . . $\mu =$	0,330	0,273	0,242	0,166	0,127	0,074 .

Ist v die (gleichbleibende) Fahrgeschwindigkeit in km/st, so haben Versuche von Wichert*) für die gleitende Reibung zwischen Bremsklötzen aus Stahlgufs und stählernen Radreifen ergeben

$$\mu = \beta \frac{1 + 0{,}0112\, v}{1 + 0{,}06\, v},$$

worin für trockene Reibungsflächen $\beta = 0{,}45$, für nasse $\beta = 0{,}25$ ist. Soll ein Zug von der Anfangsgeschwindigkeit v zum Stillstande gebracht werden, so kann man für die ganze Bremsdauer eine mittlere Reibungszahl μ' in Rechnung stellen. Für verschiedene v ergeben sich folgende Reibungszahlen, wobei μ' für ungünstige Verhältnisse (feuchte Schienen) bestimmt ist:

---

*) S. C. d. B. 1894 S. 73.

Geschwindigkeit v in km/st	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Trockene Reibungsflächen, $\mu =$	0,450	0,313	0,250	0,215	0,192	0,176	0,164	0,154	0,147	0,141
Nasse Reibungsflächen, $\mu =$	0,250	0,174	0,139	0,119	0,107	0,098	0,091	0,086	0,082	0,078
Mittlerer Wert . . . $\mu' =$	.	0,201	0,164	0,142	0,128	0,117	0,109	0,103	0,098	0,093

4. Stählerne **Radreifen** auf **Stahlschienen**, nach Galton.

Geschwindigkeit v in km/st: Beginn	10,93	21,8	43,9	65,8	87,6	96,48
Reibungszahl . . . $\mu = 0{,}242$	0,088	0,072	0,07	0,057	0,038	0,027

5. **Bremsen**, nach L. Klein*).

μ bei Geschwindigkeiten von 1 bis 20 m/sk und Drücken von 0,5 bis 10 kg/qcm annähernd unveränderlich.

Werte von μ.

Holz in Längsfasern, Bremskränze sauber bearbeitet.

	Buche	Eiche	Pappel	Ulme	Weide
Gufseisen .	0,29—0,37	0,30—0,34	0,35—0,40	0,36—0,37	0,46—0,47
Schmiedeisen	0,54	0,51—0,40	0,65—0,60	0,60—0,49	0,63—0,60

Bei Gufseisen gelten die höheren Werte, wenn die Bremsscheibe mit Benzin gereinigt, die niedrigeren, wenn die Scheibe nur sauber abgewischt ist; bei Schmiedeisen ist das Entgegengesetzte der Fall.

Für unbearbeitetes Schmiedeisen ist μ schwankend und wesentlich kleiner als für glatte Scheiben.

6. **Druckwasser-Hebezeuge**, nach H. Lang.

a) Bronze- oder Pockholz-Schieber auf Bronze. μ ist unveränderlich bei langsamer, wechselseitiger Bewegung und bei Flächendrücken von 2 bis 100 at.

Schieber unausgesetzt gefettet . . . . $\mu = 0{,}06$.
Schieber mittels zahlreicher Nuten vom Wasser benetzt $\mu = 0{,}10$.
Schieber trocken laufend und knarrend . . . . . . μ bis 0,30.

b) Stopfbüchsen mit Hanf, Baumwolle oder Lederstulp gedichtet. μ ist unveränderlich bei Wasserpressungen zwischen 1 und 50 at.

α) **Baumwolle** oder **Hanf**, lose oder geflochten, in heifsem Talg getränkt, Kolben glatt, Büchse nicht fest angeprefst, also Packung noch elastisch, gewöhnliche Abmessungen — selbst noch nach Monaten . . . . $\mu = 0{,}06$ bis 0,11;

β) **Baumwolle** oder **Hanf**, schwierige Verpackung (schwere Stopfbüchse, ungünstige Lage usw.) . . . . μ bis 0,25;

γ) **Lederstulp**,
weiches Leder, gute Ausführung . . . . $\mu = 0{,}03$ bis 0,07;
hartes, stark lohgares Leder . . . . $\mu = 0{,}10$ bis 0,13;
ungünstige Anlage (rauher Kolben, schmutziges Wasser usw.) . μ bis 0,20.

Weiteres s. Abschnitt Maschinenteile, unter Stopfbüchsen.

6. **Schleifsteine.** Die Reibungszahl zwischen grobkörnigem Sandstein und Gufseisen $\mu = 0{,}21$ bis 0,24, Stahl $\mu = 0{,}29$, Schmied-

*) S. Mitteil. u. Forschungsarbeiten Heft 10, herausg. v. V. d. I., u. „Glück-Auf" 1903 S. 387.

eisen $\mu = 0{,}41$ bis 0,46, je nachdem der Stein frisch geschärft oder stumpf ist; für feinkörnigen Sandstein ist im Mittel zwischen dem nassen Steine und Gufseisen $\mu = 0{,}72$, Stahl $\mu = 0{,}94$, Schmiedeisen $\mu = 1{,}0$.

7. **Werte μ der Gesamtreibung für Strafsenfuhrwerke.***)

Glatte Granitplatten-Bahn	0,006.
Gleise der Strafsenbahnen im Mittel	0,006 bis 0,008.
Gute Asphaltstrafse	0,010.
Vorzügliches Steinpflaster	0,015.
Chaussierte Strafse, gewöhnl. Schotter, in vorzügl. Zustande	0,016.
Gutes Holzpflaster	0,018.
Gutes Steinpflaster	0,020.
Chaussierte Strafse, in gutem Zustande	0,023.
„ dsgl., mit Staub usw. bedeckt	0,028.
Geringes Steinpflaster	0,033.
Chaussierte Strafse, mit Schlamm bedeckt, ausgefahren	0,035.
Erdwege, sehr gute	0,045.
Chaussierte Strafse von sehr geringer Beschaffenheit	0,050.
Erdwege, gute bis schlechte	0,080 bis 0,160.
Loser Sand	0,15 bis 0,30.

8. **Reibungszahlen für Schlitten.**

Unbeschlagene Holzkufen auf glatter Holz- oder Steinbahn,	ungeschmiert	0,38.
	geschmiert mit trockener Seife	0,15.
	geschmiert mit Talg	0,07.
Unbeschlagene Holzkufen auf Schnee und Eis		0,035.
Beschlagene Holzkufen auf Schnee und Eis		0,02.

9. Reibungswiderstände von Eisenbahnfahrzeugen s. Abteil. III; Reibungswiderstand von Schiffen s. Abteil. I, Dynamik flüssiger Körper und Abteil. II, Schiffbau.

c. Rollende Reibung.

1. Rollt ein Zylinder, ohne zu gleiten, auf einer wagerechten, ebenen Unterlage, gegen die er mit der Kraft Q (Normaldruck) geprefst wird (Abb. 100, S. 232), so ist zur Erzielung der Drehung um den Stützpunkt ein Kräftepaar mit dem Momente

$$M = Qf$$

zu überwinden. Die Gröfse f (in **cm**), der Hebelarm oder die **Reibungszahl der rollenden Bewegung,** ist z. B.

für Pockholz auf Pockholz	$f = 0{,}047$ cm,
„ Ulmenholz auf Pockholz	$f = 0{,}081$ cm,
„ Eisen auf Eisen (und Stahl auf Stahl) i. M.	$f = 0{,}005$ cm.

2. Wird das Kräftepaar M überwunden z. B. durch eine im Schwerpunkt angreifende Kraft P (Abb. 101), so gilt für P die Beziehung

$$Pr = M = Qf.$$

*) S. H. d. B. I S. 552. — Vrgl. auch Z. d. B. 1888 S. 543.

Greift eine Kraft P' am Umfange dem Stützpunkte gegenüber an (Abb. 101), so gilt

$$P' \, 2r = M = Qf.$$

Abb. 100.

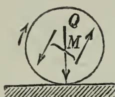


Abb. 101.

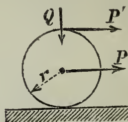
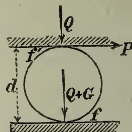


Abb. 102.



3. Wird eine Last Q auf einer Walze fortgeschoben (Abb. 102), und bedeutet f die Reibungszahl der rollenden Bewegung für Walze und Unterlage, f' die für Walze und Last, G das Eigengewicht der Walze, so ist

$$Pd = M = Qf' + (Q + G) f.$$

4. Ein Zylinder vom Halbmesser r beginnt auf einer schiefen Ebene zu rollen, wenn ihr Steigungsverhältnis $\operatorname{tg} \alpha = f : r$ ist; hieraus folgt $f = r \operatorname{tg} \alpha$. (Vrgl. das Beispiel S. 211.)

B. Kraft- und Arbeitsverhältnisse der Getriebe.

a. Allgemeines.

Bezeichnet Q den Nutzwiderstand eines Getriebes in kg,
P die wirkliche Betriebskraft in kg,
q den Weg in Richtung von Q, auf welchem Q wirkt, in m,
p den gleichzeitigen Weg von P in m,

so heifst

$$\eta = \frac{Qq}{Pp} = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{gesamte aufgewendete Arbeit}}$$

der **Wirkungsgrad** des Getriebes. Die **Reibungsarbeit** $A_r = Pp - Qq$.

Bezeichnet P_0 in kg die ideelle Betriebskraft, welche die Nutzlast Q ohne Vorhandensein der Reibungswiderstände im Gleichgewichte halten würde, und Q_0 in kg die ideelle Nutzlast, die durch die wirkliche Betriebskraft bei reibungsloser Bewegung überwunden werden könnte, so ist auch

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{Q}{Q_0}.$$

Ist für den Rückwärtsgang des Getriebes $\eta \leqq 0$, so heifst das Getriebe **selbsthemmend** (selbstsperrend); infolge der Reibungswiderstände ist eine Rückwärtsbewegung alsdann von selbst nicht möglich.

Besteht ein Getriebe aus mehreren Teilgetrieben mit den Wirkungsgraden $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots$, so ist der **Gesamtwirkungsgrad**

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \ldots\ldots *).$$

---

*) Zeichnerische Ermittlung von η: s. G. Herrmann, Zur graphischen Statik der Maschinengetriebe; Braunschweig 1879. F. Vieweg.

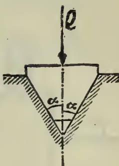
Das Verhältnis der Reibungsarbeit $A_r = Pp - Qq$ zur Nutzarbeit $A_n = Qq$ heifst **verhältnismäfsiger Arbeitsverlust** $\mathfrak{V}$.

Es ist $$\mathfrak{V} = \frac{A_r}{A_n} = \frac{Pp}{Qq} - 1 \quad \text{und} \quad \eta = \frac{1}{1+\mathfrak{V}}.$$

b. Keile.

1. Bewegung in Keilnuten.

Abb. 103.



Wird ein Prisma in eine Keilnut vom Neigungswinkel $= 2\alpha$ durch die Kraft Q geprefst (Abb. 103), so beträgt der bei der Bewegung längs der Achse des Prismas zu überwindende Reibungswiderstand

$$W = Q\frac{\mu}{\sin\alpha} = Q\mu' \qquad \left(\mu' = \frac{\mu}{\sin\alpha} = \begin{cases}\text{Reibungszahl für}\\ \text{Keilnutenbewegung}\end{cases}\right).$$

Hierbei ist die infolge der Elastizität des Materials beim Eindringen des keilförmigen Umfanges entstehende Reibung aufser acht gelassen.

Wird diese berücksichtigt, so ist (s. a. Abschn. Maschinenteile: Reibräder)

$$W = Q\frac{\mu}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}.$$

2. Keilkette.

Der Keil werde in Richtung der Kraft P verschoben (Abb. 104); dadurch werde die Kraft Q überwunden. Die Stützendrücke N_1, N_2 und N_3, sowie P ergeben sich mittels Zeichnung, wenn ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die entsprechenden Reibungswinkel bedeuten, nach Abb. 105.

Abb. 104.

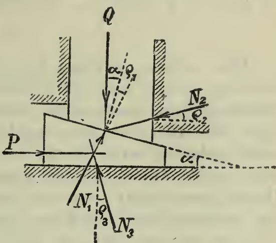
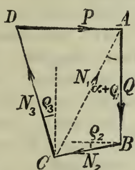


Abb. 105.



Ziehe AC unter $\alpha + \varrho_1$ gegen Q, BC parallel zu N_2, d. i. unter $90^0 + \varrho_2$ gegen AB; durch den Schnittpunkt C lege CD parallel zu N_3, d. i. unter ϱ_3 gegen AB. Die Parallele durch A zu P ist alsdann $AD = P$. Rechnerisch ist hiernach

$$N_1 : Q = \cos\varrho_2 : \cos(\alpha + \varrho_1 + \varrho_2)$$
$$P : N_1 = \sin(\alpha + \varrho_1 + \varrho_3) : \cos\varrho_3$$
$$P : Q = \frac{\cos\varrho_2 \sin(\alpha + \varrho_1 + \varrho_3)}{\cos\varrho_3 \cos(\alpha + \varrho_1 + \varrho_2)}.$$

Z. B. ist für $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho$ $\qquad P = Q\,\mathrm{tg}\,(\alpha + 2\varrho)$

Wirkungsgrad $\qquad \eta = \mathrm{tg}\,\alpha : \mathrm{tg}\,(\alpha + 2\varrho)$

Kraft zum Lösen des Keiles $\qquad P_1 = Q\,\mathrm{tg}\,(2\varrho - \alpha)$

Selbsthemmung ist vorhanden, solange $\alpha < 2\varrho$ bzw. $< \varrho_1 + \varrho_3$.

Für die Keilkette Abb. 106 ergibt sich (vrgl. Abb. 107)

$$P = \frac{2\,Q \cos\varrho \sin(\alpha+\varrho)}{\cos(\alpha+2\varrho)} = \frac{2\,Q\,\mathrm{tg}(\alpha+\varrho)}{1-\mathrm{tg}\,\varrho\,\mathrm{tg}(\alpha+\varrho)} \sim 2\,Q\,\mathrm{tg}(\alpha+\varrho).$$

Abb. 106.

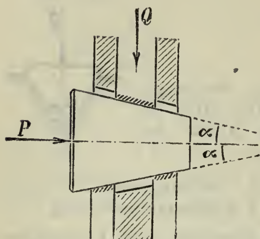


Abb. 107.

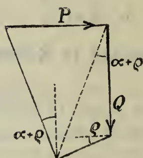
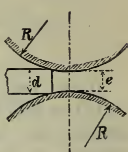


Abb. 108.



$$\eta = \mathrm{tg}\,\alpha : \mathrm{tg}(\alpha+\varrho)$$

$$P_1 \sim 2\,Q\,\mathrm{tg}(\varrho-\alpha)$$

Selbsthemmung ist vorhanden, solange $\alpha < \varrho$ bzw. $2\alpha < \varrho_1 + \varrho_3$.

3. Walzprozefs.

Zur Einleitung des Walzprozesses (Abb. 108) mufs sein

$$d - e \leqq 2\,R\,(1-\cos\varrho).$$

Hierbei ist $\mathrm{tg}\,\varrho = \mu$ (vrgl. S. 227).

Für glühendes Eisen zwischen gufseisernen Walzen (mit $\mu = \mathrm{tg}\,\varrho = 0{,}1$) mufs z. B. $d - e \leqq 0{,}01\,R$ sein.

c. Zapfen und Lager.

α. Allgemeines.

Die bisher übliche Berechnungsweise*) der Zapfen- und Lagerreibung nahm eine unveränderliche Reibungszahl an und machte bestimmte Voraussetzungen über die Druckverteilung, je nachdem es sich um neue oder eingelaufene Zapfen handelte. Die Ergebnisse sind jedoch, wie durch Versuche sicher nachgewiesen ist, den tatsächlichen Verhältnissen gegenüber mit erheblichen Fehlern behaftet. Der Grund dafür liegt in dem Umstand, dafs es sich im allgemeinen um geschmierte Flächen handelt und daher die Flüssigkeitsreibung mafsgebend ist, bei der die Reibungszahl von dem Drucke abhängig ist.

Die angestellten Versuche erstrecken sich nur auf zylindrische Tragzapfen und ebene Spurzapfen, so dafs eine begründete Reibungsberechnung für andere Zapfenformen z. Z. nicht möglich ist.

β. Tragzapfengleitlager.

1. Reibungswiderstand.

Ist P der auf den Zapfen ausgeübte Druck in kg,
l die Länge und $2\,r$ der Durchmesser des Zapfens in cm,

*) Vrgl. Bach, Maschinenelemente, 9. Aufl., S. 439 u. f.

$p = \frac{P}{2\,r\,l}$ der mittlere Normaldruck (spezifische Lagerbelastung) in kg/qcm,

μ_1 die Zapfenreibungszahl,

$\bar{\mu} = \mu_1 p$ die Zapfenreibungszahl der Flächeneinheit (spezifische Reibungszahl), so ist

das **Moment der Zapfenreibung** für den zylindrischen Zapfen (Abb. 109)

$$M = \mu_1 P r \text{ in cmkg.}$$

Die sekundliche Reibungsarbeit bei n Uml./min

$$A_r = \frac{M \pi n}{30} = \mu_1 \frac{P r \pi n}{30} \text{ in cmkg/sk.}$$

Bei kegeligen Zapfen (Abb. 110) ist für r der mittlere Halbmesser

$$r_m = \frac{r + R}{2} \text{ zu nehmen.}$$

Abb. 109.

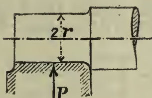
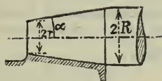


Abb. 110.



Für die **zeichnerische** Behandlung kann die Zapfenreibung dadurch Berücksichtigung finden, dafs man den Lagergegendruck nicht durch die Zapfenachse gehen läfst, sondern berührend an einen Kreis, den (Zapfen-) Reibungskreis, legt, dessen Halbmesser sich zu $a = \mu_1 r$ ergibt.

2. Werte der Zapfenreibungszahl μ_1.

1. Die Zapfenreibungszahl ist verschieden für neue und für eingelaufene Zapfen. Wegen der unvermeidlichen Ungenauigkeit bei der Herstellung liegen nämlich bei neuen Lagern die Flächenteile ungleich aufeinander, so dafs gegebenenfalls Flächendrücke auftreten, die das Schmiermittel herauspressen. Es kommt dann die Reibung fester Körper in Frage, während bei gut eingelaufenen Zapfen die im allgemeinen geringere Reibung flüssiger Körper vorhanden ist.

2. Die Zapfenreibungszahl ist abhängig von der Lagerbelastung, der Zapfenumfangsgeschwindigkeit, der Temperatur, dem Schmiermittel und der Lagerform. Aus den Versuchen von Thurston,*) Tower,*) Stribeck,**) Lasche,***) Heimann†) folgt für vollkommen geschmierte Zapfen:

*) Engineer, 1884, Bd. 58, S. 57 u. f.

**) S. Z. d. V. d. I. 1902 S. 1341.

***) S. Z. d. V. d. I. 1902 S. 1881.

†) S. Z. d. V. d. I. 1907 S. 1161.

a) Für ungeteilte Lager, bei denen eine ununterbrochene Druckverteilung rings um die Welle möglich ist, ist die spezifische Reibungszahl $\overline{\mu}$ vom Druck unabhängig, die Zapfenreibungszahl also dem Flächendruck umgekehrt proportional. Für geteilte oder besonders ausgesparte Lager, bei denen eine ununterbrochene Druckverteilung rings um die Welle nicht vorhanden ist, gilt das genannte Gesetz nicht mehr. Die Reibung wächst (bei gleichem Drucke) mit der Gröfse der Reibungsfläche.

b) Die Reibungszahl der Ruhe ist unabhängig von der Pressung. Die Reibungszahl der Bewegung nimmt mit zunehmender Geschwindigkeit zunächst ab, und zwar bei kleinen Pressungen schneller als bei gröfseren. Nach Erreichung eines für alle (zulässigen) Pressungen annähernd gleichen Mindestwertes nimmt die Reibung wieder zu: bei kleinen Pressungen schneller als bei grofsen, um einer von der Geschwindigkeit unabhängigen Grenze, die bei 10 m/sk erreicht wird, zuzustreben. (Vrgl. Abb. 111.)

Abb. 111 nach Stribeck.

Versuchsgegenstand: Sellerslager mit Ringöler, 70 mm Durchmesser, 230 mm Länge. Schmierung durch Gasmotorenöl. Oeltemperatur 25° C.

c) Eine Temperatursteigerung innerhalb gewisser Grenzen (0° bis 40°) hat eine Verminderung von μ_1 zur Folge, u. zw. verändert sich μ_1 ungefähr umgekehrt proportional der Temperatur über dem Nullpunkte.

d) Die spezifische Reibungszahl ist angenähert umgekehrt proportional der Oelschichtdicke bezüglich dem Lagerspielraum.

3. Bezüglich der Einwirkung verschiedener Schmierverfahren ermittelte Tower bei dem in Tafel I angegebenen Zapfen für Rüböl (Umfangsgeschwindigkeit 0,8 m/sk)*):

Bei Oelbad und	$p_m = 18{,}5$ kg/qcm .	$\mu_1 = 0{,}001\,39$
„ Dochtschmierung und	$p_m = 17{,}1$ kg/qcm .	$\mu_1 = 0{,}009\,80$
„ Reibekissen	$p_m = 19{,}1$ kg/qcm .	$\mu_1 = 0{,}009\,00$

*) S. Z. d. V. d. I. 1885 S. 836 u. f.

Tafel I. Nach Tower und Thurston.

Versuchsgegenstand: Stahlzapfen in Bronzeschale mit $d = 102$ mm $l = 152$ mm, wagerecht gelagert, von oben einseitig belastet, in Oelbad

Oel-Art	Geschwindigkeit m/sk	Mittlerer Druck p_m kg/qcm	μ_1
Olivenöl . .	0,80	36,5	0,0008
Schmalzöl . .	1,06	36,5	0,0010
Rüböl . . .	2,13	36,5	0,0015
Mineralfett .	0,80	36,5	0,0010
	2,13	36,5	0,0018
Wallratöl .	0,80	29,2	0,0015
	2,13	29,2	0,0021
Mineralöl . .	0,80	36,5	0,00123
	2,13	36,5	0,00178
Mineralfett .	2,13	7,00	0,014
Olivenöl . . / Schmalzöl . .	2,13	7,00	0,008

Reibungswiderstand W in kg/qcm Druckfläche, bei vollkommener Schmierung durch Oelbad, bei 1,6 m/sk Umfangsgeschwindigkeit und $p_m = 7{,}0$ bis 21,8 kg/qcm	
Oel-Art	W in kg/qcm
Mineralfett . . .	0,0737
Olivenöl . . .	0,0460
Schmalzöl . . .	0,0458
Mineralöl . . .	0,0438
Rüböl	0,0360
Wallratöl . . .	0,0340

Hieraus ergibt sich

$$\mu_1 = \frac{W}{p_m}.$$

4. Die Abhängigkeit der Reibungszahl von Geschwindigkeit und Flächendruck zeigen die von Stribeck*) und Lasche**) gefundenen Werte der Abb. 111 und der Tafeln II u. III.

Tafel II: Werte μ_1 nach Stribeck.

Versuchsgegenstand: Weifsmetallager mit Ringöler; 70 mm Durchmesser, 70 mm Länge. Schmierung durch Gasmotorenöl. Oeltemperatur 25⁰.

$v =$ m/sk	$p = 1$	2,25	4	9	16	25	36	49
7,7	—	0,0573	0,04	0,0209	0,0136	0,0112	—	—
4,03	0,067	0,048	0,0355	0,02	0,0128	0,0102	0,0087	0,0077
2,78	0,05	0,039	0,0288	0,0168	0,0114	0,0091	0,008	0,0071
1,39	0,0415	0,0302	0,0213	0,0126	0,0085	0,007	0,0063	0,0059
0,7	0,028	0,0212	0,0156	0,0091	0,0064	0,0052	0,0048	0,0045
0,23	0,018	0,0108	0,0081	0,0051	0,0035	0,0030	0,0027	0,0026
0,12	0,013	0,0072	0,0052	0,0032	0,0025	0,0021	0,0020	0,0020
0,044	0,0095	0,0046	0,0031	0,0020	0,0019	0,0017	0,0017	0,0025
0,029	0,0074	0,0039	0,0036	0,0018	0,0016	0,0017	0,0023	0,0058
0,018	0,0067	0,0034	0,0033	0,0017	0,0016	0,0019	0,0031	0,0089
0	—	0,21	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,23

*) Z. d. V. d. I. 1902 S. 1341 u. f.
**) Z. d. V. d. I. 1902 S. 1881 u. f.

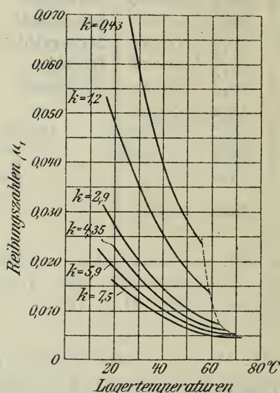
Tafel III nach Lasche.

Versuchsgegenstand: Zapfen: Stahl. Lagerschalen: Weifsmetall. $d = 110$ mm, $l = 240$ mm, $p = 6{,}5$ kg/qcm. Temperatur des Oeles 50^0. Schmierung mit Imperial 0.

v m/sk	3	5	10	15	20	23
μ	0,0057	0,0067	0,0083	0,0104	0,010	0,0102

5. Einflufs der Lagertemperatur nach Stribeck Abb. 112. (Versuchsgegenstand wie bei Abb. 111). Umdrehungen i. d. Min. 1100 entsprechend 4,03 m/sek Umfangsgeschwindigkeit.

Abb. 112.



7. Für überschlägliche Rechnungen, bei denen eine gewisse Sicherheit gegen zu niedrige Beurteilung der Reibung verlangt wird, kann genommen werden: bei guter Schmierung mit Rüböl, Mineralfett, Mineralöl oder deren Mischungen mit Petroleum für gut eingeschliffene Stahlzapfen in Bronzelagern $\mu_1 = 0{,}06$. Bei schlechter Schmierung und im Freien (Seiltriebe, Drehscheiben, Schiebebühnen usw.) ist $\mu_1 = 0{,}08$ bis 0,10.

γ. Spurzapfenlager.

1. Reibungswiderstand.

Ist P der Zapfendruck in der Zapfenachse in kg,

dF ein Element der Zapfenoberfläche in qcm,

y dessen Abstand von der Drehachse in cm,

p der unveränderliche Normaldruck in dF in kg/qcm,

μ die Reibungszahl für gleitende Reibung,

so ist das Moment der Zapfenreibung

$$M = \mu p \int y \, dF \text{ in cmkg,}$$

die sekundliche Reibungsarbeit bei n Uml./min

$$A = \frac{M\pi n}{30} \text{ in cmkg/sk.}$$



Abb. 113.

Für den Zapfen nach Abb. 113 folgt dann für:
„Ebene Ringfläche" (Kammzapfen bei Halslagern)

$$M = \frac{2}{3}\mu P \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2};$$

„Voller ebener Zapfen"

$$M = \frac{2}{3}\mu P R.$$

2. Werte der Reibungszahl μ.

1. Allgemeines über Veränderlichkeit von μ und seine Gröfse vrgl. S. 227. Im übrigen gilt auch hier das Gesetz wie für Tragzapfen, dafs die Reibungszahl umgekehrt mit der Pressung und direkt mit der Dünnflüssigkeit des Oeles, d. h. mit zunehmender Temperatur abnimmt*) und zwar umsoweniger, je gröfser die Pressung ist.

2. Einflufs von Pressung und Temperatur auf die Reibungszahl nach Versuchen von Woodbury*) aus nachstehender Tafel:

Versuchsgegenstand: Ringzapfen aus Stahl, 57,8 mm äufserer und 36,3 mm innerer Durchmesser. Geschwindigkeit 300 Uml./min. Schmierung mit Paraffinöl.

p in at	Temperatur				
	15,5° C.	21° C.	26,5° C.	32° C.	37,5° C.
0,07	0,34	0,268	0,212	0,17	0,138
0,35	0,09	0,074	0,0620	0,0520	0,0436
0,70	0,0554	0,0468	0,0402	0,0348	0,0302
1,05	0,0435	0,0375	0,0325	0,0280	0,0257
1,4	0,0375	0,0327	0,0289	0,0257	0,0227
1,76	0,0336	0,0296	0,0265	0,0236	0,0210
2,1	0,0307	0,0273	0,0245	0,0222	0,0199
2,46	0,0286	0,0256	0,0231	0,0210	0,0190
2,8	0,0221	0,0243	0,0221	0,0201	0,0181

δ. Kugellager.

I. Reibungswiderstand.

Ist P die Belastung eines Laufringes in kg,
S die Summe aller Einzelbelastungen der Kugeln in kg,
γ der Winkel der Stütznormalen zweier benachbarter Kugeln,
d der Kugeldurchmesser in cm,

*) S. Z. d. V. d. I. 1885, S. 450 u. f.

D_0 der Durchmesser des Kreises der Kugelmittelpunkte im cm,
f die Reibungszahl der rollenden Bewegung in cm,

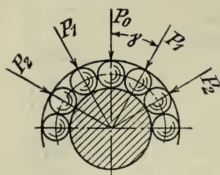


Abb. 114.

μi die ideelle Reibungszahl für Kugellager,
r der Halbmesser der Welle in cm,

so ist unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen wie unter β., nach Stribeck*) (vrgl. Abb. 114).

$$M = Sf\frac{D_0}{d} = \mu i\,Pr \text{ cmkg}$$

$$A = Sf\frac{D_0}{d}\,\frac{\pi n}{30} \text{ cmkg/sk}$$

$$S = P_0 + 2P_1 + 2P_2 + \ldots . 2P_n$$

$$P_1 = P_0 \cos^{3/2} \qquad P_2 = P_0 \cos^{3/2} 2\gamma \text{ usf.}$$

$$P = P_0 (1 + 2\cos^{5/2}\gamma + 2\cos^{5/2} 2\gamma + \ldots . + 2\cos^{5/2} n\gamma).$$

Für $z = 10$ bis 20 Kugeln im Umfange einer Laufrinne ergibt sich dann angenähert

$$P_0 = \frac{5}{z}P, \quad S \sim 1{,}2\,P \quad f = \frac{r\mu i}{1{,}2\,\frac{D_0}{d}}$$

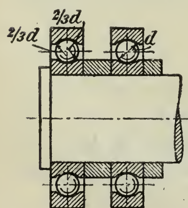
Die Reibungsarbeit A vermindert sich mit abnehmendem Verhältnis $D_0 : d$, wird also um so kleiner, je weniger Kugeln der Laufring fafst.

2. Zapfenreibungszahlen μi.

Die ideelle Reibungszahl μi ist innerhalb weiter Grenzen von der Umdrehungszahl und Temperatur unabhängig, nimmt dagegen mit wachsender Belastung ab.

1. Versuche von Stribeck zeigen, dafs für μi die Bauart des Lagers von weitgehendstem Einflufs ist. Für ein Lager nach Abb. 115 mit $r = 3{,}5$ cm, $D_0 = 10{,}2$ cm, $d = {}^7/_8{}'' = 2{,}2225$ cm (Laufringe aus Stahl, sauber geschliffen, die Laufflächen der Ringe bilden im Querschnitt Kreisbogen, deren Halbmesser $^2/_3$ des Kugeldurchmessers betragen, diese Konstruktion für grofse Belastungen am besten geeignet) ist μi:

Abb. 115.



Belastung P in kg	Umdrehungen i. d. Min. 65	385	780
380	0,0033	0,0035	0,0037
850	0,0020	0,0021	0,0022
1100	0,0017	0,0018	0,0019
1580	0,0016	0,0016	0,0017
2050	0,0015	0,0015	0,0015
3000	**0,0015**	**0,0013**	**0,0013**
4900	.	.	0,0011

*) S. Z. d. V. d. I. 1901 S. 121.

ε. Rollenlager.*)

1. Reibungswiderstand.

Ist P die Gesamtlagerbelastung in kg,
b die Rollenlänge in in cm,
d der Rollendurchmesser cm,
z die Zahl der Rollen,
D_0 der Durchmesser des Kreiszylinders, auf dem die Rollenachsen sich bewegen,
$p = \dfrac{P}{\frac{z}{5} l d}$ die gröfste spezifische Lagerbelastung,

so gelten nach Stribeck sinngemäfs die gleichen Formeln wie für Kugellager.

Unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen wie unter β und δ ist dann
$$M = 1{,}2\, P f \frac{D_0}{d} = \mu i\ P r \text{ cmkg.}$$

Gröfste Belastung der Rollen bei $z = 10$ bis 20 angenähert
$$P_0 = 5 \frac{P}{z}.$$

2. Zapfenreibungszahlen f und μi

Die Reibung ist fast unabhängig von der Geschwindigkeit und auch die Reibung der Ruhe unterscheidet sich nur unerheblich von der Reibung der Bewegung. (Kleiner Anlaufwiderstand.) Mit wachsender Belastung nimmt die Reibung ab, ebenso mit zunehmender Temperatur.

Für Rollenlager verschiedener Bauarten haben Versuche ergeben:

$p =$	3	5	7,5	10	15
$f =$	0,0045	0,0034	0,0027	0,0023	0,0018;

dann $\mu i = \dfrac{1{,}2}{r} \dfrac{D_0}{d} f.$

d. Schrauben.

1. Flachgängiges (Rechteck-) Gewinde.

Es sei
r der Halbmesser der mittleren Schraubenlinie,
h die Steigung oder Ganghöhe der Schraube,
α der Steigungswinkel der mittleren Schraubenlinie $\left(\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{2\pi r}\right)$,
$\mu_0 = \operatorname{tg} \varrho_0$ die Reibungszahl der Ruhe (vrgl. S. 226),
$\mu = \operatorname{tg} \varrho$ die Reibungszahl der gleitenden Bewegung (vrgl. S. 227).

1. **Gleichgewicht** besteht, solange
$$Q \operatorname{tg}(\alpha - \varrho_0) < P < Q \operatorname{tg}(\alpha + \varrho_0) = Q \frac{h + 2\pi r \mu_0}{2\pi r - \mu_0 h}$$
wobei die Kraft P winkelrecht zur Achse im Abstande r von dieser angreifend gedacht ist (Abb. 115).

Die Kraft K, gleichgerichtet mit P, am Hebelarme R angreifend, folgt (Abb. 116) aus $Pr = KR.$

Selbsthemmung tritt ein, wenn $\alpha \leqq \varrho_0$ ist.

*) S. Z. d. V. d. I. 1902 S. 1463.

2. Für die **Bewegung** der Schraube ist

$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha \pm \varrho) \text{ (Abb. 117)} = Q \frac{h \pm 2\pi r \mu}{2\pi r \mp \mu h}$$

(ohne Berücksichtigung der Halszapfenreibung);

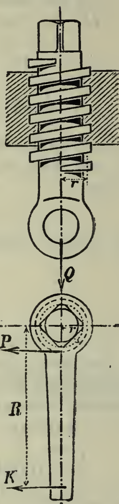
das obere Zeichen gilt für die Bewegung entgegengesetzt der Richtung von Q, das untere Zeichen für die Bewegung im Sinne von Q.

Wirkungsgrad $\eta = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)$. bzw.

$$\eta = \operatorname{tg}(\alpha - \varrho) : \operatorname{tg}\alpha.$$

η wird am gröfsten für $\alpha = 45^0 - {}^1/_2\,\varrho$; z. B. ist $\eta_{max} = 0{,}81$ für $\alpha = 42^0$ bei $\mu = 0{,}1$. Da η nur für α bis $\backsim 20^0$ stark zunimmt, so geht man meist nur bis $\alpha = 20^0$; hierfür wird $\eta = 0{,}74$. Bei Pressen, bei denen es auf grofse Kraftübersetzung ankommt, wählt man α bis 3^0 herab, wofür $\eta = 0{,}27$ wird.

Abb. 116.



2. Scharfgängiges (Dreieck-) Gewinde.

β der halbe Kantenwinkel des Gewindes,
r der Halbmesser der mittleren Schraubenlinie,
h die Steigung oder Ganghöhe der Schraube,
α der Steigungswinkel der mittleren Schraubenlinie $(\operatorname{tg}\alpha = h : 2\pi r)$,
$\mu_0 = \operatorname{tg}\varrho_0$ und $\mu = \operatorname{tg}\varrho$, vrgl. S. 226 und 227

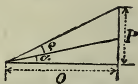
Kräfte P und Q wie vorstehend beim flachgängigen Gewinde.

1. **Gleichgewicht** besteht, solange

$$P < Q \frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu_0 \cos\alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}}{1 - \mu_0 \sin\alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}} \text{ und}$$

$$P > Q \frac{\operatorname{tg}\alpha - \mu_0 \cos\alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}}{1 + \mu_0 \sin\alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}}$$

Abb. 117.



Da α gegen β in der Regel klein ist, so ist sehr angenähert

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta} = 1 : \cos\beta$$

Bestimmt man ϱ'_0 aus $\operatorname{tg}\varrho'_0 = \mu_0 \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, so mufs sein

$$Q \operatorname{tg}(\alpha - \varrho'_0) < P < Q \operatorname{tg}(\alpha + \varrho'_0)$$

Selbsthemmung tritt ein, wenn $\alpha \lesseqgtr \varrho'_0$ ist.

2. Für die **Bewegung** der Schraube ist

$$P = Q \frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu \cos\alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}}{1 - \mu \sin\alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}}$$

Bestimmt man ϱ' aus

$$\operatorname{tg}\varrho' = \mu \cos\alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta} = \mu \sqrt{1 + \cos^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta}$$

oder sehr angenähert $\operatorname{tg}\varrho' = \dfrac{\mu \cos\alpha}{\cos\beta}$, so wird

$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha \pm \varrho')$$

Das obere Zeichen gilt für Bewegung entgegengesetzt der Richtung von Q, das untere Zeichen für Bewegung im Sinne von Q.

Wirkungsgrad $\eta = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}(\alpha + \varrho')$, bzw. $\eta = \operatorname{tg}(\alpha - \varrho') : \operatorname{tg}\alpha$.

Für das Dreieckgewinde ist also, da $\varrho' > \varrho$, der Wirkungsgrad kleiner als für das Rechteckgewinde. Für $\beta = 0$ ist η am gröfsten.

Beispiel. Es sei $\alpha = 2^0 10'$; $\beta = 27^0 30'$; $\mu = \operatorname{tg}\varrho = 0{,}16$, also $\varrho = 9^0 5{,}5'$.

Es wird $\operatorname{tg}\varrho' = \dfrac{0{,}16 \cdot \cos 2^0 10'}{\cos 27^0 30'} = 0{,}180$ also $\varrho' = 10^0 10'$

mithin $P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varrho') = Q \operatorname{tg} 12^0 10' = 0{,}216\, Q$ $\eta = \dfrac{\operatorname{tg} 2^0 10'}{\operatorname{tg} 12^0 10'} = 0{,}175$

Für Rechteckgewinde würde sein

$P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) = 0{,}199\, Q$ $\eta = 0{,}190$

Selbsthemmung in beiden Fällen.

Abb. 118. Abb. 119.

Durch Zeichnung ergibt sich P, wie aus Abb. 118 und 119 ersichtlich, indem man zuerst ϱ' aufsucht.

3. Ist für eine Schraube mit Dreieckgewinde d der Gewindedurchmesser in den Spitzen, d_1 der Kerndurchmesser und s_0 die Schlüsselweite, so ist

$$r = \frac{d + d_1}{4} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{\pi(d + d_1)}$$

$$\operatorname{tg}\varrho' = \frac{\mu \cos\alpha}{\cos\beta} \qquad r_0 = \frac{d + s_0}{4} \sim 1{,}4\, r$$

Alsdann ist zum **Anziehen der Mutter** ein Drehmoment auszuüben

$$M = Pr + Q r_0 \mu' = [\operatorname{tg}(\varrho' + \alpha) + 1{,}4\, \mu']\, Q r$$

und zum **Lösen der Mutter**

$$M = [\operatorname{tg}(\varrho' - \alpha) + 1{,}4\, \mu']\, Q r$$

wenn μ' die Reibungszahl zwischen Mutter und Unterlage und r_0 den mittleren Halbmesser der Mutter-Sitzfläche bedeutet.

Beispiel. Für eine Schraube mit **internationalem** Gewinde (vrgl. 6. Abschn., Maschinenteile, I. B.) sei $d = 20$ mm, $d_1 = 16{,}48$ mm, $h = 2{,}5$ mm, $2\beta = 60^0$; mithin $r = 9{,}12$ mm, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}04360$, $\alpha = 2^0 30'$. Ist $\mu = \mu' = 0{,}41$ so findet sich $\varrho' = 25^0 20'$.

Zum Anziehen der Mutter ist erforderlich ein Moment

$$M = (\operatorname{tg} 27^0 50' + 1{,}4 \cdot 0{,}41)\, Q r = 1{,}102\, Q r = 10{,}0\, Q \text{ in mmkg.}$$

Zum Lösen der Mutter ist erforderlich ein Moment

$$M = (\operatorname{tg} 22^0 50' + 1{,}4 \cdot 0{,}41)\, Q r = 0{,}995\, Q r = 9{,}1\, Q \text{ in mmkg.}$$

e. Zahnräder.

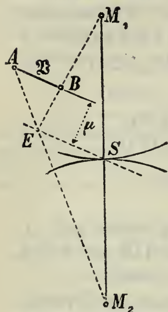
1. Stirnräder.

Bestimmung des verhältnismäfsigen Arbeitsverlustes $\mathfrak{B}$.

Berühren sich zwei Profile in E (Abb. 120) und bedeuten ES die Berührungsnormale, M_1 und M_2 die Mittelpunkte der beiden

Räder, so erhält man den verhältnismäfsigen Arbeitsverlust (s. S. 223) $\mathfrak{V}$ für die augenblickliche Stellung durch Zeichnung wie folgt: Man ziehe zu ES im Abstande μ eine Parallele. Die beiden Halbmesser M_1E und M_2E schneiden auf dieser eine Strecke AB ab, die, in demselben Mafsstabe wie μ gemessen, den Wert von $\mathfrak{V}$ angibt. (μ ist die Reibungszahl der gleitenden Bewegung.)

Abb. 120.



Für die üblichen Zahnprofilformen ist $\mathfrak{V}$ sehr annähernd proportional den Längen der Eingriffbogen e, gemessen vor und hinter der Zentrale M_1M_2. (Vrgl. Abschnitt Maschinenteile, II.) Als Mittelwert von $\mathfrak{V}$ für den Eingriftbogen e_1 ergibt sich daher (solange nur ein Zahn im Eingriff ist.) $^1/_2\mathfrak{V}_1$, wenn $\mathfrak{V}_1$ den dem Endpunkte des Eingriffbogens e_1 entsprechenden Wert von $\mathfrak{V}$ bedeutet.

Sind die Eingriffbogen vor und hinter der Zentrale gleich, so ist dieser Wert unmittelbar als mittlerer verhältnismäfsiger Arbeitsverlust $\mathfrak{V}_m$ des Zahnrädergetriebes zu betrachten.

Sind die Eingriffbogen verschieden, u. zw. gleich e_1 und e_2, die den Endpunkten der Eingriffbogen entsprechenden Werte $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$, so kann nach Grashof als Mittelwert gelten

$$\mathfrak{V}_m = \frac{\mathfrak{V}_1 e_1 + \mathfrak{V}_2 e_2}{2(e_1 + e_2)}.$$

Bedeuten z_1 und z_2 die Zähnezahlen der im Eingriffe befindlichen Räder, t die Zahnteilung, $\tau_1 = \frac{e_1}{t}$, $\tau_2 = \frac{e_2}{t}$, $\tau = \tau_1 + \tau_2$ die Eingriffsdauern, so findet sich auch

$$\mathfrak{V} = \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 + \tau_2} \sim \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)\frac{\tau}{2}.$$

Das $+$-Zeichen gilt für Vollräder, das $-$-Zeichen für Hohlräder.

Beachtet man, dafs bei einer Eingriffdauer τ zwischen 1 und 2 abwechselnd 1 und 2 Zähne im Eingriffe stehen, so erhält man für $\mathfrak{V}$ genauer

$$\mathfrak{V} = \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)(\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_1 - \tau_2 + 1) \quad \text{oder}$$

$$\mathfrak{V} \backsim \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{\tau^2}{2} - \tau + 1\right) = \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)\psi.$$

$\mu = 0{,}1$ bis $0{,}3$, je nach Material und Oberflächenbeschaffenheit der Räder, wobei diese Werte für gut eingelaufene Räder noch unterschritten, für rohe Räder noch überstiegen werden können.

Mit dem Mittelwert $\mu = 0{,}16$, $\pi\mu = 0{,}5$, wird

für $\tau = 1$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\psi = 0{,}5$	0,505	0,520	0,545	0,58	0,625	0,68	0,745	0,82	0,905	1,0

τ_1 und τ_2 sind für die gebräuchlichen Verhältnisse bei Zykloiden- und Evolventenverzahnung allein von den Zähnezahlen z_1 und z_2 abhängig, u. zw. für

Zykloidenverzahnung:

$z_1 = 7$	10	15	20	30	40	50	∞
$\tau_1 = 0{,}58$	0,60	0,64	0,66	0,68	0,69	0,71	0,75

Evolventenverzahnung:

$z_1 = 20$	25	30	40	50	60	8
$\tau_1 = 0{,}84$	0,90	0,92	0,97	0,99	1,02	1,24

Ist die Zahnform gezeichnet, so empfiehlt sich das Verfahren unter II. im Abschnitt Maschinenteile.

Bei der **zeichnerischen** Bestimmung der Reibungsverluste in einem Getriebe läfst sich der Verlust durch Zahnreibung an einem Räderpaare dadurch berücksichtigen, dafs man die Richtung des Zahndruckes nicht durch den Berührungspunkt S der beiden Teilkreise legt, sondern durch einen Punkt der Zentrale, der von S nach dem Mittelpunkte des getriebenen Rades hin um die Strecke $\xi = \mu \frac{\psi}{2} t$ verschoben ist.

2. Kegelräder.

Die Formeln unter **1.** für Vollräder gelten auch hier, wenn man

statt $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ den Wert $\sqrt{\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{2 \cos \varepsilon}{z_1 z_2}}$ setzt,

unter ε den Winkel verstanden, den die Achsen der beiden Räder miteinander bilden.

3. Schraubenräder.

Zu der eigentlichen Zahnreibung tritt noch die meist viel gröfsere Reibung hinzu, die durch Gleiten der Zähne in ihrer Breitenrichtung entsteht. Bezeichnen γ und γ_1 die Neigungswinkel der beiden Schraubenräder, so ist der von diesem Gleiten herrührende verhältnismäfsige Arbeitsverlust

$$\mathfrak{V}_s = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma} \frac{\sin (\gamma + \varrho)}{\sin (\gamma_1 - \varrho)} - 1.$$

Für den besonderen Fall der **Schraube ohne Ende** (mit $\gamma_1 = 90^0 - \gamma$) wird

$$\mathfrak{V}_s = \frac{\operatorname{tg} (\gamma + \varrho)}{\operatorname{tg} \gamma} - 1 = \frac{1 + \frac{2 \pi r}{t} \mu}{1 - \frac{t}{2 \pi r} \mu} - 1,$$

wenn t die Teilung, r den mittleren Halbmesser der Schnecke und $\mu = \operatorname{tg} \varrho$ die Reibungszahl für gleitende Bewegung bedeutet.

Der Verlust durch Zahnreibung beträgt in diesem Falle

$\mathfrak{V} = \frac{\pi \mu}{z} \psi$ (z = Zähnezahl des Schraubenrades, ψ s. S. 244).

Werte für μ vrgl. S. 227, wobei über die Abhängigkeit von μ das auf S. 227 Gesagte zu beachten ist.

Nach Stribeck für eingelaufene, eingängige Schnecken, Gufseisen auf Gufseisen (äufserer Durchmesser 25 mm, Kerndurchmesser 60 m), $z = t = 30$ mm, Zahnbreite $b = 77$ mm, P = Zahndruck, v = Gleitgeschwindigkeit im Teilkreis).

v m/sk	P kg	μ (bei 60⁰ C.)
0,5	500	0,060
1	500	0,051
1,5	500	0,047
2	400	0,040
3	250	0,030
4	160	0,025

f. Zugmittel.

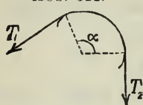
1. Kraftverhältnisse.

Ist ein Zugmittel (Riemen, Seil, Bremsband) um einen Zylinder geschlungen (Abb. 121), so besteht Gleichgewicht zwischen den Kräften T_1 und T_2, solange

$$T_2 e^{-\mu_0 \alpha} \lesseqgtr T_1 \lesseqgtr T_2 e^{\mu_0 \alpha},$$

worin α den in Bogenmafs ausgedrückten Winkel zwischen den Endnormalen, μ_0 die Reibungszahl der Ruhe (s. S. 226) und e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen (s. S. 48) bedeuten.

Abb. 121.



Die auf den Zylinder vermöge der Reibungsstützung auszuübende **Umfangskraft** $P = T - t$ beträgt daher im Höchstfalle

$$P = \frac{e^{\mu_0 \alpha} - 1}{e^{\mu_0 \alpha}} T = (e^{\mu_0 \alpha} - 1)\, t,$$

wenn mit T die gröfsere, mit t die kleinere der beiden Zugkräfte bezeichnet wird, also $T : t = e^{\mu_0 \alpha}$ ist. Werte von $e^{\mu_0 \alpha}$ s. nachst. Tafel. Es ist $e^{\pi} = 23{,}1407$ und $\lg e^{\pi} = 1{,}3643764$.

Für den Fall der gegenseitigen Bewegung zwischen Zylinder und Zugmittel ist $T = t e^{\mu \alpha}$, und der **Reibungswiderstand** am Umfange des Zylinders bzw am Zugmittel beträgt

$$W = \frac{e^{\mu \alpha} - 1}{e^{\mu \alpha}} T = (e^{\mu \alpha} - 1)\, t,$$

worin μ die Reibungszahl für gleitende Bewegung (s. S. 227) ist. — Für die Rechnung setze man überall $\alpha = 2\pi \frac{\alpha^0}{360^0}$ (s. o.).

2. Arbeitsverluste.

α. Arbeitsverlust durch Steifigkeit des Zugmittels.

1. Ist P die Spannkraft des Zugmittels an der Ablaufstelle in kg,
Q die Spannkraft des Zugmittels an der Auflaufstelle in kg,
d der Seildurchmesser oder die Ketteneisenstärke (bzw der Gelenkbolzendurchmesser) in cm,
R der Halbmesser des Wickelkreises in cm,

so bewirkt die innere **Reibungssteifigkeit** des Zugmittels beim Ablauf (für P) eine Verkürzung des Hebelarmes R um ξ_1 (in cm) und beim Auflaufe (für Q) eine Verlängerung des Hebelarmes R um ξ_2 (in cm). Es ist alsdann für gleichzeitiges Auf- und Abwickeln

$$P(R - \xi_1) = Q(R + \xi_2).$$

Angenähert ist $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, also $\xi_1 + \xi_2 = 2\xi$, so dafs sich mit hinreichender Genauigkeit ergibt

$$P = \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) Q.$$

Tafel der Werte $e^{\mu_0 \alpha}$.

Verhältnis des umspannten Bogens zum Umfang $\frac{\alpha}{2\pi}$	Lederriemen auf Scheiben aus Holz — Zustand des Riemens: etwas gefettet	Lederriemen auf Scheiben aus Gußeisen — sehr gefettet	Gußeisen — etwas gefettet	Gußeisen — feucht	Hanfseile auf Eisentrommeln	Hanfseile auf Holztrommeln	Hanfseile auf rauhem Holz	Hanfseile auf poliertem Holz	Eiserne Bremsbänder auf eisernen Scheiben
	$\mu_0 =$ 0,47	0,12	0,28	0,38	$\mu_0 = 0{,}25$	$\mu_0 = 0{,}4$	$\mu_0 = 0{,}5$	$\mu_0 = 0{,}33$	$\mu_0 = \mu = 0{,}18$
0,1	1,34	1,01	1,19	1,27	1,17	1,29	1,37	1,23	1,12
0,2	1,81	1,16	1,42	1,61	1,37	1,65	1,87	1,51	1,25
0,3	2,43	1,25	1,69	2,05	1,60	2,13	2,57	1,86	1,40
0,4	3,26	1,35	2,02	2,60	1,87	2,73	3,51	2,29	1,57
0,425	3,51	1,38	2,11	2,76	1,95	2,91	3,80	2,41	1,62
0,45	3,78	1,40	2,21	2,93	2,03	3,10	4,11	2,54	1,66
0,475	4,07	1,43	2,31	3,11	2,11	3,30	4,45	2,68	1,71
0,5	4,38	1,46	2,41	3,30	2,19	3,51	4,81	2,82	1,76
0,525	4,71	1,49	2,52	3,50	2,28	3,74	5,20	2,97	1,81
0,55	5,63	1,51	2,63	3,72	2,37	3,98	5,63	3,13	1,86
0,6	5,88	1,57	2,81	4,19	2,57	4,52	6,59	3,47	1,97
0,7	7,90	1,66	3,43	5,32	3,00	5,81	9,00	4,27	2,21
0,8	10,6	1,83	4,09	6,75	3,51	7,47	12,34	5,25	2,47
0,9	14,3	1,97	4,87	8,57	4,11	9,60	16,90	6,46	2,77
1,0	19,2	2,12	5,81	10,9	4,81	12,35	23,14	7,95	3,10
1,5	.	.	.	.	10,55	43,38	111,16	22,42	5,45
2,0	.	.	.	.	23,14	152,4	535,47	63,23	9,60
2,5	.	.	.	.	50,75	535,5	2576,0	178,5	16,9
3,0	.	.	.	.	111,3	1881	12392	502,9	29,8
3,5	.	.	.	.	244,2	6611	59610	1418	52,4

Findet nur ein Aufwickeln statt, so ist ξ_1 nicht vorhanden und

$$P = \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) Q.$$

Für Hanfseile rechne man $\xi = 0{,}03\, d^2$ bis $0{,}09\, d^2$, je nach der Beschaffenheit der Seile. (Vrgl. Abt. II, Abschn., Arbeitsmaschinen, II.)

Für Drahtseile liegen umfassende Versuche noch nicht vor.

Für Ketten ist angenähert $2\,\xi = \mu\, d$, worin $\mu = 0{,}2$ bis $0{,}3$ die Reibungszahl der Kettenglieder oder der Gelenkbolzen vom Durchmesser d ist.

2. Die **elastische Steifigkeit** des Stoffes, also der Arbeitsaufwand für die Formänderung des Zugmittels kommt für gleichzeitige Auf- und Abwicklung nicht in Betracht, da hierdurch an der Auf- und Ablaufstelle der Hebelarm R um ein Gleiches vergröſsert wird; die beim Auflaufe zum Krümmen (Biegen) des Zugmittels verbrauchte Arbeit wird also beim Ablaufe durch das Geradestrecken wieder gewonnen.

Erfolgt dagegen nur ein Aufwickeln, so ist, besonders bei Drahtseilen, der durch die Krümmung des Zugmittels bewirkte Arbeitsverlust für die Kraftverhältnisse zu berücksichtigen.

β. Arbeitsverlust durch Gleiten des Zugmittels*)

auf den Scheiben infolge seiner elastischen Dehnung (nicht durch Gleiten infolge ungenügender Reibung zwischen Scheibe und Zugmittel).

Es bezeichne

$P = T - t$ die abgesetzte Umfangskraft in kg (s. S. 246),
f den Querschnitt des Zugmittels in qcm,
$c = P : f$ die zu übertragende Kraft in kg/qcm (vrgl. Abschnitt Maschinenteile),
$\alpha = 1 : E$ die Dehnungszahl in qcm/kg,
$E = 1 : \alpha$ den Elastizitätsmodul in kg/qcm (vrgl. Abschnitt Festigkeitslehre, I.).

Infolge der Aenderung der Spannkraft von der Auflauf- zur Ablaufstelle ändert sich die Länge des Zugmittels, so dafs die treibende Scheibe ein längeres Stück aufwickelt, als sie abgibt; umgekehrt bei der getriebenen Scheibe. Hierdurch entsteht ein verhältnismäfsiger Geschwindigkeitsverlust $\mathfrak{V}$, der gleich dem verhältnismäfsigen Arbeitsverlust ist und unter der Annahme einer unveränderlichen Dehnungszahl und gleichmäfsiger Verteilung der Spannung über jeden Querschnitt des Zugmittels

$$\mathfrak{V} = \alpha \frac{T - t}{f} = \alpha \frac{P}{f}$$

für die treibende und die getriebene Scheibe zusammen (geschlossener Trieb) sein würde.

Da P an der Innenseite des Zugmittels (Riemen) übertragen wird, also exzentrisch zur Mittellinie angreift, ist die Spannung und damit die Dehnung an der die Scheibe berührenden Seite wesentlich gröfser, als $T\alpha : f$ ergibt, und demnach auch $\mathfrak{V} > \alpha P : f$. Ferner ist zu beachten, dafs α mit zunehmender Spannung abnimmt, wodurch der Wert von $\mathfrak{V}$ verringert wird.

Den Einflufs der ungleichmäfsigen Spannungsverteilung und die Veränderlichkeit von α berücksichtigt Bach durch eine Erfahrungszahl φ, so dafs

$$\mathfrak{V} = \varphi \alpha \frac{P}{f} = \varphi \frac{P}{fE} = \varphi \frac{c}{E} \text{ ist.}$$

Werte von E, vrgl. Abschnitt Festigkeitslehre. Der **Wert von φ** ist gröfser als 1 und kann nach C. Bach etwa gesetzt werden: für Lederriemen $\varphi = 2{,}0$, Hanfseile $\varphi = 1{,}25$, Drahtseile $\varphi = 1{,}5$.

Es berechnet sich dann:

1. für neue Lederriemen mit $\varphi = 2$; $c = 10$ kg/qcm; $E = 1250$ kg/qcm;
   $\mathfrak{V} = 2 \cdot 10 : 1250 = 0{,}016 = 1{,}6$ vH;
2. für gebrauchte Lederriemen mit $\varphi = 2$; $c = 10$ kg/qcm; $E = 2250$ kg/qcm;
   $\mathfrak{V} = 2 \cdot 10 : 2250 = 0{,}009 = 0{,}9$ vH;
3. für Hanfseile**) mit $\varphi = 1{,}25$; $c = 7{,}5$ kg/qcm; $E = 7500$ kg/qcm;
   $\mathfrak{V} = 1{,}25 \cdot 7{,}5 : 7500 = 0{,}00125 = 0{,}125$ vH;
4. für neue Drahtseile**) mit $\varphi = 1{,}5$; $c = 300$ kg/qcm; $E = 700\,000$ kg/qcm;
   $\mathfrak{V} = 1{,}5 \cdot 300 : 700\,000 = 0{,}00064 = 0{,}064$ vH.

---

*) Vrgl. C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 9. Aufl. Stuttgart 1903. S. 369, 388, 428 und 431.

**) c und E sind auf den tatsächlichen Querschnitt der Litze bzw. der Eisendrähte bezogen, also auf einen Querschnitt von $\backsim 0{,}66\,\pi\,d^2 : 4$ bzw. $0{,}42\,\pi\,d^2 : 4$, wenn d der Seildurchmesser ist.

B. MECHANIK TROPFBAR FLÜSSIGER KÖRPER.

I. STATIK TROPFBAR FLÜSSIGER KÖRPER.

1. Grundgesetz.

Bei tropfbaren Flüssigkeiten (z. B. Wasser) genügt die kleinste Kraft zur Verschiebung der Teile gegeneinander. Die Oberfläche, soweit nicht von festen Körpern begrenzt, bildet sich allein unter dem Einflufs der Schwere und der Massenanziehung. Die Elastizität ist sehr geringfügig. (Raumverminderung für je 1 kg/qcm Druck bei Wasser 0,000044, Aether 0,000111, Quecksilber 0,000003.)

Gesetz von Pascal: Wird eine Flüssigkeit einem äufseren Druck ausgesetzt, der nur in einer Richtung wirkt, so pflanzt sich dieser Druck auf alle Teile nach allen Richtungen hin unverändert fort.

2. Grundgleichungen von L. Euler.

Bedeuten

x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes P der Flüssigkeit,

X, Y, Z die Seitenkräfte der in P wirkenden, beschleunigenden Kraft nach den drei Koordinatenachsen,

p den Druck auf die Flächeneinheit bei P,

g die Beschleunigung durch die Schwere $= 9{,}81$ m/sk^2,

γ das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit,

so ist für ein unendlich kleines Parallelepipedon der Flüssigkeit von den Seiten dx, dy, dz, dessen eine Ecke in P liegt, im Zustande des Gleichgewichtes

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g} X \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\gamma}{g} Y \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma}{g} Z$$

$$dp = \frac{\gamma}{g} (X dx + Y dy + Z dz).$$

Für die freie Oberfläche sowie für alle Flächen gleichen Druckes (Niveauflächen) wird

$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Die Mittelkraft der drei Kräfte X, Y, Z ist in jedem Punkte winkelrecht zu den Flächen gleichen Druckes gerichtet.

3. Hydrostatischer Druck.

α. Normaldruck (oder Seitendruck) auf eine Fläche.

1. Ebene Fläche.

Bedeutet

F den Inhalt der gedrückten ebenen Fläche in qm,
h den lotrechten Abstand ihres Schwerpunktes vom Flüssigkeitsspiegel in m,
α den Neigungswinkel von F gegen die Wagerechte,
γ das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit in kg,
x und y die Koordinaten des Druckmittelpunktes (Angriffpunktes des Flüssigkeitsdruckes), wenn die x-Achse die Schnittlinie der durch F gelegten Ebene mit dem Flüssigkeitsspiegel und die y-Achse eine in derselben Ebene rechtwinklig zur x-Achse gerichtete Linie ist,
e die Entfernung der Oberkante von F von der x-Achse,
S das statische Moment
J das Trägheitsmoment } von F, bezogen auf die x-Achse,
J_{xy} das Zentrifugalmoment von F, bezogen auf die x- und die y-Achse, so ist der

Normaldruck oder Seitendruck $= Fh\gamma$,

und die Koordinaten des Angriffpunktes der Mittelkraft sind

$$y = \frac{J}{S} = \frac{J \sin\alpha}{Fh} \qquad x = \frac{J_{xy}}{S} = \frac{J_{xy}}{Fh} \sin\alpha.$$

Besitzt F winkelrecht zur x-Achse eine Symmetrieachse, die man als y-Achse wählt, so wird $x = 0$.

Abstand y für verschiedene Flächen:

Rechteck, Oberkante parallel zum Flüssigkeitsspiegel, Abstand Oberkante von Unterkante $= a$:

$$y = \frac{a}{3} \frac{3e + 2a}{2e + a} + e; \qquad \text{für } e = 0 \text{ wird } y = {}^2/_3\, a.$$

Trapez, die parallelen Seiten b_o und b_u parallel zum Flüssigkeitsspiegel, b_o die höher gelegene Seite, a der Abstand der Seite b_o von b_u:

$$y = \frac{a}{2} \frac{2e(b_o + 2b_u) + a(b_o + 3b_u)}{3e(b_o + b_u) + a(b_o + 2b_u)} + e.$$

Dreieck, Grundlinie parallel zum Flüssigkeitsspiegel, Abstand der Spitze von der Grundlinie $= a$:

Wenn die Grundlinie oberhalb der Spitze,

$$y = \frac{a}{2} \frac{2e + a}{3e + a} + e; \text{ für } e = 0 \text{ wird } y = {}^1/_2\, a;$$

wenn die Spitze im Flüssigkeitsspiegel, $y = {}^3/_4\, a$.

Kreis vom Durchmesser $2a$ oder
Ellipse mit lotrechter Hauptachse $2a$:

$$y = a + e + {}^1/_4 \frac{a^2}{a + e}.$$

Berührt der Kreis oder die Ellipse den Flüssigkeitsspiegel, so wird $y = {}^5/_4 a$.

2. Gekrümmte Fläche.

Die gekrümmte Fläche ist in ebene Teilflächen zerlegt zu denken, deren Normaldrücke, wie unter 1. angegeben, zu bestimmen sind. Durch Zusammensetzung der nach drei Richtungen zu zerlegenden Einzeldrücke erhält man zunächst in diesen Richtungen je eine Mittelkraft; die Vereinigung dieser Mittelkräfte zu einer Gesamtmittelkraft ist nur möglich, wenn sich ihre Richtungen im Raume schneiden (vrgl. **c.** S. 162).

β. Lotrechter Druck, Auftrieb und Abtrieb, Stabilität schwimmender Körper, Auftrieb gekenterter Körper.

1. Der lotrechte Druck (**Auftrieb und Abtrieb**) auf eine benetzte Fläche ist gleich dem Gewichte der lotrecht zwischen ihr und der Oberfläche der Flüssigkeit gedachten Flüssigkeitssäule. Die Mittelkraft des Druckes geht durch den Schwerpunkt dieser Flüssigkeitssäule.

2. Ein eingetauchter Körper vom Gewichte S und mit dem Schwerpunkt s erfährt einen Auftrieb (Gewichtverlust) D gleich dem Gewichte der vom Körper verdrängten Flüssigkeit (**Deplacement**), deren Schwerpunkt d sei. Der lotrechte Auftrieb geht durch den Punkt d.

Der Körper schwimmt frei (ohne Einwirkung äußerer Kräfte), wenn $D = S$ und zugleich d und s in derselben Lotrechten (Schwimmachse) liegen. Bleibt $D < S$, so sinkt der Körper unter.

Treten Kräfte hinzu, die den Körper um s drehen (kippen) und die Schwimmachse um den Winkel α ablenken, so trifft der Auftrieb D die Schwimmachse in einem Punkte, der das **Metazentrum** genannt wird.

Bedeutet noch

m den Abstand des Metazentrums vom Körperschwerpunkt s,
e den Abstand des Flüssigkeitsschwerpunktes d von s, u. zw. sei e positiv, wenn d oberhalb s liegt, sonst negativ,
F die Größe des eingetauchten Querschnittes,
b die Breite von F am Flüssigkeitsspiegel, bei $\alpha = 0$,
l die Länge von F, soweit F von gleicher Breite und Größe ist,
γ das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit,

dann gilt als **Maſs der Stabilität** das Drehmoment des Auftriebes $= F l \gamma m \sin\alpha$.

Hierin ist zu setzen:

bei parallelen ein- und austauchenden Seitenwänden

$$m = \frac{b^3}{24 F}\left(1 + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) + e,$$

bei gekrümmten Seitenwänden mit b unveränderlich innerhalb α,

$$m = \frac{b^3}{12 F}\,\frac{\sin\alpha/2}{\sin\alpha} + e.$$

Stabilität ist noch bei negativem e vorhanden, solange das Glied mit $b^3 > e$.

3. Ein gekenterter, noch Luft enthaltender Hohlkörper erfährt allein durch die eingeschlossene Luft einen Auftrieb gleich dem Gewichte der gedachten Flüssigkeitssäule, die zur Basis die Flüssigkeitsoberfläche im lufterfüllten Raume und zur Höhe den Abstand der beiden Flüssigkeitsoberflächen innerhalb und aufserhalb des Luftraumes hat.

Der Gesamtauftrieb ist gleich dem Gewichte der vom Körper und von der eingeschlossenen Luft verdrängten Flüssigkeit; die Mittelkraft des Gesamtauftriebes geht durch den Schwerpunkt, dieser Flüssigkeitsmasse. Schwimmt der Hohlkörper, so bestimmt sich seine Stabilität wie unter 2. angegeben.

γ. Druck in beliebig bestimmter Richtung.

Für eine beliebig gestaltete Fläche ist die Mittelkraft des Flüssigkeitsdruckes in einer bestimmten Richtung gleich der Summe der Produkte, für alle Flächenelemente, gebildet aus der Projektion der Elemente winkelrecht zu dieser Richtung, dem Abstand ihres Schwerpunktes vom Flüssigkeitsspiegel und dem Gewichte der Raumeinheit.

Der Druck auf eine Ebene F, deren Schwerpunktabstand vom Spiegel h ist, wird in einer Richtung, die mit F den spitzen Winkel β einschliefst, $= F h \gamma \sin\beta$.

Der Druckmittelpunkt ist dem für den Normaldruck gleich.

II. DYNAMIK TROPFBAR FLÜSSIGER KÖRPER.

A. Allgemeines.

1. Grundgleichungen von L. Euler.

Neben den Bezeichnungen a. S. 249 seien noch u, v, w die Geschwindigkeits-Komponenten des Flüssigkeitselementes in P zur Zeit t nach der x-, y- und z-Achse; dann ist

1. $$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z}$$

2. $$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{dv}{dx} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z}$$

3. $$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z}$$

4. Die physikalische Beschaffenheit der Flüssigkeit liefert eine Beziehung zwischen p und γ. Für nicht zusammendrückbare Flüssigkeiten ist γ unveränderlich. — Ferner ist allgemein:

5. $\frac{d\gamma}{dt} + \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{dy} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$ (Kontinuitätsgleichung.)

Für nicht zusammendrückbare Flüssigkeiten geht die Kontinuitätsgleichung über in

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

2. Aenderung der Oberfläche.

Durch Stoſs auf einen Teil der Oberfläche geraten alle Teile der Flüssigkeit in schwingende Bewegung (Wellen mit Interferenz und Reflexion). Die kreisförmige Bahn der Teile an der Oberfläche geht in gröſserer Tiefe in eine Ellipse über.

Mittels Gefäſses geradlinig und parallel zur ruhenden Oberfläche bewegte Flüssigkeit behält bei gleichbleibender Geschwindigkeit wagerechte Oberfläche. Bei wagerechter, gleichmäſsig beschleunigter Bewegung neigt sich die Oberfläche um den Winkel α gegen die Bewegungsrichtung

entsprechend $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{g}$, wobei bedeutet

p die Beschleunigung der Flüssigkeit und
g die Beschleunigung durch die Schwere ($= 9{,}81$ m/sk²).

Dreht sich eine Flüssigkeit in einem zylindrischen Gefäſse vom Halbmesser r (in m) um dessen lotrechte Achse mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ω, so bildet die Oberfläche eine Höhlung (Umdrehungsparaboloid), deren tiefster Punkt um $0{,}0255\, r^2\omega^2$ (in m) unter der dem Ruhezustande entsprechenden Oberfläche liegt.

Dreht sich die Flüssigkeit in beliebig gestaltetem Gefäſs um eine wagerechte Achse (Wasserräder) mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ω, so krümmt sich die Oberfläche nach einem liegenden Zylinder, dessen Achse um $9{,}81 : \omega^2$ (in m) lotrecht über der Umdrehungsachse liegt.

B. Ausfluſs durch Oeffnungen in Gefäſsen oder Stauanlagen.

Die Richtung des ausflieſsenden Strahles ist bei dem Durchfluſs durch Oeffnungen

1. ohne Ansätze (Mundstücke, Gerinne) in dünner oder mit zugeschärften Durchfluſskanten versehener Wandung:
    a) winkelrecht zu der durch die Durchfluſskanten gelegten Ebene, wenn sich die Oeffnung gänzlich unter dem Flüssigkeitsspiegel befindet,
    b) wagerecht, wenn die Oeffnung in den Flüssigkeitsspiegel hineinragt (Ueberfall mit lotrechtem oder geneigtem Wehr);
2. ohne Ansätze, aber in so dicker Wandung, daſs der Strahl die Seitenflächen der Oeffnung bestreicht: parallel oder achsial zu diesen Seitenflächen;
3. mit Ansätzen (inneren oder äuſseren Einfassungen, Gerinnen, Mundstücken): soweit sie vom Strahl benetzt werden, parallel oder achsial zu ihnen.

Als mafsgebende Durchflufsöffnung ist der kleinste Querschnitt der Oeffnung anzusehen (vrgl. Abb. 127—131).

Die Flüssigkeitsfäden des Strahles verlaufen parallel nur bei kreisförmiger Oeffnung in dünner Wandung oder bei Ansätzen mit parallelen Seiten; andernfalls durchkreuzen sich die Fäden wellenförmig. Scharfen Durchflufskanten folgt Einschnürung (Kontraktion) des Strahles; ihr folgt schnelle Wiederausbreitung des Strahles bei ausreichend langer Einfassung der Oeffnung. Der Querschnitt des frei ausfliefsenden Strahles verkleinert sich allmählich bei fallender Strahlrichtung; er vergröfsert sich allmählich bei ansteigender Richtung infolge abnehmender Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen. Die Strahlachse folgt den Gesetzen für die Wurfbewegung.

Die Geschwindigkeit der einzelnen Fäden ist fast gleich am Querschnitt der Strahleinschnürung nach dem Durchflufs scharfer Kanten, und sie wird wesentlich verschieden nach der Wiederausbreitung des Strahles infolge seiner Anlegung an die Seitenwände von Ansätzen; diese verzögern die Geschwindigkeit der einzelnen Fäden, und zwar umsomehr, je näher letztere der Wandung liegen.

Der Zuflufs zur Oeffnung ist allseitig radial auf den Schwerpunkt der Oeffnung gerichtet; die Zuflufsgeschwindigkeit der Flüssigkeitselemente nimmt mit ihrem Abstande von der Oeffnung schnell ab und beträgt z. B. bei kreisrunder Oeffnung im Abstand gleich ihrem doppelten Durchmesser nur 6 vH der Geschwindigkeit an der Oeffnung selbst.

1. Ausflufs bei unveränderlicher Druckhöhe.

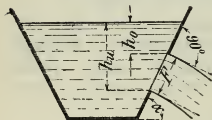
(Ausflufsmenge, Ausflufsgeschwindigkeit.)

Es bedeute (s. Abb. 122)

F die mafsgebende Ausflufsöffnung in qm, d. i. der kleinste Durchflufsquerschnitt der Oeffnung rechtwinklig zur Richtung des Ausflufsstrahles; bei Mundstücken mit gleichbleibenden Querschnitten befindet sich die mafsgebende Oeffnung am Ende des Auslaufes;

α den Winkel zwischen F und der Wagerechten,

Abb. 122.



v_0 die theoretische mittlere Ausflufsgeschwindigkeit in der Oeffnung F in m/sk,

c_0 die Komponente der Zuflufsgeschwindigkeit zum Gefäfs in der Stromrichtung des des Ausflufsstrahles, soweit der Zuflufsstrahl unmittelbar auf die Ausflufsöffnung trifft, in m/sk,

μ die Ausflufszahl (Wirkungsgrad) für die Ausflufsgeschwindigkeit in F, d. i. das Verhältnis der mittleren Ausflufsgeschwindigkeit zur theoretischen, auch der tatsächlichen zur theoretischen Ausflufsmenge. Weiteres s. S. 259 u. f.,

Q die tatsächliche Ausflufsmenge in cbm/sk $= \mu\, v_0\, F$,

h_o die Tiefe der Oberkante von F unter dem ideellen Oberwasserspiegel in m (in einiger Entfernung von der Oeffnung F gemessen). Die ideelle Höhe des Oberwasserspiegels bestimmt sich aus der Höhe des tatsächlichen Oberwasserspiegels $+ (c^2 : 2g) \pm$ Luftdruckunterschied am Oberwasserspiegel und am Ausflufsstrahl, in m Flüssigkeitssäule (der ausfliefsenden Flüssigkeit) gemessen,

h_u den Abstand der Unterkante von F, wie h_o gemessen,

H bei Ausflufs unter Wasser den Abstand des Unterwasserspiegels vom ideellen Oberwasserspiegel, in m wie h_o gemessen,

g die Beschleunigung durch die Schwere ($= 9{,}81$ m/sk²); $\sqrt{2\,g} = 4{,}4294$.

Bei gleichförmiger Bewegung des Ausflufsgefäfses bleibt das Gefälle unverändert wie bei ruhendem Gefäfs.

Bei lotrecht beschleunigter Bewegung nach aufwärts oder abwärts um p in m/sk² ist in den Formeln statt g bei Aufwärtsbewegung $(g+p)$, bei Abwärtsbewegung $(g-p)$ zu setzen.

Bei Umdrehung des Gefäfses mit der Umlaufgeschwindigkeit w an der Ausflufsöffnung (in m/sk) vermehrt sich das nutzbare Gefälle bei F um $\frac{w^2}{2g}$.

1. Lage der Ausflufsöffnung beliebig.

Bedeutet noch

h den Abstand eines beliebigen, durch wagerechte Teilung von F erhaltenen Flächenteilchens von der lotrechten Höhe dh, wie h_o gemessen,

y die Breite dieses Flächenteilchens in m, so ist

$$Q = \frac{\mu\sqrt{2g}}{\sin\alpha}\int_{h_o}^{h_u} y\sqrt{h}\,dh = \mu v_o F; \qquad v_o = \sqrt{2g}\,\frac{\int_{h_o}^{h_u} y\sqrt{h}\,dh}{\int_{h_o}^{h_u} y\,dh}.$$

Wenn y unveränderlich $= b$, wird $Q = \frac{2}{3}\frac{\mu b}{\sin\alpha}\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_u^3} - \sqrt{h_o^3}\right)$.

Wird die Druckhöhe nicht in m Flüssigkeitssäule, sondern mittels des Druckes q in kg/qm der Ausflufsöffnung gemessen und bedeutet γ das Gewicht der Flüssigkeit in kg/cbm, so ist hier allgemein $h = q:\gamma$ einzusetzen.

Für jedes in das Abflufswasser eintauchende Flächenteilchen ist dessen Abstand vom Unterwasserspiegel als Gegendruck in Abzug zu bringen; somit ist **für den eingetauchten Teil** der Oeffnung **(Rückstau)**

$$v_o = \sqrt{2gH}.$$

2. Wagerechte Bodenöffnung. $\alpha = 0$, $h_o = h_u$.

Ausflufs ins Freie: $v_o = \sqrt{2g\,h_u}$

Ausflufs unter Flüssigkeit: $v_o = \sqrt{2gH}$.

3. Seitenöffnung ohne Rückstau, Ausflufs ins Freie. **Durchlafs und Ueberfall ohne Rückstau:** F sei eine der folgenden Flächen:

Rechteck oder **Parallelogramm,** Oberkante parallel dem Flüssigkeitsspiegel, Breite $= b$, Abstand der wagerechten Kanten $= a$.

Durchlafs:

$$F = b\,a = \frac{(h_u - h_o)}{\sin\alpha}; \qquad v_o = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,\frac{h_u^{3/2} - h_o^{3/2}}{h_u - h_o},$$

oder angenähert, wenn $h_u - h_o = a\sin\alpha$ gesetzt wird und h_s die Tiefe des Schwerpunktes von F unter dem ideellen Oberwasserspiegel in m bedeutet, $[h_s = \frac{1}{2}(h_u + h_o)]$:

$$F = ab; \qquad v_o = \left[1 - \frac{1}{96}\left(\frac{a\sin\alpha}{h_s}\right)^2\right]\sqrt{2g\,h_s}.$$

Ueberfall oder Einschnitt: Strahlrichtung stets wagerecht, also unabhängig von der Neigung α des Wehrs, daher $F = b\,(h_u - h_o) = a\,b \sin\alpha$; Oberwasserspiegl in einiger Entfernung vor dem Ueberfall mafsgebend.

Bei nicht zu vernachlässigender Zuflufsgeschwindigkeit c liegt der ideelle Wasserspiegel um $c^2 : 2\,g$ über der Oberkante des Ausflufsquerschnittes F, weshalb dann in die Formel für v_o des Durchlasses $h_u = a \sin\alpha + c^2/2\,g$ und $h_o = c^2 : 2\,g$ zu setzen ist.

Kann aber $c^2 : 2\,g$ vernachlässigt werden, so wird $h_o = 0$, somit

$$F = b\,h_u = a\,b \sin\alpha; \qquad v_o = {}^2/_3 \sqrt{2\,g\,h_u}.$$

Dreieck, die Grundlinie von der Länge b und in der Tiefe h_o parallel zum Flüssigkeitsspiegel, die Spitze in der Tiefe h_u, in m:

$$Q = \frac{2}{15}\;\frac{\mu\,b\sqrt{2\,g}}{\sin\alpha}\;\frac{2\,h_u^{5/2} - 5\,h_u\,h_o^{3/2} + h_o^{5/2}}{h_u - h_o};$$

oder für $h_o = 0$, wofür zugleich $\sin\alpha = 4$ wird,

$$Q = \frac{4}{15}\,\mu\,b\,h_u\sqrt{2\,g\,h_u}; \qquad v_o = \frac{8}{15}\sqrt{2\,g\,h_u}.$$

Liegt die Spitze des Dreiecks oben in der Tiefe h_o, die Grundlinie in der Tiefe h_u, so sind in der Gleichung für Q die Zeichen h_u und h_o miteinander zu vertauschen.

Trapez, mit wagerechten parallelen Seiten: zerlege dasselbe in Parallelogramm und Dreieck und summiere die für diese angegebenen Werte von Q; dann ist $v_o = Q : \mu F$.

Für $h_o = 0$, also $\sin\alpha = 1$, wird mit der Länge b_o für die obere und b_u für die untere der parallelen Seiten:

$$Q = \frac{2}{15}\,\mu\,h_u\sqrt{2\,g\,h_u}\,(2\,b_o + 3\,b_u)$$

$$v_o = \frac{4}{15}\sqrt{2\,g\,h_u}\;\frac{2\,b_o + 3\,b_u}{b_o + b_u}.$$

Kreis, vom Halbmesser r und der Mittelpunkt in der Tiefe h_s in m:

$$Q = \mu\,r^2\pi\sqrt{2\,g\,h_s}\left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r\sin\alpha}{h_s}\right)^2 - \frac{5}{1024}\left(\frac{r\sin\alpha}{h_s}\right)^4 - \cdots\right].$$

$$v_o = \frac{Q}{\mu\,\pi\,r^2};$$

Reicht die Kreisöffnung bis zum Wasserspiegel und steht sie lotrecht, so ist

$$Q = 0{,}964\,\mu\,F\sqrt{2\,g\,h_s}, \qquad v_o = 0{,}964\sqrt{2\,g\,h_s}.$$

4. Seitenöffnung (F lotrecht) mit Rückstau. Grundwehr und Grunddurchlafs. Oeffnung von gleicher Breite b; für $c^2/2\,g$ wird die Höhe h_c gesetzt, H enthält bereits den Wert h_c. μ_1 bezieht sich auf den oberen Teil der Oeffnung ohne Rückstau, μ_2 auf den unteren, dem Rückstau ausgesetzten Teil.

Abb. 123:

$$Q = b\sqrt{2g}\left[{}^2/_3\,\mu_1\left(H^{3/2} - h_c^{3/2}\right) + \mu_2\, b\,(h_u - H)\sqrt{H}\right];$$

Abb. 124, Durchlafs mit teilweisem Rückstau:

$$Q = b\sqrt{2g}\left[\frac{2}{3}\mu_1\left(H^{3/2} - h_o^{3/2}\right) + \mu_2\,(h_u - H)\sqrt{H}\right];$$

Abb. 123.

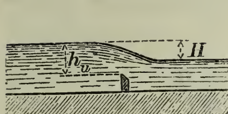


Abb. 124.

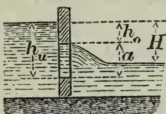


Abb. 125.

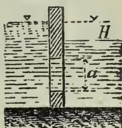


Abb. 125, Durchlafs mit vollständigem Rückstau, Grundablafs:

$$Q = \mu\, b\, a\sqrt{2\,g\,H}.$$

2. Ausflufs bei veränderlicher Druckhöhe (Ausflufsdauer).

Es bedeutet

O_0 die Oberfläche der Flüssigkeit bei Beginn des Ausflusses in qm,
O_t die Oberfläche nach t sk in qm,
F die Projektion der Ausflufsöffnung auf eine zur Stromrichtung an der Mündung winkelrechte Ebene in qm,
H_0 die Druckhöhe in m bei Beginn des Ausflusses,
H_t die Druckhöhe in m nach der Ausflufszeit t,
t die Dauer des Ausflusses in sk,
Q die tatsächliche Ausflufsmenge in cbm/sk,
v_o die theoretische mittlere Ausflufsgeschwindigkeit während der Ausflufsdauer in m/sk, also $Q = F v$;
μ und g s. S. 254.

1. Bodenöffnung wagerecht, Gefäfs prismatisch.

a) Es findet kein Zuflufs statt, also $\mu\, F v t = \mu\, O_0\,(H_0 - H_t) = Q t$.

$$v_o = \sqrt{2g}\left(\frac{\sqrt{H_0} + \sqrt{H_t}}{2}\right),$$ gleichbleibende Verzögerung $p = g\left(\frac{\mu\, F}{O_0}\right)^2$;

ohne Rücksicht auf die Zuflufsgeschwindigkeit zur Bodenöffnung wird

$$t = \frac{2\,O_0}{\mu\, F\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t}\right) = 0{,}452\,\frac{O_0}{\mu\, F}\left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t}\right),$$

mit Rücksicht hierauf setze statt O_0 den Wert $\sqrt{O_0^2 - \mu^2 F^2}$.

b) Das Gefäfs erhält gleichzeitig Zuflufs durch die unveränderliche Flüssigkeitsmenge Q_1 in cbm/sk.

Wenn $Q_1 > \mu\, F\sqrt{2\,g\,H_0}$, so steigt die Oberfläche; sie fällt, wenn $Q_1 < \mu\, F\sqrt{2\,g\,H_0}$. Sobald ein Höhenunterschied $H_x = \frac{1}{2\,g}\left(\frac{Q_1}{\mu\, F}\right)^2$

erreicht ist, bleiben H_r und die Ausflufsgeschwindigkeit unverändert. Die Zeit bis zur Erreichung dieses Beharrungszustandes ist unendlich grofs. Die Zeit bis zur Erreichung der Druckhöhe H_t beträgt

$$t = \frac{2\,O_0}{\mu F \sqrt{2g}} \left[\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t} + \frac{Q_1}{\mu F \sqrt{2g}} \ln \frac{\mu F \sqrt{2 g H_0} - Q_1}{\mu F \sqrt{2 g H_t} - Q_1} \right].$$

2. Bodenöffnung wagerecht, Gefäfs nicht prismatisch, kein Zuflufs, t bedeute die Dauer bis zur Entleerung des Gefäfses, also $H_t = 0$:

Keilförmiges Gefäfs, O_0 rechteckig:

$$t = \frac{2\,O_0 H_0}{3\,\mu F \sqrt{2 g H_0}} \qquad Q = \frac{O_0 H_0}{2\,t}.$$

Pyramidenförmiges Gefäfs:

$$t = \frac{2\,O_0 H_0}{5\,\mu F \sqrt{2 g H_0}} \qquad Q = \frac{O_0 H_0}{3\,t}.$$

Obeliskenförmiges Gefäfs (Ponton), O_0 rechteckig:

Länge und Breite von O_0 seien l und b,
Länge und Breite des Bodens O_1 seien l_1 und b_1:

$$t = \left[3\,O_0 + 8\,O_1 + 2\,(b\,l_1 + b_1 l) \right] \frac{2\,H_0}{15\,\mu F \sqrt{2 g H_0}}.$$

Paraboloidisches Gefäfs (Teich) $O_0 = r^2 \pi$:

$$t = \frac{2\,O_0 H_0}{3\,\mu F \sqrt{2 g H_0}} \qquad Q = \frac{O_0 H_0}{2\,t}.$$

Kugelabschnittförmiges Gefäfs vom Halbmesser r in m:

$$t = \frac{2}{15} \frac{\pi\,(10\,r - 3\,H_0)\,H_0^{3/2}}{\mu F \sqrt{2g}};$$

für die Halbkugel mit $H_0 = r$ wird $t = \frac{14\,\pi\,r^2 \sqrt{r}}{15\,\mu F \sqrt{2g}}$.

Unregelmäfsig gebildetes Gefäfs (**Talsperre**):

Nach der Simpsonschen Regel lege man in gleichen Abständen voneinander n wagerechte Schnitte durch den Flüssigkeitskörper, wodurch die Oberflächen O_1, O_2 ... O_n und die entsprechenden Druckhöhen H_1, H_2 ... H_n gebildet werden. n mufs eine gerade Zahl sein. Dann ist

$$t = \frac{H_1 - H_n}{3\,n\,\mu F \sqrt{2g}} \left[\frac{O_1}{\sqrt{H_1}} + \frac{4\,O_2}{\sqrt{H_2}} + \frac{2\,O_3}{\sqrt{H_3}} + \frac{4\,O_4}{\sqrt{H_4}} + \cdots \frac{O_n}{\sqrt{H_n}} \right],$$

$$Q = \frac{H_1 - H_n}{3\,n\,t} (O_1 + 4\,O_2 + 2\,O_3 + 4\,O_4 + \cdots O_n).$$

3. Seitenöffnung lotrecht ohne Rückstau. Oeffnung rechteckig von der Breite b in m, Gefäfs prismatisch, kein Zuflufs.

Die Seitenöffnung reicht bis zum anfänglichen Flüssigkeitsspiegel **(Ueberfall)**, H_0 und H_t bis zur Unterkante des Ueberfalles gemessen, Ausflufs ins Freie:

$$t = \frac{3\,O_0}{\mu b \sqrt{2g}} \left(\frac{1}{\sqrt{H_t}} - \frac{1}{\sqrt{H_0}} \right); \qquad t = \infty \text{ für } H_t = 0.$$

Die Seitenöffnung verbleibt während des Ausflusses unter dem Flüssigkeitsspiegel, kein Rückstau **(Durchlafs ohne Rückstau)**. H_0 und H bis zum Schwerpunkte von F gemessen, also H_t mindestens gleich halber Höhe der Oeffnung. Angenähert ist

$$t = \frac{2\,O_0}{\mu F \sqrt{2g}} \left[\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t} - \frac{1}{288} \left(\frac{F}{b} \right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{H_0^3}} - \frac{1}{\sqrt{H_t^3}} \right) \right]$$

und praktisch genau genug

$$t = \frac{2\,O_0}{\mu F \sqrt{2g}} \left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t} \right) = \begin{cases} \text{Ausdruck wie für den Ausflufs aus} \\ \text{einer Bodenöffnung, s. S. 257.} \end{cases}$$

4. Ausgleich der Flüssigkeitsspiegel zwischen zwei miteinander verbundenen prismatischen Gefäfsen mit den wagerechten Querschnitten O_1 und O_2 und mit den Spiegelabständen H_0 und H_t.

Durchlafsöffnung ständig unter Wasser **(Durchlafs mit Rückstau)**:

$$t = \frac{2\,O_1\,O_2 \left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t} \right)}{\mu F (O_1 + O_2) \sqrt{2g}}.$$

Ist O_1 sehr grofs gegen O_2, so ergibt sich der Wert unter 3., O_2 statt O_0 gesetzt

5. Zusammengesetzter Ausflufs **(Durchlafs mit zeitweisem Rückstau,** einfache Schleusenkammer, Abb. 126). Das Gefäfs ist prismatisch und vom Querschnitt O_0 innerhalb der wechselnden Wasserspiegelhöhen. H_2 reicht bis zum Schwerpunkte von F_1.

Zeit zum Anfüllen:

$$t = \frac{O_0 (H_1 + 2\,H_2)}{\mu_1 F_1 \sqrt{2\,g\,H_2}},$$

Zeit zum Entleeren:

$$t = \frac{2\,O_0 \sqrt{H_1 + H_2}}{\mu_2 F_2 \sqrt{2g}}.$$

Abb. 126.

3. Ausflufszahlen μ für Wasser beim Ausflufs durch Oeffnungen.

Der Wert μ liegt im allgemeinen zwischen 0,5 und 1,0 und wird hauptsächlich durch die Einschnürung des Wasserstrahles nahe dem Ausflufsquerschnitt, in geringerem Mafse durch die Verminderung der

Durchflufsgeschwindigkeit infolge Reibung an den Kanten der Durchflufsöffnung oder Wirbelung der Flüssigkeitsfäden beeinflufst. Es verbleibt somit nur ein Strahlquerschnitt αF und eine Geschwindigkeit φv, so dafs $\mu = \alpha \varphi$ zu setzen ist. Im allgemeinen wird die Einschnürung verringert, also α vergröfsert, durch Verdickung oder Abrundung der Durchflufskanten, Abweichung von der kreisrunden Form für die Oeffnung durch Störung ungehinderten Zuflusses zur Oeffnung (Nähe von Boden- oder Seitenwand, Auftreten von wesentlicher Zuflufsströmung), durch Ansatzgerinne oder Mundstücke. Die Einschnürung verläuft gestreckter bei gröfserer Ausflufsgeschwindigkeit, so dafs bei ihr Mundstücke verhältnismäfsig länger sein müssen, um einen die letzteren füllenden Ausflufs zu erhalten. Die Geschwindigkeitszahl φ ist beim Ausflufs aus dünner Wandung am gröfsten, etwa 0,97, so dafs der Arbeitsverlust bei solchem Ausflufs nur etwa $(1 - 0{,}97^2) = 6$ vH beträgt.

α. Flüssigkeitsspiegel in der Oeffnung; Ueberfallwehr.

Es bedeute B die Kanalbreite in m, b die Wehrbreite in m, h_k die Kanaltiefe in m, h_u die Tiefe der Wehrkante unter dem Wasserspiegel in m (letzterer mehrere m vor dem Ueberfall mafsgebend).

1. $b = B$, keine seitliche Einschnürung des Ueberfallstrahles, scharfe Ueberfallkante, Zuflufsgeschwindigkeit berücksichtigt, Raum unter dem Ueberfall gut gelüftet.

Bei lotrechtem Wehr, nach Freese*) solange $b > h_u$ und $h_u > 0{,}1$ m,

$$\mu = \left(0{,}6150 + \frac{0{,}0021}{h_u}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{h_u}{h_k}\right)^2\right],$$

im Mittel $\mu = 0{,}63.$

Bei geneigtem Wehr, wenn φ den Winkel zwischen Wehr und Boden auf der Zuflufsseite und μ_1 den Wert für das lotrechte Wehr bedeutet (nach Bazin):

bei $\varphi =$ 45°	71°	90°	135°	153°	> 153°,
$\mu = \mu_1 \cdot$ 0,93	0,96	1,00	1,10	1,11,	wieder abnehmend.

Ohne Luftzutritt unterhalb des Ueberfallstrahls wächst μ (nach Bazin)

bei $h_u < 0{,}23$ m bis zum 1,08-fachen	des Wertes von μ für den Fall mit Lüftung.
„ $h_u \sim 0{,}23$ m „ „ 1,29 „	
„ $h_u > 0{,}29$ m „ „ 1,15 bis 1,19-fachen	

Bei breiter Wehrkrone von der Stärke δ in m, wenn μ_2 den Wert für scharfe Wehrkrone bedeutet:

$h_u < 1{,}5\,\delta$ (der Strahl benetzt die Wehrkrone),

bei $h_u : \delta =$ 0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50,
$\mu =$ 0,75	0,78	0,82	0,86	0,90	0,93 μ_2;

bei $h_u \sim 1{,}5$ bis $2{,}0\,\delta$ ist die Benetzung der Krone nicht mehr sicher zu erhalten, und bei $h_u > 2\,\delta$ springt der Stahl frei über die Wehrkrone, so dafs μ den Wert wie bei scharfer Ueberfallkante erhält.

*) S. Z. d. V. d. I. 1890 S. 1285.

2. $b < B$, seitliche Einschnürung des Strahles vorhanden, allseitig scharfe Durchflufskanten, Zuflufsgeschwindigkeit berücksichtigt, lotrechte Wandung*). (Nach Freese für h_u zwischen 0,1 und 0,6 m):

$$\mu = m\left\{1 + \left[0{,}025\left(\frac{b}{B}\right)^2 + 0{,}25 + \frac{0{,}0375}{(h_u : h_k)^2 + 0{,}02}\right]\left(\frac{h_u}{h_k}\right)^2\right\}, \text{ worin}$$

$$m = 0{,}5755 + \frac{0{,}017}{h_u + 0{,}18} - \frac{0{,}075}{b + 1{,}2} \text{ zu setzen ist.}$$

β. Flüssigkeitsspiegel oberhalb der Oeffnung; Bodenöffnung oder seitlicher Durchlafs.

1. Oeffnung ohne Ansatz, mit zugeschärften Durchflufskanten oder in dünner Wandung.

a) Der vor der Oeffnung befindliche Zuflufsquerschnitt F_z sei mindestens 10 mal so grofs wie der Querschnitt F der Oeffnung:

Bei gröfserer Tiefe und gröfserer Oeffnung: $\mu = 0{,}61$.

Bei kleineren Mafsen nach Weisbach:

Durchmesser der Oeffnung	0,44	1	2	3	4 cm
Wassertiefe 0,25 m . . .	μ = 0,68	0,64	0,63	0,62	0,614
„ 0,60 m . . .	μ = 0,66	0,63	0,62	0,61	0,607

Beim Ausflufs unter Wasser ist μ etwa 0,01 kleiner als vorstehend.

b) Der vor F befindliche Zuflufsquerschnitt $F_z \lesseqgtr 10\,F$: Multipliziere (nach Weisbach) vorstehende Werte μ mit folgenden Zahlen,

wenn $F : F_z$ =	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
F kreisrund	1,014	1,034	1,06	1,09	1,13	1,19	1,26	1,35	1,47	1,63
F rechteckig	1,019	1,042	1,07	1,11	1,15	1,21	1,28	1,36	1,47	1,61

Bemerkung: μ für teilweis umkränzte Oeffnungen in dünner Wand s. Seite 262.

2. Oeffnung mit kurzem Ansatz (Mundstück, Gerinne).
(Angaben nach Weisbach.)

Größere Durchflufsgeschwindigkeit vermindert μ ein wenig, etwa im Verhältnis der unter 1a) angegebenen Werte; sie fordert bei vorhandener Kontraktion an der Einlaufkante zur Ausfüllung des Mündungsquerschnittes eine gröfsere Länge. Ohne solche Ausfüllung gelten die Werte μ unter 1. Gröfsere Länge mit ausgefülltem Querschnitt verkleinert μ infolge Reibung an der Wandung nach Maßgabe der Verhältnisse für gefüllte Rohrleitungen.

Sehr kleiner oder schmaler Mündungsquerschnitt vermindert die Einschnürung bei scharfer Einlaufkante Abb. 128 und vergröfsert somit μ (vergl. die Angabe unter 1a).

*) Zusammenstellung älterer Versuche vgl. Bornemann, Civ. Ing. 1880 S. 297. Bei geneigtem Wehr multipliziere μ mit den unter 1. für verschiedene Winkel angegebenen Zahlen.

a) **Rechtwinklig** zur Wandung **angesetzte runde Mundstücke.**

Abb. 127,	$\delta =$	0^0	$5^3/_4{}^0$	$11^1/_4{}^0$	$22^1/_2{}^0$	45^0	$67^1/_2{}^0$	90^0
Kante a stark abgerundet:	$\mu =$	0,97	0,95	0,92	0,88	0,75	0,68	0,63 ($l = 3d$)
Kante a scharf:	$\mu =$	0,83	0,94	0,92	0,85	.	.	. ($l = 2{,}6d$)

Abb. 128, Kante a scharf $l = 3$ bis 5, μ etwa 0,82.

Kante a schwach abgerundet, μ etwa 0,90, stark abgerundet, μ etwa 0,97. (Siehe auch Angabe zu Abb. 130.)

Abb. 127.

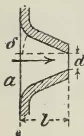


Abb. 128.

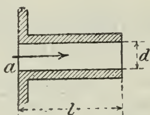


Abb. 129.

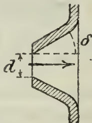


Abb. 130.

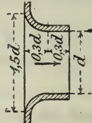


Abb. 131.

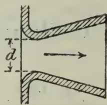


Abb. 129, Dicke der Durchflußkanten wenigstens 5 mm:

$\delta =$	0^0	$22^1/_2{}^0$	45^0	$67^1/_2{}^0$	90^0
$\mu =$	0,54	0,55	0,58	0,60	0,63 ($l = d$).

Ist die Oeffnung der Zuflufsrichtung entgegen schneidenartig zugeschärft, so nimmt μ bei $\delta = 0^0$ den kleinsten möglichen Wert 0,50 an.

Abb. 130, für $l = 0{,}6\,d$, mit der Glätte der Wandung und der Durchflufsgeschwindigkeit wachsend,

$$\mu = 0{,}96 \text{ bis } 0{,}99.$$

Abb. 132.

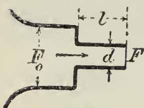


Abb. 131. Je nach Stutzenlänge und Durchflufsgeschwindigkeit ist $\mu = 0{,}96$ bis 1,5 (bezogen auf den engeren Querschnitt); Austritt besenförmig, hohler Strahl (vergl. S. 275, γ).

Abb. 132, $l = 3\,d$, F und F_0 bedeuten Querschnitte. Multipliziere den Wert μ für Abb. 128,

wenn $\frac{F}{F_0} =$ 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,00
mit 1,013	1,027	1,043	1,06	1,08	1,10	1,13	1,15	1,18	1,23

b) **Schiefwinklig angesetzte Rohrstutzen** mit scharfer Einlaufkante und $l = 3d$, wenn γ den Winkel zwischen Wandfläche und Strahlachse bedeutet:

$\gamma =$	90^0	80^0	70^0	60^0	50^0	40^0	30^0
$\mu =$	0,82	0,80	0,78	0,76	0,75	0,73	0,72

c) **Teilweis umkränzte Oeffnungen** in dünner Wand durch aufsen oder innen, parallel zur Stromrichtung angesetzte Gerinne (Ansatzgerinne, Mundstücke in Bodenhöhe):

Bedeutet n den umkränzten Anteil des Umfanges der Oeffnung, so vergröfsere (nach Bidone und Weisbach) den auf S. 261 unter β

angegebenen Wert μ, soweit er für allseitig scharfe Durchflufskanten gültig ist, um

0,128 n bei kreisförmigen Oeffnungen,
0,134 n bei kleinen rechteckigen Oeffnungen,
0,157 n bei gröfseren rechteckigen Oeffnungen.

C. Durchflufs durch gefüllte Leitungen.

Jeder Geschwindigkeit v der Flüssigkeit in m/sk entspricht ohne Rücksicht auf die Widerstände ein Aufwand an Fallhöhe (**Geschwindigkeitshöhe**) $= \frac{v^2}{2g}$ (in m), worin $g = 9{,}81$ m/sk² (s. Tafel S. 193 u. 194).

Die Widerstände sind unabhängig von der Seitenpressung der Flüssigkeit. Abhängig von der Seitenpressung und dem gleichzeitigen Wärmegrad entwickelt jede Flüssigkeit Dämpfe und nimmt mechanisch gebundene Gase auf oder gibt solche ab. Z. B. absorbiert Wasser bei 1 at Druck absol. und 15° an R.-T. 0,02 Luft, 1,0 Kohlensäure, 3,2 Schwefelwasserstoff, 450 Chlorwasserstoff, 727 Ammoniakgas (s. Abschn. Wärme). Daher hört der Durchflufs einer Leitung an ihrer Scheitelstrecke auf, sobald sich hier infolge Verminderung der Seitenpressung oder durch Erwärmung Gase oder Dämpfe ansammeln. Erwärmung der Flüssigkeit vergröfsert ihren Flüssigkeitsgrad und demzufolge auch ihre Durchflufsgeschwindigkeit. Bei sehr engen Rohren oder bei sehr kleinen Geschwindigkeiten fliefsen die Flüssigkeitsteile parallel zueinander; bei den meist betrachteten Rohrweiten und Geschwindigkeiten dagegen fliefsen sie durcheinanderwirbelnd im Rohr entlang. Beide Zustände werden durch die sogen. kritische oder Grenz-Geschwindigkeit getrennt.

Letztere erstreckt sich über eine kleine Geschwindigkeitsstufe mit labilem Bewegungszustand.

Der Flüssigkeitsfaden in der Rohrmitte fliefst am schnellsten; der an der Wandung fliefst etwa halb so schnell beim Zustand oberhalb der kritischen Geschwindigkeit, dagegen befindet er sich bei dem anderen Zustande in Ruhe. Bei kreisförmigem Rohrquerschnitt beträgt die mittlere Geschwindigkeit aller Flüssigkeitsfäden von der in der Rohrmitte etwa 0,84 im ersten, 0,5 im anderen Fall des Bewegungszustandes.

1. Allgemeine Beziehungen für Leitungen mit wechselnden Höhenlagen, Querschnitten und Widerständen.

Abb. 133 zeigt die Druckverhältnisse in einer Heberleitung, Abb. 134 die in einer Saugleitung.

Es bedeutet

F_e und F_a den Einlauf- bezw. Ausflufsquerschnitt der Leitung in qm,
F_s den Querschnitt am Scheitel der Leitung in qm,
F_1, F_2 usw. Querschnitte der Leitung zwischen F_e und F_a, winkelrecht zur Stromrichtung gemessen, in qm,

v_e, v_1, v_a usw. die mittlere Durchflufsgeschwindigkeit in m/sk in den Querschnitten F_e, F_1, F_a usw.,

v_0 die Q_0 entsprechende, theoretische mittlere Ausflufsgeschwindigkeit im Ausflufsquerschnitt F_a, in m/sk,

v_z die Komponente der Zulaufgeschwindigkeit zu F_e in der Richtung der Einlaufgeschwindigkeit in m/sk. Vorausgesetzt ist dabei, dafs der Zulaufstrom den Einlaufquerschnitt F_e unmittelbar trifft, andernfalls ist $v_z = 0$,

$\frac{v_e^2}{2g}$, $\frac{v_a^2}{2g}$ usw. die zur Erzeugung von v_e, v_a usw. theoretisch erforderliche Fallhöhe, **Geschwindigkeitshöhe** genannt, vrgl. Tafel S. 193 und 194,

H_e und H_a die Höhen der Flüssigkeitsspiegel bei F_e bezw. F_a über dem Schwerpunkte von F_a, in m,

H_0 die treibende Druckhöhe in m der Flüssigkeit, theoretischer Stau, theoretische **Fallhöhe,**

h_e, h_a, h_1 usw. den absoluten Druck bei F_e, F_a, F_1 usw. der in Ruhe gedachten Flüssigkeit auf die Wandung der Leitung, gemessen in m der Flüssigkeitssäule; **hydrostatischer Seitendruck;** der dynamische Einflufs von v_z $(v_z^2 : 2g)$ ist mit einbegriffen,

p_e, p_a, p_1 usw. den absoluten Druck bei F_e, F_a, F_1 usw. der in Bewegung gedachten Flüssigkeit auf die Wandung der Leitung, gemessen in m der Flüssigkeitssäule; **hydraulischer** oder **hydrodynamischer Seitendruck,**

q_e, q_a, q_s, q_1 usw. den am Querschnitt F_e, F_a usw. wirkenden äufseren Luftdruck in m der Flüssigkeitssäule,

s die der Temperatur der Flüssigkeit entsprechende Dampfspannung, vrgl. 3. Abschn. Wärme in m der Flüssigkeitssäule,

w_e, w_a, w_1 usw. den bei F_e, F_a, F_1 usw. auftretenden Widerstand, wie p gemessen; **Widerstandshöhe,**

$\Sigma_e^1 w$, $\Sigma_e^a w$ usw. die Summe der Widerstände auf den Strecken zwischen F_e und F_1 bzw. F_e und F_a usw., wie p gemessen,

ζ_e, ζ_a, ζ_1 usw. die **Widerstandszahl,** die den in F_e, F_a, F_1 usw. stattfindenden hydraulischen Widerstand als Teil der Geschwindigkeitshöhe $\frac{v_e^2}{2g}$, $\frac{v_a^2}{2g}$, $\frac{v_1^2}{2g}$ usw. angibt; also allgemein $\zeta \frac{v^2}{2g} = w$; Werte ζ s. S. 271 u. f.

$\Sigma_e^1 \zeta_a$ die Widerstandszahl für die Summe der Widerstände auf der Strecke F_e bis F_1, die als Teile von $v_a^2 : 2g$ gemessen werden; andere Zeiger geben entsprechende Strecken und Geschwindigkeitshöhen an, z. B. $\Sigma_1^a \zeta_1$ ist die Widerstandszahl zu $v_1^2 : 2g$ für die Strecke F_1 bis F_a;

Q_a die durch die Leitung (durch F_a) abzuführende Flüssigkeitsmenge in cbm/sk unter Berücksichtigung aller Widerstände und Masseneinflüsse,

Q_0 die theoretisch, ohne Widerstände und Masseneinflufs abführbare Flüssigkeitsmenge in cbm/sk,

μ_a die **Ausflufszahl** (Wirkungsgrad) der ganzen Leitung, d. i. das Verhältnis $Q_a : Q_0$ oder $v_a : v_0$,

γ das Gewicht der Flüssigkeit in kg/cbm.

Abb. 133. **Heberleitung.**

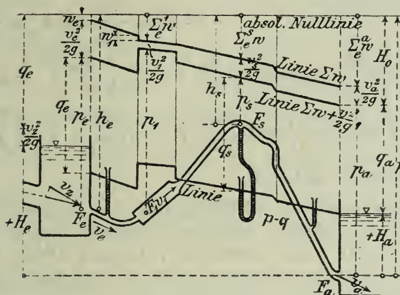
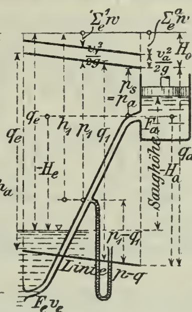


Abb. 134. **Saugleitung.**



Grundgleichung:

$$H_0 = h_a - p_a = v_a^2 : 2g + \Sigma_e^a w = v_a^2 (1 + \Sigma_e^a \zeta_a)\, 2g$$

oder

$$v_a = \sqrt{\frac{2g H_0}{1 + \Sigma_e^a \zeta_a}} \cdot \quad \text{Hierin ist}$$

$$h_a = H_e + z^2 : zg + q_e; \; p_a = H_a + q_a;$$

$$\Sigma_e^a \zeta_a = \zeta_e \left(\frac{F_a}{F_e}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{F_a}{F_1}\right)^2 + \ldots\ldots + \zeta_a.$$

Einzelwerte ζ sind unter 4. S. 271 u. f. angegeben.

$$Q_a = F_a v_a = \mu_a F_a v_0 = \mu_a Q_0$$

$$\mu_a = \frac{1}{\sqrt{1 + \Sigma_e^a \zeta_a}} \text{ oder } \Sigma_e^a \zeta_a = \frac{1}{\mu_a^2} - 1$$

Werte $\Sigma_e^a \zeta_a$

$\mu_a =$	1,00	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50
$\Sigma_e^a \zeta_a =$	0,00	0,10	0,23	0,38	0,56	0,78	1,04	1,37	1,78	2,31	3,00
$\mu_a =$	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	0,025	0,00
$\Sigma_e^a \zeta_a =$	3,94	5,25	7,16	10,1	15,0	24,0	43,4	99,0	399	1599	∞

Erst nach der Feststellung von v_a lassen sich die Zustände in den übrigen Querschnitten der Leitung ermitteln.

Beispielsweise gilt für F_2, während für andere Querschnitte nur die zugehörigen Zahlenzeiger einzusetzen sind:

$$v_2 = v_a F_a : F_2$$

$$h_2 - p_2 = v_2^2 : 2\,g + \Sigma_e^2\, w = v_2^2 \left(1 + \Sigma_e^2\, \zeta_2\right) 2\,g.$$

Steighöhe im offenen Standrohr bei $F_2 = p_2 - q_2$

$$\Sigma_e^2\, w = w_e + w_1 + w_2 = \left(\zeta_e\, v_e^2 + \zeta_1\, v_1^2 + \zeta_2\, v_2^2\right) : g$$

$$= \Sigma_e^2\, \zeta_2 \frac{v_2^2}{2\,g} = \Sigma_e^2\, \zeta_a \frac{v_a^2}{2\,g}$$

$$\Sigma_e^2\, \zeta_2 = \zeta_e \left(\frac{v_a}{v_2}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 + \zeta_2 = \zeta_e \left(\frac{F_2}{F_e}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 + \zeta_2$$

$$\Sigma_e^2\, \zeta_a = \zeta_e \left(\frac{v_e}{v_a}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{v_1}{v_a}\right)^2 + \zeta_2 \left(\frac{v_2}{v_a}\right)^2 = \zeta_e \left(\frac{F_a}{F_e}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{F_a}{F_1}\right)^2 + \zeta_2 \left(\frac{F_a}{F_e}\right)^2$$

Einzelwerte ζ s. unter 4. S. 271 u. f.

Weisbach hat für die einzelnen Widerstände die Angabe von Widerstandszahlen ζ statt der vordem üblichen Angaben von u eingeführt (s. Vorrede zur Schrift über „Versuche", Leipzig 1842), weil dadurch die rechnerische Zusammenfassung aller Widerstände einer Leitung sehr erleichtert wird.

2. Besondere Fälle.

Meist kann $q_e = q_a$ und $v_z = 0$ gesetzt werden, so dafs dann $H_0 = H_e - H_a$ wird.

Für einen Querschnitt F_n nahe dem Ausflufs setze zur bequemeren Berechnung

$$\Sigma_e^n\, w = \Sigma_e^a\, w - \Sigma_n^a\, w = H_0 - v_a^2 : 2\,g - \Sigma_n^a\, w.$$

Bei Undichtigkeit der Leitung in einem Querschnitte F_x tritt an demselben Flüssigkeit aus, wenn $p_x > q_x$; dagegen tritt ein Ansaugen ein, falls $p_x < q_x$, also auch falls $\dfrac{h_x - q_x}{v_a^2 : 2\,g} < \left(\dfrac{F_a}{F_x}\right)^2 + \Sigma_e^x\, \zeta_a$ wird; vergl. in Abb. 133 u. 134 den Rohrstrang oberhalb der Linie für $p - q$.

Der Ausflufs hört bei Heber- und Saugleitungen auf (unter Trennung des Flüssigkeitsfadens an der Scheitelstelle F_s) entweder infolge Ansaugens von Luft durch undichte Stellen mit $p_x < q_x$, oder durch F_a, falls $H_a = 0$ und die der Mündung nächstgelegene Strecke sich über die Linie für $p - q$ erhebt —, oder infolge Erwärmung der Scheitelstrecke mit nachfolgender Ansammlung absorbiert gewesener Gase bei F_s —, oder sobald bei F_s der Temperatur der Flüssigkeit entsprechende Dampfdruck s erreicht wird, also wenn

$$p_s = h_s - \frac{v_s^2}{2\,g} - \Sigma_e^s\, w \lesseqgtr s \quad \text{oder} \quad \frac{h_s - s}{v_a^2 : 2\,g} \lesseqgtr \left(\frac{F_a}{F_s}\right)^2 + \Sigma_e^s\, \zeta_a.$$

Die nach F_a zu abfallende Strecke bleibt ungefüllt, wenn $H = 0$ und die der Mündung nächstgelegene Strecke sich über die Linie für $p = q$ erhebt; alsdann steigt Luft durch F_a bis zur nächsten Scheitelstelle, welche nunmehr H_0 begrenzt. Durch Verkleinerung von F_a wird die Linie für $p = q$ gehoben. Ausschliefslich fallende Leitung bleibt ungefüllt, wenn der Strahl bei F_x oder F_e eine wesentliche Einschnürung erfährt; dieser Einflufs wird ebenfalls durch Verkleinerung von F_a beseitigt.

Kurze ungefüllte Strecken entstehen an Scheitelstellen infolge dortiger Ansammlung absorbiert gewesener Gase, ferner bei Querschnittserweiterung mit austretendem hohlen Strahl (S. 275), schliefslich bei Strahl-Einschnürung infolge scharfer Durchflufskanten oder wesentlicher Ablenkung der Stromrichtung.

Zur Beseitigung angesammelter Gase an den Scheitelstrecken dienen selbsttätige Schwimmerventile, falls $p_x > q_x$; befindet sich Vakuum am Scheitel (Heberleitung), so müssen hier die Gase abgesaugt (abgepumpt) werden.*) Bei Grundwasserleitung sind im allgemeinen $0{,}2\, Q_a : p_k$ cbm Luft/sk abzupumpen, wenn p_k das kleinste auftretende p bedeutet. (Bei anderen Gasen s. Angaben S. 263 und Abschn. Wärme.)

3. Beziehungen für einen geraden Rohrstrang von gleichem Querschnitt. (Widerstand gleichförmig.)

Es bedeute neben den Zeichen unter 1,

l die Länge des Rohrstranges mit unveränderlichem Querschnitt, in m der gerade gestreckt gedachten Achse,
F seinen Querschnitt in qm,
d den Durchmesser, falls der Querschnitt kreisförmig ist, in m,
u den Umfang des Querschnittes F in m,
v die mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Rohrstrange in m/sk,
w die Widerstandshöhe für die gerade Strecke l, in m Flüssigkeitssäule,
W den Widerstand auf der Strecke l in kg,
$i = w : l$ das relative Reibungsgefälle der Rohrachse, s. Abb. 133,
ζ die zu $v^2 : 2g$ gehörige, der Länge l entsprechende Widerstandszahl,
ϱ und λ Widerstandszahlen für die benetzte Flächeneinheit; ϱ für beliebigen, λ für kreisförmigen Querschnitt geltend; $\lambda = 4\,\varrho$.

Der Widerstand im geraden Rohrstrang ist proportional der Länge und angenähert proportional dem benetzten Umfange des Rohres. Es ist üblich, für die Gleichung des Widerstandes ihn genau proportional dem Umfange vorauszusetzen und den Unterschied durch die Widerstandszahl auszudrücken. Der Widerstand ist unabhängig von der Seitenpressung, also auch unabhängig von der Neigung der Rohrachse. (Vrgl Einleitung zu C. S. 263.)

*) C. d. B. 1907 S. 345: Selbsttätige Entlüftung von Hebersielen für Deiche.

Dann ist

$$W = F\gamma w = u\, l\, \gamma\, \varrho\, v^2 : 2\,g$$

$$w = \varrho\, l \frac{u}{F} \frac{v^2}{2\,g}, \quad \text{also} \quad \zeta = \varrho\, l \frac{u}{F};$$

$$i = \frac{w}{l} = \varrho \frac{u}{F} \frac{v^2}{2\,g}, \qquad v = \sqrt{\frac{2\,g}{\varrho}} \sqrt{\frac{i\,F}{u}},\ Q_a = F v.$$

Für den **Kreisquerschnitt** ist $\frac{F}{u} = \frac{d}{4}$ und $Q_a = \frac{d^2\pi}{4} v$, somit

$$w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2\,g}, \qquad \zeta = \lambda \frac{l}{d}, \qquad i = \frac{\lambda}{d} \frac{v^2}{2\,g}, \qquad v = 4{,}43 \sqrt{\frac{i\,d}{\lambda}};$$

$$Q_a = 3{,}47 \sqrt{\frac{d^5 w}{\lambda\, l}} \quad \text{oder} \quad d^5 = \frac{0{,}083\, \lambda\, Q^2\, l}{w};$$

für Q_a in l/sk setze hierin statt d^5 den Wert $1000^2 d^5$; s. Tab. S. 269 u. 270.

Für vorläufige Berechnung setze $\lambda = 0{,}03$; genaue Werte s. S. 271 u. f. Uebliche Werte von v bei städtischer Wasserversorgung $= 0{,}6$ bis $0{,}7$ m.

Tafel für w, Q_a und d^5 s. S. 269 und 270. Da λ teilweise von v und d abhängt, so ist bei allen genaueren Berechnungen das Näherungsverfahren anzuwenden.

Durch allmähliche Veränderung der inneren Rohrwandung nimmt Q_a im allgemeinen mit der Zeit ab, so dafs dem berechneten d in den meisten Fällen zweckmäfsig 20 mm (oder mehr, s. S. 278 unter c.) für die Ausführung zuzugeben sind.

Bei vorhandener Leitung von nicht genau ermitteltem Durchmesser berechnet sich aus beobachtetem Q_a und einem vorläufig angenommenen d ein Wert λ, der zu dem λ_1 für einen anderen Durchmesser d_1 in dem Verhältnis steht $\lambda : \lambda_1 = (d : d_1)^5$.

Beispiele:

1. Gegeben Q_a, l, d; gesucht H_0 (s. S. 266).
   Suche mit Tafel S. 270 für Q und d die Geschwindigkeit v, mit Tafel S. 269 für v und d die Widerstandshöhe für 100 m, vervielfältige diese mit $l : 100$ und berechne mit den übrigen Widerstandshöhen der Leitung $H_0 = v_a^2 : 2\,g + \Sigma_e^a w$ (s. S. 266).

2. Gegeben H_0, l, d; gesucht Q_a.
   Setze vorläufig $H_0 = w$, vervielfältige w mit $100 : l$, suche hierfür mit Tafel 269 für d und w die angenäherte Geschwindigkeit v. Bezeichnet $\Sigma_e^a \zeta_a$ die Summe der von dem geraden Rohrstrang unabhängigen Widerstandszahlen, bezogen auf $v_a^2 : 2\,g$, so bleibt für den geraden Rohrstrang zur Verfügung $w = H_0 - v_a^2 : 2\,g\,(1 + \Sigma' \zeta_a)$.

   Für dieses w suche mit d aus Tafel S. 269 ein verbessertes v und damit aus Tafel 270 das angenäherte Q_a.

   Zur genaueren Ermittlung ist aus v und d der Wert λ nach den Angaben S. 271 festzulegen, dann $v = 4{,}43 \sqrt{i\,d : \lambda}$ zu berechnen, wonach sich Q_a in l/sk aus Tafel S. 270 bestimmt.

Werte $1000^2\,d^5$ und
Widerstandshöhen w in m für $l = 100$ m u. $\lambda = 0{,}02 + 0{,}0018 : \sqrt{v\,d}$.

d in m	$1000^2\,d^5$ in m	Geschwindigkeit des Wassers v in m/sk 0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
0,020	0,003	0,1535	0,3[illegible]31	0,4940	0,7240	0,9917	1,6360	2,4210
0,040	0,101	0,0618	0,1240	0,2045	0,3026	0,4178	0,6879	1,0425
0,060	0,777	0,0367	0,0745	0,1238	0,1842	0,2555	0,4298	0,6454
0,080	3,276	0,0256	0,0522	0,0872	0,1303	0,1813	0,3064	0,4619
0,100	10,000	0,0194	0,0398	0,0667	0,1000	0,1394	0,2365	0,3574
0,125	30	0,0147	0,0304	0,0512	0,0769	0,1075	0,1830	0,2773
0,150	76	0,0118	0,0245	0,0413	0,0622	0,0871	0,1487	0,2257
0,175	163	0,0098	0,0204	0,0345	0,0521	0,0730	0,1249	0,1899
0,200	320	0,0083	0,0174	0,0296	0,0447	0,0627	0,1075	0,1637
0,250	975	0,0064	0,0134	0,0229	0,0347	0,0488	0,0838	0,1279
0,300	2 430	0,0052	0,0109	0,0186	0,0282	0,0398	0,0685	0,1047
0,350	4 410	0,0043	0,0091	0,0156	0,0237	0,0335	0,0578	0,0885
0,400	10 240	0,0037	0,0078	0,0134	0,0205	0,0289	0,0500	0,0765
0,450	18 450	0,0032	0,0069	0,0118	0,0180	0,0254	0,0439	0,0674
0,500	31 250	0,0029	0,0061	0,0105	0,0160	0,0226	0,0392	0,0601
0,600	77 760	0,0023	0,0050	0,0086	0,0131	0,0185	0,0322	0,0495
0,700	168 070	0,0020	0,0042	0,0072	0,0111	0,0157	0,0273	0,0419
0,800	327 680	0,0017	0,0036	0,0062	0,0096	0,0136	0,0236	0,0364
0,900	590 490	0,0015	0,0032	0,0055	0,0084	0,0119	0,0208	0,0321
1,000	1 000 000	0,0013	0,0028	0,0049	0,0075	0,0107	0,0186	0,0287

	v=0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
0,020	3,3423	4,3971	5,5829	6,8978	8,3404	12,497	17,426	23,118	29,562
0,040	1,4504	1,9212	2,4516	3,0434	3,6952	5,5846	7,8406	10,494	13,437
0,060	0,9017	1,1898	1,5340	1,9092	2,3232	3,5270	4,9695	6,6481	8,5613
0,080	0,6471	0,8618	1,1056	1,3783	1,6797	2,5576	3,6118	4,8408	6,2437
0,100	0,5018	0,6694	0,8600	1,0734	1,3095	1,9982	2,8266	3,7935	4,8981
0,125	0,3901	0,5211	0,6704	0,8378	1,0231	1,5643	2,1962	2,9781	3,8491
0,150	0,3181	0,4255	0,5479	0,6853	0,8375	1,2826	1,8192	2,4468	3,1651
0,175	0,2680	0,3587	0,4625	0,5788	0,7078	1,0854	1,5409	2,0740	2,6844
0,200	0,2312	0,3098	0,3996	0,5004	0,6123	0,9397	1,3352	1,7984	2,3289
0,250	0,1809	0,2428	0,3135	0,3929	0,4811	0,7397	1,0522	1,4186	1,8386
0,300	0,1483	0,1992	0,2574	0,3229	0,3956	0,6089	0,8671	1,1699	1,5171
0,350	0,1226	0,1690	0,2177	0,2737	0,3356	0,5170	0,7367	0,9934	1,2903
0,400	0,1086	0,1461	0,1890	0,2374	0,2911	0,4489	0,6400	0,8644	1,1219
0,450	0,0957	0,1288	0,1667	0,2094	0,2569	0,3964	0,5655	0,7641	0,9921
0,500	0,0855	0,1151	0,1490	0,1873	0,2298	0,3548	0,5064	0,6859	0,8889
0,600	0,0703	0,0948	0,1229	0,1545	0,1896	0,2930	0,4185	0,5704	0,7354
0,700	0,0597	0,0805	0,1044	0,1313	0,1613	0,2494	0,3564	0,4851	0,6268
0,800	0,0518	0,0700	0,0907	0,1142	0,1402	0,2170	0,3102	0,4199	0,5460
0,900	0,0458	0,0618	0,0802	0,1009	0,1240	0,1920	0,2746	0,3717	0,4835
1,000	0,0410	0,0553	0,0718	0,0904	0,1111	0,1721	0,2462	0,3334	0,4337

Wassermengen $Q_v = 1000 \frac{\pi d^2}{4} v$ in **l/sk.** (Für $d < 0{,}1$ m teile die Werte d durch 10 und die zugehörigen Werte Q durch 100.)

Dmr. d in m	Geschwindigkeit des Wassers v in m/sk 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
0,100	0.393	0,785	1,178	1,571	1,963	2,356	3,142	3,927
0,125	0,614	1,227	1,841	2,454	3,068	3.682	4.909	6,136
0.150	0,884	1,767	2,651	3,534	4,418	5,301	7,069	8,836
0,200	1,571	3,142	4,712	6,283	7,854	9.425	12,566	15,708
0,250	2.454	4,909	7,363	9,818	12,272	14,726	19,635	24,544
0,300	3.534	7,069	10,603	14,137	17.671	21,206	28,274	35.343
0,350	4,811	9,621	14,432	19,242	24.053	28,863	38,485	48,106
0,400	6,283	12,566	18,850	25,133	31.416	37.699	50,266	62,832
0,450	7,952	15,904	23,856	31,809	39.761	47,713	63.617	79,522
0,500	9,818	19,635	29,453	39,270	49.088	58,905	78,540	98,175
0,550	11,879	23,758	35,637	47,517	59,396	71.275	95.033	118,79
0,600	14,137	28,274	42,411	56,549	70.686	84,823	113,10	141,37
0,650	16,592	33,183	49,775	66,366	82,958	99,549	132.73	165.92
0,700	19.242	38,485	57.727	76.969	96,211	115,45	153,94	192,42
0,750	22,089	44,179	66,268	88,357	110,45	132,54	176,72	220,89
0,800	25,133	50,266	75.398	100,53	125,66	150,80	201,06	251,33
0,850	28.373	56,745	85,118	113,49	141,86	170,24	226,98	283,73
0,900	31,809	63,617	95,426	127,23	159,04	190.85	254.47	318,09
0,950	35.441	70,882	106,32	141,76	177,21	212,65	283,53	354,41
1,000	39,270	78,540	117,81	157,08	196,35	235,62	314.16	392.70

	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
0,100	4,712	5,498	6,283	7,069	7,854	9.817	11,781	13,744	15.708
0,125	7,363	8,590	9,817	11,045	12,272	15,340	18.408	21,476	24,544
0.150	10,603	12,370	14,137	15,904	17.672	22,089	26.507	30,925	35.343
0,200	18.850	21,991	25.133	28,274	31,416	39,270	47,124	54.978	62,832
0.250	29,452	34,361	39,270	44,179	49.087	61.359	73.631	85,903	98,175
0,300	42,411	49,480	56,549	63.617	70,686	88.357	106,03	123.70	141,37
0,350	57.727	67,348	76,969	86,590	96,211	120.26	144.32	168.37	192,42
0.400	75.398	87,965	100,53	113,10	125,66	157.08	188,50	219,91	251.33
0.450	95,426	111,33	127,23	143,14	159,04	198.80	238,57	278,33	318,09
0.500	117,81	137.45	157,08	176,72	196.35	245.44	294.53	343,61	392,70
0,550	142,55	166,31	190,07	213,82	237,58	296.98	356.37	415.77	475.17
0.600	169,65	197,92	226,19	254,47	282.74	353,43	424,11	494.80	565.49
0,650	199,10	232,28	265.46	298,65	331,83	414.79	497,75	580,70	663,66
0,700	230,91	269,39	307,88	346.36	384,85	481,06	577,27	673,48	769.69
0,750	265,07	309,25	353,43	397,61	441,79	552,23	662,68	773,13	883,58
0,800	301,59	351,86	402,12	452,39	502,66	628,32	753,98	879,65	1005,3
0,850	340,47	397,22	453.96	510,71	567,45	709,31	851.18	993.04	1134,9
0,900	381,70	445,32	508.94	572,56	636.17	795,22	954,26	1113.3	1272,3
0,950	425.29	496,18	567,06	637.94	708,82	886,03	1063,2	1240,4	1417,6
1,000	471,24	549,78	628,32	706,86	785,40	981,75	1178,1	1374,4	1570,8

3. Gegeben Q_a in l/sk, l, w; gesucht d.
Setze vorläufig $\lambda \sim 0{,}03$, berechne damit $1000^2\, d^5 = Q_a{}^2 l : 400\, w$, bestimme aus zweiter Spalte der Tafel S. 269 ein vorläufiges d und aus d und Q_a mit Tafel S. 270 das zugehörige v.

Nunmehr ist λ nach den Angaben auf S. 272 zu verbessern, und durch neue Berechnung von $1000^2\, d^5$ ist ein genaueres d zu ermitteln; oder man rundet den für d vorläufig gefundenen Wert nach oben zu ab, um dadurch dem mit der Zeit zunehmenden Widerstand Rechnung zu tragen (vrgl. S. 274).

4. Widerstandszahlen für Wasser.

α. Rohrstrang ohne Berücksichtigung von Querschnitts- und Richtungs-Aenderung.

Es bedeutet

d den Durchmesser des Rohrstranges in m,
l die Länge " " in m,
v die mittlere Durchflufsgeschwindigkeit in m/sk.

Nach **Weisbach**: $4\varrho = \lambda = 0{,}01439 + \dfrac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}$.

Die Formel gilt nur für ganz glatte Rohrwandung und liefert im allgemeinen bei $d > 0{,}04$ m zu grofse Werte, bei engeren Rohren zu kleine Werte.

Tafel der Weisbachschen Werte von λ s. Abteil. III, Lüftung und Heizung.

Nach **Darcy**: Bei Rohren ohne innere Ablagerungen:

$$4\varrho = \lambda = 0{,}01989 + \frac{0{,}0005078}{d}.$$

Diese Formel liefert brauchbare Werte für alle $d < 0{,}5$ m, wenn v etwa 0,25 m/sk bei ganz glatter Wandung, oder wenn v etwa 1,0 m/sk bei neuer gufseiserner Wandung beträgt.

Nach **H. Lang**: (Berücksichtigung aller bis 1907 veröffentlichten Versuche und etwa 300 eigener Versuche mit $v = 0{,}004$ bis 53 m/sk):*)

$$4\varrho = \lambda = a + \frac{0{,}0018}{\sqrt{v\,d}},$$

wobei a vom Zustand der Innenfläche abhängig ist und die weiter unten bezeichneten Werte erhält. Der Wert 0,0018 entspricht etwa $t = 20^0$; er wächst mit zunehmender Zähflüssigkeit bis zu 0,0022 bei etwa $t = 3^0$ an; 100^0 entspricht etwa 0,0004. Der Unterschied kann aber für Rechnungen in der Praxis meist unberücksichtigt bleiben; vrgl. S. 273 u. 274.

---

*) Vrgl. Biel. Ueber den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten, 1907, Forschungsarbeit des V. d. Ing. Heft 44.

Werte $\frac{0,0018}{\sqrt{v d}}$.

	$v = 0,10$	0,25	0,50	1,0	4,0 m/sk
$d = 0,05$	0,026	0,016	0,011	0,008	0,004
0,10	0,018	0,011	0.008	0,006	0,003
0,20	0,013	0,008	0,006	0,004	0,002
0,30	0,010	0,007	0,005	0,003	0,002
0,40	0,009	0,006	0,004	0,003	0,001
0,50	0,008	0,005	0,004	0,002	0,001
1,00	0,006	0,004	0,003	0,002	0,001
2,00	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000

Die Formel für λ ergibt zeichnerisch dargestellt für die Werte $\lambda \sqrt{v}$ eine gerade Linie mit der Neigung $\operatorname{tg} \alpha = a$ und mit der Durchgangsordinate $= 0,0018 : \sqrt{d}$, wenn die x-Achse nach $\sqrt{v}$ geteilt wird. Für $\sqrt{v} = 1$ wird die Ordinate $= a + 0,0018 : \sqrt{d}$.

Dies Gesetz gilt aber nicht für v kleiner als eine Grenzgeschwindigkeit v_k (vrgl. Vorbemerkung zu C. S. 263). Diese ist abhängig von d und von dem Wärmegrade der Flüssigkeit. Angenähert ist

für $t =$	0°	5°	10°	20
$v_k d =$	0,0036	0,0030	0,0026	0,0020,

also bei gewöhnlicher Wasserwärme, wenn

$d =$	0,006	0,01	0,04	$>$ 0,05 m
$v_k =$	0,3 bis 0,6	0,2 bis 0,4	0,05 bis 0,1	0 bis 0,07 m/sk.

Daher kann für die meisten praktischen Fälle die Grenzgeschwindigkeit aufser Betracht gelassen werden. Unterhalb der Grenzgeschwindigkeit v_k ist $\lambda = \frac{\text{konst.}}{d v^m}$, worin für Haarröhrchen $m = 1$; für weitere Röhrchen m anscheinend zwischen 1 und 0,5, abnehmend mit d; Gesetz noch nicht festgestellt. Auch das Gesetz für λ oberhalb v_k ist noch nicht so genau ermittelt, dafs die Angabe der Unveränderlichen auf so viele Dezimalen, wie von Weisbach und Darcy geschehen, gerechtfertigt wäre.

Für a gelten folgende Mittelwerte:

a) Neue Rohre mit ganz glatter Innenfläche (nahtloses, gezogenes Metall, Glas, lackartig überzogene Innenfläche), ohne erkennbare Verschiebung der Querschnitte an den Verbindungsstellen:

$$a = 0,012$$

b) Neue oder sehr gut gereinigte Rohre mit ganz geringen Unebenheiten an der Innenfläche und an den Verbindungsstellen (gute gufseiserne Rohre von gröfserer Baulänge, an den Muffen sorgfältig zentrisch verlegt, filtriertes Wasser):

$$a = 0,020.$$

c) Rohre im Betriebe oder neue Rohre mit ersichtlichen Unebenheiten:

Bedeutet d den Solldurchmesser des von Ablagerungen und Unebenheiten befreiten Rohres mit entsprechendem λ und v,

d_1 den Durchmesser des von den Wirbeln an Ablagerungen oder Unebenheiten noch freibleibenden Nutzquerschnittes, für den λ_1, wie unter *b*) angegeben, gesetzt werden kann,

so ist

$$\lambda = \left(\frac{d}{d_1}\right)^5 \left(0{,}02 + \frac{0{,}0018}{\sqrt{v d}}\right).$$

Werte $(d : d_1)^5$

$d_1 : d$	$\left(\frac{d}{d_1}\right)^5$	$d_1 : d$	$\left(\frac{d}{d_1}\right)^5$	$d_1 : d$	$\left(\frac{d}{d_1}\right)^5$	$d_1 : d$	$\left(\frac{d}{d_1}\right)^5$
0,10	100 000	0,35	226	0,60	12,9	0,85	2,27
0,15	13 150	0,40	97,6	0,65	8,62	0,90	1,69
0,20	3 125	0,45	54,2	0,70	5,95	0,93	1,78
0,25	1 024	0,50	32,0	0,75	4,21	0,95	1,29
0,30	411	0,55	19,9	0,80	3,06	0,98	1,18

(Für die Durchflufsmengen gilt die Beziehung $Q^2 : Q_1^2 = d^5 : d_1^5$.)

Für die Annahme von d_1 ist zu beachten:

Bei neuen Rohren:

Gufseiserne Rohre von kleinerem Durchmesser besitzen kleine Baulänge und vergröfsern damit den Widerstand an den Verbindungsstellen für die Längeneinheit. Schmiedeeiserne Rohre sind in Ansehung des sehr empfindlichen Wertes λ als nicht von gleichem Durchmesser anzusehen, sie zeigen oft nach innen zu aufgedrückte Schweifsnähte; verzinkte Rohre sind häufig besonders rauh. Bei hölzernen Rohren quillt die Wandfläche im Betriebe auf, wird auch stark schwammig.

Bei Rohren im Betriebe:

Nach wenigen Betriebstagen hat das Wasser eine Schleimschicht an die Wandung abgesetzt, die den Nutzdurchmesser um 2 bis 3 mm verringert. Anrostungen (Korrosionen) der inneren Wandung eiserner Rohre treten bei Luftmangel, also bei dauernd gefüllten Druckrohren nicht auf, soweit nicht saure oder salzige Beschaffenheit des Wassers das Eisen löst; die dennoch oft vorkommenden, bis 60 mm starken Krustenbildungen sind daher auf Ablagerungen aus dem Wasser zurückzuführen. Die Ablagerungsmengen entsprechen der durchflossenen Wassermenge; Sackrohre bleiben rein; vergröfserte Durchflufsgeschwindigkeit hindert die Ablagerung nicht.

Die Ablagerungen bestehen bei gufseisernen Leitungen zuerst aus unregelmäfsig auftretenden Knollen, die sich schliefslich zu höckeriger Auskleidung der Wandung vereinigen und stellenweise faltenartige Gebilde zeigen. Die Masse besteht aus Brauneisenstein, je nach Herkunft des Wassers vermengt mit Kalk, Muscheln, Algen. Bei schmiedeeisernen Rohren wachsen auch dünne Aestchen nach der Rohrmitte zu. Blei nimmt selbst nach vielen Jahren nur einen ganz dünnen, gleichmäfsigen Ueberzug an.

Vorgefundene Ablagerungsmengen bei gufseisernen Rohren, in vH des Sollquerschnittes:

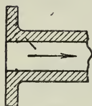
d in m. . . .	0,076	0,076	0,102	0,152	0,152	0,204	0,381
Betriebsjahre . .	20	32	22	10	20	24	40
Ablagerung . .	35	75	54	20	33	36	28 vH.

Zur Erhaltung der Leistungsfähigkeit einer Leitung sind Reinigungs- oder Streifkästen in 50 bis 60 m Abstand erforderlich. Erste Reinigung nach fertiger Verlegung, wiederholte Reinigung nach je 2 bis 3 Jahren notwendig. Ueber Ablagerungen und Reinigungsweisen vrgl. Iben, Journal f. Gasbel. 1887.

β. Rohrstücke mit Kreisquerschnitt zur Einleitung oder Aenderung der Stromrichtung.

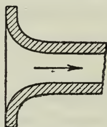
1. **Einlaufstücke** (Abb. 135 bis 138).

Abb. 135.



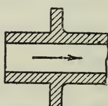
Einlaufkante scharf $\zeta = 0{,}50$, Kante gebrochen $\zeta = 0{,}25$.

Abb. 136.



Je nach Glätte der Wandung $\zeta = 0{,}06$ bis 0,01.

Abb. 137.



Einlaufkante stumpf $\zeta = 0{,}56$, messerscharf $\zeta = 1{,}30$.

Abb. 138.



$\zeta = 0{,}5 + 0{,}3 \sin \delta + 0{,}2 \sin^2 \delta$.

2. **Knie und Bogenstücke** (Abb. 139 und 140).

Knie: $\zeta = \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta + 2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\delta$ oder für

$\delta =$	20⁰	40⁰	60⁰	80⁰	90⁰	100⁰	120⁰	140⁰	160⁰	180⁰
$\zeta =$	0,03	0,14	0,37	0,75	1,00	1,27	1,87	2,43	2,85	3,00.

($\delta = 180^0$ entspricht dem Kehrlauf mit Zwischenwand und ebener Kopfwand winkelrecht zur Stromrichtung.)

$$\text{Bogenstück: } \zeta = 0{,}13 + 0{,}16 \left(\frac{d}{r}\right)^{3,5};$$

Abb. 139.

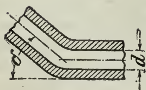
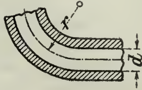


Abb. 140.



Dieser Wert entspricht allein der Zusammenziehung des Strahles, die durch die Richtungsänderung am Beginn der Krümmung hervorgerufen wird; ζ ist unabhängig von der Länge des Bogenstückes, solange r unverändert bleibt.

Es folgt für

$d:r=$	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$\zeta=$	0,14	0,16	0,20	0,30	0,44	0,66	1,0	1,4	2,0.

Rohrwindungen ohne Aenderung des Krümmungshalbmessers und der Krümmungsrichtung ergeben ein ζ wie gerade Leitungen; Wechsel in der Krümmungsrichtung verdoppelt ζ.

γ. Rohrstücke mit zentraler Querschnittsänderung.

1. **Plötzliche zentrale Erweiterung** (Abb. 141 und 142).

Wenn das weitere Rohr ausreichend lang ist im Verhältnis zur Wassergeschwindigkeit im engeren Rohrstrange, so tritt der in Abb. 141 dargestellte Fall des Wasserstofses ein. Andernfalls füllt der Strahl, wie in Abb. 142, das weitere Rohr nicht aus.

Abb. 141.

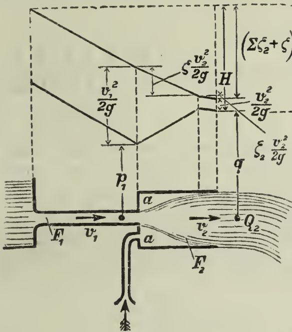
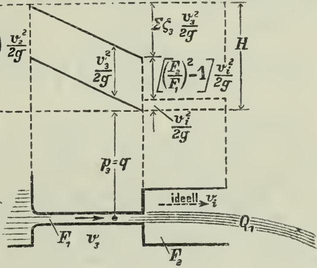


Abb. 142.



Es bedeutet

F_1 und F_2 den Querschnitt in qm im engeren bzw. im weiteren Rohr,

H die treibende Druckhöhe in m W.-S.,

Q_2 die Ausflufsmenge in cbm/sk bei gefülltem F_2,

Q_1 die Ausflufsmenge in cbm/sk bei nicht gefülltem F_2,

w die bei gefülltem F_2 entstehende Widerstandshöhe in m W.-S.,

v_1 und v_2 die Geschwindigkeit in m/sk im engeren bezw. im weiteren Rohr für den Fall in Abb. 141,

v_3 die Geschwindigkeit in m/sk im engeren Rohr sowie
v_i die ideelle mittlere Geschwindigkeit im weiteren Rohr, wenn F_2 mittelst Q_1 ausgefüllt gedacht wird, so dafs $v_i = Q_1 : F_2$, } für den Fall in Abb. 142,

p_1 und p_3 den absoluten hydraulischen Druck an der Uebergangsstelle zum weiteren Rohr bei gefülltem bzw. bei ungefülltem F_2 in m W.-S.,

q den absoluten Gegendruck auf den ausfliefsenden Strahl in m W.-S.,

ζ die infolge der Erweiterung auftretende Widerstandszahl der Geschwindigkeitshöhe $v_2^2 : 2\,g$,

$\Sigma_e^a \zeta_2$ die Summe der Widerstandszahlen aller übrigen Widerstände der Leitung für den Fall in Abb. 141, bezogen auf $v_2^2 : 2\,g$,

ζ_2 den Teil von $\Sigma_e^a \zeta_2$, der allein der Reibung in F_2 entspricht,

$\Sigma_e^a \zeta_3$ die Summe der Widerstandszahlen aller Widerstände der Leitung für den Fall in Abb. 142, bezogen auf $v_3^2 : 2g$.

Nach Borda, bestätigt von Weisbach und Fliegner*):

$$w = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2\,g} = \zeta \frac{v_2^2}{2\,g} = \zeta \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2\,g}; \quad \zeta = \left[\frac{F_2}{F_1} - 1\right]^2.$$

Befindet sich die Erweiterung inmitten einer längeren Leitung mit einem Ausflufsquerschnitt F_a, so ist nach der auf S. 266 angegebenen Beziehung

$$p_1 = h_1 - \frac{v_a^2}{2\,g}\left(\frac{F_a}{F_1}\right)^2 \left[1 + \Sigma_e^1 \zeta_1\right] = h_1 - H \left(\frac{F_a}{F_1}\right)^2 \frac{1 + \Sigma_e^1 \zeta_1}{1 + \Sigma_e^a \zeta_a}.$$

Befindet sich die Erweiterung am Ende der Rohrleitung, so ist $p_1 = h_1 - H - v_2^2\,(2\sqrt{\zeta} - \zeta_2) : 2\,g$, worin für wagerechte Lage der Erweiterung und beim Ausflufs ins Freie $h_1 - H = q$ zu setzen ist. Sobald v_2 so grofs, dafs $p_1 \overline{\gtrless}$ Dampfdruck des Wassers, so tritt der Fall in Abb. 142 ein, der Wasserstofs fällt fort, und es wird unter plötzlichem Anwachsen von p_1 auf $p_3 = q$, wenn w_i die ideelle Widerstandshöhe und ζ_i die zugehörige Widerstandszahl von $v_i^2 : 2\,g$ bedeutet:

$$w_i = \frac{v_3^2 - v_i^2}{2\,g} = \zeta_i \frac{v_i^2}{2\,g}, \qquad \zeta_i = \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 - 1.$$

Ferner ist $\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{F_2}{F_1}\sqrt{\dfrac{1 + \Sigma_e^a \zeta_3}{1 + \zeta + \Sigma_e^a \zeta_2}}$, worin bei kurzem, weitem Rohr $\Sigma_e^a \zeta_3 \sim \left(\dfrac{F_1}{F_2}\right)^2 \Sigma_e^a \zeta_2$ gesetzt werden kann. Ist die ganze Leitung so kurz, dafs $\Sigma_e^a \zeta_2$ klein gegen 1, so wird

bei $F_2 : F_1 =$	1,1	1,3	1,5	2	3	4	5	10
entsprechend $\zeta =$	0,01	0,09	0,25	1,0	4	9	16	81
$Q_2 : Q_1 =$	1,09	1,25	1,34	1,41	1,34	1,26	1,20	1,04,

also $Q_2 : Q_1 = v_1 : v_3$ wird Höchstwert bei $F_2 = 2\,F_1$. Somit beruht die sogen. Labyrinth-Dichtung auf einem Trugschlufs.

*) S. Civilingenieur 1875, S. 98. Neuere Versuche von Baer, s. Dingl. Polyt. J. 1907, Heft 12, lassen ζ in obiger Form nur für $v_1 > 3$ m/sk und $F_2 : F_1 < 3$ als zulässig erscheinen; andernfalls nähert sich der Wert von ζ dem von ζ_i.

2. **Allmähliche zentrale Erweiterung** (Abb. 143 u. 144), δ_{max} 90°.

Bedeutung der Zeichen wie unter 1; ζ_2 schliefst hier die Reibung an der Wandung der allmählichen Erweiterung mit ein; ihr entspricht von ζ_2 der Teil $\frac{\lambda}{8 \sin \delta/2} \left[\left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 - 1 \right]$, wenn λ die Widerstandszahl eines Querschnittes nahe F_2 bedeutet.

Abb. 143.

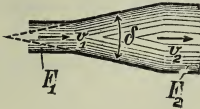
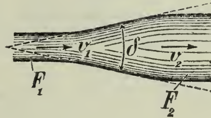


Abb. 144.



Aus Versuchen von Fliegner*) findet sich angenähert:

$$w = \left(\frac{v_1 - v_2}{2g} \right)^2 \sin \delta = \zeta \frac{v_2^2}{2g}; \qquad \zeta = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1 \right)^2 \sin \delta.$$

Für Erweiterung inmitten längerer Leitung schreibe p_1, wie zuvor unter 1. angegeben.

Für Erweiterung wagerecht am Ende der Leitung und bei Ausflufs ins Freie wird

$$p_1 = + q - \frac{v_2^2}{2g} \left[\left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 - 1 - \left(\frac{F_2}{F_1} - 1 \right)^2 \sin \delta - \zeta_2 \right],$$

so dafs auch hier wie für Abb. 141 p_1 mit wachsendem v_2 abnimmt bis zum minim. $p_1 = s$ (vrgl. S. 266), nur wesentlich schneller. Nach Erreichung dieses Grenzwertes tritt aber nicht plötzlich der Fall in Abb. 142 ein, wie bei plötzlicher Erweiterung, sondern bei weiter wachsendem v_2 erhält sich das minim. p_1, während ζ allmählich bis zum Werte $\zeta = \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 - 1$ ansteigt. Wird v_2 noch mehr gesteigert, so steigert sich auch ζ weiter, aber unter Wiedervergröfserung von p_1.

Auch hier ist $$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{F_2}{F_1} \sqrt{\frac{1 + \Sigma_e^a \zeta_3}{1 + \zeta + \Sigma_e^a \zeta_2}}.$$

Für den Venturi-Wassermesser ist in der Regel $F_2 : F_1 = 9$, $\delta = 4^0 40'$; nach Versuchen $\zeta + \zeta_2 = 5{,}1 + 5{,}2 = 10{,}3$, $Q_2 = 2{,}7\,Q_1$, v_2 max etwa 1,7 m bei $p_1 = 0$.**)

---

*) S. Civilingenieur 1875 S. 98; Austritt in die freie Luft nach Durchflufs eines längeren Rohrstückes vom Querschnitt F_2.

**) C. d. B. 1898, S. 138.

Der geringe Widerstand der allmählichen Erweiterung gestattet bei sehr weiten Leitungen, Absperrvorrichtungen von kleinerem Durchmesser, also billigere und handlichere Verschlüsse einzubauen.

3. Plötzliche zentrale Verengung.

Hierbei entsteht ein Geschwindigkeitsverlust an der Durchflufskante von 3,5 vH, dessen $\zeta = (1:0{,}965)^2 - 1 = 0{,}076 = 0{,}276^2$ ist, — und ein Stofsverlust infolge plötzlicher Ausbreitung des eingeschnürten Strahles gemäfs Angabe unter 1 für plötzliche zentrale Erweiterung.

α sei die Verhältniszahl der Querschnitte des eingeschnürten Strahles und der Durchlafsöffnung (Kontraktionszahl).

Werte α:

Wenn die Durchflufsöffnung $\leqq 0{,}1\,F_1$,

$\alpha = 0{,}62$ bis $0{,}64$ bei scharfer Durchflufskante,
$= 0{,}7$ bis $0{,}8$ bei ganz schwacher Kantenbrechung,
$= 0{,}9$ bei abgerundeter Kante.

Wenn die Durchflufsöffnung $> 0{,}1\,F_1$, so vergröfsert sich α infolge der wesentlichen Zuflufsgeschwindigkeit zur Verengung; Aenderung von α ist durch Versuche nur für scharfe Durchflufskante bisher ausreichend ermittelt (Weisbach 1843).

Abb. 145.

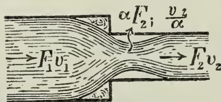
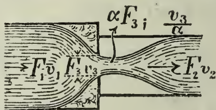


Abb. 146.



Es gilt

für Abb. 145: $w = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$, worin $\zeta_2 = \left(\frac{0{,}276}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$;

bei scharfer Durchflufskante wird

für $F_2 : F_1$	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
ζ_2	0,50	0,47	0,42	0,33	0,25	0,15	0,00
α	0,64	0,65	0,66	0,70	0,75	0,84	1,00;

(Bei $F_2 : F_1 = 1{,}0$ fällt der erste Summand von ζ_2 fort, weil alsdann keine Geschwindigkeitsänderung mehr, somit kein Geschwindigkeitsverlust vorhanden ist.)

für Abb. 146: $$w = \frac{\left(\frac{0{,}276\, v_3}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{\alpha} - v_2\right)^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_3 \frac{v_3^2}{2g};$$

$$\zeta_2 = \frac{0{,}076}{\alpha^2}\left(\frac{F_2}{F_3}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{\alpha F_3} - 1\right)^2, \quad \zeta_3 = \frac{0{,}076}{\alpha^2} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{F_3}{F_2}\right)^2, \quad \zeta_2 = \zeta_3 \left(\frac{F_2}{F_3}\right)^2.$$

Wenn $F_3 < 0{,}1\, F_1$, α unveränderlich 0,64 gesetzt, wird für

$F_3 : F_2$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ_3	2,3	2,0	1,8	1,5	1,3	1,1	0,9	0,7	0,6	0,5
oder ζ_2	232	51	20	9,6	5,2	3,1	1,9	1,2	0,8	0,5.

Wenn $F_3 \geqq 0{,}1\, F_1$, setze folgende Werte für α:

$F_3 : F_1$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
α	0,65	0,66	0,67	0,69	0,70	0,72	0,76	0,82	0,90	1,00.

Dies ergibt für $F_1 = F_2$ bei

$F_3 : F_2$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ_3	2,26	1,91	1,60	1,24	0,94	0,65	0,39	0,19	0,05	0,00
oder ζ_2	226	47,8	17,8	7,80	3,75	1,79	0,80	0,29	0,06	0,00.

4. **Allmähliche zentrale Verengung.** (Abb. 143 u. 144, aber mit entgegengesetzter Stromrichtung.)

Gilt v_1 als Nutzgeschwindigkeit, so wird

$w = \zeta \dfrac{v_1^2}{2\,g}$, und ζ entspricht dann allein der Reibung in dem konvergenten Teile. Angenähert ist

$\zeta = \dfrac{\lambda}{8 \sin \delta/_2} \left[1 - \left(\dfrac{F_1}{F_2}\right)^2\right]$, wenn die Widerstandszahl λ einem Querschnitt nahe F_1 entspricht.

δ. Absperrvorrichtungen (Ventile, Hähne, Klappen, Schieber).

(Nach Versuchen von Weisbach, C. Bach und H. Lang.)

Im Folgenden bedeutet

F den freien Querschnitt des Ventilsitzes bzw. des Kanales oder Rohres in qm,

F_1 den jeweilig eingestellten kleinsten Durchflufsquerschnitt in qm,

v die Geschwindigkeit im Querschnitt F in m/sk,

v_1 die Geschwindigkeit im Querschnitt F_1 in m/sk,

ζ die zu v gehörige Widerstandszahl,

ζ_1 die zu v_1 gehörige Widerstandszahl;

dann ist

$$\zeta \frac{v^2}{2\,g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2\,g}; \quad \zeta = \zeta_1 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2.$$

a) Einschliefslich des Einflusses der Gehäuseform üblicher Konstruktion, bei vollständiger Oeffnung.

1) Kugelförmiges Ventilgehäuse, schlanke Form, 25 mm Dmr. { Strom gegen die Unterfläche des Kegels: $\zeta =$ 5,3. / „ „ „ Oberfläche „ „ : $\zeta =$ 4,4.

2) Dsgl. aber sehr kurz, Tellerventil, 34 mm Dmr. { Strom gegen die Unterfläche des Tellers: $\zeta =$ 16,6. / „ „ „ Oberfläche „ „ : $\zeta =$ 12,5.

3) Eckventilgehäuse, Stromablenkung = 90°, 32 und 22 mm Dm. { Strom gegen die Unterfläche des Kegels: $\zeta =$ 2,1. / „ „ „ Oberfläche „ „ : $\zeta =$ 2,6.

4) Schieber winkelrecht zur Rohrachse verschoben, den vollen Rohrquerschnitt freigebend, 34 mm Durchmesser . . . . $\zeta =$ 0,3.

Anmerkung: Im Falle 1) und 3) waren die Dichtungsflächen des Ventils mit kugeliger Unterfläche nur 1 mm breit, im Fall 3) konnte der Kegel nur um das 0,25-fache des Sitzdurchmessers vom Sitze abgehoben werden.

b) Ohne Rücksicht auf den Einflufs des Gehäuses.

Absperrvorrichtung		$F_1 : F =$ 0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
		Mittlere Werte von ζ_1				
Tellerventil mit oberer Führung und beliebiger Unterfläche	Strom gegen die Unterfläche gerichtet.	1,2	1,6	2,0	2,5	3,0
Tellerventil mit Rippenführung im Sitze		2,3	2,8	3,5	4,3	5,2
Kegelventil mit oberer Führung, Unterfläche eben		0,00	−0,14	0,20	0,65	1,16
Dsgl., kugelig		0,00	−0,04	0,18	0,48	0,82
Dsgl., kegelförmig		−0,04	0,29	0,52	0,56	0,73
Kugelventil, Dichtungskante nur 1 mm breit		1,9	2,2	2,5	3,6	5,0
Kugelventil, Strom gegen die Oberfläche gerichtet		1,6	1,8	2,2	3,2	4,4
Sehr schlankes Kegelventil, sogen. Nadelventil, Strom gegen die Unterfläche gerichtet		0,2	0,4	.	.	.
Dünner Schieber in rechteckigem Rohre		0,69	0,45	0,06	−0,10	0,00
„ „ „ rundem „		1,00	0,60	0,17	−0,05	0,00
Hahn, gerade und rechteckige Durchgangsöffnung		2,35	1,65	0,70	−0,02	0,00
Drosselklappe, rechteckig, Schlufs nach Drehung um 90°		0,50	0,32	0,05	−0,04	0,00
„ , rund, Schlufs nach Drehung um 90°		0,88	0,45	0,06	−0,03	0,00
Rechteckige Klappe, Schlufs nach Drehung um 90° mit dem Strome		0,78	0,28	0,06	−0,04	0,00
dsgl., gegen den Strom		0,41	0,60	0,23	0,08	0,00
Muschelschieber mit scharfen Durchflufskanten und eckiger Muschel	Einlafsöffnung:	1,0	1,6	1,8	2,0	2,2
	Auslafsöffnung:	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6
Muschelschieber mit etwas gebrochenen Durchflufskanten	Einlafsöffnung:	0,11	0,18	0,21	0,23	0,24
	eckige Muschel; Auslafsöffnung:	0,04	0,13	0,35	0,64	1,04
	runde „ „	0,04	0,11	0,23	0,35	0,49

D. Fliefsen in nicht gefüllten Rohrleitungen, in Flüssen und Kanälen.

1. Gleichförmige Bewegung (v unveränderlich).

Es bedeutet für eine Strecke von gleichbleibender Beschaffenheit:

F den Durchflufsquerschnitt (Querprofil) des Wasserkörpers in qm,
Q die durch F abfliefsende Wassermenge in cbm/sk,
v die mittlere Profilgeschwindigkeit, d. h. die mittlere Geschwindigkeit in F, in m/sk, (Werte anderer Profilgeschwindigkeiten vergl. S. 291),
u den benetzten Teil des Umfanges des Leitungsquerschnittes in m,
l die Länge der in Betracht gezogenen Strecke der Leitung mit gleichem F in m,
w die Senkung des Wasserspiegels auf die Länge l in m,
$i = w : l$ das mittlere Gefälle des Wasserspiegels (Reibungsgefälle),
ϱ die Widerstandszahl für die benetzte Flächeneinheit,
$g = 9{,}81$ m/sk².

Wie bei dem Durchfliefsen von gefüllten Rohrleitungen (s. S. 268) ist

$$v = \sqrt{\frac{2\,g}{\varrho}}\,\sqrt{\frac{i\,F}{u}}; \qquad Q = F v.$$

Der Wert $F:u$ wird hyraulischer Radius genannt und vielfach mit R bezeichnet. Vorteilhafte Querschnitte mit grofsem $F:u$ s. S. 283.

α) Nach Weisbach setze für Flüsse und Kanäle:

$$\varrho = 0{,}0074\left(1 + \frac{0{,}05853}{v}\right).$$

(Dies entspricht für gefüllte Rohrleitungen einem $\lambda = 4\varrho = 0{,}029 + 0{,}0017 : v$; vrgl. S. 271).

Im Mittel wird $\varrho = 0{,}0075$, oder $\sqrt{\frac{2g}{\varrho}} = 51$.

β) Nach Bazin:

ältere Formel (1865): $\sqrt{\frac{2g}{\varrho}} = \sqrt{\frac{1}{a + bu : F}}$,

neuere Formel (1897): $\sqrt{\frac{2g}{\varrho}} = \frac{87}{1 + c\sqrt{u : F}}$,

worin bedeutet:

Fall I.	für gehobeltes Holz oder Zement . .	$a = 0{,}00015$,	$b = 0{,}0000045$,	$c = 0{,}06$,
„ II.	„ Quader und nicht gehobeltes Holz	$a = 0{,}00019$,	$b = 0{,}0000133$,	$c = 0{,}16$,
„ III.	„ Mauerwerk aus Bruchsteinen . .	$a = 0{,}00024$,	$b = 0{,}00006$,	$c = 0{,}47$,
„ IV.	„ Erde, Querschnitt regelmäfsig u. rein	$a = 0{,}00028$,	$b = 0{,}00035$,	$c = 1{,}30$,
„ V.	„ Gerölle (nach Kutter)	$a = 0{,}00040$,	$b = 0{,}00070$,	$c = 1{,}75$.

Werte $\sqrt{\frac{2g}{\varrho}}$ aus der älteren Formel:

$F : u =$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	1,00	2.00	3,00	6,00 m
Fall I.	71,6	76,1	77,9	78,8	79,3	79,7	80,2	80,4	81,0	81,2	81,4
„ II.	55,6	62,4	65,3	66,9	67,9	68,7	69,6	70,1	71,3	71,7	72,1
„ III.	34,5	43,0	47,7	50,6	52 7	54,2	56,3	57,7	60,9	62 0	63,2
„ IV.	16.3	22,2	26,3	29,4	31,9	34,0	37,3	39,8	46.9	50,2	54,4
„ V.	11,6	16,0	19,1	21,6	23,6	25,3	28,0	30,2	36,5	39,7	44,0

γ) Nach Ganguillet und Kutter:

$$\sqrt{\frac{2g}{\varrho}} = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{i}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{i}\right)\frac{n}{\sqrt{F : u}}} \text{ *)},$$

worin im Mittel die Rauhigkeitszahl n

	n	$1 : n$
für Kanäle aus sorgfältig gehobeltem Holz oder mit glatter Zementverkleidung	0,010	100
für Kanäle aus Brettern	0,012	83
für Kanäle aus behauenen Quadersteinen oder aus gut ausgefugten Ziegelsteinen	0,013	77
für Kanäle aus Bruchsteinen	0,017	59
für Kanäle in Erde, ferner für Bäche und Flüsse	0,025	40
für Gewässer mit gröberen Geschieben und mit Wasserpflanzen . . .	0,030	33

Bei Flüssen nimmt im allgemeinen die Rauhigkeitszahl n vom Quellgebiete nach der Mündung hin ab. In der Schwierigkeit der richtigen Wahl von n liegt die Schwäche der Formel von Ganguillet und Kutter.

Messungen in der oberen Donau und deren Seitenflüssen ergaben $n = 0{,}0226$ bis 0,0284. — Messungen in der preufsischen Elbe (1883 bis 1886) zeigten, dafs n weder für die ganze Stromstrecke, noch für denselben Mefsquerschnitt F unveränderlich bleibt, sondern zwischen 0,021 und 0,032 schwankt und von i und der zunehmenden

*) Ueber zeichnerische Ermittlung dieses Ausdruckes für $\sqrt{\frac{2g}{\rho}}$ vrgl. Z. d. ö. A. u. I. V. 1869 Bl. 9 Abb. XIII; ferner C. d. B. 1889 S. 285; Tabellen vrgl. Tolkmitt, Grundlagen der Wasserbaukunst, 1898.

Wassertiefe t im Querschnitt abhängig ist. Man fand bei diesen Messungen die mittlere Profilgeschwindigkeit v in m/sk:

$$v = 46{,}91 \sqrt{i} \sqrt[3]{t},$$

wobei Wassermengen Q von 90 bis 430 cbm/sk, Gefälle i von 0,00007 bis 0,00023 und mittlere Tiefen t von 1 bis 3 m vorausgesetzt sind.*)

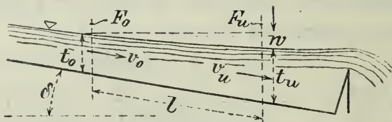
2. Ungleichförmige Bewegung.

Ungleichförmige Bewegung entsteht infolge wechselnder Breite oder Tiefe des Wasserlaufes, auch infolge von Aufstau durch Hochwasser, durch Wehre, Schützen oder eingebaute Pfeiler.

Bedeutet nach Abb. 147 in einem Wasserlaufe:

F_o einen oberhalb gelegenen Querschnitt in qm,
F_u „ unterhalb „ „ „ „ ,
l den Abstand beider in m,
v_o und v_u die mittleren Geschwindigkeiten in F_o und F_u in m/sk,
t_o und t_u die Wassertiefen bei F_o und F_u in m,
w die Senkung des Wasserspiegels auf der Strecke l in m,
u_m den mittleren benetzten Umfang des Durchflufsquerschnittes auf der Strecke l in m,
Q die abfliefsende Wassermenge in cbm/sk,
δ den Neigungswinkel der Sohle,
ϱ die Widerstandszahl für die benetzte Flächeneinheit, die der mittleren Geschwindigkeit auf derStrecke l entspricht,
$v_m^2 : 2g$ die mittlere Geschwindigkeitshöhe von $v_o^2 : 2g$ und $v_u^2 : 2g$ in einem Querschnitt F_m,

Abb. 147.



so ist
$$dw = \frac{v\,dv}{g} + \frac{\varrho\, v_m^2\, u\, dl}{2\,g\,F_m},$$

$$w = \frac{v_u^2 - v_o^2}{2\,g} + \frac{\varrho\, l\, u_m}{2\,g}\,\frac{v^3}{Q} \text{ oder}$$

$$w = \frac{Q^2}{2\,g}\left[\frac{1}{F_u^2} - \frac{1}{F_o^2} + \varrho\, l\, u_m \left(\frac{F_u^2 + F_o^2}{2\,F_u^2\,F_o^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = l \sin \delta + t_o - t_u.$$

Ist die Staukurve eine stetige Linie, so ist $t_u - t_o$ erst null für $l = \infty$.

Die Staukurve ist nicht stetig, und es entsteht ein **Wassersprung** (Wasserschwelle) von der Höhe $t_u - t_o$ (in m), wenn $\frac{v_o^2}{2\,g} \gtreqless \frac{t_u^2}{t_u + t_o}$.**)

*) Vrgl.: Z. d. h. A. u. I. V. 1885 S. 621; ferner Jasmund, Z. f. B. 1886 S. 551 und 1893 S. 122; auch Teubert, Die Verbesserung der Schiffbarkeit unserer Ströme durch Regulierung, C. d. B. 1894 S. 221, als erweiterter Sonderdruck erschienen bei Wilh. Ernst & Sohn, Berlin; ferner Siedek, Z. d. ö. I. u. A. V. 1901 S. 397, auch Plenkner, österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst 1906, Heft 40 und Biel, s. Fufsote S. 271.

**) Weitere Angaben vrgl. Tolkmitt, Grundlagen der Wasserbaukunst 1898 S. 108.

Ueber Wanderwellen in steilen Gerinnen vrgl. Forchheimer, Sitzungsbericht der Akad. d. Wissenschaften in Wien, Dez. 1903.

3. Vorteilhafteste Querschnitte von Kanälen.

Von den Wasserquerschnitten verschiedener Form, aber gleicher Gröfse F in qm, ergibt derjenige mit gröfserem $F:u$ den kleineren Reibungsverlust (vrgl. S. 280).

Weisbach vergleicht die Formen unter sich nach dem Werte von $m = u : \sqrt{F}$, der mit zunehmender Güte der Querschnittform abnimmt.

Frank*) vergleicht die Formen mittels eines Wertes $f = 4F : u^2$ (also $f = 4 : m^2$), der mit der Güte der Querschnittform wächst.

a) Geradlinig begrenzte Querschnitte (Rechteck und Trapez).

Bedeutet t die Wassertiefe in m,
b die Sohlenbreite in m,
δ den Böschungswinkel, so wird

f am gröfsten, wenn $t = \sqrt{\frac{F \sin \delta}{2 - \cos \delta}}$; daraus folgt

$$\frac{b}{t} = 2\frac{1 - \cos \delta}{\sin \delta}, \qquad \frac{u}{F} = \frac{2}{t}, \qquad f_{max} = \frac{4 \sin \delta (2 - \cos \delta)}{\left(2 + \frac{b}{t} \sin \delta\right)^2}.$$

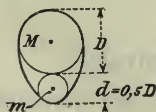
Hiermit entsteht folgende Tafel:

δ	tg δ	$b:t$	f_{max}	Böschung
90°	1 : 0,0	2,0	0,50	Bretter
63° 20′	1 : 0,5	1,23	0,58	Futtermauern
45°	1 : 1	0,83	0,55	feste Erde mit Uferbefestigung
33° 40′	1 : 1,5	0,61	0,48	„ „ ohne „
26° 30′	1 : 2	0,47	0,40	lockere Erde, Sand u. drgl.
18° 20′	1 : 3	0,32	0,30	lockere Erde, Sand u. drgl.

b) Krummlinig begrenzte Querschnitte.

Kreisform (Vollkreis, Halbkreis, Kreissohle): Bei der Anfüllung des Querschnittes nimmt f rasch zu bis $f_{max} = 0,637$ bei Erreichung des Kreismittelpunktes. Bei weiterer Füllung nimmt f wieder ab bis zu $f = 0,318$ bei Erreichung des Scheitels.

Abb. 148.



Eiform mit spitzem Ende unten (Abb. 148): Günstigste Form für stark wechselnde Füllung.

f wird in Höhe des Mittelpunktes des kleinen Kreises $= 0,613$, bei Füllung bis zu dem des grofsen Kreises $= 0,528$, bei Erreichung des Scheitels $= 0,292$.

*) Vrgl. A. Frank, Ber. d. Kanäle und Rohrl. nach einem neuen einheitl. System 1886. München, R. Oldenbourg.

Eiform mit spitzem Ende oben: Ungünstiger als Kreis und Eiform mit Spitze unten; verwendet für Wassersammelleitungen ohne stärkere Schwankung in der Füllung.

Ellipsenform, stehend: (Zwei eingeschriebene, sich berührende Kreise von gleichem Durchmesser d, der kleinere Durchmesser der Ellipse $= {}^4/_3\, d$).

Bei halber Füllung $f_{max} = 0{,}627$, bei Erreichung des Scheitels $f = 0{,}298$.

Ellipsenform, liegend: Mafsverhältnisse wie oben; bei mangelnder Höhe anzuwenden. Bei halber Füllung $f_{max} = 0{,}615$, bei Erreichung des Scheitels $f = 0{,}298$.

4. Uebliche Geschwindigkeiten und Gefälle bei Kanälen.

Soll die Kanalsohle durch das Wasser nicht angegriffen werden, so sind folgende Geschwindigkeiten (in m/sk) nicht zu überschreiten, wenn v_o die mittlere Geschwindigkeit an der Oberfläche,
v_u " " " " " Sohle,
v_m " " Profilgeschwindigkeit bedeutet:

Beschaffenheit des Bettes	v_o	v_u	v_m	Beschaffenheit des Bettes	v_o	v_u	v_m
Schlammige Erde und brauner Töpferton .	0,15	0,08	0,12	Kiesiger Boden	1,22	0,70	1,00
Feiner Sand	0,20	0,10	0,16	Grobsteiniger Boden . .	1,52	0,94	1,25
Lehm und fetter Ton (abgelagert)	0,30	0,16	0,25	Gemisch v. Schieferstücken	2,22	1,49	1,80
Fetter Flufssand	0,60	0,31	0,50	Lagerhafte Gebirgsarten .	2,75	1,82	2,30
				Harte, ungeschichtete Felsarten	4,27	3,14	3,50

Sollen sich in einem Kanale keine Sinkstoffe niederschlagen, so mufs die mittlere Geschwindigkeit mindestens betragen:

wenn das Wasser leichten Schlamm mit sich führt, $v = 0{,}25$ m/sk,
wenn das Absetzen von Sand zu befürchten ist, $v = 0{,}50$ m/sk.

Für **Fabrikkanäle** wähle man $v = 0{,}4$ bis $0{,}8$ m/sk; dabei erhalten die Zuleitungskanäle ein Gefälle $= 0{,}0005$ bis $0{,}0004$, die Unterkanäle $= 0{,}002$ bis $0{,}001$.

Sollen **Schiffahrtkanäle** zu Reinigungszwecken abgelassen werden können, als Entwässerungskanäle dienen, Wasser zur Bewässerung oder zur Speisung tiefer gelegener Haltungen abgeben, so erhalten sie ein Gefälle $= 0{,}000005$ bis $0{,}000040$. Sonst ist bei (1,5 bis 75 km langen) Kanalhaltungen das Gefälle $= 0$. Die stärksten, für Schiffahrt möglichen Gefälle sind $1 : 600$ bis $1 : 500$; Gefälle über $1 : 5000$ werden schon zu vermeiden gesucht.

E. Fließen des Wassers durch Erdreich.

a) Querschnitt von Zu- oder Abfluß klein gegen den Durchflußquerschnitt.

Fliefsen nach einer Richtung hin wird eingeleitet durch Spannungsabfall (Druckhöhenunterschied) des Grundwassers in dieser Richtung. An beiden Endpunkten der Bahn be-

finden sich Zu- bzw. Ablauf. Alle Wasserschichten mit gleichem Abstande von denselben besitzen gleiche Spannung, die mit der Entfernung vom Zulauf abnimmt.

Die Strömung beginnt in der Richtung nach dem Ablauf zu, radial auseinander gehend, auf einem Bogen von 180°; die Stromfäden werden stetig in der Richtung des Spannungsabfalles abgelenkt, bis sie sich am Ablauf wieder radial vereinigt haben. Die Stromlinien ähneln daher den auf die Ebene projizierten Meridianlinien einer Kugel, deren Pole durch Zu- bzw. Ablauf gebildet werden. Die Flächen gleicher Spannung sind Kugelflächen, wenn Zu- und Ablauf Punkte im Erdreich darstellen; sie sind Zylinderflächen, wenn Zu- und Ablauf Stollen oder Kanäle darstellen. Die Spannungsflächen werden nach oben zu durch den Grundwasserstand begrenzt; nach unten zu werden Verdrückungen der Linien durch wasserdichte Erdschichten herbeigeführt.

Hiernach findet auch unterhalb der Gefällelinie zwischen den Sohlen von Zu- und Ablauf eine Strömung zum Ablauf hin statt, wenn die Sohlen beider nicht bis zur wasserdichten Erdschicht reichen; die Wasserspannungen unter der Sohle des Zulaufs nehmen mit der Tiefe ab; umgekehrt ist es unter der Sohle des Ablaufes. Vrgl. Versuche von Pennink, J. f. Gasbel. u. Wasserw. 1907 S. 68.*)

b) Querschnitt von Zu- und Abfluß gleich dem Durchflußquerschnitt, dieser unveränderlich; Filter.**)

Unter der Voraussetzung, dafs das Korn der Bodenart genaue Kugelform vom Durchmesser d besitzt, folgt, wenn l die Dicke und F den Querschnitt der durchflossenen Bodenschicht bedeutet:

Anzahl der Kugeln im Querschnitte F: $1{,}15\,F : d^2$,
kleinster, für den Durchflufs freibleibender Flächenanteil: $0{,}1\,F$,
Anzahl der Kugeln im Raume Fl: $1{,}41\,Fl : d^3$,
Anzahl der Kugellagen auf der Strecke l: $l\sqrt{3} : d\sqrt{2}$,
Oberfläche aller Kugeln im Raume Fl: $4{,}44\,Fl : d$,
Summe der Hohlräume im Raume Fl je nach Lagerung 0,26 bis 0,47 Fl.

(Die Hohlräume zwischen den Körnern sorgfältig sortierten und gereinigten Sandes von $d = 0{,}54$ bis 3,8 mm fand Kröber zu 0,39 bis 0,41 Fl; bei gewöhnlichem Sande mit Körnern von $d = 0{,}1$ bis 0,8 mm fand H. Lang 0,36 Fl.)

Es bedeute

Q die durchfliefsende Wassermenge für 1 qm Bodenfläche, je nach näherer Angabe in ltr oder cbm in der Stunde,
d den mittleren Korndurchmesser in mm,
l die Dicke der Bodenschicht, im Sinne der Wasserbewegung gemessen, in m,

*) Vrgl. P. Forchheimer, Grundwasserspiegel bei Brunnenanlagen, Z. d. V. d. I. 1899 S. 202 u. Z. ö. I. u. A. V. 1898 S. 629.

**) Vrgl. P. Forchheimer, Z. d. V. d. I. 1901 S. 1736 u. Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, Abschnitt Hydraulik S. 449.

H die für den Durchflufs beanspruchte Druckhöhe in m; bei lotrechtem Durchflufs und gleichartigem Boden ist l ein Teil von H.
m den Anteil von der Bodenmasse, den die Hohlräume einnehmen,
k oder k_1 den Wert der Durchlässigkeit.

Nach Slichter gilt für ganz reinen Sand von gleichmäfsigem Korn, bei 10^0 C:

$$Q = k\,d^2\,H : l \text{ in cbm/st, worin}$$

für $m =$	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,47
„ $k =$	3,32	4,25	5,33	6,60	8,07	9,73	11,6	13,8	15,2	18,9	21,8	23,7.

Bei Grobsanden, Kies und Schotter gilt dieses einfache Gesetz nicht mehr, sondern ein ähnliches Gesetz wie für den Durchflufs durch enge Röhrchen (vrgl. S. 272), das noch nicht festgestellt ist; hierbei nimmt also k mit wachsendem $H : l$ ab.

Nach Versuchen der Königl. Kanal-Kommission in Münster 1892:

Flufs-Sand, weder gesiebt noch gewaschen, Filteroberfläche = 1 qm, H bis 5 m, $l_{max} = 1$ m.

Q in l/st $= k_1\,H : l$, worin für

Sand, 0,1 bis 0,8 mm Korn . .	$k_1 = 32$,
Sand, 0,1 „ 0,3 „ „ . .	„ = 9,
Sand mit Spuren von Lehm . .	„ = 3,
Mergel, feucht eingestampft . .	„ = 0,0035,
Lehm „ „ . .	„ = 0,0020.

Gewaschener Filtersand des Wasserwerks in Hamburg:

Q wie oben mit $k_1 = 28$.

Nach Versuchen von Welitschkowsky:

Kies und Sand gesiebt und gewaschen; Filteroberfläche = 20 qcm, H bis 2,0 m, l bis 1,0 m.

Q in cbm/st, worin für

Mittelkies, 4,0 bis 7,0 mm Korn . .	$k_1 = 126$,
Feinkies, 2,0 „ 4,0 „ „ . .	„ = 108,
Grobsand, 1,0 bis 2,0 mm Korn . .	$\alpha = 19$,
Mittelsand, 0,3 „ 1,0 „ „ . .	„ = 1,8.

Bei übereinander liegenden Schichten von verschiedenem Korn ist die mit kleinstem Korn für Q mafsgebend, selbst wenn diese Schicht nur wenige cm hoch ist.

Bei Mischungen von verschiedenem Korn wird die gröfste Dichtigkeit erreicht, wenn sich das kleinere Korn in die Zwischenräume des gröfseren einzulegen vermag; dann ist für Q angenähert das kleinere Korn mafsgebend.

Die Durchlässigkeit von Bodenarten wird besonders durch quellende Zwischenschichten, z. B. Lehm, Eisenoxyd, Humus usw., wirkungsvoll vermindert; diese Zwischenschichten erreichen ihre gröfste Wirkung schon bei wenigen mm Stärke; doch ist gewöhnlich in Rück-

sicht auf Ausspülungen, ungleichmäfsige Bodensenkungen oder Erdgängen von Tieren an Stärke zuzugeben.

Ausgetrockneter Ton quillt im Wasser um etwa das 2,5-fache seines Rauminhaltes auf. Daher ist es bedenklich, Ton zur Hinterfüllung von Futtermauern zu verwenden (Schotter empfehlenswerter); zum Abdichten von durchlässigem Boden ist Lehm wasserarm aufzustampfen und gegen späteres Abschwemmen mit Sandschüttung zu belasten. Die Durchlässigkeit von aufgeschlemmtem Lehm ist etwa 1000 mal gröfser als die von feucht aufgestampftem Lehm.

F. Steighöhe und Sprungweite freier Wasserstrahlen.

Es bedeutet

H die nutzbare Druckhöhe an der Mündung in m (praktisch an einer Stelle vor der Mündung von wesentlich gröfserem Querschnitte zu ermitteln, als ihn die Mündung besitzt),
S die lotrechte Steighöhe des Strahles in m,
W die Sprungweite des geneigten Strahles in m,
d die Mündungsweite des Mundstückes in mm.

Infolge des Luftwiderstandes entspricht bei gleichem H einem gröfseren d auch ein gröfseres S und W.

Freemans*) Versuche mit Feuerschlauch-Mundstücken von $d = 19$ bis 35 mm Durchmesser ergeben auszugsweise folgende Werte S und W (letztere bei 32° Neigung des Mundstückes):

Steighöhen und Sprungweiten in m		Druckhöhe (dicht vor dem Mundstücke) H in m = 5	10	15	20	30	40	50	60	70	d in mm
S	des noch gut zusammenhaltenden Strahles bei frischem Winde	3,7	7,3	11,0	14,4	16,2	21.6	23,6	24,4	25,4	19
		4,0	7,9	11,6	15,2	18,3	24,6	27,7	29,6	31,0	35
	der äufsersten Tropfen bei Windstille	4,3	8,8	13,1	17,7	25,3	31,0	36,0	39.0	41,0	19
		4,6	9,5	14,0	18,3	27,8	36,0	43.0	48.0	50.0	35
W	des noch gut zusammenhaltenden Strahles bei frischem Winde	4,3	7,0	9.5	11,0	14,0	15,8	17,7	19,5	20,8	19
		5,5	9,5	13,1	15,8	20,4	23,0	25,0	27,0	28,7	35
	der äufsersten Tropfen bei Windstille	7,8	15,5	23,2	28,6	35,8	41,0	45.0	48.5	51.0	19
		8,8	17,4	26,6	34,2	47,0	55,0	62,0	67,0	72,0	35

Ein gutes Mundstück mufs im engsten Teile sehr glatte Wandung besitzen und mufs jede Einschnürung des Strahles nach Verlassen des Mundstückes vermeiden, da sonst ein Versprühen des Strahles eintritt. Durch schwache Verjüngung der Mündung von nur 5° bis höchstens 13° wird der Strahl besser zusammengehalten als durch genau zylindrische Form; diese Verjüngung braucht sich nur auf eine Länge von 1 bis $2d$ zu erstrecken und nimmt weiterhin am besten kegelig zu.

*) S. Freeman, Verhandlungen der American Society of Civil Engineers, New York, Nov. 1890; auch J. G. W. 1890 Nr. 32 bis 34.

Ueber Reibung im kegelförmigen Rohr vrgl. S. 279, über Reibung in der Zuleitung vrgl. S. 267 u. ff.

Zum Feuerlöschen verwendet man besser einen gröfseren Strahlquerschnitt, als zwei kleinere, da ersterer eine gröfsere Sprungweite besitzt und ein rascheres Löschen des Feuers dusch „Auspeitschen“ ermöglicht.

G. Stofs des Wassers gegen Flächen und Körper.

a. Stofs eines Wasserstrahles.

Es bezeichne

P den Stofs (d. h. den hydraulischen Druck) eines Wasserstrahles gegen eine Fläche in kg,

F den Querschnitt des Wasserstrahles in qm,

v die Geschwindigkeit des Wasserstrahles in m/sk,

c die Geschwindigkeit, mit der sich die getroffene Fläche im Sinne von v bewegt, in m/sk,

γ das Gewicht eines cbm Wassers $= 1000$ kg, $g = 9{,}81$ m/sk^2,

α den Winkel, um den der Wasserstrahl abgelenkt wird,

$h = v^2 : 2\,g$ die dem v entsprechende Geschwindigkeitshöhe in m,

Q die Wassermenge, die zum Stofs gelangt, in cbm/sk; es ist $Q = (v - c)\,F$, wenn immer dieselbe Fläche gestofsen wird, dagegen $Q = v\,F$, wenn (wie z. B. bei Wasserrädern) sich eine ununterbrochene Reihe von Flächen dem Strahle entgegenstellt.

1. Allgemein ist, wenn F als klein gegenüber der Gröfse der gestofsenen Fläche zu erachten ist,

$$P = \frac{\gamma}{g}\,Q\,(v - c)\,(1 - \cos\alpha).^{*)}$$

2. Für eine Ebene winkelrecht zur Richtung des Strahles, die so grofs ist, dafs die Wasserstrahlen sämtlich um $\alpha = 90^0$ abgelenkt werden, ist

$$P = \frac{\gamma}{g}\,Q\,(v - c),$$

und wenn die Ebene sich dabei in Ruhe befindet, also $c = 0$:

$$P = \gamma F \frac{v^2}{g} = 2\,\gamma F h.$$

3. Werden die Wasserfäden, wie in Abb. 149 durch eine hohle Fläche gezwungen, in der entgegengesetzten Richtung wieder abzufließen, so ist $\alpha = 180^0$ und

---

*) P wird nur halb so grofs, wenn die Ebene und der Strahl gleichen Durchmesser erhalten, und 0.75 mal so grofs, wenn die Ebene mindestens den doppelten Strahldurchmesser besitzt und zugleich ganz nahe an die Mündung gerückt ist.

$$P = 2\,\frac{\gamma}{g}\,Q\,(v - c),$$

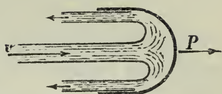


Abb. 149.

und wenn die Fläche sich dabei in Ruhe befindet, also $c = 0$:

$$P = 2\gamma F\,\frac{v^2}{g} = 4\gamma F h.$$

4. Die Arbeitstärke (Leistung) des Stoßes $L = Pc$ (in mkg/sk) ist am größten, wenn $c = {}^1\!/_2 v$, und es ist alsdann

für den Fall 2.: $L = {}^1\!/_2\,\frac{v^2}{2g}\,Q\gamma = {}^1\!/_2\,Q h \gamma;$

für den Fall 3.: $L = \frac{v^2}{2g}\,Q\gamma = Q h \gamma.$

5. Ist der Stofs unter dem Winkel α gegen eine Ebene gerichtet, so wird der **Gesamtstofs** in der Richtung des Strahles, wenn das Wasser ausweicht:

nur nach einer Seite (Abb. 150):

$$P = \frac{\gamma}{g}\,Q\,(v - c)\,(1 - \cos\alpha)$$



Abb. 150.

(vrgl.: Gerader Stofs unter 1.)

nach zwei Seiten hin (Abb. 151):

$$P = \frac{\gamma}{g}\,Q\,(v - c)\sin^2\alpha$$

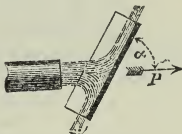


Abb. 151.

nach allen Seiten hin:

$$P = \frac{\gamma}{g}\,Q\,(v - c).$$

b. Stofs von Flächen und Körpern gegen unbegrenztes Wasser.

Bezeichnet

W den Widerstand in kg, den der bewegte schwimmende Körper allein durch den Stofs auf Vorder- und Hinterfläche gleichzeitig erfährt (letzterer ist negativ), also ausschliefslich der Reibung an der benetzten Fläche,

F die Projektion der benetzten Flächen auf die Stofsrichtung, in qm,

v die mittlere Geschwindigkeit, mit der die Flächen das Wasser treffen, in m/sk,

ψ eine Widerstandszahl für die Flächeneinheit von F,

α den Winkel zwischen Stofsfläche und Stofsrichtung bzw. den halben Winkel der symmetrisch gegen die Stofsrichtung ausgebildeten vorderen Zuschärfung des Körpers,

α_1 denselben Winkel für die hintere Zuschärfung des Körpers,

γ und g dasselbe, wie unter **a.**, so ist nach Versuchen von Fink*):

$$W = \psi \gamma F \frac{v^2}{2g}.$$

(Die Reibung W_1 in kg an benetzter glatter Oberfläche O in qm setze nach Froude und Middendorf $W_1 = 0{,}16\, O v^{1{,}85}$, vrgl. Abschnitt Schiffbau.)

1. Untergetauchte Ebene, lotrecht stehend, deren Gröfse $= F : \sin\alpha$.

$\alpha = 0^0$ bis 30^0	53^0 bis 90^0	zwischen 30^0 und 53^0, bei zeichnerischer Auftragung der Werte,
$\psi = 1{,}2 \sqrt{\sin\alpha}$;	$= 1{,}0 \sqrt{\sin\alpha}$;	$\sim$-förmige Uebergangskurve für ψ.

2. Untergetauchte Schneide, aus nur 2 lotrechten, gleich grofsen, rechteckigen und dünnen Tafeln hergestellt:

$$\alpha = 0^0 \text{ bis } 90^0$$
$$\psi = 1{,}0 \sin\alpha;$$

$\alpha = 150^0$ bis 180^0	zwischen 90^0 und 150^0 höckerförmige Ueber-
$\psi =$ etwa 1,0;	gangskurve mit max. 1,2 bei 120^0 bis 130^0.

3. Untergetauchter Keilkörper, Schneide und Rückenebene lotrecht, Boden und Decke wagerecht:

$$\alpha = 0^0 \text{ bis } 90^0$$
$$\psi = 1{,}0 \sin\alpha.$$

4. Eingetauchter Keilkörper, Schneide lotrecht, Boden wagerecht, mit keilförmigem Hinterkörper ($\alpha_1 = 6^0$) verbunden:

$\alpha = 0^0$ bis 60^0	75^0 bis 90^0	dazwischen Uebergangs-
$\psi = 1{,}0 \sin\alpha$	$= \sqrt{\sin^3\alpha}$	kurve für ψ.

5. Eingetauchter Keilkörper, Schneide lotrecht, mit Parallelepipedon als Hinterkörper verbunden, dessen Länge = 4-facher Breite:

$\alpha = 0^0$ bis 60^0	60^0 bis 90^0
$\psi = 0{,}8 \sin\alpha$;	$= 0{,}97 \sin^2\alpha$.

Bei geringerer Länge als 3-facher Breite nimmt ψ zu bis zum Höchstwert $\psi = 1{,}0 \sin\alpha$.

6. Eingetauchtes Parallelepipedon als Vorderkörper mit keilförmigem Hinterkörper, Schneide lotrecht:

$\alpha_1 =$	6^0	12^0	18^0	24^0	30^0	36^0 bis 90^0
$\psi =$	0,83	0,83	0,85	0,88	0,92	1,00.

7. Eingetauchter Keilkörper, Schneide wagerecht über Wasserspiegel, mit Parallelepipedon als Hinterkörper:

$$\alpha = 0^0 \text{ bis } 90^0$$
$$\psi = 1 - \cos\alpha.$$

8. Eingetauchtes Parallelepipedon als Vorderkörper mit keilförmigem Hinterkörper, Schneide wagerecht über Wasserspiegel:

$\alpha_1 =$	12^0	18^0	30^0	42^0 bis 90^0
$\psi =$	0,85	0,86	0,92	1,00.

9. Untergetauchte Kugel: $\psi = 0{,}78$.

*) Civ. Ing. 1892, 1893, 1894.

Nach Messungen (1842 bis 1880) betrug der Stofs der **Meereswellen** bis zu 32 t/qm. Am Leuchtturme zu Sherry wurden (in 22 m Höhe über M.W.). Blöcke von 13 t Gewicht losgerissen.

Ueber den Widerstand fahrender Schiffe vrgl. d. Abschnitt Schiffbau.

II. Wassermessung.*)

a. Ermittlung von Druckhöhen in Rohrleitungen.

Bei kleinem Drucke ist am bequemsten und sichersten das **Piezometer** (gläsernes Standrohr); bei besonders kleinem Drucke verwende liegendes Rohr nach Krell sen.**)

Bei gröfserem Drucke werden **Differential-Flüssigkeitssäulen** aus Wasser oder Quecksilber benutzt, welche aber viele Korrekturen der Ablesungen erfordern; oft genügen bei guter Ausführung die bequemeren **Federmanometer.**

Anschlufs der Standrohre an die Leitung mittels Bohrung von 1 bis 2 mm Durchmesser in der Rohrwand, u. zw. genau winkelrecht zur Stromrichtung. Entfernung des etwa vorhandenen Grates am Bohrloch und selbsttätige Entfernung der Luft in allen Teilen der Standrohranlage sind Vorbedingungen für eine gute Messung. — Die Widerstandshöhe einer Rohrleitung mufs stets durch den Unterschied der hydraulischen Druckhöhen in mindestens zwei Standrohren bestimmt werden; sie müssen an Stellen mit gleichem Durchflufsquerschnitt angebracht sein, an denen keine Verengung vorhanden ist. Durch Verbindung des Luftraumes der Standrohre und Herstellung einer Luftverdünnung in diesem Raume werden die Wasserspiegel in bequeme Beobachtungshöhe gebracht.

b. Ermittlung von Wassergeschwindigkeiten.

1. **In gröfseren Wasserläufen** dienen zur Bestimmung der Oberflächengeschwindigkeit **Oberflächenschwimmer,** deren Tauchtiefen nicht über 0,3 m betragen sollen. Für beliebige Tiefen benutzt man **Stabschwimmer,** meist ein Blechrohr ($d \overline{\gtrless} 2$ cm) mit Boden und Deckel, das mit Schrot bis zum geeigneten Eintauchen gefüllt wird. Stabschwimmer, in möglichst lotrechter Lage bis nahe an die Sohle reichend, setzen ein gleichbleibendes Wasserprofil voraus. Bei Oberflächen- und Stabschwimmern ist die Wassergeschwindigkeit gleich dem Schwimmwege (in m) geteilt durch die Schwimmzeit (in Sekunden).

Bezeichnet man für eine Lotrechte die Oberflächengeschwindigkeit mit v_0, so ist die mittlere Geschwindigkeit in dieser Lotrechten etwa $= 0{,}85\, v_0$, und sie befindet sich um 0,55 bis 0,65 der ganzen Tiefe unterhalb der Oberfläche. Die Geschwindigkeit an der Sohle der Lotrechten wechselt dagegen stark zwischen 0,25 bis 0,75 v_0. Die gröfste Geschwindigkeit auf der Lotrechten befindet sich (je nach dem Windeinflusse) 0,1 bis 0,3 m unter der Oberfläche.

Zur Bestimmung der mittleren Profilgeschwindigkeit v teile den Querschnitt F in n lotrechte und gleich breite Teile f_1, $f_2 \cdots f_n$ und bestimme durch Schwimmer oder mittels der nachstehenden Verfahren für jeden Teil die zugehörigen mittleren Geschwindigkeiten $v_1, v_2 \cdots v_n$; dann ist

$$v = \frac{f_1 v_1 + f_2 v_2 + \cdots + f_n v_n}{F}.$$

*) S. Weisbach, Lehrb. d. theor. Mechanik.
**) O. Krell sen., Hydrost. Mefsinstrumente, Verlag Oldenbourg.

Der **Woltmannsche Flügel,** durch elektrische Zählvorrichtung verbessert von **Amsler** und von **Harlacher,** durch Schallvorrichtung verbessert von **Wagner,***) ist bei Geschwindigkeiten bis zu 1,5 m/sk für Tiefen bis 8 m verwendbar. Die sekundliche Umlaufzahl n der Schaufeln ist abhängig von der Geschwindigkeit v; es ist

$$v = \alpha n + \beta, \text{ oder } v = \alpha n + \sqrt{\beta n^2 + \gamma},$$

worin die dem Flügel eigentümlichen Erfahrungswerte α, β und γ bestimmt werden, indem man den Flügel mit bekannter Geschwindigkeit durch stillstehendes Wasser fährt.**)

2. **In kleinen Wasserläufen, für Rohrleitungen** und **freie Wasserstrahlen** benutzt man mit Vorteil die verbesserte **Pitotsche Röhre.** Sie ist ein lotrecht eingetauchtes Rohr mit unten wagerecht abgebogenem Schenkel, der eine feine Düse besitzt. Diese, gegen den Strom gerichtet, erhöht den Spiegel im Standrohr um $v^2 : 2g$. Eine zweite Röhre, nach Biel die erste im wagerechten Teil umschliefsend und mit feinen Löchern am Umfang versehen, gibt nur den Seitendruck an der Meßstelle an. Durch gleiche Luftleere über beiden Röhren werden die Beobachtungsspiegel in bequem abzulesende Höhe gebracht.***)

Ueber Anzeigen der Pitotschen Röhre bei verschiedenen Neigungen des Schenkels gegen die Stromrichtung vrgl. Otto Krell jr., Messung von dynamischem und statischem Druck, S. 44, Verlag Oldenbourg.

Die von **Frank** verbesserte Röhre läfst die mittlere Geschwindigkeit auf einer Senkrechten durch eine einzige Messung bestimmen.†)

Der **Schirmschwimmer** von Andersson ist eine sehr leichte, vom Strom mitgeführte Querwand im **Mefskanal,** der auf etwa 20 m ganz regelmäfsigen Querschnitt besitzt. Ergebnisse sehr genau. Beschr. s. Z. d. V. d. I. 1907 S. 627.

c. Ermittlung von Wassermengen.

1. Für **gröfsere Wasserläufe** wird die abfliefsende Wassermenge Q in cbm/sk entweder mittels Messung der Wassergeschwindigkeiten wie unter **b.** 1. (S. 291), oder aus den **Wasserverhältnissen im Niederschlagsgebiete** des Wasserlaufes bestimmt, vrgl. Abschnitt Wasserversorgung Bd. II.

2. Für **kleinere Wasserläufe** werden geeichte Gefäfse, Wasserbecken, und bei bekannter Durchflufszahl μ der Ueberlauf, Durchlafs oder der sogen. **Wasserzoll** verwendet, d. i. ein Strahl, der durch eine Kreisöffnung in zugeschärfter lotrechter Wandung von 1 preufs. Zoll (= 26,15 mm) Durchmesser und bei etwa 2 mm Wasserhöhe über Oberkante der Oeffnung abfliefst. In der dichten Abschlufswand sind mehrere solcher Oeffnungen (und u. Umst. Oeffnungen von $^1/_2$, $^1/_4$ und $^1/_8$ Zoll Dmr.) eingeschnitten, von denen so viele durch Stöpsel unter Verschlufs gehalten werden, dafs das Wasser gleiche Stauhöhe

*) S. Wochenbl. f. Arch. u. Ing. 1882 S. 479.

**) S. Wochenbl. f. Baukunde 1887 S. 382; C. d. B. 1897 S. 489; Lieferant Falter u. Sohn, München, auch A. Ott in Kempten (Bayern).

***) Amsler-Laffon u. Sohn, Schaffhausen.

†) S. D. B. 1888 S. 609.

behält. Nach Hagen liefert 1 preufs. Wasserzoll 0,3612 Kub.-F./min = 11,1683 l/min = 520 Kub.-F./Tag = 16,0784 cbm/Tag. Da die Kantenbildung der Kreisöffnungen und bei kleiner Druckhöhe das Mafs der Druckhöhe von grofsem Einfluss auf Q ist, so wird die Bestimmung mittels des Wasserzolles unsicher.

Genauer ist das **Mefsverfahren von Brauer und Hansen***), bei dem durch gut polierte und ausgerundete Düsen von verschiedenem Querschnitt im Boden des Ablaufes (vrgl. Abb. 130 auf S. 262) eine Teilung von Q herbeigeführt wird. Die Düsen stehen also sämtlich unter gleichem Wasserdruck und haben die gleiche Ausflufszahl $\mu \sim 0,99$; mithin verhalten sich die durchgeflossenen Wassermengen wie die Querschnitte der Düsen. Eine der kleineren Düsen fördert in ein Gefäfs, dessen Wassermenge gemessen oder gewogen wird.

3. **Sehr kleine Wassermengen** lassen sich besonders genau durch unmittelbares **Abwägen** (Bottich auf einer Dezimalwage stehend) bei gleichzeitiger Zeitablesung bestimmen. Zur letzteren verwende man eine Taschenuhr mit Druckknopf zum Sperren eines Zeigers für Fünftel-Sekunden. Vor Beginn der Messung gleiche das Taragewicht mit einem gröfseren Ueberschufs aus, lasse nun das Wasser zulaufen und setze den Zeiger erst in dem Augenblick des Gewichtausgleiches in Gang. Darauf füge man der Gewichtschale ein abgerundetes Gewicht hinzu, welches diese Schale von neuem eine ausreichende Zeit niederhält. Im Augenblick des abermaligen Gewichtausgleichs halte man den Zeiger der Uhr wieder an.

---

*) S. Z. d. V. d. I. 1892 S. 1493 u. 1061.

C. WÄRME.*)

(Einschliefslich der Mechanik der Gase und Dämpfe.)

I. ALLGEMEINE WÄRMEEIGENSCHAFTEN DER KÖRPER.

A. Temperaturmessung.

Bezeichnen C, R und F die einer bestimmten Temperatur entsprechenden Grade nach Celsius, Réaumur und Fahrenheit, so ist

$$C = {}^5/_4\ R = {}^5/_9\ (F - 32^0), \qquad R = {}^4/_5\ C = {}^4/_9\ (F - 32^0),$$
$$F = 32^0 + {}^9/_5\, C = 32^0 + {}^9/_4\, R.$$

Hiernach ergibt sich die Tafel a. S. 295.

Als normale Temperaturskala gilt die des **Wasserstoffthermometers.** Gewöhnliche luftfreie **Quecksilberthermometer** sind bis gegen 300° brauchbar, für höhere Temperaturen wird das Haarröhrchen über dem Quecksilber mit Stickstoff oder Kohlensäure unter hohem Druck gefüllt, wodurch Quecksilberthermometer bis 550° sehr gut zu verwenden sind. Die untere Grenze der Brauchbarkeit ist — 39°.

Hat nicht das ganze Quecksilber des Thermometers die zu messende Temperatur, so mufs zu der Ablesung t ein Betrag Δt hinzugefügt werden, welcher sich aus der Länge des herausragenden Fadens f in Graden und aus dessen Temperatur t_f bestimmt:

$$\Delta t = \frac{1{,}6\, f (t - t_f)}{10\,000}.$$

Zur Bestimmung von t_f kann ein kleines Hilfsthermometer benutzt werden, das man unmittelbar neben dem anderen aufhängt.

Für **niedrige Temperaturen** unter — 39° dient **Alkohol, Toluol** oder **Petroleumäther** zur Füllung von Thermometern.

Zu genauen Temperaturmessungen kommen aufser den Quecksilberthermometern besonders **elektrische Thermometer** in Betracht.

Das **elektrische Widerstandsthermometer** (Platinthermometer) beruht auf der regelmäfsigen Zunahme des Leitungswiderstandes eines Platindrahtes mit der Temperatur. Gebrauchsgrenze nach oben bei geeigneter Anordnung bis 1000°, nach unten beliebig tief. Eichung nach Normalthermometern.

Das **Thermoelement** mifst die Temperatur durch die Spannung eines Thermostromes. Zwei gleichlange Drähte von verschiedenen Metallen werden zusammengelötet und die Lötstelle der zu messenden Temperatur ausgesetzt, während die beiden anderen Enden auf unveränderlicher Temperatur gehalten werden. Die Spannung wird durch ein Galvanometer oder durch Kompensation gemessen. Eichung nach Normalthermometer, bei hohen Temperaturen mit bekannten Fixpunkten.

---

*) Nachdruck vorbehalten. Für das Taschenbuch verfafst von Prof. Dr. Mollier Dresden.

Vergleichung der Thermometergrade.

(Näheres s. S. 294.)

C	R	F	C	R	F	C	R	F	C	R	F
−20	−16	− 4,0	+35	+28,0	+ 95,0	+ 90	+ 72,0	+ 194,0	+145	+ 116,0	+ 293,0
−19	−15,2	− 2,2	36	28,8	96,8	91	72,8	195,8	146	116,8	294,8
−18	−14,4	− 0,4	37	29,6	98,6	92	73,6	197,6	147	117,6	296,6
−17	−13,6	+ 1,4	38	30,4	100,4	93	74,4	199,4	148	118,4	298,4
−16	−12,8	3,2	39	31,2	102,2	94	75,2	201,2	149	119,2	300,2
−15	−12,0	5,0	40	32,0	104,0	95	76,0	203,0	150	120,0	302,0
−14	−11,2	6,8	41	32,8	105,8	96	76,8	204,8	151	120,8	303,8
−13	−10,4	8,6	42	33,6	107,6	97	77,6	206,6	152	121,6	305,6
−12	− 9,6	10,4	43	34,4	109,4	98	78,4	208,4	153	122,4	307,4
−11	− 8,8	12,2	44	35,2	111,2	99	79,2	210,2	154	123,2	309,2
−10	− 8,0	14,0	45	36,0	113,0	100	80,0	212,0	155	124,0	311,0
− 9	− 7,2	15,8	46	36,8	114,8	101	80,8	213,8	156	124,8	312,8
− 8	− 6,4	17,6	47	37,6	116,6	102	81,6	215,6	157	125,6	314,6
− 7	− 5,6	19,4	48	38,4	118,4	103	82,4	217,4	158	126,4	316,4
− 6	− 4,8	21,2	49	39,2	120,2	104	83,2	219,2	159	127,2	318,2
− 5	− 4,0	23,0	50	40,0	122,0	105	84,0	221,0	160	128,0	320,0
− 4	− 3,2	24,8	51	40,8	123,8	106	84,8	222,8	161	128,8	321,8
− 3	− 2,4	26,6	52	41,6	125,6	107	85,6	224,6	162	129,6	323,6
− 2	− 1,6	28,4	53	42,4	127,4	108	86,4	226,4	163	130,4	325,4
− 1	− 0,8	30,2	54	43,2	129,2	109	87,2	228,2	164	131,2	327,2
0	0	32,0	55	44,0	131,0	110	88,0	230,0	165	132,0	329,0
+ 1	+ 0,8	33,8	56	44,8	132,8	111	88,8	231,8	166	132,8	330,8
2	1,6	35,6	57	45,6	134,6	112	89,6	233,6	167	133,6	332,6
3	2,4	37,4	58	46,4	136,4	113	90,4	235,4	168	134,4	334,4
4	3,2	39,2	59	47,2	138,2	114	91,2	237,2	169	135,2	336,2
5	4,0	41,0	60	48,0	140,0	115	92,0	239,0	170	136,0	338,0
6	4,8	42,8	61	48,8	141,8	116	92,8	240,8	171	136,8	339,8
7	5,6	44,6	62	49,6	143,6	117	93,6	242,6	172	137,6	341,6
8	6,4	46,4	63	50,4	145,4	118	94,4	244,4	173	138,4	343,4
9	7,2	48,2	64	51,2	147,2	119	95,2	246,2	174	139,2	345,2
10	8,0	50,0	65	52,0	149,0	120	96,0	248,0	175	140,0	347,0
11	8,8	51,8	66	52,8	150,8	121	96,8	249,8	176	140,8	348,8
12	9,6	53,6	67	53,6	152,6	122	97,6	251,6	177	141,6	350,6
13	10,4	55,4	68	54,4	154,4	123	98,4	253,4	178	142,4	352,4
14	11,2	57,2	69	55,2	156,2	124	99,2	255,2	179	143,2	354,2
15	12,0	59,0	70	56,0	158,0	125	100,0	257,0	180	144,0	356,0
16	12,8	60,8	71	56,8	159,8	126	100,8	258,8	181	144,8	357,8
17	13,6	62,6	72	57,6	161,6	127	101,6	260,6	182	145,6	359,6
18	14,4	64,4	73	58,4	163,4	128	102,4	262,4	183	146,4	361,4
19	15,2	66,2	74	59,2	165,2	129	103,2	264,2	184	147,2	363,2
20	16,0	68,0	75	60,0	167,0	130	104,0	266,0	185	148,0	365,0
21	16,8	69,8	76	60,8	168,8	131	104,8	267,8	186	148,8	366,8
22	17,6	71,6	77	61,6	170,6	132	105,6	269,6	187	149,6	368,6
23	18,4	73,4	78	62,4	172,4	133	106,4	271,4	188	150,4	370,4
24	19,2	75,2	79	63,2	174,2	134	107,2	273,2	189	151,2	372,2
25	20,0	77,0	80	64,0	176,0	135	108,0	275,0	190	152,0	374,0
26	20,8	78,8	81	64,8	177,8	136	108,8	276,8	191	152,8	375,8
27	21,6	80,6	82	65,6	179,6	137	109,6	278,6	192	153,6	377,6
28	22,4	82,4	83	66,4	181,4	138	110,4	280,4	193	154,4	379,4
29	23,2	84,2	84	67,2	183,2	139	111,2	282,2	194	155,2	381,2
30	24,0	86,0	85	68,0	185,0	140	112,0	284,0	195	156,0	383,0
31	24,8	87,8	86	68,8	186,8	141	112,8	285,8	196	156,8	384,8
32	25,6	89,6	87	69,6	188,6	142	113,6	287,6	197	157,6	386,6
33	26,4	91,4	88	70,4	190,4	143	114,4	289,4	198	158,4	388,4
34	27,2	93,2	89	71,2	192,2	144	115,2	291,2	199	159,2	390,2

In der Technik sind Thermoelemente besonders zur Messung hoher Temperaturen sehr wertvoll. Das meist gebrauchte Platin — Platin Rhodium Element mifst bis 1600°.*)

Für Laboratoriumzwecke sind Thermoelemente aber auch bei mittleren und niederen Temperaturen oft sehr bequem. Da nur die sehr kleine Lötstelle der zu messenden Temperatur ausgesetzt werden mufs, so kann in sehr engen Räumen und an bestimmten eng begrenzten Stellen gemessen werden.

Für verschiedene Metallpaare ergeben sich für 100° Temperaturunterschied der Drahtenden folgende elektromotorischen Kräfte in Millivolt

Eisen — Konstantan 5,3;	Kupfer — Nickel 2,2;
Kupfer — Konstantan 4,0;	Eisen — Platin 1,7;
Eisen — Nickel 3,2;	Platin — 10 vH. Rhod. Platin 1,0.

Elektrische Widerstandsthermometer und Thermoelemente eignen sich vorzüglich als **Fernthermometer.**

Zur **Eichung** und **Prüfung** von Thermometern für hohe Temperaturen dienen am besten die genau bekannten Schmelzpunkte von Zinn, Zink, Antimon, Silber, Gold, Platin und die Siedepunkte von Naphthalin, Schwefel, Zink (s. S. 302, 303).

In technischen Betrieben werden aufserdem zur Messung hoher Temperaturen **Pyrometer** verschiedener Art verwendet, deren Anordnung teils auf der Formänderung zweier aufeinander gelöteten, verschiedenen Metallstreifen, teils auf dem Unterschiede der Ausdehnungen zweier Körper, z. B. das **Graphit-Pyrometer** von Steinle und Hartung,**) teils auf der Mischung heifser und kalter Luft beruht (Bestimmung der Temperatur von heifsem Gebläsewinde). Zu erwähnen sind auch das **Wiborghsche Luftpyrometer*****), das **Thalpotasimeter** von Schäffer & Budenberg (benutzbar bis + 700°) und das **Wanner-Pyrometer,** das in Walzwerken und Glashütten zur Messung hoher Temperaturen (bis > 1500°) dient. Die Messung ist photometrisch.

Sehr hohe Temperaturen kann man **kalorimetrisch** dadurch bestimmen, dafs man einen geeigneten Körper (z. B. eine Platin-, Nickel- oder Eisenkugel), dessen Gewicht G in kg und dessen spezifische Wärme c (S. 300) bekannt ist, die Temperatur des zu untersuchenden Körpers (z. B. einer Flüssigkeit) annehmen läfst. Bringt man dann diesen Körper in eine Menge W kg Wasser von bekannter Temperatur t_1, so wird die Temperatur des Wassers auf t_2 erhöht, und es ergibt sich die vom Wasser aufgenommene Wärme zu $W\,(t_2 - t_1)$ und daraus nach Tafel S. 301 die gesuchte Temperatur der Kugel.

Die teilweise Verdampfung des Wassers und die gleichzeitige Erwärmung des Gefäfses usw. beeinflussen die nach dem kalorimetrischen Verfahren erhaltenen Werte.

Glühfarben des Eisens.

blendend weifs	über 1500°	dunkelorange	1100°
Schweifshitze	1400—1500°	hellkirschrot	1000°
starkes Weifsglühen	1350°	kirschrot	900°
weifsglühend	1300°	dunkelkirschrot	800°
hellorange	1200°	dunkelrot	700°
helles Glühen	1150°	im Dunkeln rotglühend	500°

Segersche Brennkegel (als abgestumpfte dreiseitige Pyramiden von 6 cm Höhe für die verschiedenen Temperaturen in 58 verschiedenen Nummern hergestellt) aus Tonerdesilikaten haben sich in der Tonwarenindustrie zur Bestimmung des Garbrandes der Ware und bei sonstigen technischen Feuerungsanlagen zum Messen der Temperaturen

*) Z. d. V. d. I. 1897 S. 226. **) S. H. d. B. Bd. I S. 802. ***) S. Z. d. V. d. I. 1894 S. 1547.

von 590° bis über 1850° bewährt.*) Diese Kegel liefern ebenso wie die Schmelzpunkte der **Prinsepschen Legierungen** und wie das **Wiborghsche Thermophon****) nur eine Endtemperatur.

B. Ausdehnung der Körper durch die Wärme.

Unter der **Längenausdehnungszahl** $\beta = \frac{1}{l}\frac{dl}{dt}$ eines festen Körpers versteht man die Zunahme der Längeneinheit des Körpers bei 1° Temperaturerhöhung.

Unter der **Raumausdehnungszahl** $\alpha = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$ eines festen, tropfbar flüssigen oder gasförmigen Körpers versteht man die Vergröfserung der Raumeinheit bei 1° Temperaturerhöhung.

Für homogene feste Körper ist $\alpha = 3\beta$, die **Flächenausdehnungszahl** $= 2\beta$.

Ausdehnungszahlen für feste und flüssige Körper.

Längenausdehnung 1000 β zwischen 0° und 100°

Aluminium	0,023
Blei	0,029
Bronze	0,018
Eisen und Stahl	0,011
Gold	0,015
Konstantan	0,015
Kupfer	0,017
Magnesium	0,027
Messing	0,019
Nickel	0,013
Platin	0,009
Silber	0,019
Zink	0,029
Zinn	0,023
Zement (Beton)	0,014
Glas	0,006 bis 0,009
Hartgummi	0,080
Holz, längs	0,003 bis 0,009
Kalkstein	0,008
Porzellan	0,003

Raumausdehnung 1000 α bei Zimmertemperatur

Aether	1,60
Alkohohl	1,10
Benzol	1,20
Glyzerin	0,50
Olivenöl	0,72
Petroleum	1,00
Quecksilber	0,182
Rüböl	0,90
Schwefelsäure	0,55
Terpentinöl	1,00
Wasser	0,18

Für Eisen und Stahl kann bei höheren Temperaturen gesetzt werden

$$\beta = 0{,}000011 + 0{,}000008\, t.$$

Die Ausdehnungszahlen sind im allgemeinen von der Temperatur abhängig; wählt man für sie unveränderliche Mittelwerte und als Längen-, Flächen- und Raumeinheit die bei 0° C, so ist

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1+\beta t_1}{1+\beta t_2} \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{1+2\beta t_1}{1+2\beta t_2} \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2},$$

worin l_1, F_1, V_1 Länge, Fläche und Inhalt eines Körpers bei der Temperatur t_1; l_2, F_2, V_2 bei der Temperatur t_2 sind.

*) Chemisches Laboratorium für Tonindustrie, Berlin NW 5.
**) S. Oesterr. Z. f. Berg- u. Hüttenwesen 1897 S. 99; ebenso Z. d. V. d. I. 1897 S. 297.

Da für feste und flüssige Körper die Ausdehnung stets sehr klein ist, kann für diese gesetzt werden

$$l_2 - l_1 = l_1 \beta (t_2 - t_1) \qquad F_2 - F_1 = F_1 2 \beta (t_2 - t_1)$$
$$V_2 - V_1 = V_1 \alpha (t_2 - t_1).$$

Die **Ausdehnungs-** oder **Zusammenziehungskraft** eines prismatischen Stabes bei einer Temperaturänderung von t^0 ist

$$P = \beta E t F,$$

wenn E den Elastizitätsmodul und F den Querschnitt des Stabes bezeichnet.

Längen-Schwindmafs einiger Metalle,

d. i. die Verkleinerung der Längenabmessungen eines Gufsstückes während des Erstarrens und Erkaltens.

Blei	1 : 92	Puddelstahl	1 : 72
Bronze	1 : 63	Stabeisen, gewalzt	1 : 55
Feinkorneisen	1 : 72	Stahlgufs	1 : 50
Flufsstahl	1 : 64	Wismut	1 : 265
Glockenmetall	1 : 65	Zink, gegossen	1 : 62
Gufseisen	1 : 96	Zinn	1 : 128
Kanonenmetall	1 : 134	100 G.-T. Kupfer } 12,5 „ Zinn }	1 : 134
Messing	1 : 65		

In Stahl-Walzwerken rechnet man das Schwinden zu rd. 12 mm/m.

Temperatur, Dichte und Volumen des Wassers.

(Nach Thiesen, Scheel, Diesselhorst, Hirn, Ramsay & Young u. a.)

Temp.	Dichte	Volumen	Temp.	Dichte	Volumen	Temp.	Dichte	Volumen
0⁰	0,99987	1,00013	38	0,99299	1,00706	160	0,9076	1,1018
2	0,99997	1,00003	40	0,9922	1,0078	170	0,8973	1,1145
4	**1,00000**	**1,00000**	45	0,9903	1,0099	180	0,8866	1,1279
6	0,99997	1,00003	50	0,9881	1,0121	190	0,8750	1,1429
8	0,99988	1,00012	55	0,9857	1,0145	200	0,8628	1,1590
10	0,99973	1,00027	60	0,9832	1,0171	210	0,850	1,177
12	0,99953	1,00048	65	0,9806	1,0198	220	0,837	1,195
14	0,99927	1,00073	70	0,9778	1,0227	230	0,823	1,215
16	0,99897	1,00103	75	0,9749	1,0258	240	0,809	1,236
18	0,99862	1,00138	80	0,9718	1,0290	250	0,794	1,259
20	0,99823	1,00177	85	0,9687	1,0324	260	0,779	1,283
22	0,99780	1,00221	90	0,9653	1,0359	270	0,765	1,308
24	0,99732	1,00268	95	0,9619	1,0396	280	0,75	1,34
26	0,99681	1,00320	100	0,9584	1,0434	290	0,72	1,38
28	0,99626	1,00375	110	0,9510	1,0515	300	0,70	1,42
30	0,99567	1,00435	120	0,9435	1,0600	310	0,68	1,46
32	0,99505	1,00497	130	0,9351	1,0694	320	0,66	1,51
34	0,99440	1,00563	140	0,9263	1,0795			
36	0,99372	1,00632	150	0,9172	1,0903			

Ausdehnung gasförmiger Körper.

Für die Ausdehnung unter gleichbleibendem Drucke haben alle Gase dieselbe Ausdehnungszahl $\alpha = \frac{1}{273}$, bezogen auf das Volumen bei 0° C, also

$$V_2 - V_1 = V^0 \frac{t_2 - t_1}{273} = V_1 \frac{t_2 - t_1}{273 + t_1} \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{273 + t_2}{273 + t_1}.$$

Näheres s. S. 318 u. f.

C. Spezifische Wärme.

Die **Wärmeeinheit** (1 Kilogramm-Kalorie) = 1 WE ist die Wärmemenge, die erforderlich ist, um die Temperatur von 1 kg Wasser um 1° zu erhöhen.

[1 BTU (British Thermal Unit) ist die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um 1 lbs (Pfd.) Wasser um 1° Fahrenheit zu erwärmen. 1 BTU = 0,252 WE.]

Da diese Wärmemenge für verschiedene Wassertemperaturen etwas verschieden ist, so schwankt die Gröfse der Wärmeeinheit. Gegenwärtig ist man bestrebt, als Normaltemperatur 15° und damit als **Normal-Wärmeeinheit** diejenige Wärmemenge einzuführen, welche 1 kg Wasser von 14,5° auf 15,5° erwärmt.

Neben der 15°-WE ist noch die „mittlere WE", d. h. der 100. Teil der Wärme, welche 1 kg Wasser von 0° auf 100° bringt, von Wichtigkeit, da sich viele kalorimetrische Untersuchungen (Eiskalorimeter) auf diese beziehen. Sie ist nach den neuesten Bestimmungen (Behn) der 15°-WE nahezu gleich.

Spezifische Wärme *c* des Wassers nach Barnes.

t	*c*	*t*	*c*	*t*	*c*
0	1,0091	35	0,9971	70	1,0001
5	1,0050	40	0,9971	75	1,0007
10	1,0020	45	0,9973	80	1,0014
15	1,0000	50	0,9977	85	1,0021
20	0,9987	55	0,9982	90	1,0028
25	0,9978	60	0,9988	95	1,0034
30	0,9973	65	0,9994	100	1,0043

Mittlere spez. Wärme c_m des Wassers zwischen 0° und t° nach Dieterici.

t	c_m	*t*	c_m	*t*	c_m
20	1,0010	120	1,0020	220	1,0203
40	0,9973	140	1,0046	240	1,0256
60	0,9976	160	1,0077	260	1,0315
80	0,9985	180	1,0113	280	1,0380
100	1,0000	200	1,0155	300	1,0449

$$c_m = 0,9983 - 0,005184 \frac{t}{100} + 0,006912 \left(\frac{t}{100}\right)^2.$$

Spezifische Wärme c eines Körpers ist die Wärmemenge in WE, die erforderlich ist, um die Temperatur von 1 kg des Körpers um 1^0 zu erhöhen. Sie ist im allgemeinen abhängig von der Temperatur des Körpers.

G kg eines Körpers von der spezifischen Wärme c erfordern demnach zu einer Temperaturerhöhung von t_1 auf t_2 eine Wärmemenge

$$Q = Gc\,(t_2 - t_1) \text{ in WE,}$$

wenn c unveränderlich ist, oder

$$Q = G\int_{t_1}^{t_2} c\,dt \text{ in WE,}$$

wenn c veränderlich ist.

Ist z. B.

$$c = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \ldots .$$

so wird

$$Q = G\left[\alpha(t_2 - t_1) + \frac{\beta}{2}(t_2^2 - t_1^2) + \frac{\gamma}{3}(t_2^3 - t_1^3) \ldots .\right].$$

Der Ausdruck

$$c_m = \frac{1}{t}\int_0^t c\,dt = \alpha + \frac{\beta}{2}t + \frac{\gamma}{3}t^2 \ldots .$$

heifst die mittlere spezifische Wärme zwischen 0^0 und t^0.

Mittlere spezifische Wärme fester und tropfbar flüssiger Körper zwischen 0^0 und 100^0.

Aluminium . .	0,21	Asche	0,20	Aether	0,54
Antimon . . .	0,05	Basalt	0,20	Alkohol . . .	0,58
Blei	0,031	Beton	0,27	Ammoniak . .	1,00
Gold	0,031	Eis	0,50	Anilin	0,49
Konstantan .	0,098	Gips	0,20	Benzol	0,40
Kupfer	0,094	Glas	0,20	Chloroform . .	0,23
Magnesium . .	0,25	Granit	0,20	Essigsäure . .	0,51
Messing . . .	0,092	Graphit	0,20	Glyzerin . . .	0,58
Nickel	0,11	Holz (Eiche) . .	0,57	Maschinenöl .	0,40
Platin	0,032	„ (Fichte) .	0,65	Olivenöl . . .	0,40
Quecksilber .	0,033	Holzkohle . .	0,20	Petroleum . .	0,50
Eisen u. Stahl	0,115	Koks	0,20	Schwefelsäure	0,33
Silber	0,056	Marmor, Kalkstein . . .	0,21	Schweflige Säure	0,32
Zink	0,094	Sandstein . . .	0,22	Terpentinöl .	0,42
Zinn	0,056	Schlacke . . .	0,18		
		Schwefel . . .	0,18		
		Steinkohle . .	0,31		
		Ziegelsteine .	0,22		

Für Platin, Nickel und Eisen, welche bei der kalorimetrischen Bestimmung von Temperaturen verwendet werden, gibt die folgende Tafel die zur Erwärmung von 1 kg von 0^0 auf t^0 nötige Wärmemenge Q_0^t an.

Wärmemenge Q_0^t für 1 kg von 0° auf t°.

t	Platin	Nickel	Eisen	t	Platin	Nickel	Eisen	t	Platin	Nickel	Eisen
100	3,23	11,5	11,0	500	17,35	64,5	68,5	900	33,39	120,0	157,0
200	6,58	23,0	22,5	600	21,18	77,0	87,0	1000	37,70	136,0	180,0
300	9,75	40,0	36,5	700	25,13	91,0	110,0	1200	42,13	—	—
400	13,64	51,0	51,5	800	29,20	105,0	135,0				

Spezifische Wärme von Kochsalzlösungen.*)

Salzgehalt in 100 G.-T. der Lösung	Spezifisches Gewicht bei 18°	Spezifisches Gewicht bei 0°	Spezifische Wärme für 1 kg bei 0°	Spezifische Wärme für 1 l bei 0°
5	1,035	1,039	0,94	0,98
10	1,071	1,077	0,89	0,96
15	1,109	1,117	0,845	0,945
20	1,149	1,158	0,81	0,94
25	1,190	1,200	0,785	0,94

Spezifische Wärme von Gasen und Dämpfen.

S. S. 318.

D. Temperatur von Mischungen.

Richmannsche Regel: $G + G_1$ kg einer Mischung, entstanden aus G kg eines Körpers von t^0 und der spezifischen Wärme c und aus G_1 kg eines Körpers von $t_1{}^0$ und der spezifischen Wärme c_1, haben eine Temperatur von

$$t_m = \frac{c\,G\,t + c_1\,G_1\,t_1}{c\,G + c_1\,G_1}; \quad \text{allgemein } t_m = \frac{\Sigma\,c\,G\,t}{\Sigma\,c\,G}.$$

Um G kg eines Körpers von der spezifischen Wärme c und der Temperatur t^0 auf die Temperatur t_m^0 zu bringen, sind G_1 kg eines Körpers von der spezifischen Wärme c_1 und $t_1{}^0$ erforderlich, wobei

$$G_1 = \frac{c}{c_1}\,G\,\frac{t_m - t}{t_1 - t_m}.$$

Werden bei unveränderlichem Drucke G kg eines Gases (entsprechend V cbm) von t^0 mit G_1 kg desselben (entsprechend V_1 cbm) von $t_1{}^0$ gemischt, so ist die Mischungstemperatur

$$t_m \frac{G\,t + G_1\,t_1}{G + G_1} = \frac{V + V_1}{V : T + V_1 : T_1} - 273.$$

worin T und T_1 die absoluten Temperaturen sind.

*) Nach Versuchen von Tomsen, Winkelmann u. a. Nach Strombeck ist die spezifische Wärme etwas kleiner, im Mittel $c = 0{,}93$ für 1 l von 0° und einem Salzgehalt von 10 bis 25 vH

Kältemischungen.

Die niedrigste Temperatur, die eine Kältemischung hervorbringen kann, ist der **Gefrierpunkt** der entstehenden Lösung.

Mischungen	G.-T.	Das Thermometer sinkt von ⁰	auf ⁰	Mischungen	G.-T.	Das Thermometer sinkt von ⁰	auf ⁰
Natriumphosphat Salmiak . . . verd. Salpetersäure	9 6 4	12,5	—6	Natriumsulfat . Salpeter . . . Salmiak . . . Wasser . . .	8 5 5 16	10	—15
Natriumsulfat . Ammoniumnitrat verd. Salpetersäure	6 5 4	10	—25	Natriumsulfat . verd. Schwefelsäure . . .	5 4	10	—16
Salmiak . . . Salpeter . . . Wasser . . .	5 5 16	10	—12	Chlornatrium . Schnee . . .	1 1	0	—18
Natriumkarbonat Ammoniumnitrat Wasser . . .	1 1 1	10	—14	Ammoniumnitrat Wasser . . .	1 1	10	—16
Natriumsulfat . verd. Salpetersäure	3 2	10	—19	Natriumphosphat verd. Salpetersäure	9 4	15	—9
Natriumsulfat . Salmiak . . . Salpeter . . . verd. Salpetersäure	6 4 2 4	10	—23	Kalihydrat . . Schnee . . .	4 3	0	—37
Chlornatrium . Schnee . . .	1 3	0	—17,7	verd. Schwefelsäure . . . verd. Salpetersäure Schnee . . .	1 1 2	—19	—40
Salpeter . . . Salmiak . . . Wasser . . .	1 1 1	8	—24	verd. Schwefelsäure . . . Schnee . . .	1 1	—5	—41
verd. Salpetersäure Schnee . . .	1 1	—14	—35	Chlorcalcium . Schnee . . .	3 2	0	—33
Natriumsulfat . Salzsäure . . .	8 5	10	—18	Chlorcalcium . Schnee . . .	2 1	0	—42

E. Aenderung der Aggregatform durch die Wärme.

a. Schmelz- oder Gefrierpunkt verschiedener Stoffe

unter dem Druck von 760 mm Q.-S.

	Grad		Grad
Platin	1720	Nickel	1470
Palladium	1550	Flufseisen	1350—1450
Porzellan	1550	Stahl	1300—1400
Schweifseisen . .	1500—1600	Eisenhochofenschlacke	1300—1430

	Grad		Grad
Gußeisen, graues	1200	Paraffin	54
„ weißes	1100	Stearin	50
Glas	800—1400	Walrat	49
Kupfer	1084	Phosphor	44
Gold	1064	Benzol	5
Silber	961	Wasser	0
Schmelzfarben (Emailfarben)	960	Seewasser	— 2,5
Delta-Metall	950	Rüböl	— 3,5
Messing	900	Anilin	— 8
Bronze	900	Terpentinöl	— 10
Aluminium	657	Kochsalzlösung, gesätt.	— 18
Antimon	430	Leinöl	— 20
Zink	419	Glyzerin**)	— 20
Blei	327	Quecksilber	— 39
Cadmium	321	Chlorcalciumlösung, gesätt.	— 40
Wismut	269	Chloroform	— 70
Zinn	232	schweflige Säure	— 76
Weichlote*)	135—200	Ammoniak	— 78
Wismutlote*)	94—128	flüssige Kohlensäure	— 79
Kautschuk	125	Alkohol, absoluter**)	—100
Schwefel	115	Toluol	—102
Natrium	96	Schwefelkohlenstoff	—113
Wachs	64	Aether	—118
Kalium	62		

b. Siedepunkte.

Siedepunkt verschiedener Stoffe unter dem Drucke von 760 mm Q.-S. (S. a. S. 332.)

	Grad		Grad
Zink	915	Wasser	100
Schwefel	445	Benzol	80
Quecksilber	357	Alkohol absoluter	78,5
Leinöl	316	Chloroform	61
Paraffin	300	Schwefelkohlenstoff	46
Glyzerin	290	Aether	35
Phosphor	290	schweflige Säure	— 10
Naphthalin	218	Ammoniak	— 33
Anilin	184	Kohlensäure	— 78
Chlorcalciumlösung, ges.	180	Sauerstoff	—183
Terpentinöl	160	Stickstoff	—196
Toluol	110	Wasserstoff	—253
Kochsalzlösung, gesätt.	108		

*) S. 5. Abschn., Stoffkunde. — Ueber die Schmelzpunkte von **Cadmium-Legierungen** s. Gl. A. 1890, II. S. 38.

) Ueber die Gefrierpunkte des wässerigen **Glyzerins und **Alkohols** s. 8. Abschn., Arbeitsmaschinen, unter Druckwasser-Hebemaschinen.

Siedepunkt *t* des Wassers bei verschiedenen Barometerständen *b* in mm Q.-S. (Nach Wiebe.)

b	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*
680	96,92	720	98,49	760	100,00
685	97,12	725	98,69	765	100,18
690	97,32	730	98,88	770	100,37
695	97,52	735	99,07	775	100,55
700	97,71	740	99,26	780	100,73
705	97,91	745	99,44	785	100,91
710	98,11	750	99,63	790	101,09
715	98,30	755	99,82	795	101,26
720	98,49	760	100,00	800	101,44

c. Schmelzwärme.

Die **Schmelzwärme** eines festen Körpers ist die Anzahl WE, die verbraucht wird, um 1 kg des Körpers aus der festen in die flüssige Form ohne Erhöhung der Temperatur überzuführen. Dieselbe Wärmemenge wird beim Erstarren des flüssigen Körpers frei.

Schmelzwärme verschiedener Körper.

Benzol	30	Naphthalin	36	Schwefel	9
Blei	6	Paraffin	35	Silber	21
Cadmium	14	Phosphor	5	Wismut	13
Eis (Wasser)	80,0	Platin	27	Zink	28
Eisen	(30)	Quecksilber	2,8	Zinn	13
Hochofenschlacke	(50)				

d. Verdampfungswärme.

Die **Verdampfungswärme** r einer Flüssigkeit ist die Anzahl WE, die verbraucht wird, um 1 kg der Flüssigkeit entgegen dem (unveränderlichen) äufseren Drucke in Dampf von gleicher Temperatur zu verwandeln. Dieselbe Wärmemenge wird frei, wenn der Dampf kondensiert.

Die Verdampfungswärme ist abhängig von der Temperatur, bei der die Verdampfung stattfindet.

Tafeln der Werte von r für Wasserdampf s. S. 335 u. f.

Verdampfungswärme bei 760 mm Q.-S. Druck.

Aether	90	Chlormetyl	97	Quecksilber	68
Alkohol	210	Chloroform	58	Wasser	539
Anilin	105	Schwefel	362	Terpentinöl	70
Benzol	94	Schwefelkohlenstoff	90	Toluol	85

(Verdampfungswärme der bei Kältemaschinen angewendeten Stoffe s. S. 350 u. f.)

F. Lösung von Gasen in Wasser.

1 cbm Wasser kann bei 1 at abs. und verschiedenen Temperaturen die folgenden Gasmengen in cbm von 15⁰ und 1 at lösen.

$t=$	0^0	20^0	100^0	$t=$	0^0	20^0
Luft	0,027	0,0185	—	Kohlenoxyd	0,037	0,025
Stickstoff . . .	0,026	0,017	0,0105	Chlor	—	2,35
Sauerstoff . . .	0,053	0,034	0,0185	Schwefelwasserstoff	4,75	3,17
Wasserstoff . .	0,023	0,020	0,018	Schweflige Säure .	87	43
Kohlensäure . .	1,96	0,98	0,26	Ammoniak	1250	700

Lösung von Ammoniak in Wasser. (Nach H. Mollier.)

1 kg Wasser löst bei den angegebenen Drücken und Temperaturen die folgenden Mengen Ammoniak in kg.

t abs.	0^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0	100^0	110^0	120^0	130^0	140^0	150^0
= 0,1	0,22	0,085	0,043	0,012											
0,2	0,35	0,172	0,109	0,060	0,0235										
0,5	0,57	0,337	0,247	0,173	0,111	0,065	0,030								
1,0	0,88	0,515	0,400	0,304	0,224	0,158	0,104	0,061	0,026						
1,5	1,23	0,606	0,521	0,404	0,311	0,232	0,167	0,111	0,067	0,031	0,002				
2,0	1,62	0,812	0,632	0,497	0,389	0,2[illegible]9	0,224	0,159	0,106	0,064	0,029				
2,5	2,01	0,953	0,735	0,580	0,459	0,357	0,274	0,222	0,142	0,093	0,053	0,020			
3,0	2,40		0,839	0,659	0,524	0,414	0,324	0,245	0,179	0,124	0,076	0,040	0,0077		
4,0			1,044	0,808	0,639	0,512	0,406	0,315	0,241	0,177	0,123	0,078	0,040	0,008	
5,0				0,961	0,758	0,605	0,482	0,383	0,300	0,228	0,166	0,114	0,071	0,0345	0,003
6,0					0,873	0,694	0,556	0,447	0,353	0,274	0,208	0,149	0,101	0,060	0,025
7,0					0,989	0,786	0,629	0,506	0,405	0,318	0,247	0,185	0,131	0,086	0,047
8,0						0,877	0,699	0,562	0,453	0,362	0,283	0,217	0,159	0,117	0,068
9,0						0,972	0,776	0,624	0,502	0,404	0,318	0,247	0,186	0,134	0,089
10,0						1,072	0,855	0,686	0,553	0,444	0,352	0,276	0,211	0,155	0,108

II. WÄRMEÜBERGANG.

a. Wärmeübergang durch Berührung und Leitung.

1. Wärmeübergang zwischen einer Körperoberfläche (Wandfläche) und einer tropfbaren oder gasförmigen Flüssigkeit.

Bedeutet

F die Gröfse der Fläche in qm,
ϑ die Temperatur der Fläche in Grad,
t die Temperatur der Flüssigkeit in Grad,
z die Zeitdauer des Wärmeüberganges in st,
Q die übergehende Wärmemenge in WE,

so ist $$Q = \alpha F z (t - \vartheta).$$

Die **Wärme-Uebergangszahl** α, d. i. die stündlich auf 1 qm Fläche und 1 Grad Temperaturunterschied übergehende Wärmemenge, ist häuptsächlich von der Art der Flüssigkeit und ihrem Bewegungszustande abhängig; für α kann i. M. etwa gesetzt werden:

1) für siedendes Wasser

$$\alpha = 4000 \text{ bis } 6000,$$

guter Umlauf der Flüssigkeit erhöht, mangelhafter erniedrigt diesen Wert;

2) für kondensierenden Wasserdampf bis zu

$$\alpha = 10\,000,$$

Luftfreiheit und rasche Entfernung des kondensierten Wassers begünstigen den Wärmeübergang;

3) für nicht siedendes Wasser

wenn ruhend, etwa $\alpha = 500$

(es können sich höhere oder kleinere Werte ergeben, je nachdem die Form der Wandfläche die in der Flüssigkeit entstehenden inneren Strömungen begünstigt oder beschränkt);

wenn längs der Wand mit der Geschwindigkeit w m/sk strömend,

$$\alpha = 300 + 1800 \sqrt{w} \quad \text{für } w = 0{,}05 \text{ bis } 2 \text{ m/sk};$$

wenn die Flüssigkeit durch eine Mischvorrichtung (Rührwerk) bewegt ist, $\alpha = 2000$ bis 4000

je nach Wirksamkeit des Rührwerkes;

4) für Luft (Gase, überhitzte Dämpfe)

im Ruhezustande $\alpha = 4$,

jedoch kann je nach Umständen (Form der Wand, Innenströme) $\alpha = 2$ bis 8 betragen;

wenn strömend, $\alpha = 2 + 10\sqrt{w}$ für $w = 1$ bis 100 m/sk.

2. Wärmedurchgang durch eine ebene Wand von gleichförmiger Dicke, die zwei Flüssigkeiten trennt.

Bedeutet

t_1 die Temperatur der heifseren Flüssigkeit in ^{0}C,

t_2 die Temperatur der kälteren Flüssigkeit in ^{0}C,

ϑ_1 und ϑ_2 die Temperaturen der Wandoberflächen in ^{0}C,

F die Gröfse der Wand in qm,

α_1 und α_2 die Wärmeübergangszahlen der beiden Flüssigkeiten,

δ die Dicke der Wand in m,

λ die Wärme-Leitungszahl der Wand (Q und z s. S. 305),

so ist $Q = kFz(t_1 - t_2)$.

Die **Wärme-Durchgangszahl** k berechnet sich aus

$$k = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \dfrac{\delta}{\lambda}}.$$

Die Wandtemperaturen sind

$$\vartheta_1 = t_1 - \frac{k}{\alpha_1}(t_1 - t_2) \qquad \vartheta_2 = t_2 + \frac{k}{\alpha_2}(t_1 - t_2).$$

Wärme-Leitungszahl λ für verschiedene Stoffe

[in WE : (m . st . °C)],*)

d. i. die stündlich durch 1 qm Fläche des Stoffes zu einer anderen im Abstand von 1 m übertretende Wärmemenge bei 1 Grad Temperaturunterschied beider Flächen

Alkohol	0,18	Marmor	0,43 bis 0,65
Aluminium	175	Maschinenöle	0,1
Blei	30	Messing	50 bis 60
Bruchsteinmauerwerk	1,3 bis 2,1	Nickel	50
Eis	0,8	Olivenöl	0,15
Eisen	40 bis 50	Petroleum	0,13
Glas	0,35 „ 0,70	Platin	60
Glyzerin	0,25	Porzellan	0,9
Gold	250	Quecksilber	6,5
Kautschuk	0,17 bis 0,3	Silber	360
Kesselstein	2	Steinkohle	0,12
Kiefernholz, längs der Faser	0,1	Ton, Ziegel	0,70
„ quer zur Faser	0,03	Wasser	0,5
Konstantan	200	Wasserstoff	0,14
Kreide	0,8	Zement (reiner Portland-)	0,78
Kupfer	320	Zink	95
Luft	0,02	Zinn	54

Wärmeleitungszahlen für Isolierstoffe.

(Nach Nusselt.)

Stoff	Gewicht von 1 cbm kg	Wärmeleitungszahl bei einer Temperatur von 0°	50°	100°	150°	200°	300°	400°	500°
Asbest	576	0,130	0,153	0,167	0,175	0,180	0,186	0,192	0,198
Gebrannte Kieselgurformsteine für Heifsdampfleitungen	200	0,064	0,071	0,078	0,085	0,092	0,106	0,120	
Isolierkomposition (lose)	405	0,060	0,070	0,076	0,079	0,081			
dieselbe mit Wasser angerührt und getrocknet	690	—	—	—	0,100	0,120 (bei 220°)			
Kieselgur (lose)	350	0,052	0,060	0,066	0,070	0,074	0,078		

*) S. Landolt & Börnstein, Phys.-Chem. Tab.; und Kohlrausch, Prakt. Physik.

Stoff	Gewicht von 1 cbm kg	Wärmeleitungszahl bei einer Temperatur von 0°	50°	100°	150°	200°	300°	400°	500°
dasselbe mit Wasser angerührt und getrocknet	580	—	—	—	0,083	—	0,123 (bei 350°)		
Baumwolle . . .	81	0,047	0,054	0,059					
Seidenzopf . . .	147	0,039	0,047	0,052					
Seide	101	0,038	0,045	0,051					
Schafwolle . . .	136	0,033	0,042	0,050					
Korkmehl . . .	161	0,031	0,041	0,048	0,052	0,055			

Stoff	Gewicht v. 1 cbm kg	Temperatur-bereich	Wärme-Leitungs-zahl
Rheinischer Bimskies . . .	292	20— 65	0,20
Hochofenschaumschlacke . .	360	25—128	0,095
Torfmull II	195	23— 36	0,070
Torfmull I.	160	20— 40	0,055
Korkstein (asphaltiert). . .	200	10— 57	0,061
Sägemehl	215	20—136	0,055
Blätterholzkohle	190	20— 80	0,056

Einige besondere Fälle des Wärmedurchganges durch ebene Metallwände von gleichförmiger Dicke. Setzt man

$$\frac{1}{k_0}=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}, \text{ so wird } k=\frac{k_0}{1+k_0\frac{\delta}{\lambda}}.$$

Von Dampf an siedendes Wasser . . . . $k_0 = 3000$ bis 5000

Von Dampf an nicht siedendes Wasser:

Flüssigkeit ruhend . . . . $k_0 = 300$ bis 600

Flüssigkeit strömend . . $k_0 = 1700\sqrt[3]{w}$ ($w = 0{,}05$ bis 2 m/sk)

Flüssigkeit durch Rührwerk bewegt . . . . . $k_0 = 1500$ bis 2500.

Bemerkung. Für dünne Wände, besonders für solche aus Kupfer oder Messing, kann $k = k_0$ gesetzt werden.

Bei Wärmedurchgang durch eine ebene Metallwand zwischen Luft (Gas) und Wasser (siedend und nicht siedend) oder gesättigtem Wasserdampf kann in der Regel gesetzt werden

$k = \alpha$ (Luft)

$\vartheta_1 = \vartheta_2$ gleich der Temperatur des Wassers bzw. Dampfes.

Von Luft an Luft $$k = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Wärmedurchgang bei veränderlichen Flüssigkeitstemperaturen. Wenn sich die Temperaturen der Flüssigkeiten infolge des Wärmedurchganges ändern zwischen den Werten t_1' und t_1'' bzw. t_2' und t_2'', so ist

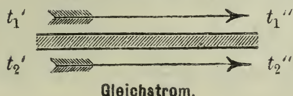
$$Q = k F z \frac{(t_1' - t_2') - (t_1'' - t_2'')}{\ln \dfrac{t_1' - t_2'}{t_1'' - t_2''}},$$

und wenn G_1 und G_2 die Mengen (in kg) und c_1 und c_2 die spezifischen Wärmen der beiden Flüssigkeiten (s. S. 299) sind:

$$Q = c_1 G_1 (t_1' - t_1'') \quad \text{bzw.} \quad Q = c_2 G_2 (t_2'' - t_2').$$

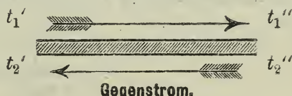
Dieselben Formeln haben auch Gültigkeit, wenn die Flüssigkeiten längs der Heizfläche strömen (Abb. 152 und 153).

Abb. 152.



Gleichstrom.

Abb. 153.



Gegenstrom.

Angenähert ist in allen Fällen

$$Q = k F z \left(\frac{t_1' + t_1''}{2} - \frac{t_2' + t_2''}{2} \right).$$

Die Genauigkeit dieser Formel zeigt folgende Tafel, die auch zur Verbesserung der angenäherten Rechnung benutzt werden kann.

$\dfrac{t_1' - t_2'}{t_1'' - t_2''} = \Bigg\{$	1	1,5 $^2/_3$	2 $^1/_2$	3 $^1/_3$	4 $^1/_4$	5 $^1/_5$	10 $^1/_{10}$	100 $^1/_{100}$
$\dfrac{Q\ \text{(angenähert)}}{Q\ \text{(genau)}} =$	1	1,014	1,038	1,099	1,154	1,210	1,410	2,35

Ist nur die Temperatur einer der beiden Flüssigkeiten veränderlich, so gelten nach Einführung von $t_1' = t_1''$ bzw. $t_2' = t_2''$ dieselben Formeln sowie auch die Fehlertafel.

Wärmeübergang von Dampf an Kühlwasser. Wenn der Dampf kondensiert und das Kondensat abgekühlt wird, ist die Kühlfläche für beide Teile des Vorganges gesondert zu berechnen.

Wärmedurchgang durch eine zusammengesetzte Wand. Besteht eine Wand aus mehreren fest aneinander liegenden Schichten von den Dicken δ, δ', δ'' . . . mit den Wärmeleitungszahlen λ, λ', λ'' . . . . so ist

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\delta'}{\lambda'} + \frac{\delta''}{\lambda''} + \dots$$

Ist eine Heizfläche (δ, λ) durch eine Schicht (δ', λ') verunreinigt, so ist der Wärmedurchgang im Verhältnis zu dem der reinen Wand

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{k'}{k} = \frac{1}{1 + \frac{\delta'}{\lambda'} k}.$$

Es sei z. B. eine Verdampferheizfläche, für die im reinen Zustande $k = 3000$ betrage, mit einem Kalkniederschlage bedeckt, $\delta' = 0{,}001$ m, $\lambda' = 1$, dann ist $Q' : Q = 1/_4$. Dieselbe Schicht in einem Dampfkessel mit $k = 20$ ergibt $Q : Q = 0{,}98$.

3. Wärmedurchgang durch zylindrische Rohrwände.

Ist aufser den früheren Bezeichnungen d_a der äufsere, d_i der innere Rohrdurchmesser in m, l die Länge des Rohres in m, so ist

$$Q = l \pi z \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_a} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_a}{d_i}},$$

wenn sich die wärmere Flüssigkeit innen befindet; im umgekehrten Falle sind α_1 und α_2 zu vertauschen.

Besteht die Rohrwand aus zwei Schichten (isoliertes Rohr) vom Leitungsvermögen λ_i und λ_a und ist d_m der Durchmesser der Trennungsfläche, so ist

$$Q = l \pi z \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_a} + \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_m}{d_i} + \frac{1}{2\lambda_a} \ln \frac{d_a}{d_m}}.$$

Für **einfache Metallrohre** kann mit genügender Genauigkeit von den Formeln für ebene Flächen Gebrauch gemacht werden (s. S. 306 u. f.); jedoch ist Folgendes zu beachten:

Wenn α_1 und α_2 nicht sehr voneinander abweichen, so ist die Heizfläche F auf den mittleren Rohrdurchmesser $1/_2 (d_a + d_i)$ zu beziehen.

Sind α_1 und α_2 sehr verschieden, so ist stets bei Berechnung der Heizfläche der Durchmesser zu wählen, der auf der Seite der Flüssigkeit mit der kleineren Uebergangszahl liegt.

Bei Bestimmung der Kesselheizfläche ist immer für Feuerrohre die innere, für Wasserrohre die äufsere Rohrfläche zugrunde zu legen; für Ueberhitzer die mittlere.

b. Wärmeübergang durch Strahlung.

Wenn sich zwei Körper von verschiedener Temperatur gegenüberstehen, so tauschen sie Wärme durch Strahlung aus.

Der einfachste Fall ist der, dafs ein Körper, dessen Oberfläche F die gleichförmige Temperatur ϑ hat, rings von Flächen umgeben ist, die ebenfalls eine gleichförmige Temperatur t haben (z. B. freie Rohrleitungen, einfache Heizkörper oder Oefen). In diesem Falle ist die durch Strahlung übergehende Wärme in z Stunden

nach Stefan-Boltzmann $Q = C_1 F z \left[\left(\frac{\Theta}{100}\right)^4 - \left(\frac{T}{100}\right)^4\right]$.

Als Näherungsgleichung ist für manche technische Zwecke die folgende von Rosetti angegebene Formel bequem:

$$Q = C_2 F z \left[\left(\frac{\Theta}{100}\right)^2 - 1{,}9\right](\vartheta - t).$$

$\Theta = 273 + \vartheta$ und $T = 273 + t$ sind die absoluten Temperaturen. Nach Vertauschung von t und ϑ gelten die Gleichungen auch für den Fall, dafs die Temperatur des Körpers niedriger als die der Umgebung ist (Kühlleitungen).

Die Unveränderlichen der Gleichungen sind hauptsächlich von der Beschaffenheit der Körperoberflächen abhängig. Für absolut schwarze Körper ist $C_1 = 4{,}6$. Für gewöhnliche oxydierte Metallflächen, Mauerwerk, Holz, Papier, Webstoffe, Oelanstrich und glühende oder flammende Brennstoffe kann etwa gesetzt werden

$$C_1 = 4 \qquad C_2 = 0{,}5.$$

Für polierte Metallflächen betragen die Unveränderlichen bis $^1/_{10}$ dieser Werte und darunter.

c. Wärmeübergang unter gleichzeitiger Wirkung von Berührung und Strahlung.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen (s. S. 305 u. 306) ist allgemein

$$Q = K F z (t_1 - t_2).$$

1. Wärmeübergang von Wasser oder Dampf durch eine Metallwand an Luft (Heizrohre, einfache Heizkörper). Man setze in der vorstehenden Gleichung

$$K = k + 0{,}5 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^2 - 1{,}9\right].$$

k, die Durchgangszahl infolge Berührung, ist gleich 4 für ruhige Luft; T_1 ist die absolute Dampf- bzw. Wassertemperatur $= 273 + t_1$.

2. Wärmeübergang durch die direkte Heizfläche der Dampfkessel.

Für **Innenfeuerungen** setze man in die Gleichung für Q

$$K = k + 0{,}5 \frac{F_r}{F} \left(\frac{T_1}{100}\right)^2,$$

wenn F_r die Rostfläche in qm, F die direkte Heizfläche in qm und T_1 die absolute Temperatur über dem Roste (Verbrennungstemperatur) bedeutet.

Der Wert k ist wesentlich von der Geschwindigkeit der Heizgase abhängig und ist etwa

$$k = 2 + 2\sqrt{B},$$

worin B in kg die stündlich auf 1 qm Rostfläche verbrannte Menge Steinkohlen bedeutet.

Für **Unterfeuerungen** setze man

$$K = k + C\left(\frac{T_1}{100}\right)^2,$$

worin $C = 0{,}4$ bis $0{,}6$; T_1 und k wie vorstehend.

Den vorstehenden Näherungs-Formeln unter **1.** und **2.** ist die Rosettische Gleichung (vrgl. S. 311) zugrunde gelegt. Die Formel für Unterfeuerungen stimmt gut überein mit den Versuchen von Blechynden sowie mit denen der Phys.-Techn. Reichsanstalt, wenn $C = 0{,}5$ gesetzt wird.*)

III. ALLGEMEINE GRUNDSÄTZE DER THERMODYNAMIK.

Es bedeute im folgenden

Q eine Wärmemenge in WE,

P den absoluten Druck (Spannung) von Gasen, Dämpfen und Flüssigkeiten in kg/qm,

p denselben Druck in kg/qcm (at),

G das Gewicht des betrachteten Stoffes in kg,

V, v den Rauminhalt in cbm, cbm/kg,

t die Temperatur in °C,

$T = t + 273$ die absolute Temperatur,

U, u die (innere) Energie in WE (S. 314),

S, s die Entropie (S. 315),

*) Näheres s. R. Mollier, Ueber Wärmedurchgang und die hierauf bezüglichen Versuchsergebnisse, Z. d. V. d. I. 1897 S. 153 u. 197.

J, i den Wärmeinhalt für unveränderlichen Druck in WE,
$A = 1/_{427}$ das mechanische Wärmeäquivalent (S. 314),
c_p, c_v die spezifischen Wärmen bei unveränderlichem Druck bzw. unveränderlichem Rauminhalt.

Alle jene Gröfsen, die von der Menge des Körpers abhängen, sind bei einer beliebigen Menge mit grofsen Buchstaben V, U, S, J bezeichnet, hingegen mit kleinen Buchstaben v, u, s, i, wenn die Gewichtseinheit vorliegt, so dafs $V = Gv$, $U = Gu$ usw.

Der **Druck** der Gase und Dämpfe wird **gemessen** in Millimeter (oder Meter) Wassersäule (W.-S.), in Millimeter Quecksilbersäule (Q.-S.), in kg/qm, kg/qcm, Pfd/QuZ. und in Atmosphären.

1 metrische (neue) Atmosphäre (at) *) = **1 kg/qcm** = 735,5 mm Q.-S. von 0^0 (= 737,4 mm Q.-S. von 15^0)
= 28,958 engl. Zoll Q.-S. von 0^0
= 10,000 m W.-S. von $+4^0$
= 14,223 engl. Pfd/QuZ.
= 0,968 alte Atmosphäre.

1 alte Atmosphäre . = **760 mm Q.-S.** von 0^0 (= 762 mm Q.-S. von 15^0)
= 29,922 engl. Zoll Q.-S. von 0^0
= 10,333 m W.-S. von $+4^0$
= 14,696 engl. Pfd/QuZ.
= 1,0333 at

$$1 \text{ mm W.-S. von } +4^0 = \frac{1}{13,596} = 0,07355 \text{ mm Q.-S. von } 0^0.$$

1 mm Q.-S. = 13,596 mm W.-S. = 0,0013596 at
= 0,0013158 alte Atmosphäre.

Der **mittlere Barometerstand** beträgt bei 10^0 Temperatur und

0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
760	751	742	733	724	716	707	699	690	682	674

1200	1500	2000 m Höhe über dem Meeresspiegel
658	635	598 mm Q.-S.

Ist der Barometerstand h oder eine andere Quecksilberhöhe in mm bei t^0 abgelesen worden, so beträgt bei 0^0 oder 15^0

$$h_0 = h\,(1 - \alpha t) \qquad h_{15} = h\,(1 - \alpha\,[t - 15])$$

$\alpha = 0,000162$ für Messingskalen,
$\alpha = 0,000175$ für Holz- und Glasskalen.

Einer at (kg/qcm) entsprechen folgende Quecksilberhöhen (gemessen an Holz oder Glasskala)

bei $t =$	0	5	10	15	20	25	30
$h =$	735,5	736,1	736,8	737,4	738,0	738,7	739,3

*) Die Bezeichnung **at** bedeutet im folgenden stets **metrische Atmosphären.**

A. Die beiden Hauptsätze.

a. Der erste Hauptsatz.

1. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik besteht in der Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie auf solche Vorgänge, bei denen Wärmeerscheinungen auftreten; er spricht aus, dafs **Wärme und Arbeit gleichwertig** sind.

$$1 \text{ WE} = 427 \text{ mkg}.$$

Die Zahl $^1/_{427} = A$ wird das **mechanische Wärmeäquivalent** genannt.*) In absolutem Mafs beträgt 1 WE = 4189 Joule.

2. Bezeichnet in mkg E_1 die **Gesamtenergie** eines Körpers im Anfangszustand 1, E_2 dieselbe Gröfse im Endzustand 2, so ist der Ausdruck des ersten Hauptsatzes für die Zustandsänderung 1 bis 2 die Gleichung

$$\frac{Q}{A} - L = E_2 - E_1.$$

Hierin bedeutet Q die während der Zustandsänderung dem Körper zugeführte Wärme in WE, L die vom Körper geleistete mechanische Arbeit.

3. Für die im folgenden allein zu behandelnden tropfbaren Flüssigkeiten, Gase und Dämpfe besteht die äufsere Arbeit L nur in der Ueberwindung des äufseren Oberflächendruckes, der bei stetigen (umkehrbaren) Zustandsänderungen stets gleich dem inneren Drucke (Spannung) der Flüssigkeit ist. In diesem Falle ist dann

$$dL = PdV \qquad L = \int PdV.$$

Die Gesamtenergie der genannten Körper besteht aus der **inneren Energie** (U), die nur von dem inneren Zustande der Körper abhängig ist, und der **äufseren kinetischen Energie;** in besonderen Fällen kann neben diesen noch die Energie der Schwere zu berücksichtigen sein. Die kinetische Energie kommt erst bei der später zu behandelnden strömenden Bewegung in Betracht. Ist die kinetische Energie = 0, so wird

$$dQ = APdV + dU \quad \text{und} \quad Q = \int_{V_1}^{V_2} APdV + U_2 - U_1.$$

Durch diese Gleichung ist zugleich der Begriff der inneren Energie U definiert; ihr Zuwachs ist gleich der Summe der von dem Körper aufgenommenen Wärme und Arbeit. Für die Zählung der Energie besteht kein bestimmter Nullpunkt, es kommen nur Aenderungen der Energie in Betracht.

b. Der zweite Hauptsatz.

1. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dafs aus einem Körper oder Körpersystem, dessen Temperatur in allen Teilen die-

*) 427 mkg gilt heute als der wahrscheinlichste Wert der 15° WE. S. Warburg „Referat über die Wärmeeinheit" Leipzig 1900.

selbe ist, keine mechanische Arbeit gewonnen werden kann. Vorausgesetzt ist hierbei, dafs das System nicht durch seinen mechanischen oder chemischen Zustand Arbeit leisten kann. Ein derartiges System bezeichnet man als im vollkommenen Gleichgewichte befindlich. Gleichwertig mit diesem ist der von **Clausius** ausgesprochene Satz, dafs Wärme nicht von selbst von einem kälteren zu einem wärmeren Körper übergehen kann.

Als Ausdruck des zweiten Hauptsatzes gilt für umkehrbare Zustandsänderungen, d. h. für stetige oder Gleichgewichtsprozesse

$$dQ = TdS.$$

S ist wie P, V, T und U nur vom Zustande des Körpers abhängig und heifst die **Entropie.** Kennt man für einen Körper die Beziehungen der Gröfsen P, V, T und U, so bestimmt sich die Entropie aus der Gleichung

$$TdS = dU + APdV.$$

2. Der zweite Hauptsatz liefert eine Erklärung der **Umkehrbarkeit:** Umkehrbare Prozesse sind solche, bei denen die Summe der Entropie der beteiligten Körper unveränderlich bleibt. Bei allen **nichtumkehrbaren** Prozessen, d. h. solchen, welche bei gestörtem Gleichgewicht verlaufen, wächst die Entropiesumme. Die Entropie eines isolierten Systems kann niemals abnehmen.

B. Nutzbare Arbeit.

1. Um aus einem gegebenen System den gröfstmöglichen Betrag von mechanischer Arbeit zu gewinnen, mufs man es auf irgend einem umkehrbaren Weg in den Zustand vollkommenen Gleichgewichts bringen, oder mit anderen Worten: die **nutzbare Arbeit** L_n eines Systems ist der Betrag, um den seine Gesamtenergie bei gleichbleibender Entropie vermindert werden kann.

2. In fast allen technischen Arbeitsprozessen bildet die äufsere Umgebung, die als ein Behälter von unveränderlichem Druck und unveränderlicher Temperatur aufzufassen ist, einen Teil der Systeme, die zur Arbeitsleistung benutzt werden. In solchen Fällen lautet der Grundsatz für die günstigsten Arbeitsprozesse: Das gegebene System mufs auf irgend einem umkehrbaren Weg auf den Druck und die Temperatur der Umgebung gebracht werden. Bezeichnet E_1, V_1 und S_1 die Gesamtenergie, den Rauminhalt und die Entropie des Systems (ohne Umgebung) im Anfangszustand und E_2, V_2 und S_2 diese Gröfsen nach umkehrbarem Uebergang im Endzustand, T_0, P_0 die Temperatur und den Druck der Umgebung, so ist die nutzbare Arbeit in WE

$$AL_n = (E_1 - E_2) - T_0 (S_1 - S_2) + AP_0 (V_1 - V_2).$$

Jedes der drei Glieder kann positiven oder negativen Wert haben.

3. Der **Arbeitsverlust**, der in solchen Fällen durch einen nichtumkehrbaren Teil des Prozesses entsteht, ist in WE gemessen gleich dem Produkt aus der absoluten Umgebungstemperatur und der durch den Teilprozefs hervorgerufenen Entropievermehrung.

Ist aus praktischen Gründen (Kühlwassermangel, ungünstiger Wärmeübertragungszahl) ein Wärmeaustausch des Systems mit der Umgebung untunlich, so mufs man sich damit begnügen, das System auf umkehrbarem Weg auf den Druck der Umgebung zu bringen.

C. Formeln aus den beiden Hauptsätzen.

1. Bezeichnet man alle Gröfsen für die Gewichtseinheit mit kleinen Buchstaben v, s, u, und die spezifische Wärme bei unveränderlichem Druck bzw. unveränderlichem Rauminhalt mit c_p und c_v, so folgen aus der Hauptgleichung

$$T ds = du + AP dv$$

die Beziehungen

$$c_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P \qquad c_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v$$

$$c_p - c_v = A T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$$

$$ds = -A\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dP + c_p \frac{dT}{T} = A\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v dv + c_v \frac{dT}{T}$$

$$-A\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T \qquad A\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T$$

$$A\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_P \qquad -A\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_v.$$

2. Neben der Energie ist in vielen technischen Anwendungen die Einführung einer ihr ähnlichen Größe

$$i = u + APv$$

von grofsem Vorteil. Diese Gröfse stellt den **Wärmeinhalt bei unveränderlichem Druck** dar. Durch Einführung von i geht die Hauptgleichung über in

$$dQ = T ds = di - Av dP;$$

weiter gelten

$$\left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_P = T \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_v = T$$

$$\left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_s = Av \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_s = -AP$$

$$\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_P = c_p \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = c_v$$

$$\left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_T = -AT^2\left(\frac{\partial \frac{v}{T}}{\partial T}\right)_P = -AT\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P + Av$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = A T^2 \left(\frac{\partial \frac{P}{T}}{\partial T}\right)_v = A T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - A P$$

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial P}\right)_T = - A T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_P \qquad \left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = A T \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_v .$$

D. Zeichnerische Darstellungen.

In allen technischen Anwendungen der Thermodynamik sind zeichnerische Darstellungen von gröfstem Wert. Sie bestehen in der Regel darin, dafs man die Zustände des betrachteten Körpers durch Punkte einer Ebene darstellt, indem man von den Gröfsen P, T, V, S, J, U zwei als rechtwinklige Koordinaten wählt. Besonders nützlich sind folgende:

1. Das PV-**Diagramm, Arbeitsdiagramm, Indikatordiagramm**, ist allgemein in Anwendung; die Fläche unter der Zustandslinie stellt die geleistete Arbeit $\int P dV$ dar.

2. Das TS-**Diagramm, Wärmediagramm**, hat die Entropie zu Abszissen und die absolute Temperatur zu Ordinaten. Die Flächen zwischen Zustandslinie, S-Achse und Endordinaten stellen die vom Körper aufgenommene Wärme dar. Die Adiabaten und Isothermen (s. S. 325) sind den Achsen parallele Geraden.

Das Wärmediagramm ist zur Darstellung der Vorgänge in den Wärmemaschinen besonders geeignet; alle in Betracht kommenden Vorgänge erlangen dadurch grofse Klarheit.

3. Das JS-**Diagramm**,*) mit dem Wärmeinhalt $J = U + APV$ als Ordinaten und der Entropie als Abszissen. Dieses Diagramm bietet, auf Wärmemaschinen angewendet, den grofsen Vorteil, dafs alle wichtigen Arbeits- und Wärmegröfsen durch Strecken dargestellt sind und daher leicht zahlenmäfsig bestimmt werden können. Von grofsem Wert ist diese Darstellungsart auch bei allen Strömungs- und Drosselungsvorgängen und bei Dampfturbinen.

---

*) S. Mollier, Neue Diagramme zur technischen Wärmelehre, Z. d. V. d. I. 1904 S. 271 u. f.

IV. VOLLKOMMENE GASE.

Bezeichnungen s. S. 312.

A. Allgemeines.

1. Vollkommene Gase sind solche, für welche die Gesetze von **Gay-Lussac (Boyle)** und **Mariotte** Geltung haben. Beide Gesetze sind vereinigt in der **Zustandsgleichung** der vollkommenen Gase

$$Pv = RT \qquad PV = GRT.$$

R heifst die **Gaskonstante;** sie ist umgekehrt proportional der Dichte oder dem Molekulargewicht μ des Gases; setzt man letzteres für Sauerstoff = **32** (nach **Ostwald**), so berechnet sich

$$R = 848 : \mu.$$

Diese Beziehung folgt aus dem Gesetze von **Avogadro,** wonach gleiche Räume bei gleichem Druck und gleicher Temperatur für alle Gase dieselbe Anzahl Moleküle enthalten.

Aus der Zustandsgleichung folgt weiter unter Benutzung der Beziehung (S. 317)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = AT\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) - AP = 0,$$

d. h. die Energie der vollkommenen Gase ist nur eine Funktion der Temperatur (Gesetz von **Joule**).

2. Nach den Versuchen von **Regnault** u. a. kann wenigstens für mäfsig hohe Temperaturen für zweiatomige Gase c_p = konst angenommen werden, damit wird auch c_v = konst. Für Gase von mehr als zwei Atomen, z. B. Wasserdampf, Kohlensäure, Ammoniak usw., wächst die spezifische Wärme stark mit der Temperatur, s. auch S. 378. So fand z. B. Wiedemann folgende Zahlen

Gasart	Spezifische Wärme c_p bei		
	0°	100°	200°
Kohlensäure CO_2	0,195	0,217	0,239
Stickoxydul N_2O	0,198	0,221	0,244
Ammoniak NH_3	0,501	0,532	0,563
Aethylen C_2H_4	0,336	0,419	0,502

Aus diesem Grunde haben die Zahlen für die spezifischen Wärmen mehratomiger Gase in der folgenden Tafel nur angenähert Gültigkeit für niedrige Temperaturen (0 bis ∽ 200°).

Nach neuen Versuchen von Holborn und Henning beträgt zwischen 0 und t^0 die mittlere spezifische Wärme für unveränderlichen Druck:

Stickstoff: $c_m = 0{,}235 + 0{,}000\ 019\, t$
Kohlensäure: $c_m = 0{,}201 + 0{,}000\ 0742\, t - 0{,}000\ 000\ 018\, t^2$
Wasserdampf: $c_m = 0{,}467 - 0{,}000\ 0168\, t + 0{,}000\ 000\ 044\, t^2$.

Tafel für Gase.

Gas	Zeichen	Atomzahl	Molekular-Gewicht μ angenähert	Molekular-Gewicht μ genau $O_2 = 32$	Gewicht in kg von 1 cbm bei 15° u. 1 at	Dichte, bezogen auf Luft = 1	Gaskonstante R	Spez. Wärme für 1 kg c_p	Spez. Wärme für 1 kg c_v	Spez. Wärme für 1 cbm v. 15° u. 1 at C_p	Spez. Wärme für 1 cbm v. 15° u. 1 at C_v	$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_p}{C_v}$
Luft	—	—	29	28,95	1,188	1	29,26	0,238	0,170	0,282	0,200	1,405
Sauerstoff	O_2	2	32	32	1,312	1,105	26,5	0,217	0,155	0,285	0,204	1,400
Stickstoff	N_2	2	28	28,08	1,151	0,970	30,2	0,247	0,176	0,281	0,200	1,408
Wasserstoff	H_2	2	2	2,016	0,0827	0,0696	420,0	3,41	2,42	0,282	0,200	1,405
Stickoxyd	NO	2	30	30,04	1,232	1,038	28,2	0,231	0,165	0,286	0,204	1,400
Kohlenoxyd	CO	2	28	28,00	1,148	0,968	30,25	0,242	0,172	0,279	0,197	1,410
Chlorwasserstoff	ClH	2	36,5	36,46	1,495	1,260	23,2	0,191	0,136	0,284	0,203	1,400
Kohlensäure	CO_2	3	44	44,00	1,804	1,520	19,25	0,21	0,16	0,37	0,29	1,28
Stickoxydul	N_2O	3	44	44,08	1,806	1,522	19,2	0,21	0,16	0,38	0,30	1,27
Schweflige Säure	SO_2	3	64	64,06	2,627	2,213	13,2	0,15	0,12	0,39	0,31	1,25
Ammoniak	NH_3	4	17	17,06	0,700	0,590	49,6	0,53	0,41	0,37	0,29	1,28
Azetylen	C_2H_2	4	26	26,02	1,066	0,899	32,5	(0,35)	(0,27)	(0,37)	(0,29)	(1,28)
Chlormetyl	CH_3Cl	5	50,5	50,47	2,070	1,744	16,77	(0,24)	(0,20)	(0,50)	(0,42)	(1,20)
Methan	CH_4	5	16	16,03	0,657	0,554	52,8	0,59	0,46	0,39	0,31	1,28
Aethylen	C_2H_4	6	28	28,03	1,149	0,969	30,2	0,40	0,33	0,46	0,38	1,25

Unabhängig von der Veränderlichkeit der spezifischen Wärme mit der Temperatur gilt immer

$$c_p - c_v = A R = \frac{1,985}{\mu} \sim \frac{2}{\mu};$$

die Energie ist $u = c_v T + C$

der Wärmeinhalt $i = c_p T + C$

und $dQ = c_v dT + A P dv = c_p dT - A v dP;$

weiter gelten noch

$$\frac{c_p}{c_v} = \varkappa \qquad c_v = \frac{2}{\mu(\varkappa - 1)} \qquad c_p = \frac{2\varkappa}{\mu(\varkappa - 1)}$$

und im besonderen für zweiatomige Gase

$$\varkappa = 1{,}4 \qquad c_v = \frac{5}{\mu} \qquad c_p = \frac{7}{\mu}.$$

3. Die Entropie der vollkommenen Gase ist bestimmt durch

$$s = c_v \ln(P v^{\varkappa}) + C = c_v \ln P + c_p \ln v + C$$

$$s = c_v \ln(T v^{\varkappa - 1}) + C = c_v \ln T + AR \ln v + C$$

$$s = c_p \ln \frac{T}{P^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}} + C = c_p \ln T - AR \ln P + C.$$

4. Bei den Gasen ist es in vielen Fällen bequem, mit der Raumeinheit statt mit der Gewichtseinheit zu rechnen.

Man setzt als Mengeneinheit

a) 1 cbm des Gases von 0° und 760 mm Q.-S.-Druck,
oder b) 1 cbm des Gases von 15° und 1 at Druck.

Das Gewicht dieser Mengeneinheiten ist

$$G_{0;760} = \frac{\mu}{22{,}4} \qquad G_{15;1} = \frac{\mu}{24{,}4}.$$

Mit diesen Werten sind die auf die Gewichtseinheit bezogenen Gröfsen zu multiplizieren, um sie auf die obigen Mengeneinheiten bezogen zu erhalten.

a) Bezeichnen C_p und C_v die spezifischen Wärmen für die Mengeneinheit für **1 cbm von 0° und 760 mm Q.-S.**, so ist

$$C_p = \frac{\mu}{22{,}4} c_p \qquad C_v = \frac{\mu}{22{,}4} c_v \qquad C_p - C_v = 0{,}089 \backsim 0{,}09$$

und

$$C_p = \frac{0{,}089}{\varkappa - 1} \varkappa \qquad C_v = \frac{0{,}089}{\varkappa - 1}$$

ganz unabhängig von der Art des Gases.

Für zweiatomige Gase gilt

$$C_p = 0{,}311 \backsim 0{,}31 \qquad C_v = 0{,}222 \backsim 0{,}22.$$

b) Bezeichnen C_p und C_v die spezifischen Wärmen für **1 cbm von 15° und 1 at,** so ist

$$C_p = \frac{\mu}{24{,}4} c_p \qquad C_v = \frac{\mu}{24{,}4} c_v \qquad C_p - C_v = 0{,}081 \backsim 0{,}08$$

$$C_p = \frac{0{,}081}{\varkappa - 1} \varkappa \qquad C_v = \frac{0{,}081}{\varkappa - 1}$$

und für zweiatomige Gase

$$C_p = 0{,}284 \backsim 0{,}28 \qquad C_v = 0{,}203 \backsim 0{,}20.$$

c) Die Entropie für **1 cbm Gas von 15° und 1 at** ist

$$S = 0{,}081 \left[\frac{1}{\varkappa - 1} \ln P + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \ln v\right]$$

$$S = 0{,}081 \left[\frac{1}{\varkappa - 1} \ln T + \ln v\right] \qquad S = 0{,}081 \left[\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \ln T - \ln P\right].$$

Für **1 cbm von 0° und 760 mm Q.-S.** tritt 0,089 an die Stelle von 0,081.

B. Gasmischungen.

a. Allgemeines.

1. Die Mischung bestehe aus einzelnen Gasen von den Gewichtsteilen m_1, m_2, m_3 . . . . und den Raumteilen r_1, r_2, r_3 . . ., so dafs

$$\Sigma(m_i) = 1 \qquad \Sigma(r_i) = 1.$$

Zur Umrechnung von Gewichts- und Raumteilen gelten

$$m_1 = \frac{r_1 \mu_1}{\Sigma(r_i \mu_i)} \qquad r_1 = \frac{m_1}{\mu_1} : \Sigma\left(\frac{m_i}{\mu_i}\right).$$

Gasmischungen verhalten sich so, wie wenn jedes einzelne Gas den gegebenen Gesamtraum unbehindert von den anderen völlig ausfüllen würde; die sich hieraus ergebenden Teildrücke der einzelnen Gase setzen sich zu dem Gesamtdrucke zusammen. (Gesetz von **Dalton.**) Danach gelten für Mischungen dieselben Gesetze wie für einfache Gase.

Die Teildrücke der einzelnen Gase verhalten sich wie die Raumteile derselben: $p_1 : p_2 : p_3 \ldots\ldots = r_1 : r_2 : r_3 \ldots\ldots$

$$r_1 = \frac{p_1}{p} \qquad r_2 = \frac{p_2}{p} \ldots\ldots$$

2. Die **Gaskonstante** für Mischungen ist

$$R = \Sigma(m_i R_i) = 848\, \Sigma\left(\frac{m_i}{\mu_i}\right) = \frac{1}{\Sigma\left(\frac{r_i}{R_i}\right)} = \frac{848}{\Sigma(r_i \mu_i)}.$$

$\Sigma(r_i \mu_i)$ vertritt für die Mischung die Stelle des Molekulargewichtes (scheinbares Molekulargewicht).

3. Die **spezifische Wärme** von Mischungen ist

$$c_p = \Sigma(m_i c_{pi}) \qquad c_v = \Sigma(m_i c_{vi})$$
$$C_p = \Sigma(r_i C_{pi}) \qquad C_v = \Sigma(r_i C_{vi}).$$

Für Mischungen von nur zweiatomigen Gasen ist wieder für 1 cbm von 15° und 1 at

$$C_p = 0{,}284 \qquad C_v = 0{,}203.$$

b. Mischung von Luft und Wasserdampf.

(Feuchte Luft.)

Nach den Eigenschaften der Dämpfe (s. S. 331) kann der Teildruck des Wasserdampfes p_D nie einen bestimmten Höchstwert p' überschreiten, welcher nur von der Temperatur abhängig ist und mit dieser steigt; die Tafel S. 323 gibt in der zweiten Reihe diese Werte in mm Q.-S. (h'); für höhere Temperaturen finden sie sich in den Tafeln S. 334 sowohl in mm Q.-S. wie in at. Natürlich kann aber der Teildruck beliebig kleiner als p' sein. Daraus folgt, dafs 1 cbm Luft von gegebener Temperatur t immer nur ein bestimmtes Höchstgewicht von Dampf = der Dichte γ' des Wasserdampfes bei t und dem zugehörigen Druck p' enthalten kann. Die Werte von γ' finden sich in der Tafel S. 323 in Gramm für 1 cbm und in der Tafel S. 334 unter der Bezeichnung γ in kg/cbm. Im allgemeinen enthält die Luft

$\varphi\gamma'$ Wasserdampf, wobei φ die **relative Feuchtigkeit** genannt wird und zwischen 0 und 1 liegt.

Es ist auch $\varphi = \frac{p_D}{p'}$ d. h. die relative Feuchtigkeit ist auch das Verhältnis des wirklichen Teildruckes des Wasserdampfes zum Sättigungsdruck*). Für $\varphi = 1$ ist die Luft mit Wasserdampf gesättigt, bei $\varphi < 1$ kann 1 cbm noch $(1 - \varphi)\gamma'$ Gramm Wasserdampf aufnehmen.

Ist der Druck des Gemisches (der feuchten Luft) $= p$, so sind die Raumteile von Luft und Wasserdampf

$$r_L = \frac{p - \varphi p'}{p} \qquad r_D = \frac{\varphi p'}{p}.$$

Das scheinbare Molekulargewicht (s. S. 321) der feuchten Luft ist

$$\mu = 28{,}95 - 10{,}93\, \varphi \frac{p'}{p} \infty 28{,}95 - 11\, \varphi \frac{p'}{p}$$

und ihre Gaskonstante

$$R = \frac{29{,}28}{1 - 0{,}377\, \varphi \frac{p'}{p}}.$$

Das Gewicht von 1 cbm feuchter Luft in kg berechnet sich zu

$$\gamma = 342 \frac{p}{T} - 0{,}176\, \varphi \frac{h'}{T}.$$

Zur Erleichterung dieser Berechnung dient die Reihe 4 und 5 der Tafel S. 323. Mit derselben ist

$$\gamma = \gamma'' p - \Delta\varphi,$$

oder wenn der Druck in mm Q.-S. von 15° (h) (z. B. als Barometerstand) gegeben ist,

$$\gamma = \gamma'' \frac{h}{737{,}4} - \Delta\varphi.$$

Für trockene Luft ist $\Delta = 0$ zu setzen.

Wird 1 cbm Luft, welche bei t_0 und p_0 eine relative Feuchtigkeit φ_0 hat, auf eine Temperatur t und einen Druck p gebracht, so ändert sich auch die relative Feuchtigkeit in φ, wofür

$$\varphi \frac{p'}{p} = \varphi_0 \frac{p'_0}{p_0}.$$

Ergibt sich $\varphi > 1$, so ist bei der Zustandsänderung Wasser niedergeschlagen worden, und φ ist $= 1$. Die Menge w des niedergeschlagenen Wassers in Gramm für 1 cbm von p_0, t_0, φ_0 ist

$$w = \frac{\varphi_0 \frac{p}{p'} - \frac{p_0}{p'_0}}{\frac{p}{p'} - 1} \gamma_0'.$$

*) Dies gilt nicht mehr genau bei sehr hohen Teildrücken (mehrere Atmosphären) des Wasserdampfes.

Mischung von Luft und Wasserdampf.

t	Spannung des Wasserdampfes in mm Q.-S. von 0° h'	Gewicht von 1 cbm Wasserdampf bei t und h' in g γ'	Gewicht von 1 cbm trockener Luft von 1 at und t^0 in kg γ''	Korrektur für feuchte Luft Δ	t	Spannung des Wasserdampfes in mm Q.-S. von 0° h'	Gewicht von 1 cbm Wasserdampf bei t und h' in g γ'	Gewicht von 1 cbm trockener Luft von 1 at und t^0 in kg γ''	Korrektur für feuchte Luft Δ
— 10	1,9	2,1	1,300	0,001	15	12,8	12,8	1,188	0,008
— 9	2,1	2,3	1,295	0,001	16	13,6	13,7	1,183	0,008
— 8	2,3	2,5	1,290	0,002	17	14,5	14,5	1,179	0,009
— 7	2,5	2,7	1,286	0,002	18	15,5	15,4	1,175	0,009
— 6	2,8	3,0	1,281	0,002	19	16,5	16,3	1,171	0,010
— 5	3,0	3,3	1,276	0,002	20	17,5	17,3	1,167	0,011
— 4	3,3	3,6	1,271	0,002	21	18,6	18,3	1,163	0,011
— 3	3,6	3,9	1,267	0,002	22	19,8	19,4	1,159	0,012
— 2	3,9	4,2	1,262	0,003	23	21,1	20,6	1,155	0,013
— 1	4,2	4,5	1,257	0,003	24	22,4	21,8	1,151	0,013
0	4,6	4,9	1,253	0,003	25	23,8	23,1	1,148	0,014
+ 1	4,9	5,2	1,248	0,003	26	25,3	24,5	1,144	0,015
2	5,3	5,6	1,244	0,003	27	26,8	25,8	1,140	0,016
3	5,7	6,0	1,239	0,004	28	28,4	27,3	1,136	0,017
4	6,1	6,4	1,235	0,004	29	30,1	28,8	1,132	0,017
5	6,5	6,8	1,230	0,004	30	31,8	30,4	1,128	0,018
6	7,0	7,3	1,226	0,004	32	35,3	33,5	1,121	0,020
7	7,5	7,8	1,221	0,005	34	39,5	37,2	1,114	0,023
8	8,0	8,3	1,217	0,005	36	44,2	41,3	1,107	0,025
9	8,6	8,8	1,212	0,005	38	49,3	45,8	1,100	0,028
10	9,2	9,4	1,208	0,006	40	54,9	50,7	1,093	0,031
11	9,8	10,0	1,204	0,006	42	61,0	56,0	1,086	0,034
12	10,5	10,7	1,200	0,007	44	67,8	61,8	1,079	0,037
13	11,2	11,4	1,196	0,007	46	75,1	68,1	1,072	0,041
14	12,0	12,1	1,192	0,007	48	83,2	74,9	1,065	0,045
15	12,8	12,8	1,188	0,008	50	92,0	82,3	1,058	0,050

Ist $\varphi < 1$, so bedeutet w in der Gleichung S. 322 u. diejenige Dampfmenge, welche die Luft bei der gedachten Zustandsänderung noch aufzunehmen vermag.

Der Dampfmenge w entspricht im Anfangszustand $p_0\,t_0$ ein Raum

$$\Delta V = \frac{\varphi_0 \dfrac{p}{p_0} \dfrac{p_0'}{p'} - 1}{\dfrac{p}{p'} - 1} \text{ cbm.}$$

Wird feuchte Luft abgekühlt, so wächst der Feuchtigkeitsgrad φ und wird bei der Temperatur t', welche dem gegebenen Teildruck

21*

des Dampfes $p_D = \varphi_0 p_0'$ nach Tafel S. 323 entspricht, $= 1$. Diese Temperatur, bei welcher das Niederschlagen des Dampfes beginnt, nennt man den **Taupunkt.**

Messung der Luftfeuchtigkeit.

1. Taupunkt-Hygrometer. Durch Verdunstung von Aether wird ein Glas- oder Metallgefäfs mit glänzender Oberfläche so lange abgekühlt, bis sich Wasserdampf auf ihr niederschlägt und sie trübt; die gleichzeitig abgelesene Temperatur im Gefäfs gibt den Taupunkt der Luft t'. In Tafel S. 323 findet sich zu t' unter γ' der Wassergehalt der Luft, derselbe mufs noch mit $\frac{T'}{T}$ multipliziert werden, worin T' und T die absoluten Temperaturen zu t' und t sind. Die relative Feuchtigkeit ergibt sich als das Verhältnis des so bestimmten Wassergehalts zum Werte γ' bei t.

2. Psychrometer. Ein Thermometer, dessen Kugel mit einem feuchten Läppchen umwickelt ist, wird gleichzeitig mit einem trockenen Thermometer der zu untersuchenden Luft ausgesetzt. Ist t die Lufttemperatur (trockenes Thermometer), t_f die Anzeige des feuchten Thermometers, h' und h'_f die entsprechenden Dampfspannungen in mm Q.-S. nach Tafel S. 323, so berechnet sich der wirkliche Teildruck des Wasserdampfes in der Luft

$$h_D = \varphi\, h' = h'_f - 0{,}60\ (t - t_f), \quad \text{wenn } t' > 0,$$
$$h_D = \varphi\, h' = h'_f - 0{,}52\ (t - t_f), \quad \text{wenn } t' < 0.$$

Die Konstanten gelten für mäfsig bewegte freie Luft; bei ruhiger Luft mufs das Psychrometer etwas bewegt werden.

Genauer als das einfache ist das **Aspirationspsychrometer.**

Für viele Zwecke reichen gut justierte **Haarhygrometer** aus.

C. Besondere Zustandsänderungen.

(Expansionskurven.)

Die folgenden Formeln gelten für G kg des Gases. Ist die Gewichteinheit vorhanden, so sind statt V, U, J, S die kleinen Buchstaben und $G = 1$ zu setzen. Zeiger 1 und 2 beziehen sich auf Anfang und Ende der Zustandsänderung.

a. Rauminhalt unveränderlich.

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad Q = U_2 - U_1 = G\, c_v\, (t_2 - t_1) \quad \text{und}$$

$$Q = \frac{A}{\varkappa - 1}\, V\, (P_2 - P_1) = \frac{A}{\varkappa - 1}\, V\, (p_2 - p_1)\, 10^4$$

Für zweiatomige Gase $Q = 58{,}5\ V\, (p_2 - p_1)$.

b. Druck unveränderlich.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad L = P\, (V_2 - V_1) = G\, R\, (t_2 - t_1)$$

$$Q = G\, c_p\, (t_2 - t_1) = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\, A\, L.$$

c. Temperatur unveränderlich (Isotherme).

$U =$ unveränderlich $\qquad pV =$ unveränderlich

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} \qquad L = G R T \ln \frac{p_1}{p_2} = P_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$Q = A L.$$

d. Entropie unveränderlich (Adiabate).

$$Q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$

$p V^{\varkappa} =$ unveränderlich $\qquad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa} \ldots$ 2, 3

$T V^{\varkappa - 1} =$ unveränderlich $\qquad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa - 1} \ldots$ 4, 5

$\frac{T}{p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}} =$ unveränderlich $\qquad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \ldots$ 6, 7

$$A L = U_1 - U_2 = G c_v (t_1 - t_2)$$

$$L = \frac{P_1 V_1}{\varkappa - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Werte der Exponenten für zweiatomige Gase:

$$\varkappa = 1{,}4 \qquad \varkappa - 1 = 0{,}4 \qquad \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = 0{,}286$$

$$\frac{1}{\varkappa} = 0{,}714 \qquad \frac{1}{\varkappa - 1} = 2{,}5 \qquad \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = 3{,}5.$$

e. Polytrope.

$p V^n =$ unveränderlich $\qquad p v^n =$ unveränderlich.

Diese Kurve wird vielfach zur Darstellung der Expansionskurven in Maschinen gebraucht, hierbei liegen die Exponenten n gewöhnlich zwischen 1 und $\varkappa$.

Es gelten die vorstehenden Beziehungen 2 bis 7 der Adiabate mit n statt $\varkappa$.

Die Polytropen der Gase sind Kurven unveränderlicher spezifischer Wärme; es ist

$$c_n = \frac{n - \varkappa}{n - 1} c_v;$$

für $1 < n < \varkappa$ ist c_n negativ.

$A L = G (c_n - c_v)(t_2 - t_1) \qquad Q = G c_n (t_2 - t_1)$

$L = \frac{G R}{n - 1}(t_1 - t_2) \qquad Q = \frac{\varkappa - n}{\varkappa - 1} A L$

$$L = \frac{P_1 V_1}{n - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{P_1 V_1}{n - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{P_1 V_1}{n - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right].$$

Adiabatische und polytropische Expansion von Gasen.

$\frac{p_1}{p_2}$	Für $n =$ 1,4 (Adiabate)	1,3	1,2	1,1	Für $n =$ 1,4 (Adiabate)	1,3	1,2	1,1
	ist $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{V_2}{V_1} =$				ist $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{T_1}{T_2} =$			
1,1	1,070	1,076	1,083	1,090	1,028	1,022	1,016	1,009
1,2	1,139	1,151	1,164	1,180	1,053	1,043	1,031	1,017
1,3	1,206	1,224	1,244	1,269	1,078	1,062	1,045	1,024
1,4	1,271	1,295	1,323	1,358	1,101	1,081	1,058	1,031
1,5	1,336	1,366	1,401	1,445	1,123	1,098	1,070	1,038
1,6	1,399	1,436	1,479	1,533	1,144	1,115	1,081	1,044
1,7	1,461	1,504	1,557	1,620	1,164	1,130	1,092	1,050
1,8	1,522	1,571	1,633	1,706	1,183	1,145	1,103	1,055
1,9	1,581	1,638	1,706	1,791	1,201	1,160	1,113	1,060
2,0	1,641	1,705	1,782	1,879	1,219	1,174	1,123	1,065
2,5	1,924	2,023	2,145	2,300	1,299	1,235	1,165	1,087
3,0	2,193	2,330	2,498	2,715	1,369	1,289	1,201	1,105
3,5	2,449	2,624	2,842	3,126	1,431	1,336	1,232	1,121
4,0	2,692	2,907	3,177	3,505	1,487	1,378	1,260	1,134
4,5	2,926	3,178	3,500	3,925	1,526	1,415	1,285	1,147
5,0	3,156	3,449	3,824	4,320	1,583	1,449	1,307	1,157
5,5	3,378	3,712	4,142	4,710	1,627	1,482	1,328	1,167
6,0	3,598	3,970	4,447	5,100	1,668	1,512	1,348	1,177
6,5	3,809	4,218	4,760	5,483	1,707	1,540	1,366	1,186
7,0	4,012	4,467	5,058	5,861	1,742	1,566	1,383	1,194
7,5	4,217	4,710	5,360	6,250	1,778	1,591	1,399	1,201
8,0	4,415	4,950	5,650	6,620	1,811	1,616	1,414	1,208
9,0	4,800	5,420	6,240	7,370	1,873	1,660	1,442	1,221
10,0	5,188	5,885	6,820	8,120	1,931	1,701	1,468	1,233

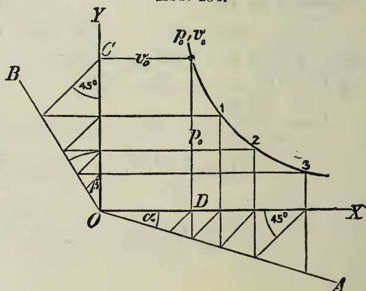
Konstruktion der polytropischen Kurve*) (Abb. 154).

Man ziehe OA unter dem beliebigen Winkel α gegen die x-Achse geneigt, bestimme den Winkel $YOB = \beta$ aus der Gleichung

$$(1 + \operatorname{tg}\beta) = (1 + \operatorname{tg}\alpha)^n;$$

dann ziehe man von den dem gegebenen Anfangszustande $p_0 v_0$ entsprechenden Punkten D und

Abb. 154.



*) Nach E. Brauer; vrgl. Z. d. V. d. I. 1885 S. 433.

C abwechselnd zu den Koordinatenachsen winkelrechte und unter 45° geneigte Linien in der aus der Abb. 154 ersichtlichen Weise, so sind die Punkte 1, 2, 3 Punkte der Kurve.

f. Untersuchung von Expansionskurven.

(Ermittlung des Exponenten n.)

Es seien V_1 und V_2 die absoluten Rauminhalte zweier Zustände, p_1 und p_2 die Drücke, dann ist

$$n = \frac{\lg p_1 - \lg p_2}{\lg V_2 - \lg V_1}.$$

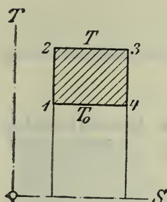
Die Berechnung von n für mehr als zwei Punkte zeigt, ob und in welchen Grenzen n als unveränderlich betrachtet werden kann, und inwieweit eine Zustandsänderung nach der polytropischen Kurve angenommen werden darf. $n = 1$ ergibt die **gleichseitige Hyperbel.** Besser noch läfst sich der Exponent n ermitteln, wenn man für verschiedene Punkte der Expansionskurve $\lg V$ und $\lg p$ in rechtwinkligen Koordinaten aufträgt. Für $n =$ unveränderlich mufs sich dann eine Gerade ergeben; die Tangente ihres Neigungswinkels ist $= n$.

D. Besondere Arbeitsprozesse.

a. Carnotscher Kreisprozefs. (Abb. 155.)

Er verläuft auf zwei Isothermen T und T_0 und zwei Adiabaten.

Abb. 155.



1 2, adiabatische Kompression von T_0 auf T,
2 3, isothermische Expansion,
3 4, adiabatische Expansion von T auf T_0,
4 1, isothermische Kompression.

$$p_2 p_4 = p_1 p_3$$
$$T_2 T_4 = T_1 T_3$$
$$V_2 V_4 = V_1 V_3$$
$$V_2 p_2 = V_3 p_3$$
$$V_4 p_4 = V_1 p_1$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\varkappa - 1} = \frac{T}{T_0}$$

$$L = G\,R\,(t - t_0) \ln \frac{p_2}{p_3} = P_1\,V_1 \left(\frac{T}{T_0} - 1\right) \ln \frac{p_2}{p_3}.$$

Der **Wirkungsgrad** des Prozesses ist

$$\eta = \frac{A\,L}{Q_{2\,3}} = \frac{T - T_0}{T}.$$

Wird der Prozefs umgekehrt durchlaufen, so wird die Arbeit L aufgewendet, und die Wärme $Q_{1\,4}$ wird bei der tiefen Temperatur T_0 entzogen; sie stellt im Falle einer Kältemaschine die Kälteleistung dar.

$$\varepsilon = \frac{Q_{1\,4}}{A\,L} = \frac{T_0}{T - T_0}$$

nennt man die **Leistungsziffer** der nach dem Carnotschen Prozefs arbeitenden Kältemaschine.

b. Kreisprozefs zwischen zwei Linien gleichen Druckes und zwei Adiabaten. (Abb. 156.)

(Heifs- und Kalt-Luftmaschinen.)

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$ S. Tafel S. 326.

Abb. 156

$$A\,L = G\,c_p\,(t_3 - t_2 - t_4 + t_1)$$

$$\eta = \frac{A\,L}{Q_{2\,3}} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

$$\varepsilon = \frac{Q_{1\,4}}{A\,L} = \frac{T_4}{T_3 - T_4} = 1 : \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - 1\right]$$

Für Kaltluftmaschinen ist die theoretische Kolbenfläche F in qm für doppeltwirkende Kompressoren

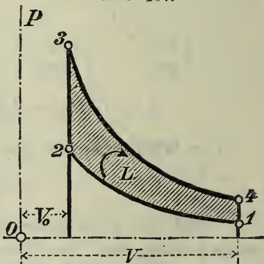
$$F = \frac{1}{c}\,\frac{Q_0}{300\,000}\,\frac{T_4}{T_4 - T_1},$$

wenn c die Kolbengeschwindigkeit in m/sk und Q_0 die Kälteleistung für die Stunde in WE bedeutet.

c. Kreisprozefs zwischen zwei Kurven gleichen Rauminhaltes und zwei Polytropen oder Adiabaten. (Abb. 157.)

Der Exponent sei für beide Polytropen derselbe (n).

Abb. 157.



(Gasmaschine.)

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_4} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{p_1}{p_4}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{n-1}$$

$$L = \frac{P_1\,V}{n-1}\left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right)\left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^{n-1} - 1\right].$$

Der mittlere Druck des Diagrammes $p_i = \frac{L}{V - V_0}$ folgt

$$p_i = p_1 \left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right) \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1}{n - 1} \cdot \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} - 1} = p_1 \left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right) a.$$

Die Werte von a gibt die folgende Tafel:

$p_2 : p_1 =$		3	4	5	6	8	10	12	14	16
$n = 1,4$	$a =$	1,70	1,94	2,13	2,31	2,62	2,88	3,10	3.31	3,50
$n = 1,3$	$a =$	1,69	1,92	2,11	2,28	2,57	2,81	3.03	3.22	3.39
$n = 1,2$	$a =$	1,68	1,90	2,08	2,25	2,51	2,74	2,94	3,12	3,27

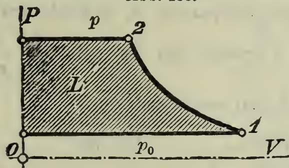
Sind die Kurven 1 2 und 3 4 Adiabaten, so ist überall n durch $\varkappa$ zu ersetzen, und insbesondere gilt dann noch

$$AL = G c_v (t_3 - t_2 - t_4 + t_1)$$
$$= G c_v T_1 \left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right) \left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\varkappa - 1} - 1\right],$$
$$\eta = \frac{AL}{Q_{2\,3}} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\varkappa - 1}.$$

d. Luftkompressor.

Für einen Kompressor ohne schädlichen Raum und ohne Arbeitsverluste (Abb. 158) ist die Arbeit zur Kompression von G kg bzw. V cbm Luft oder Gas vom Druck p_0 und der Temperatur t_0 auf den Druck p

Abb. 158.



1. bei isothermischer Kompression:

$$L = G R T_0 \ln \frac{p}{p_0} = P_0 V \ln \frac{p}{p_0},$$

da $T_1 = T_2 = T_0$ $\quad p_1 V_1 = p_2 V_2$

$$p_1 = p_0.$$

Die während der Kompression durch Kühlwasser abzuführende Wärme ist

$$Q_{12} = AL.$$

2. bei polytropischer und adiabatischer Kompression:

$$L = G \frac{n}{n-1} R (t_2 - t_1)$$

$$L = P_0 V \frac{n}{n-1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = P_0 V \frac{n}{n-1} \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right]$$

$$p_1 = p_0 \qquad T_1 = T_0.$$

Für die Adiabate ist n durch $\varkappa$ zu ersetzen.

Die abzuführende Wärme ist

$$Q_{12} = \frac{\varkappa - n}{\varkappa - 1} \frac{1}{n} A L.$$

Die kleinste und daher günstigste Kompressorarbeit liefert die **Isotherme**, sie ist daher bei der Beurteilung von ausgeführten Kompressoren zu Grunde zu legen.

3. Die Ausdrücke für die Kompressorarbeit (Fläche L der Abb. 158) lassen sich in allen Fällen schreiben

$$L = 10000\, V p_m,$$

worin p_m den mittleren Druck des verlustfreien Kompressors ohne schädlichen Raum darstellt. Zur Berechnung von p_m für verschiedene Kompressionskurven dient die folgende Tafel, es ist

$$p_m = p_0\, b.$$

(b stellt den mittleren Druck dar, wenn der Ansaugedruck p_0 gerade $= 1$ at ist).

Tafel für b.

$p : p_0 =$	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10
$n = 1$ Isotherme	0,405	0,693	0,916	1,099	1,386	1,61	1,79	2,08	2,30
$n = 1,1$	0,418	0,715	0,957	1,155	1,470	1,73	1,95	2,29	2,56
$n = 1,2$	0,420	0,738	0,990	1,205	1,560	1,84	2,09	2,48	2,81
$n = 1,3$	0,425	0,754	1,018	1,252	1,640	1,95	2,22	2,67	3,04
$n = 1,4$ Adiabate	0,430	0,768	1,046	1,290	1,703	2,04	2,34	2,84	3,26

Für Verbundkompression berechnet sich unter der Voraussetzung, dafs im Zwischenkühler auf die Anfangstemperatur t_0 gekühlt wird, die Arbeit, wenn man in die obigen Formeln und die Tafel $\sqrt{\frac{p}{p_0}}$ statt $\frac{p}{p_0}$ einführt und die gefundene Arbeit verdoppelt.

Abb. 159.

Ausgeführte Kompressoren (Abb. 159) saugen weniger Luft an, als ihrem Hubraum entspricht. Das Verhältnis der wirklich angesaugten Luftmenge in cbm vom Druck p_0 und der Temperatur t_0 zum Hubraum heifst der **Lieferungsgrad** λ des Kompressors; er wird bedingt durch den schädlichen Raum (Rückexpansion 3 — 4 Abb. 159), durch Drosslung der angesaugten Luft ($p_1 < p_0$) und Erwärmung der angesaugten Luft durch die Zylinder- und Kanalwände ($t_1 > t_0$).

Die durch den Indikator gemessene indizierte Kompressorarbeit ist stets gröfser als die theoretische Arbeit bei isothermischer Kompression; das Verhältnis beider heifst der **indizierte Wirkungsgrad** η_i des Kompressors, er wird bedingt durch mangelhafte Kühlung ($n > 1$), durch die Mehrarbeit infolge der Drosselung und durch die schädliche Erwärmung der Luft an den heifsen Wandungen während des Ansaugens, denn die Arbeit steigt im Verhältnis der absoluten Temperatur T_1. Ist p_m der mittlere Druck des theoretischen (verlustfreien Prozesses) und p_i der mittlere indizierte Druck des untersuchten Kompressors, λ sein Lieferungsgrad, so ist

$$\eta_i = \lambda \frac{p_m}{p_i}.$$

Der Wirkungsgrad η_i und der Lieferungsgrad λ nehmen wegen der Wandungswirkung rasch ab, wenn das Druckverhältnis $p : p_0$ wächst, daher Verbundkompression vorteilhaft.

Um einen Einblick in die schädliche Wirkung der Wandungen zu erhalten, berechnet man die Temperatur T_1 nach dem Ansaugen bzw. beim Beginn der Kompression. Es ist

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)\frac{p_1}{p_0}}{(\varepsilon_3 + \varepsilon_0)\frac{p_3}{p_0}\frac{T_0}{T_3} + \lambda}.$$

T_3 wird der zu messenden Austrittstemperatur der Luft gleichgesetzt; ε_0 ist das Verhältnis des schädlichen Raumes zum Hubraum. ε_3 und ε_1 sind die Hubstrecken bei Beginn der Rückexpansion und der Kompression, die meist gleich 0 bzw. gleich 1 zu setzen sein werden. Die Formel kann auch zur Berechnung der Temperatur in irgend einem anderen Punkt der Kompressionslinie dienen. Dichtigkeit des Kolbens und der Steuerung ist vorausgesetzt.

V. DÄMPFE.

A. Allgemeines.

1. Wenn man ein beliebiges Gas bei gleichbleibender Temperatur verdichtet, so beginnt es bei einem bestimmten, von der Temperatur abhängigen Druck **(Sättigungsdruck)** und zugehörigen Rauminhalt v'' flüssig zu werden. Setzt man die Raumverminderung weiter fort, so bleibt von diesem Punkt ab mit der Temperatur auch der Druck unveränderlich, bis das Gas vollständig verflüssigt ist, wobei es einen Raum v' einnimmt.

Zwischen Beginn und Ende der Verflüssigung besteht eine Mischung aus einem gasförmigen (dampfförmigen) und einem flüssigen Anteil. Es bezeichne für 1 kg Mischung x den dampfförmigen und $y = 1 - x$ den flüssigen Anteil.

Im Gebiete des nassen Dampfes, dem Sättigungsgebiete, ist also die Temperatur nur eine Funktion des Druckes

und umgekehrt. Die Beziehung zwischen diesen Werten heifst die Spannungsgleichung oder -kurve. Im besonderen ist die dem Atmosphärendrucke zugehörige Temperatur die Siedetemperatur.

Wo eine Unterscheidung nötig ist, soll im folgenden die zu einem gegebenen Druck p gehörige Sättigungstemperatur mit ϑ bzw. Θ (absolut) bezeichnet werden.

2. Für jedes Gas gibt es eine bestimmte Höchsttemperatur t_k und einen zugehörigen Druck p_k, oberhalb dessen eine Verflüssigung des Gases bei der Verdichtung nicht mehr eintritt. Den durch t_k und p_k bestimmten Zustand nennt man den **kritischen.** In ihm treffen sich die Grenzzustände (Grenzkurven) für Flüssigkeit und Dampf. Aufserhalb der Werte t_k und p_k besteht keine merkbare Grenze zwischen den beiden Aggregatzuständen.

Tafel der Siedetemperaturen t_{760}, der kritischen Temperatur t_k und des kritischen Druckes p_k at.

	t_{760}	t_k	p_k		t_{760}	t_k	p_k
Naphthalin $C_{10}H_8$	218	468	40	Kohlensäure CO_2	— 79	31	75
Anilin C_6H_7N	184	425	54	Azetylen C_2H_2	— 83	35	63
Wasser	100	365	205	Stickoxydul N_2O	— 92	36	76
Benzol C_6H_6	80	290	50	Aethylen C_2H_4	— 102	10	54
Alkohol C_2H_6O	78	238	67	Methan CH_4	— 164	— 82	57
Aether $C_4H_{10}O$	35	192	38	Sauerstoff	— 183	— 118	60
Schweflige Säure SO_2	— 10	156	81	Kohlenoxyd CO	— 190	— 140	36
Chlormetyl CH_3Cl	— 24	142	75	Stickstoff	— 196	— 149	29
Ammoniak NH_3	— 33	130	115	Wasserstoff	— 253	— 238	16

Druck und Temperatur des gesättigten Wasserdampfes bis zum kritischen Punkt.

p at	t	p at	t	t	p at	t	p at
20	211	80	292	200	15,9	290	77,3
25	223	90	301	210	19,5	300	89,3
30	233	100	308	220	23,8	310	103
35	241	120	322	230	28,7	320	118
40	249	140	333	240	34,4	330	134
45	256	160	344	250	40,9	340	152
50	262	180	354	260	48,4	350	172
60	273	200	363	270	56,9	360	194
70	283	205	365	280	66,5	365	205

Anmerkung. Genaue Spannungstafeln für Wasser s. S. 334 u. f., schweflige Säure, Kohlensäure und Ammoniak S. 350 u. f.

B. Nasser Dampf.

Es bezeichne

v' bzw. v'' den Rauminhalt in cbm von 1 kg Flüssigkeit bzw. Dampf im Grenzzustand, d. h. unter dem der gegebenen Temperatur entsprechenden Sättigungsdruck,

c die spezifische Wärme der Flüssigkeit im Grenzzustand,

$q = \int_0^t c\,dt$ die Flüssigkeitswärme in WE,

r die Verdampfungswärme, d. h. die zur Verdampfung von 1 kg Flüssigkeit bei unveränderlichem t und p nötige Wärme in WE,

$\psi = AP(v'' - v')$ die Arbeit, die bei der Verdampfung infolge der Raumvergröfserung geleistet wird, in WE (äufsere Verdampfungswärme),

$\varrho = r - \psi$ die Vergröfserung der Energie durch die Verdampfung in WE (innere Verdampfungswärme),

i' und u' den Wärmeinhalt und die Energie der Flüssigkeit im Grenzzustand, von 0^0 ab gerechnet.

Dann ist $$i' = u' + APv' - AP_0 v_0'$$

$$i' = q + A\int_0^t v'\,dP \qquad u' = q - A\int_0 P\,dv'.$$

Für den Fall, dafs $v' =$ unveränderlich, ist $u' = q$,

$i'' = i' + r$ der Wärmeinhalt des gesättigten Dampfes,

$u'' = u' + \varrho$ die Energie des gesättigten Dampfes,

$s' = \int_0^t \frac{c\,dT}{T}$ die Entropie der Flüssigkeit,

$s'' = s' + \frac{r}{T}$ die Entropie des gesättigten Dampfes.

a. Als Ausdruck des zweiten Hauptsatzes gilt für gesättigte Dämpfe die **Clapeyronsche Gleichung:** $\frac{r}{T} = A(v'' - v')\frac{dP}{dT}$.

Für nassen Dampf in beliebigem Zustande gelten

$$v = v' + x(v'' - v') \qquad u = u' + x\varrho$$

$$s = s' + x\frac{r}{T} \qquad i = i' + xr.$$

Für eine Zustandsänderung 1 2 für 1 kg ist

$$Q_{1\,2} = u_2' - u_1' + x_2\varrho_2 - x_1\varrho_1 + A\int_1^2 P\,dv$$

oder $$Q_{1\,2} = i_2' - i_1' + x_2 r_2 - x_1 r_1 - A\int_1^2 v\,dP.$$

b. Wasserdampf.

Die folgenden Tafeln für gesättigten Wasserdampf beruhen hauptsächlich auf den Versuchen **Regnaults** und denen von **Knoblauch, Linde** und **Klebe.***)

Aufser den oben angeführten Bezeichnungen bedeutet noch c_p'' den Wert der spez. Wärme für gleichen Druck in unmittelbarer Nähe der Grenzkurve.

Von den folgenden Tafeln sind die ersten beiden nach Drücken, die anderen nach Temperaturen geordnet.

*) S. Mollier, Neue Tabellen und Diagramme für Wasserdampf. Berlin bei Springer. 1906.

Tafel I.

1. Druck at (kg/qcm) (absolut) p	2. Absolute Temperatur T	3. Rauminhalt von 1 kg Dampf cbm v''	4. Gewicht von 1 cbm Dampf kg γ''	5. Entropie der Flüssigkeit s'	6. Entropie des Dampfes s''	7. s'' — s' = r/T	8. Spez. Wärme an der Grenzkurve c_p''
0,02	290,3	68,126	0,01468	0,0616	2,0783	2,0167	0,478
0,04	301,8	35,387	0,02826	0,1004	2,0202	1,9198	0,479
0,06	309,0	24,140	0,04142	0,1240	1,9868	1,8628	0,480
0,08	314,3	18,408	0,05432	0,1411	1,9631	1,8220	0,481
0,10	318,6	14,920	0,06703	0,1546	1,9449	1,7903	0,481
0,12	322,2	12,568	0,07956	0,1659	1,9300	1,7641	0,482
0,15	326,7	10,190	0,09814	0,1799	1,9121	1,7322	0,483
0,20	332,8	7,777	0,12858	0,1984	1,8890	1,6906	0,484
0,25	337,6	6,307	0,1586	0,2129	1,8711	1,6582	0,486
0,30	341,7	5,316	0,1881	0,2252	1,8566	1,6314	0,487
0,35	345,3	4,600	0,2174	0,2356	1,8444	1,6088	0,488
0,40	348,5	4,060	0,2463	0,2448	1,8336	1,5888	0,490
0,50	353,9	3,2940	0,3036	0,2604	1,8159	1,5555	0,492
0,60	358,5	2,7770	0,3601	0,2734	1,8015	1,5281	0,494
0,70	362,5	2,4040	0,4160	0,2846	1,7895	1,5049	0,496
0,80	366,0	2,1216	0,4713	0,2944	1,7789	1,4845	0,498
0,90	369,2	1,9003	0,5262	0,3032	1,7698	1,4666	0,499
1,0	372,1	1,7220	0,5807	0,3111	1,7615	1,4504	0,501
1,1	374,8	1,5751	0,6349	0,3183	1,7541	1,4358	0,503
1,2	377,2	1,4521	0,6887	0,3250	1,7473	1,4223	0,504
1,4	381,7	1,2571	0,7955	0,3370	1,7352	1,3982	0,507
1,6	385,7	1,1096	0,9013	0,3475	1,7248	1,3773	0,510
1,8	389,3	0,9939	1,0062	0,3569	1,7156	1,3587	0,513
2,0	392,6	0,9006	1,1104	0,3655	1,7077	1,3420	0,516
2,5	399,7	0,7310	1,3680	0,3839	1,6903	1,3064	0,521
3,0	405,8	0,6163	1,6224	0,3993	1,6760	1,2767	0,526
3,5	411,1	0,5335	1,8743	0,4125	1,6640	1,2515	0,531
4,0	415,8	0,4708	2,1239	0,4242	1,6537	1,2295	0,536
4,5	420,1	0,4217	2,3716	0,4347	1,6445	1,2098	0,541
5,0	424,0	0,3820	2,6177	0,4442	1,6363	1,1921	0,546
5,5	427,6	0,3494	2,8624	0,4529	1,6290	1,1761	0,550
6,0	430,9	0,3220	3,1058	0,4609	1,6221	1,1612	0,554
6,5	434,1	0,2987	3,3481	0,4683	1,6158	1,1475	0,558
7,0	437,0	0,2786	3,5891	0,4753	1,6101	1,1348	0,561
7,5	439,8	0,2611	3,8294	0,4819	1,6048	1,1229	0,565
8,0	442,5	0,2458	4,0683	0,4881	1,5997	1,1116	0,568
8,5	445,0	0,2322	4,3072	0,4939	1,5949	1,1010	0,572
9,0	447,4	0,2200	4,5448	0,4995	1,5905	1,0910	0,575
9,5	449,7	0,2091	4,7819	0,5048	1,5863	1,0815	0,578
10,0	451,9	0,1993	5,018	0,5099	1,5822	1,0723	0,581
11,0	456,1	0,1822	5,489	0,5194	1,5748	1,0554	0,588
12,0	459,9	0,1678	5,960	0,5282	1,5678	1,0396	0,593
13,0	463,6	0,15565	6,425	0,5364	1,5616	1,0252	0,598
14,0	467,0	0,14515	6,889	0,5440	1,5557	1,0117	0,603
15,0	470,2	0,13601	7,352	0,5513	1,5504	0,9991	0,608
16,0	473,3	0,12797	7,814	0,5581	1,5452	0,9871	0,614
18,0	479,1	0,11450	8,734	0,5707	1,5359	0,9652	0,623
20,0	484,3	0,10365	9,648	0,5821	1,5274	0,9453	0,632

Tafel II.

1. Druck at (kg/qcm) (absolut) p	2. Temperatur t	3. Wärmeinhalt der Flüssigkeit i'	4. Wärmeinhalt des Dampfes i''	5. Energie des Dampfes u''	6. Verdampfungswärme i'' — i' = r	7. u'' — u' = ϱ	8. AP (v'' — v') = ψ
0,02	17,3	17,3	602,9	571,0	585,5	553,6	31,91
0,04	28,8	28,8	608,3	575,1	579,4	546,3	33,15
0,06	36,0	36,0	611,6	577,7	575,6	541,7	33,92
0,08	41,3	41,4	614,1	579,6	572,7	538,2	34,49
0,10	45,6	45,7	616,0	581,1	570,4	535,4	34,94
0,12	49,2	49,3	617,7	582,3	568,4	533,1	35,32
0,15	53,7	53,8	619,7	583,9	565,9	530,1	35,79
0,20	59,8	59,9	622,4	586,0	562,6	526,1	36,42
0,25	64,6	64,8	624,6	587,7	559,8	522,9	36,92
0,30	68,7	68,9	626,4	589,1	557,5	520,2	37,34
0,35	72,3	72,5	628,0	590,3	555,5	517,8	37,70
0,40	75,5	75,7	629,4	591,3	553,7	515,6	38,02
0,50	80,9	81,2	631,7	593,1	550,5	512,0	38,56
0,60	85,5	85,8	633,7	594,6	547,8	508,8	39,01
0,70	89,5	89,9	635,3	595,9	545,5	506,1	39,39
0,80	93,0	93,5	636,8	597,0	543,3	503,6	39,73
0,90	96,2	96,7	638,1	598,1	541,4	501,4	40,03
1,0	99,1	99,6	639,3	599,0	539,7	499,4	40,30
1,1	101,8	102,3	640,7	599,8	538,1	497,5	40,55
1,2	104,2	104,8	641,3	600,5	536,5	495,7	40,78
1,4	108,7	109,4	643,1	601,9	533,7	492,6	41,18
1,6	112,7	113,4	644,7	603,0	531,2	489,7	41,54
1,8	116,3	117,1	646,0	604,1	528,9	487,1	41,85
2,0	119,6	120,4	647,2	605,1	526,8	484,7	42,14
2,5	126,7	127,7	649,9	607,1	522,2	479,4	42,74
3,0	132,8	133,9	652,0	608,7	518,1	474,9	43,23
3,5	138,1	139,4	653,8	610,1	514,5	470,8	43,65
4,0	142,8	144,2	655,4	611,3	511,2	467,2	44,01
4,5	147,1	148,6	656,8	612,4	508,2	463,9	44,33
5,0	151,0	152,6	658,1	613,3	505,5	460,8	44,61
5,5	154,6	156,3	659,2	614,2	502,9	458,0	44,87
6,0	157,9	159,8	660,2	615,0	500,4	455,3	45,10
6,5	161,1	163,0	661,1	615,7	498,1	452,8	45,32
7,0	164,0	166,1	662,0	616,3	495,9	450,4	45,51
7,5	166,8	168,9	662,8	616,9	493,9	448,2	45,67
8,0	169,5	171,7	663,5	617,5	491,8	446,0	45,86
8,5	172,0	174,3	664,2	618,0	489,9	443,9	46,02
9,0	174,4	176,8	664,9	618,5	488,1	441,9	46,17
9,5	176,7	179,2	665,5	619,0	486,3	440,0	46,30
10,0	178,9	181,5	666,1	619,4	484,6	438,2	46,43
11,0	183,1	185,8	667,1	620,2	481,3	434,6	46,67
12,0	186,9	189,9	668,1	620,9	478,2	431,3	46,88
13,0	190,6	193,7	668,9	621,6	475,3	428,2	47,08
14,0	194,0	197,3	669,7	622,2	472,5	425,2	47,26
15,0	197,2	200,7	670,5	622,7	469,8	422,4	47,43
16,0	200,3	203,9	671,2	623,2	467,3	419,7	47,58
18,0	206,1	210,0	672,4	624,1	462,4	414,6	47,85
20,0	211,3	215,5	673,4	624,9	457,9	409,8	48,08

Tafel III.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Temperatur	Druck at (kg/qcm) (absolut)	Druck mm Hg	Rauminhalt von 1 kg Dampf cbm	Gewicht von 1 cbm Dampf kg	Entropie der Flüssigkeit	Entropie des Dampfes	s'' — s' =
t	p	von 0°	v''	γ''	s'	s''	r/T
0	0,0063	4,60	204,97	0,00488	0,0000	2,1783	2,1783
5	0,0089	6,53	146,93	0,00681	0,0182	2,1479	2,1297
10	0,0125	9,17	106,62	0,00938	0,0360	2,1188	2,0828
15	0,0173	12,70	78,23	0,01278	0,0535	2,0909	2,0374
20	0,0236	17,40	58,15	0,01720	0,0707	2,0643	1,9936
25	0,0320	23,6	43,667	0,02290	0,0877	2,0389	1,9512
30	0,0429	31,5	33,132	0,03018	0,1044	2,0146	1,9102
35	0,0569	41,8	25,393	0,03938	0,1208	1,9912	1,8704
40	0,0747	54,9	19,650	0,05089	0,1369	1,9688	1,8319
45	0,0971	71,4	15,346	0,06516	0,1528	1,9474	1,7946
50	0,125	92,0	12,091	0,08271	0,1685	1,9268	1,7583
55	0,160	117,5	9,607	0,10409	0,1839	1,9070	1,7231
60	0,202	148,8	7,695	0,12995	0,1991	1,8880	1,6889
65	0,254	186,9	6,211	0,16100	0,2141	1,8697	1,6556
70	0,317	233,1	5,050	0,19800	0,2289	1,8522	1,6233
75	0,392	288,5	4,1353	0,2418	0,2435	1,8352	1,5917
80	0,482	354,6	3,4085	0,2934	0,2579	1,8189	1,5610
85	0,589	433,0	2,8272	0,3537	0,2721	1,8031	1,5310
90	0,714	525,4	2,3592	0,4239	0,2861	1,7879	1,5018
95	0,862	633,7	1,9797	0,5051	0,2999	1,7731	1,4732
100	1,033	760	1,6702	0,5987	0,3136	1,7589	1,4453
105	1,232	906	1,4166	0,7059	0,3271	1,7452	1,4181
110	1,462	1075	1,2073	0,8283	0,3404	1,7319	1,3915
115	1,726	1269	1,0338	0,9673	0,3536	1,7190	1,3654
120	2,027	1491	0,8894	1,1243	0,3666	1,7064	1,3398
125	2,371	1744	0,7681	1,3018	0,3795	1,6943	1,3148
130	2,760	2030	0,6664	1,5005	0,3922	1,6824	1,2902
135	3,200	2354	0,5800	1,7241	0,4048	1,6710	1,2662
140	3,695	2718	0,5071	1,9719	0,4173	1,6599	1,2426
145	4,248	3125	0,4450	2,2471	0,4296	1,6490	1,2194
150	4,868	3581	0,3917	2,553	0,4418	1,6384	1,1966
155	5,557	4088	0,3460	2,890	0,4538	1,6280	1,1742
160	6,323	4651	0,3065	3,262	0,4658	1,6181	1,1523
165	7,170	5274	0,2724	3,671	0,4776	1,6082	1,1306
170	8,104	5961	0,2429	4,117	0,4893	1,5986	1,1093
175	9,131	6717	0,2171	4,607	0,5009	1,5893	1,0884
180	10,258	7546	0,1945	5,140	0,5124	1,5802	1,0678
185	11,491	8453	0,1748	5,720	0,5238	1,5713	1,0475
190	12,835	9442	0,1575	6,348	0,5351	1,5626	1,0275
195	14,300	10519	0,1423	7,028	0,5463	1,5541	1,0078
200	15,890	11688	0,1288	7,763	0,5574	1,5458	0,9884

Tafel IV.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Temperatur	Wärmeinhalt der Flüssigkeit	Wärmeinhalt des Dampfes	Diff.	Energie des Dampfes	Verdampfungswärme $(i''-i')=$	$(u''-u')$ =	AP $(v''-v')$ =
t	i'	i''		u''	r	ϱ	ψ
0	0	594,7		564,7	594,7	564,7	30,02
5	5,0	597,1		566,5	592,1	561,5	30,56
10	10,0	599,4	4,74	568,3	589,4	558,3	31,11
15	15,0	601,8		570,1	586,8	555,1	31,65
20	20,0	604,1	4,71	571,9	584,1	551,9	32,19
25	25,0	606,5		573,7	581,5	548,7	32,74
30	30,0	608,8	4,67	575,5	578,8	545,5	33,28
35	35,0	611,1		577,3	576,1	542,3	33,81
40	40,1	613,5	4,63	579,1	573,4	539,1	34,34
45	45,1	615,8		580,9	570,7	535,8	34,88
50	50,1	618,0	4,58	582,6	567,9	532,5	35,41
55	55,1	620,3		584,4	565,2	529,3	35,93
60	60,1	622,6	4,52	586,1	562,4	526,0	36,45
65	65,2	624,8		587,8	559,6	522,7	36,96
70	70,2	627,0	4,44	589,5	556,8	519,3	37,47
75	75,3	629,2		591,2	553,9	516,0	37,97
80	80,3	631,3	4,34	592,8	551,0	512,6	38,47
85	85,3	633,5		594,5	548,1	509,3	38,96
90	90,4	635,6	4,23	596,1	545,2	505,7	39,45
95	95,5	637,6		597,7	542,2	502,2	39,92
100	100,5	639,7	4,09	599,2	439,1	498,7	40,39
105	105,6	641,7		600,8	536,1	495,2	40,85
110	110,7	643,6	3,95	602,3	532,9	491,6	41,30
115	115,8	645,5		603,8	529,8	488,0	41,74
120	120,9	647,4	3,79	605,2	526,6	484,4	42,17
125	126,0	649,2		606,6	523,3	480,7	42,59
130	131,1	651,0	3,63	608,0	520,0	477,0	43,00
135	136,2	652,8		609,3	516,6	473,2	43,41
140	141,3	654,5	3,45	610,6	513,2	469,4	43,80
145	146,4	656,1		611,9	509,7	465,5	44,18
150	151,6	657,8	3,27	613,1	506,2	461,6	44,55
155	156,7	659,3		614,3	502,6	457,7	44,90
160	161,9	660,8	3,07	615,4	498,9	453,7	45,25
165	167,1	662,3		616,5	495,2	449,6	45,58
170	172,2	663,7	2,86	617,6	491,4	445,5	45,90
175	177,4	665,0		618,6	487,6	441,4	46,20
180	182,6	666,3	2,66	619,6	483,7	437,2	46,49
185	187,9	667,6		620,6	479,8	433,0	46,78
190	193,1	668,8	2,48	621,5	475,7	428,7	47,05
195	198,3	670,0		622,3	471,7	424,4	47,31
200	203,6	671,1	2,27	623,2	467,5	420,0	47,56

Tafel V.

t	𝔅	𝔍	𝔖	t	𝔅	𝔍	𝔖
0	0,075	8	0,021	225	0,0101	1,00	0,00159
5	0,071	7	0,020	230	0,0098	0,97	0,00152
10	0,067	7	0,018	235	0,0095	0,94	0,00146
15	0,063	6	0,017	240	0,0092	0,91	0,00139
20	0,059	6	0,016	245	0,0089	0,88	0,00134
25	0,056	6	0,015	250	0,0086	0,85	0,00128
30	0,053	5	0,014	255	0,0083	0,82	0,00123
35	0,050	5	0,013	260	0,0081	0,79	0,00118
40	0,048	5	0,012	265	0,0078	0,77	0,00113
45	0,045	5	0,011	270	0,0076	0,75	0,00109
50	0,043	4,3	0,0103	275	0,0074	0,72	0,00105
55	0,041	4,1	0,0097	280	0,0071	0,70	0,00101
60	0,039	3,9	0,0091	285	0,0069	0,68	0,00097
65	0,037	3,7	0,0085	290	0,0067	0,66	0,00093
70	0,035	3,5	0,0080	295	0,0065	0,64	0,00090
75	0,033	3,4	0,0075	300	0,0063	0,62	0,00086
80	0,032	3,2	0,0070	305	0,0062	0,60	0,00083
85	0,030	3,1	0,0066	310	0,0060	0,58	0,00080
90	0,029	2,9	0,0062	315	0,0058	0,57	0,00077
95	0,028	2,8	0,0059	320	0,0057	0,55	0,00074
100	0,0265	2,66	0,00554	325	0,0055	0,53	0,00072
105	0,0255	2,55	0,00524	330	0,0053	0,52	0,00069
110	0,0243	2,44	0,00494	335	0,0052	0,50	0,00067
115	0,0232	2,35	0,00468	340	0,0051	0,49	0,00064
120	0,0223	2,24	0,00442	345	0,0049	0,48	0,00062
125	0,0214	2,14	0,00418	350	0,0048	0,46	0,00060
130	0,0205	2,06	0,00397	355	0,0047	0,45	0,00058
135	0,0197	1,97	0,00376	360	0,0046	0,44	0,00056
140	0,0189	1,89	0,00357	365	0,0044	0,43	0,00054
145	0,0181	1,82	0,00339	370	0,0043	0,41	0,00052
150	0,0174	1,75	0,00321	375	0,0042	0,40	0,00051
155	0,0168	1,68	0,00306	380	0,0041	0,39	0,00049
160	0,0161	1,61	0,00291	385	0,0040	0,38	0,00047
165	0,0155	1,55	0,00277	390	0,0039	0,37	0,00046
170	0,0149	1,49	0,00263	395	0,0038	0,36	0,00044
175	0,0144	1,44	0,00251	400	0,0037	0,35	0,00043
180	0,0139	1,38	0,00239	405	0,0036	0,34	0,00042
185	0,0134	1,33	0,00228	410	0,0035	0,33	0,00040
190	0,0129	1,29	0,00217	415	0,0034	0,33	0,00039
195	0,0124	1,24	0,00208	420	0,0034	0,32	0,00038
200	0,0120	1,20	0,00198	425	0,0033	0,31	0,00037
205	0,0116	1,15	0,00189	430	0,0032	0,30	0,00036
210	0,0112	1,11	0,00181	435	0,0031	0,29	0,00035
215	0,0108	1,08	0,00173	440	0,0031	0,29	0,00034
220	0,0105	1,04	0,00166	445	0,0030	0,28	0,00033
225	0,0101	1,00	0,00159	450	0,0029	0,27	0,00032

c. Besondere Zustandsänderungen. (Expansionskurven.)

1. **Isothermen,** zugleich **Linien gleichen Druckes:** $t =$ unveränderlich, $p =$ unveränderlich.

$$L = P(V_2 - V_1) = GP(v'' - v')(x_2 - x_1)$$
$$Q = Gr(x_2 - x_1).$$

Im pv- und ts-Diagramm (s. S. 317) sind die Isothermen der Abszissenachse parallele Geraden. Im is-Diagramm sind sie ebenfalls Geraden, u. zw. ist die Tangente ihres Neigungswinkels gleich der abs. Temperatur.

2. **Adiabaten:** $s =$ unveränderlich.

$$s_1' + x_1 \frac{r_1}{T_1} = s_2' + x_2 \frac{r_2}{T_2}; \quad AL = G(u_1' + x_1 \varrho_1 - u_2' - x_2 \varrho_2).$$

Für Wasserdampf kann bei $x > 0{,}7$ die Adiabate im pv-Diagramm mit genügender Annäherung durch eine polytropische Kurve (s. S. 317 und 325) dargestellt werden:

$$p\,V^{\varkappa} = \text{unveränderlich},$$

u. zw.

$$\varkappa = 1{,}035 + 0{,}1\,x.$$

In dieser Näherungsgleichung hat $\varkappa$ nicht die besondere Bedeutung wie bei Gasen. Es wird nun

$$L = \frac{P_1 V_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right].$$

3. **Linien gleicher Dampfmenge** (gleichen Mischungsverhältnisses): $x =$ unveränderlich.

Ist $x \geqq 0{,}5$, so kann für Wasserdampf mit genügender Genauigkeit gesetzt werden

$$p_1 v_1^{\frac{16}{15}} = p_2 v_2^{\frac{16}{15}} = 1{,}787\; x^{\frac{16}{15}}$$

oder

$$p_1^{\frac{15}{16}} v_1 = p_2^{\frac{15}{16}} v_2 = 1{,}7235 \,.\, x,$$

d. h. die Linien gleicher Dampfmenge sind Polytropen. Im besonderen gilt für trockenen Dampf $x = 1$

$$p^{\frac{15}{16}} v'' = 1{,}7235.$$

Diese Formel kann zur Berechnung des Rauminhalts oder der Dichte des trocken gesättigten Dampfes benutzt werden.

Die Linien für $x = 0$ und $x = 1$ heifsen **Grenzkurven,** da sie das Sättigungsgebiet begrenzen.

Die Linien gleicher Dampfmenge werden im pv-, ts- und is-Diagramm (s. S. 317) gezeichnet, indem man die geraden Isothermen zwischen den Grenzkurven in gleiche Teile teilt und entsprechende Punkte verbindet.

4. **Linien gleichen Rauminhaltes:**

$$v = \text{unveränderlich}, \quad v' + x(v'' - v') = \text{unveränderlich}.$$

$$x_1(v_1'' - v_1') = x_2(v_2'' - v_2'); \quad Q = G(u_2' + x_2 \varrho_2 - u_1' - x_1 \varrho_1).$$

C. Ueberhitzter Dampf.

(Unvollkommene Gase.)

1. In der Nähe des Sättigungsgebietes weichen die Gase von den Gesetzen der vollkommenen Gase ab; diese Abweichungen werden am gröfsten in der Nähe des kritischen Punktes. In diesem wird

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \infty \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = \infty \qquad \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = \infty \qquad c_p = \infty .$$

Diesem Verhalten ist besonders bei der Kohlensäure in ihrer Anwendung bei Kältemaschinen Rechnung zu tragen.

2. Für **Wasserdampf** sind im dem technisch in Betracht kommenden Gebiete (Heifsdampfmaschinen) die Abweichungen von den Gasgesetzen nicht sehr beträchtlich.

Zur Berechnung des Rauminhalts, der Entropie, des Wärmeinhalts und der Energie des überhitzten Wasserdampfes dienen die folgenden Formeln:

Rauminhalt: $v = 47 \frac{T}{P} + 0{,}001 - \mathfrak{B}$

Entropie: $s = 0{,}477 \ln T - 0{,}11 \ln p - \mathfrak{S} p - 1{,}0544$

Wärmeinhalt: $i = 594{,}7 + 0{,}477\, t - \mathfrak{J} p$

Energie: $u = 564{,}7 + 0{,}367\, t - 78{,}1\, \mathfrak{B} p.$

Die Hilfsgröfsen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{J}$ sind durch die folgenden Ausdrücke gegeben und können der Tafel V, S. 337 entnommen werden.

$$\mathfrak{B} = 0{,}075 \left(\frac{273}{T}\right)^{\frac{10}{3}}, \quad \mathfrak{S} = \frac{10\,000}{427} \frac{10}{3} \frac{\mathfrak{B}}{T}, \quad \mathfrak{J} = \frac{10\,000}{427} \left(\frac{13}{3} \mathfrak{B} - 0{,}001\right).$$

Zur Berechnung der Ueberhitzungswärme $= i - i''$ zieht man von dem nach obiger Formel berechneten Wert des Wärmeinhaltes des überhitzten Dampfes den dem gegebenen Druck entsprechenden Wert i'' nach Taf. II, S. 335 ab.

Für adiabatische Zustandsänderungen des überhitzten Wasserdampfes folgen aus obigen Formeln die Gleichungen:

$$\frac{p}{T^{\frac{13}{3}}} = \text{Const.}; \quad T (v - 0{,}001)^{0,3} = \text{Const.}; \quad p (v - 0{,}001)^{1,3} = \text{Const.},$$

in den beiden letzten Gleichungen kann das sehr kleine Volumen der Flüssigkeit (0,001) unbedenklich vernachlässigt werden.

D. Anwendung auf die Theorie der Dampfmaschine.

Es bezeichne

p, P den Dampfdruck vor dem Eintritt in die Maschine,
ϑ, Θ die dem Drucke p entsprechende Sättigungstemperatur,
t, T die Temperatur des eintretenden Dampfes bei Ueberhitzung,
x dessen spezifischen Dampfgehalt, wenn nafs,
p_0, P_0 den Gegendruck (Kondensator- oder Auspuffdruck),

ϑ_0, Θ_0 die zugehörige Sättigungstemperatur,
t_0, T_0 die Temperatur des austretenden Dampfes, wenn überhitzt,
x_0 dessen spezifischen Dampfgehalt, wenn nafs.

a. Die aus 1 kg trocken gesättigtem Dampf in der verlustfreien Maschine (d. h. bei vollständiger adiabatischer Expansion von p auf p_0 in einem wärmedichten Zylinder einer reibungsfreien Maschine) **gewinnbare Arbeit** ist

$$AL = i'' - i_0'' + T_0 (s_0'' - s''),$$

für nassen Dampf ist AL um

$$r(1 - x)\left(1 - \frac{T_0}{T}\right)$$

kleiner.

Näherungsformeln:

Für trockenen Dampf, $x = 1$

$$AL = \frac{\lg p - \lg p_0}{6{,}76 - 0{,}9 \lg p_0} 632$$

Für nassen Dampf, $x > 0{,}7$

$$L = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} Pv \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]$$

$$v = v' + x(v'' - v'); \varkappa = 1{,}035 + 0{,}1 x.$$

b. Die aus 1 kg **überhitztem** Dampf in der verlustfreien Maschine gewinnbare Arbeit ist

$$AL = i - i_0'' + \Theta_0 (s_0'' - s),$$

wenn, wie in der Regel:

$$s_0'' \geqq s.$$

i und s sind nach den Formeln S. 340 für den gegebenen überhitzten Dampf zu berechnen, i_0'' und s_0'' beim Druck p_0 aus den Dampftafeln S. 334 zu entnehmen. Ist

$$s_0'' < s,$$

so ist

$$L = \frac{13}{3} Pv \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{3}{13}}\right]$$

oder

$$AL = (i - 464{,}7) \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{3}{13}}\right].$$

c. Der Dampfverbrauch für die Stunde und Pferdestärke in der verlustfreien Maschine ist

$$D = \frac{1}{AL} \frac{75}{427} 60^2 = \frac{632}{AL}.$$

Für trockenen Dampf ergibt sich (s. u. **a.**)

$$D = \frac{6{,}76 - 0{,}9 \lg p_0}{\lg p - \lg p_0}.$$

Am raschesten und bequemsten lassen sich die Arbeit und der Dampfverbrauch von verlustfreien Maschinen mit Hülfe des JS-Diagrammes ermitteln (s. Anm. S. 317).

d. Der **thermische Wirkungsgrad** η_t einer Dampfmaschine ist das Verhältnis der gewonnenen indizierten Arbeit L_i zu der zur Dampferzeugung aufgewendeten Wärme.

Allgemein	Für trockenen Dampf
$\eta_t = \frac{A L_i}{i - t_w}$.	$\eta_t = \frac{A L_i}{i'' - t_w}$.

t_w ist die Speisewasser-Temperatur; soll η_t zum Vergleich verschiedener Maschinen dienen, so ist für t_w stets ein gleicher Normalwert einzuführen, setzt man dafür 25^0 C, so wird angenähert (Fehler meist unter 1 vH), wenn D_i den tatsächlichen Dampfverbrauch für die indizierte Pferdekraftstunde bezeichnet,

für trockenen Dampf	für überhitzten Dampf
$\eta_t = 1 : D_i$	$\eta_t = 1 : D_r$.

D_r bezeichnet den **reduzierten Dampfverbrauch** bei Heifsdampfmaschinen und berechnet sich aus dem tatsächlichen Dampfverbrauch D_i für die indizierte Pferdestärke nach

$$D_r = \frac{i - t_w}{i'' - t_w} D_i .$$

Dieser reduzierte Dampfverbrauch, der den Arbeitswert des überhitzten Dampfes auf trockenen gesättigten Dampf bezogen angibt, ist bei dem Vergleich der Wirtschaftlichkeit von Heifsdampfmaschinen mit gewöhnlichen Dampfmaschinen einzuführen.

Statt des thermischen Wirkungsgrades wird manchmal der **Wärmeverbrauch** W für die Stunde und Pferdestärke angegeben, es ist

$$W = 632 : \eta_t.$$

e. Der **indizierte Wirkungsgrad** η_i stellt das Verhältnis der wirklich gewonnenen indizierten Arbeit zu der Arbeit der verlustfreien Maschine dar; er ist $\eta_i = D : D_i$.

f. Auswertung von Dampfmaschinen-Versuchen.

Für die folgenden Rechnungen mufs aus dem Versuche ermittelt sein: der Dampfverbrauch D_i, die Mittelwerte der Ein- und Austrittsdrücke, die Ueberhitzung oder Feuchtigkeit beim Eintritt, ein mittleres Indikatordiagramm (Abb. 160).

Es bezeichne aufser den S. 332 und 340 genannten Gröfsen

ε_0 das Verhältnis des schädlichen Raumes zum Hubraume,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . . . das Verhältnis der vom Kolben bis zu den betreffenden Punkten durchlaufenen Räume zum Hubraume,

p_i den mittleren Druck des Diagramms,

p_I, p_{II} . . . denselben für die einzelnen Zylinder bei mehrfacher Expansion,

N_i die gesamte indizierte Leistung in PS,

N_I, N_{II} . . . die indizierte Leistung der einzelnen Zylinder,

φ das Verhältnis des in den Zylinder gelangten Dampfgewichtes zum ganzen verbrauchten Dampfgewicht (Zylinder + Mantel),

φ_I, φ_{II} . . . das Verhältnis der in die einzelnen Zylinder einer mehrstufigen Maschine eintretenden Dampfgewichte zum ganzen verbrauchten Dampfgewicht.

$\mu, \mu_{I}, \mu_{II} \ldots$ das Verhältnis der in den einzelnen Zylindermänteln niedergeschlagenen Dampfgewichte zum ganzen verbrauchten Dampfgewicht. Für Einzylindermaschinen ist

$$\varphi = 1 - \mu.$$

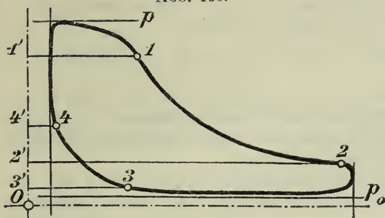


Abb. 160.

1. Das Gewicht der im schädlichen Raum abgesperrten Dampfmenge (m) im Verhältnis zu der während des Spiels gebrauchten Dampfmenge berechnet sich zu

$$m = \frac{27\,(\varepsilon_0 + \varepsilon_3)}{p_i\, D_i\, v_3}.$$

Für Mehrzylindermaschinen ist für die einzelnen Zylinder zu setzen

$$p_{I},\ p_{II} \ldots \text{ statt } p_i \quad \text{und} \quad D_i \frac{N_i}{N_{I}},\ D_i \frac{N_i}{N_{II}} \ldots \text{ statt } D_i.$$

An die Stelle von ε_3 und v_3 kann auch ε_4 und v_4 oder jeder beliebige Punkt der Kompressionslinie treten. Der Zustand des abgesperrten Dampfes und damit v_3 und v_4 können nicht genau ermittelt werden, doch ist der Einflufs dieser Unsicherheit, die sich durch die folgenden Rechnungen zieht, meist gering.

Man nimmt für gewöhnliche Fälle den Dampf im Punkte 3 trocken an. Dann wird

$$m = \frac{27\,(\varepsilon_0 + \varepsilon_3)\,\gamma_3''}{p_i\, D_i}.$$

Da sich die Werte von γ bei niedrigen Drücken rasch ändern und die Interpolation schwierig wird, schreibt sich die Formel für m bequemer

$$m = \frac{632\,(\varepsilon_0 + \varepsilon_3)\,p_3}{p_i\, D_i\, \psi_3}.$$

ψ und γ'' s. Tafel S. 334 bis 337.

In Fällen, wo der Dampf den Zylinder überhitzt verläfst, ist $t_3 = t_0$ zu setzen und nach der später folgenden Gleichung zu berechnen. Damit ist dann v_3 bestimmt.

2. Berechnung des Dampfzustandes während der Expansion.

Für einen beliebigen Punkt der Expansionslinie gilt für Einzylindermaschinen mit oder ohne Mantel, mit oder ohne Ueberhitzung

$$x_e = \frac{27\,(\varepsilon_0 + \varepsilon_e)\,\gamma_e}{D_i p_i\,(\varphi + m)} \quad \text{oder} \quad x_e = \frac{632\,(\varepsilon_0 + \varepsilon_e)\,p_e}{D_i p_i\,(\varphi + m)\,\psi_e}.$$

Für Mehrzylindermaschinen ist in vorstehenden Formeln wie oben

$$p_{I},\ p_{II} \ldots,\ D_i \frac{N_i}{N_{I}} \ldots \text{ sowie } \varphi_{I},\ \varphi_{II} \ldots \text{ statt } \varphi \text{ einzuführen.}$$

Wird der für x_e erhaltene Wert gröfser als 1, so berechnet sich der spez. Rauminhalt des überhitzten Dampfes zu

$$v = x\, v''$$

und damit aus Formel S. 340 die Temperatur.

3. Zustand des austretenden Dampfes.

Der Wärmeinhalt des eintretenden Dampfes ist für gesättigten bzw. überhitzten Dampf

$$i = i' + xr \quad \text{bzw.} \quad i = 594{,}7 + 0{,}477\,t - \mathfrak{J}p$$

und derjenige des austretenden Dampfes

$$i_0 = i_0' + x_0 r_0 \quad \text{bzw.} \quad i_0 = 594{,}7 + 0{,}477\,t_0 - \mathfrak{J}p_0.$$

Werte von $\mathfrak{J}$ s. Taf. S. 338.

Bezeichnet

$\Sigma(\mu i')$ den Wärmeinhalt sämtlicher Kondensationswasser,
$(\mu i')_I$ ... den Wärmeinhalt für den Mantel eines einzelnen Zylinders,
S, S_I ... die durch Ausstrahlung verlorene,
K, K_I ... die durch Kolbenreibung erzeugte Wärme für 1 kg verbrauchten Dampf, für die ganze Maschine bzw. einen einzelnen Zylinder,

so ist **für Einzylindermaschinen**

$$(1 - \mu)\, i_0 = i - \mu i' - \frac{632}{D_i} - S + K.$$

Aus dieser Gleichung berechnet sich i_0 und damit aus einer der vorstehenden Gleichungen x_0 oder t_0;

für Mehrzylindermaschinen

Hochdruck-Zylinder:

$$\varphi_I i_0 = i(\varphi_I + \mu_I) - (\mu i')_I - \frac{N_I}{N_i}\frac{632}{D_i} - S_I + K_I.$$

Niederdruck-Zylinder:

$$\varphi i_0 = i - \Sigma(\mu i') - \frac{632}{D_i} - S + K.$$

Entsprechende Formeln gelten für Mitteldruck-Zylinder unter Berücksichtigung der Art der Mantelheizung.

4. Wärmeaustausch zwischen Dampf und Zylinderwand.

(Kalorimetrische Untersuchung.)

Alle Wärmemengen sind für 1 kg des von der Maschine gebrauchten Dampfes gerechnet.

Wünscht man die Wärmemengen auf einen Hub zu beziehen, so sind sie mit der für den Hub gebrauchten Dampfmenge $\left(\frac{D_i N_i}{2 \cdot 60 \cdot n}\right)$ zu multiplizieren.

Zunächst sind aus dem Indikatordiagramm die mittleren Drücke (auf die Diagrammlänge bezogen) der Flächen 411'4'4, 122'1'1 (Abb. 9 S. 343) usw. durch Planimetrieren zu ermitteln, sie seien p_{41}, p_{12}, p_{23}, p_{34}.

Die von dem Dampf in den vier Abschnitten aufgenommenen oder abgegebenen Wärmemengen berechnen sich nun, wie folgt:

1. Eintritt: $Q_{41} = (q + m)\, i_1 - q\, i - m i_4 + \frac{p_{41}}{pi} \frac{632}{Di}$

2. Expansion: $Q_{12} = (q + m)\,(i_2 - i_1) + \frac{p_{12}}{pi} \frac{632}{Di}$

3. Kompression: $Q_{34} = m\,(i_4 - i_3) + \frac{p_{34}}{pi} \frac{632}{Di}$

4. Austritt: $Q_{23} = \varphi\, i_0 + m i_3 - (q + m)\, i_2 + \frac{p_{23}}{pi} \frac{632}{Di}$.

Ist die Wärmemenge Q_0, die 1 kg Dampf im Kondensator an das Kühlwasser abgibt, sowie die Temperatur t_l des Kondensates durch Versuch bestimmt, so ist $i_0 = Q_0 + t_l$.

Tritt der Dampf überhitzt aus der Maschine aus mit der Temperatur t_0, die gemessen sei, so ist damit der entsprechende Wärmeinhalt i_0 bestimmt.

Endlich kann Q_{23} noch bestimmt werden aus der Gleichung

$$Q_{41} + Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} = \mu\,(i - i') - S + K.$$

Die vorstehenden Formeln gelten für Einzylindermaschinen, u. zw. für Betrieb mit gesättigtem wie mit überhitztem Dampf. Sollen sie auf Mehrzylindermaschinen Anwendung finden, so ist Folgendes zu beachten:

Für die Zylinder, die aus den Aufnehmern gespeist werden, ist statt i der entsprechende Wert einzuführen; φ ist durch φ_I, φ_{II} . . . zu ersetzen; $\frac{632}{Di}$ ist stets mit $\frac{N_I}{N_i}$, $\frac{N_{II}}{N_i}$ . . . zu multiplizieren. In der Gleichung, welche die Summe der vier Wärmemengen enthält, bezieht sich μ nur auf den Mantel des betrachteten Zylinders und an Stelle von S, K tritt S_I, K_I . . .

E. Anwendung auf die Theorie der Kältemaschinen.

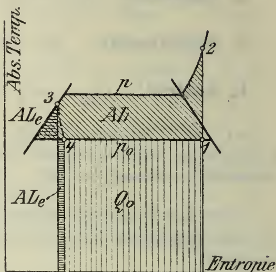
(Kaltdampfmaschinen.)

1. Die Kältemaschinen bestehen im wesentlichen aus dem Kompressor, dem Verdampfer und dem Kondensator. Die letztgenannten beiden werden durch Rohrschlangen gebildet, in denen die Arbeitsflüssigkeit, meist Kohlensäure, Ammoniak oder schweflige Säure umläuft. Die Kondensatorrohre werden äufserlich von Kühlwasser, die des Verdampfers von dem Kühlmittel (meist einer Salzlösung)*) umspült. Der Prozefs der Maschinen spielt sich zwischen zwei von der Spannungskurve des verwendeten Dampfes abhängigen Drücken ab: dem Verdampferdruck p_0 und dem Kondensatordruck p. Ersterer ist wesentlich bestimmt durch die Temperatur, auf der das Kühlmittel erhalten werden soll, letzterer durch die Temperatur und Menge des Kühlwassers. In gewöhnlichen Fällen liegen die zu p_0 und p gehörigen Sättigungstemperaturen ϑ_0 und ϑ nur sehr wenig unter oder über den Ablauftemperaturen des Salz- und Kühlwassers.

*) Spezifische Wärme von Kochsalzlösungen s. S. 301.

2. Abb. 161 stellt den Prozefs im Wärmediagramm (s. S. 317) dar. Der Kompressor saugt aus dem Verdampfer trockenen oder wenig feuchten Dampf an (Zustand 1 Abb. 161 Punkt 1), komprimiert denselben adiabatisch auf den Zustand 2 (Punkt 2) und drückt ihn in den Kondensator. Daselbst wird der durch die Kompression überhitzte oder getrocknete Dampf unter Abgabe der Wärme Q an das Kühlwasser vollständig verflüssigt (Linie 2 3) und gelangt im Zustand 3 mit einer Temperatur t_3 zum **Regulierventil** (Drosselventil) und durch dieses in den Verdampfer zurück (Punkt 4). Beim Durchströmen des Regulierventils verdampft ein kleiner Teil der Flüssigkeit (Zustand 4), der Rest wird vollständig oder doch fast vollständig im Verdampfer verdampft (Linie 41), indem Wärme von der Salzlösung an den Arbeitsdampf übergeht. Diese der Salzlösung entzogene Wärme Q_0 ist die erstrebte **Kälteleistung.**

Abb. 161.



Bezeichnet man die Kompressorarbeit in WE mit AL, so hat man die Hauptbeziehung

$$Q = Q_0 + AL.$$

3. Entscheidend für die Wirtschaftlichkeit einer Kältemaschine ist das Verhältnis der erzeugten Kälte Q_0 zu dem Arbeitsaufwande AL, es heifst die **Leistungsziffer** der Maschine

$$\varepsilon = \frac{Q_0}{AL}.$$

Anstatt der Leistungsziffer gibt man häufig die Kälteleistung K für die Stunde und Pferdestärke an. Es ist

$$K = 632\,\varepsilon.$$

Die Leistungsziffer ist wesentlich von den Temperaturen von Salz- und Kühlwasser und den hierdurch bedingten Drücken abhängig.

Die Anwendung des Regulierventils verursacht infolge des nicht umkehrbaren Durchströmungsprozesses einen Leistungsverlust. Die Arbeit AL_e, welche die gespannte Flüssigkeit in einem besonderen Expansionszylinder leisten könnte, geht verloren, und aufserdem wird noch die Kälteleistung um den gleichen Betrag vermindert, da die Flüssigkeit die nicht abgegebene Arbeit AL_e als Wärme in den Verdampfer mitbringt. Der **Leistungsverlust** durch das Regulierventil ist daher, wenn $\varepsilon' = \dfrac{Q_0 + AL_e}{AL - AL_e}$ die Leistungsziffer mit Expansionszylinder bedeutet,

$$\zeta = \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{AL_e}{AL}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon'}\right).$$

Bei Anwendung eines Expansionszylinders wäre der Prozefs ein Carnotscher, solange ohne Ueberhitzung (nafs) und ohne Unterkühlung gearbeitet wird; in diesem Fall ist

$$\varepsilon' = \frac{T_0}{T - T_0} \text{ und } \zeta = \frac{A L_e}{A L} \frac{T}{T_0}.$$

Da bei gegebenen Temperaturen AL_e nur von der Gröfse der spezifischen Wärme des Arbeitstoffes in flüssigem Zustande abhängt und AL mit der Verdampfungswärme wächst, so wird ζ um so ungünstiger sein, je gröfser die Flüssigkeitswärme und je kleiner die Verdampfungswärme des Stoffes ist; im allgemeinen also ungünstig in der Nähe des kritischen Punktes.

Für Ammoniak und schweflige Säure beträgt je nach den Temperaturen $\zeta = 0{,}04$ bis $0{,}08$; für Kohlensäure liegt ζ etwa zwischen 0,15 und 0,40.

Aufser den genannten physikalischen Eigenschaften des Arbeitstoffes sind, wie schon angedeutet, die Temperaturen von Einflufs auf ζ. Im besonderen kann der Verlust verringert werden, wenn man die Temperatur vor dem Regulierventil t_3 möglichst tief hält. Dies ist besonders bei Kohlensäure von Wichtigkeit und wird durch besondere Flüssigkeitskühler erreicht.

4. Die **Kompressorarbeit** AL einer verlustfreien Maschine.

Allgemein ist für 1 kg:

$$AL = i_2 - i_1$$

wobei

$$s_2 = s_1.$$

a) Es wird trockener Dampf angesaugt:

$$AL = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} A P_0 v_0'' \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - 1 \right],$$

es kann gesetzt werden

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = 4, \quad \varkappa = \frac{4}{3} \text{ für } NH_3$$

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = 5, \quad \varkappa = 1{,}25 \text{ für } SO_2.$$

b) Der Dampf ist am Ende der adiabatischen Kompression gerade trocken:

$$AL = i'' - i_0'' + \Theta_0 (s_0'' - s'').$$

Benutzung der Tafeln S. 350.

5. **Die im Kondensator abgegebene Wärme** Q**:**

$$Q = i_2 - i_3.$$

i_3 ist unter i' den Dampftabellen zu entnehmen. i ev. aus:

$$i = i_1 + AL.$$

6. **Durchgang durch das Regulierventil:**

$$i_3 = i_4; \quad i_3 = i_0' + x_4 r_0, \text{ daraus } x_4.$$

7. **Kälteleistung** Q_0**:**

$$Q_0 = i_1 - i_4 = i_1 - i_3; \quad i_1 = i_0' + x_1 r_0.$$

Wärmebilanz des Kreislaufes: $Q = Q_0 + AL$.

Für Kohlensäure ist Formel a) wegen der Nähe des kritischen Punktes unzulässig. Die Tafel S. 353 gibt für diesen Dampf die Kompressorarbeit und die durch die Kompression erzeugte Temperatur t (Ueberhitzungstemperatur) nach zeichnerischer Ermittlung mit Hülfe des JS-Diagramms (s. Anm. S. 317).

8. **Bemerkungen zu den Tafeln** S. 350 bis 355.

Die Tafeln S. 350 bis 352 geben für schweflige Säure, Ammoniak und Kohlensäure die wichtigsten physikalischen Gröfsen des Sättigungsgebietes.

In den Tafeln S. 353 bis 355 geben die oberen Zahlen die Kälteleistungen von verlustfreien Maschinen in WE für 1 Stunde und 1 PS; sie sind unter der Annahme berechnet, dafs trockener Dampf angesaugt wird. Die Drücke $p = 9$ für Ammoniak und $p = 60$ für Kohlensäure entsprechen etwa normalen Kühlwasserverhältnissen, während die einander entsprechenden Drücke $p = 13$ und $p = 80$ bei Kühlwassermangel oder sehr warmem Kühlwasser vorkommen. Um zu zeigen, dafs Kohlensäuremaschinen auch bei Kondensatordrücken arbeiten können, die weit über dem kritischen liegen, ist noch der Druck $p = 100$ und für Ammoniak ungefähr entsprechend $p = 17$ aufgenommen.

Rauminhalt von 1 kg Kohlensäure in Kubikdecimeter von — 20°

(Nach Amagats

°C.	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
— 20	19,50	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
— 15	20,35	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99
— 10	21,15	15,85	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01
— 5	21,90	16,55	12,45	1,07	1,06	1,06	1,05	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03
0	22,65	17,20	13,15	10,60	1,09	1,09	1,08	1,08	1,07	1,07	1,06	1,06	1,05
5	23,35	17,80	13,80	11,20	8,90	1,12	1,12	1,11	1,11	1,10	1,09	1,09	1,08
10	24,05	18,40	14,40	11,70	9,40	7,50	1,17	1,16	1,15	1,14	1,13	1,13	1,12
15	24,70	18,95	14,95	12,20	9,90	8,25	6,95	1,22	1,21	1,20	1,19	1,18	1,17
20	25,30	19,50	15,50	12,65	10,45	8,75	7,45	6,05	1,29	1,28	1,26	1,24	1,23
25	25,90	20,00	16,00	13,10	10,95	9,20	7,90	6,65	5,59	4,20	1,38	1,34	1,31
30	26,50	20,50	16,50	13,55	11,40	9,60	8,35	7,15	6,10	5,10	3,97	1,58	1,48
35	27,10	21,00	17,00	14,00	11,80	10,00	8,80	7,60	6,52	5,59	4,70	3,90	2,68
40	27,70	21,49	17,45	14,40	12,20	10,40	9,20	7,95	6,90	6,03	5,27	4,71	3,80
45	28,30	21,98	17,90	14,80	12,60	10,80	9,55	8,30	7,25	6,40	5,75	4,95	4,36
50	28,85	22,47	18,35	15,20	13,00	11,20	9,90	8,65	7,60	6,76	6,06	5,32	4,76
55	—	22,96	18,80	15,60	13,40	11,50	10,25	9,00	7,90	7,08	6,36	5,66	5,10
60	—	23,45	19,25	16,00	13,80	11,80	10.55	9,30	8,25	7,35	6,64	5,97	5,40
65	—	23,94	19,65	16,40	14,15	12,10	10,85	9,60	8,50	7,62	6,90	6,27	5,68
70	—	24,43	20,05	16,80	14,50	12,40	11,10	9,90	8,80	7,90	7,16	6,55	5,94
75	—	24,92	20,45	17,20	14,80	12,70	11,40	10,20	9,10	8,20	7,40	6,79	6,19
80	—	25,42	20,85	17,58	15,10	13,00	11,70	10,45	9,40	8,48	7,63	7,03	6,44
85	—	25,91	21,25	17,95	15,45	13,30	11,95	10,75	9,65	8,74	7,88	7,24	6,66
90	—	26,40	21,65	18,30	15,75	13,60	12,20	11,00	9,90	8,98	8,12	7,45	6,87
95	—	26,89	22,00	18,65	16,05	13,90	12,45	11,25	10,15	9,21	8,36	7,67	7,08
100	—	27,38	22,40	19,00	16,35	14,20	12,70	11,50	10,40	9,43	8,60	7,88	7,30
105	—	—	22,75	19,35	16,65	14,50	12,95	11,75	10,65	9,65	8,80	8,10	7,49
110	—	—	23,15	19,70	16,95	14,80	13,20	12,00	10,85	9,87	9,00	8,32	7,66
115	—	—	23.50	20,05	17,25	15,05	13,45	12,20	11,10	10,10	9,20	8,50	7,85
120	—	—	23,85	20,35	17,55	15,35	13,70	12,40	11,30	10,30	9,40	8,69	8,04
125	—	—	24,20	20,65	17,80	15,65	13,95	12,60	11,50	10,50	9,60	8,83	8,23
130	—	—	24,50	20,95	18,05	15,90	14,20	12,80	11,70	10,70	9,75	9,00	8,43
135	—	—	24,80	21,25	18,30	16,15	14,45	13,00	11,90	10,90	9,95	9,17	8,60
140	—	—	25.10	21,55	18,55	16,45	14,70	13,20	12,10	11,10	10,10	9,34	8,75
145	—	—	25,40	21,80	18,80	16,70	14,95	13,40	12,25	11,25	10,25	9,47	8,88
150	—	—	25,70	22,05	19,00	16,95	15,20	13,60	12,40	11,35	10,40	9,60	9,00

In denselben Tafeln stellen die unteren Ziffern das Verhältnis der Kälteleistung bei der gegebenen Flüssigkeitstemperatur t' zu jener bei $t' = t_0$ dar. Da im letzteren Falle, d. h. beim Abkühlen bis zur Verdampfertemperatur, der Verlust durch das Ueberströmen und der Einflufs der besonderen physikalischen Eigenschaften des Arbeitsstoffes wegfällt, so ermöglichen diese Tafelwerte einen völlig unabhängigen Vergleich der Leistungsfähigkeit der beiden Maschinen für die verschiedensten Arbeitsverhältnisse. Zieht man die genannten Ziffern von 1 ab, so erhält man die spez. Dampfmenge x_4 nach Eintritt in den Verdampfer.

Schwefligsäuremaschinen haben bei gleichen Sättigungstemperaturen im Kondensator angenähert dieselbe theoretische Leistung wie Ammoniakmaschinen. Den drei Kondensatordrücken der Tafeln würden hier etwa die Drücke $p = 3{,}5$, $5{,}0$ und $6{,}5$ entsprechen.

bis + 150° C und von 20 bis 150 at absolutem Druck.

Versuchen.)

85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150 at
0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96
0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97
1,01	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
1,02	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99
1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,00
1,08	1,07	1,07	1,06	1,06	1,05	1,05	1,04	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02
1,11	1,11	1,10	1,09	1,09	1,08	1,08	1,07	1,07	1,06	1,06	1,05	1,05	1,04
1,16	1,15	1,14	1,13	1,13	1,12	1,11	1,11	1,10	1,09	1,09	1,08	1,08	1,07
1,22	1,20	1,19	1,18	1,17	1,16	1,15	1,15	1,14	1,13	1,13	1,12	1,11	1,10
1,29	1,27	1,26	1,24	1,23	1,22	1,21	1,20	1,19	1,18	1,17	1,16	1,15	1,14
1,41	1,38	1,35	1,32	1,30	1,29	1,27	1,26	1,24	1,23	1,22	1,21	1,20	1,19
1,71	1,58	1,51	1,45	1,40	1,37	1,35	1,33	1,31	1,30	1,28	1,27	1,26	1,25
2,99	2,29	1,80	1,67	1,57	1,51	1,47	1,43	1,39	1,37	1,35	1,33	1,32	1,31
3,67	3,07	2,61	2,19	1,86	1,72	1,64	1,58	1,52	1,48	1,45	1,42	1,40	1,38
4,17	3,65	3,19	2,76	2,38	2,09	1,88	1,77	1,67	1,62	1,57	1,53	1,49	1,46
4,53	4,09	3,62	3,20	2,82	2,55	2,30	2,05	1,90	1,81	1,73	1,67	1,62	1,58
4,85	4,44	3,99	3,56	3,20	2,91	2,68	2,45	2,22	2,04	1,92	1,84	1,77	1,71
5,15	4,72	4,29	3,92	3,53	3,25	2,97	2,75	2,54	2,35	2,29	2,04	1,95	1,86
5,43	4,99	4,56	4,21	3,84	3,52	3,25	3,02	2,80	2,62	2,45	2,29	2,16	2,03
5,68	5,23	4,81	4,45	4,10	3,80	3,50	3,26	3,04	2,86	2,69	2,52	2,38	2,24
5,93	5,47	5,06	4,69	4,34	4,03	3,74	3,48	3,26	3,06	2,90	2,74	2,59	2,44
6,18	5,70	5,28	4,90	4,56	4,25	3,96	3,70	3,47	3,27	3,09	2,92	2,77	2,62
6,39	5.90	5.48	5,10	4,76	4,45	4,18	3,92	3,67	3,47	3,28	3,10	2,95	2,80
6,60	6,12	5,68	5,30	5,00	4,64	4,37	4,10	3,86	3,65	3,46	3,27	3,11	2,97
6,80	6,32	5,86	5,50	5,14	4,83	4,54	4,29	4,05	3,83	3,63	3,44	3,28	3,13
7,00	6,51	6,05	5,68	5,33	5,01	4,71	4,48	4,22	4,00	3,80	3,60	3,49	3,29
7,19	6,69	6,23	5,85	5,50	5,19	4.88	4,64	4,40	4,16	3.95	3,75	3,57	3,44
7,37	6,90	6,41	6,03	5.67	5,35	5,04	4,80	4,55	4,32	4,11	3,90	3,74	3,58
7,54	7,06	6,58	6,20	5.84	5,52	5,20	4,94	4,70	4,48	4,26	4,04	3,88	3,72
7,76	7,20	6,74	6,36	6,00	5,67	5,34	5,08	4,84	4,62	4,40	4,18	4,00	3,84
7,87	7,36	6,90	6,51	6,16	5,82	5,47	5,20	4,96	4,76	4,54	4,30	4,12	3.96
8,04	7,52	7,05	6,65	6,36	5,96	5,61	5,32	5,08	4,88	4,64	4,42	4,22	4,06
8,20	7,68	7,20	6,80	6,46	6,10	5,73	5,44	5,20	5,00	4,76	4,52	4,33	4,16
8,34	7,84	7,35	6,94	6,59	6,23	5,85	5,55	5,32	5,12	4,86	4,61	4,41	4,24
8,48	8,00	7,50	7,08	6,71	6,35	5,98	5,65	5,42	5,22	4,95	4,69	4,50	4,32

Tafel für gesättigte Dämpfe der schwefligen Säure (s. S. 348).

(Berechnet nach Versuchen von Cailletet & Mathias.)

Temperatur t (°C)	Druck in at (kg/qcm) (absolut) p	v'' cbm/kg	Spezifisches Gewicht γ (kg/cbm)	Wärmeinhalt der Flüssigkeit i'	Wärmeinhalt des Dampfes i''	Verdampfungswärme r	Verdampfungswärme innere ϱ	Verdampfungswärme äufsere ψ	Entropie der Flüssigkeit s'	Entropie des Dampfes s''	$\frac{r}{T}$
— 30	0,39	0,822	1,217	— 9,05	88,72	97,77	90,27	7,50	— 0,0351	0,3672	0,4023
— 25	0,51	0,643	1,556	— 7,62	89,28	96,91	89,24	7,67	— 0,0293	0,3614	0,3907
— 20	0,65	0,513	1,950	— 6,15	89,77	95,92	88,12	7,80	— 0,0234	0,3557	0,3791
— 15	0,83	0,416	2,406	— 4,66	90,16	94,82	86,90	7,92	— 0,0176	0,3499	0,3675
— 10	1,04	0,330	3,024	— 3,14	90,46	93,60	85,57	8,03	— 0,0117	0,3442	0,3559
— 5	1,29	0,270	3,708	— 1,58	90,69	92,27	84,15	8,12	— 0,0059	0,3385	0,3443
0	1,58	0,223	4,490	0	90,82	90,82	82,62	8,20	0,0000	0,3327	0,3327
+ 5	1,93	0,184	5,443	+ 1,61	90,86	89,25	80,99	8,26	+ 0,0059	0,3269	0,3210
+ 10	2,34	0,152	6,592	+ 3,25	90,81	87,56	79,28	8,28	+ 0,0117	0,3212	0,3094
+ 15	2,81	0,127	7,893	+ 4,92	90,68	85,76	77,46	8,30	+ 0,0176	0,3154	0,2978
+ 20	3,35	0,107	9,372	+ 6,62	90,47	83,85	75,55	8,30	+ 0,0234	0,3096	0,2862
+ 25	3,96	0,090	11,148	+ 8,35	90,17	81,82	73,54	8,28	+ 0,0293	0,3039	0,2746
+ 30	4,67	0,076	13,210	+ 10,11	89,78	79,67	71,44	8,23	+ 0,0351	0,2981	0,2629
+ 35	5,46	0,065	15,456	+ 11,90	89,30	77,40	69,24	8,16	+ 0,0410	0,2923	0,2513
+ 40	6,35	0,055	18,282	+ 13,71	88,74	75,03	66,95	8,08	+ 0,0468	0,2865	0,2397

$c = 0,3194 + 0,00117\,t$ | $\frac{r}{T} = 0,3327 - 0,002324\,t$

$q = 0,3194\,t + 0,000585\,t^2$

$s' = 0,00117\,t$ | $v' = 0,0007.$

Tafel für gesättigten Ammoniakdampf (s. S. 348).

(Berechnet nach Versuchen von Dieterici und Wobsa.)

Temperatur t (°C)	Druck in at (kg qcm) (absolut) p	Rauminhalt (cbm/kg) v''	Spezifisches Gewicht γ''	Wärmeinhalt der Flüssigkeit i'	Wärmeinhalt des Dampfes i''	Verdampfungswärme ganze r	Verdampfungswärme innere ϱ	Verdampfungswärme äußere ψ	Entropie der Flüssigkeit s'	Entropie des Dampfes s''	Differenz $\frac{r}{T}$
— 30	1,192	0,9857	1,013	— 32,72	295,2	327,9	300,4	27,52	— 0,1265	1,2234	1,3499
— 25	1,512	0,7896	1,266	— 27,40	297,0	324,4	296,5	27,90	— 0,1048	1,2039	1,3087
— 20	1,900	0,6373	1,570	— 22,03	298,7	320,8	292,5	28,30	— 0,0835	1,1850	1,2685
— 15	2,367	0,5180	1,928	— 16,61	300,3	317,0	288,4	28,62	— 0,0622	1,1678	1,2300
— 10	2,923	0,4247	2,355	— 11,13	301,9	313,0	284,0	28,95	— 0,0414	1,1490	1,1904
— 5	3,579	0,3505	2,853	— 5,59	303,3	308,8	279,5	29,24	— 0,0206	1,1315	1,1521
0	4,347	0,2914	3,432	0	304,4	304,4	274,9	29,50	0	1,1158	1,1158
+ 5	5,242	0,2439	4,103	+ 5,65	305,5	299,9	270,2	29,73	+ 0,0205	1,0998	1,0793
+ 10	6,271	0,2051	4,874	+ 11,35	306,6	295,0	265,1	29,89	+ 0,0405	1,0825	1,0420
+ 15	7,451	0,1735	5,762	+ 17,13	307,2	290,0	260,0	30,01	+ 0,0607	1,0670	1,0063
+ 20	8,792	0,1479	6,768	+ 22,95	307,7	284,7	254,6	30,11	+ 0,0805	1,0513	0,9708
+ 25	10,308	0,1265	7,910	+ 28,84	308,1	279,1	249,0	30,14	+ 0,1003	1,0363	0,9360
+ 30	12,009	0,1087	9,205	+ 34,79	308,3	273,5	243,4	30,08	+ 0,1207	1,0213	0,9006
+ 35	13,906	0,0939	10,655	+ 40,80	308,3	267,4	237,4	30,03	+ 0,1392	1,0077	0,8685
+ 40	16,011	0,0814	12,289	+ 46,87	308,0	261,0	231,1	29,85	+ 0,1583	0,9922	0,8338

Tafel für gesättigte Dämpfe der Kohlensäure (s. S. 348).
(Berechnet nach Versuchen von Amagat.)

Temperatur t (°C)	Druck in at (kg/qcm) (absolut) p	Rauminhalt der Flüssigk. v' cbm/kg	Rauminhalt des Dampfes v'' cbm/kg	Spezifisches Gewicht γ (kg/cbm)	Wärmeinhalt der Flüssigkeit i'	Wärmeinhalt des Dampfes i''	Verdampfungswärme r	Verdampfungswärme innere ϱ	Verdampfungswärme äußere ψ	Entropie der Flüssigkeit s'	Entropie des Dampfes s''	$\frac{r}{T}$
−30	15,0	0,00097	0,02697	37,1	−14,29	55,78	70,07	60,96	9,11	−0,0533	0,2350	0,2883
−25	17,5	0,00098	0,02292	43,7	−12,15	56,00	68,15	59,16	8,99	−0,0448	0,2300	0,2748
−20	20,3	0,00100	0,01954	51,2	−9,93	56,11	66,04	57,21	8,83	−0,0363	0,2248	0,2611
−15	23,5	0,00102	0,01668	59,9	−7,63	56,10	63,73	55,10	8,63	−0,0276	0,2194	0,2470
−10	27,1	0,00104	0,01426	70,1	−5,21	55,97	61,18	52,80	8,38	−0,0186	0,2140	0,2326
−5	31,0	0,00107	0,01218	82,1	−2,68	55,68	58,36	50,27	8,08	−0,0095	0,2083	0,2178
0	35,4	0,00110	0,01041	96,2	0	55,19	55,19	47,47	7,72	0	0,2021	0,2021
+5	40,3	0,00113	0,00887	112,7	+2,87	54,49	51,62	44,31	7,31	+0,0099	0,1956	0,1857
+10	45,7	0,00117	0,00752	133,0	+5,98	53,50	47,52	40,73	6,79	+0,0205	0,1884	0,1679
+15	51,6	0,00123	0,00630	158,7	+9,45	52,14	42,69	36,53	6,16	+0,0321	0,1803	0,1482
+20	58,1	0,00131	0,00524	191	+13,45	50,20	36,75	31,41	5,34	+0,0452	0,1707	0,1255
+25	65,4	0,00142	0,00419	238	+18,44	47,28	28,84	24,60	4,24	+0,0613	0,1581	0,0968
+30	73,1	0,00167	0,00296	338	+26,39	41,32	14,93	12,72	2,21	+0,0868	0,1361	0,0493
+31	74,7	0,00186	0,00257	389	+29,87	38,23	8,36	7,12	1,24	+0,0981	0,1256	0,0275
+31,35	75,3	0,00216	0,00216	464	+34,14	34,14	0	0	0	+0,1120	0,1120	0

$$p = C\left(\frac{T}{100} - 1\right)^{4,525} \qquad \lg C = 0,47237$$

$$r = 1,125\, T^{0,43}\,(304,35 - T)^{0,43}$$

$$c = 0,000333\, T + 0,285\,\frac{r}{T} + 0,215\,\frac{r}{304,35 - T}$$

$$s' = 0,10155 + 0,000333\, t - \frac{1}{2}\,\frac{r}{T}\,.$$

Die in den Tafeln gegebenen Kälteleistungen werden von ausgeführten Maschinen wegen der eintretenden Verluste (Wandungswirkung, Ventilwiderstände, Wärmeeinstrahlung) nicht erreicht, doch darf man bei guten Maschinen auf 75 bis 85 vH der theoretischen Tafelwerte rechnen. Ueber Drosselungsverluste s. S. 369 u. f.

Adiabatische Kompression von trocken gesättigten Kohlensäuredämpfen (s. S. 348).

p in at =		60	70	80	90	100
$t_0 = -30^0$	AL	15,15	17,18	19,00	20,63	22,14
	t	72,0	86,5	99,0	111,0	122,0
$= -25^0$	AL	13,19	15,14	16,90	18,47	19,92
	t	67,0	80,5	93,0	105,0	115,5
$= -20^0$	AL	11,30	13.18	14,87	16,39	17,78
	t	62,0	75,0	87,5	99,0	109,0
$= -15^0$	AL	9.53	11,32	12,95	14.40	15,75
	t	57,0	70,0	82,0	93,0	103,0
$= -10^0$	AL	7,86	9,55	11,13	12,54	13,84
	t	52,0	65,0	76,5	87,0	97,5
$= -5^0$	AL	6,31	7,90	9,42	10,77	12,01
	t	47,0	60,0	71,0	81,0	92,0
$= 0^0$	AL	4.85	6,30	7,76	9,07	10,25
	t	42,0	55,0	66,0	76,0	86,5

p = Enddruck der Kompression, t_0 = Anfangstemperatur,
t = Endtemperatur, AL = Kompressorarbeit für 1 kg Kohlensäure.

Tafel für Rauminhalt von 1 kg Kohlensäure bei -20^0 bis $+150^0$ C und 20 bis 150 at s. S. 348 und 349.

Kälteleistung in WE für eine Stunde und Pferdestärke (s. S. 348).

Verdampfer-Temperatur t_0 =		−5	−10	−15	−20	−25

A. Ammoniakmaschine.

Kondensatordruck $p = 9$ at

Temperatur vor dem Regulierventil t' =	t_0	6473 1,00	5277 1,00	4432 1,00	3779 1,00	3276 1,00
	10	6118 0,95	4898 0,93	4041 0,91	3386 0,90	2884 0,88
	15	5997 0.93	4800 0,91	3960 0.89	3318 0,88	2826 0,86
	20	5875 0,91	4702 0,89	3879 0,88	3249 0,86	2767 0,85

Verdampfer-Temperatur $t_0 =$		— 5	— 10	— 15	— 20	— 25
Kondensatordruck $p = 13$ at						
Temperatur vor dem Regulierventil $t' =$	t_0	4400 1,00	3794 1,00	3305 1,00	2909 1,00	2586 1,00
	10	4159 0,95	3522 0,93	3013 0,91	2607 0,90	2277 0,88
	15	4077 0,93	3452 0,91	2953 0,89	2554 0,88	2231 0,86
	20	3994 0,91	3381 0,89	2893 0,88	2501 0,86	2185 0,85
	25	3910 0,89	3310 0,87	2831 0,86	2448 0,84	2138 0,83
	30	3825 0,87	3238 0,85	2769 0,84	2394 0,82	2090 0,81
Kondensatordruck $p = 17$ at						
Temperatur vor dem Regulierventil $t' =$	t_0	3522 1,00	3101 1,00	2755 1,00	2459 1,00	2215 1,00
	10	3329 0,95	2878 0,93	2512 0,91	2203 0,90	1951 0,88
	15	3263 0,93	2821 0,91	2462 0,89	2159 0,88	1911 0,86
	20	3197 0,91	2764 0,89	2411 0,88	2114 0,86	1872 0,85
	25	3130 0,89	2705 0,87	2360 0,86	2069 0,84	1831 0,83
	30	3062 0.87	2646 0.85	2308 0.84	2023 0.82	1791 0.81

B. Kohlensäuremaschine.

Kondensatordruck $p = 60$ at						
Temperatur vor dem Regulierventil $t' =$	t_0	5985 1,00	5025 1,00	4310 1,00	3747 1,00	3312 1,00
	10	5130 0,86	4150 0,83	3435 0,80	2888 0,77	2472 0,75
	15	4770 0,80	3864 0,77	3196 0,74	2687 0,72	2300 0,70
	20	4330 0,73	3506 0,70	2903 0,68	2442 0,65	2089 0,63
Kondensatordruck $p = 80$ at						
Temperatur vor dem Regulierventil $t' =$	t_0	4032 1,00	3566 1,00	3178 1,00	2857 1,00	2588 1,00
	10	3503 0,87	2986 0,84	2570 0,81	2235 0,79	1965 0,76
	15	3289 0,82	2806 0,79	2416 0,76	2101 0,74	1846 0,72

Verdampfer-Temperatur, $t_0 =$		— 5	— 10	— 15	— 20	— 25
Temperatur vor dem Regulierventil $t' =$	20	3072 0,76	2621 0,74	2258 0,71	1963 0,69	1725 0,67
	25	2790 0,69	2398 0,68	2066 0,65	1796 0,63	1578 0,61
	30	2397 0,60	2066 0,58	1779 0,56	1548 0,55	1358 0,53

Kondensatordruck $p = 100$ at

Temperatur vor dem Regulierventil $t' =$	t_0	3170 1,00	2879 1,00	2614 1,00	2392 1,00	2195 1,00
	10	2779 0,88	2433 0,85	2140 0,82	1895 0,79	1687 0,77
	15	2629 0,83	2303 0,80	2025 0,78	1793 0,75	1596 0,73
	20	2474 0,78	2168 0,75	1906 0,73	1688 0,71	1503 0,69
	25	2304 0,73	2032 0,71	1787 0,68	1583 0,66	1410 0,64
	30	2102 0,66	1856 0,64	1633 0,63	1446 0,60	1288 0,59

VI. STRÖMENDE BEWEGUNG VON GASEN UND DÄMPFEN.

A. Allgemeines.

Es bezeichne

F_1, F_2 zwei Querschnitte des Stromes in qm,
G die durch diese in 1 sk hindurchfliefsende Menge in kg,
w_1, w_2 die mittleren Geschwindigkeiten in den betrachteten Querschnitten in m/sk,
h_1, h_2 die Höhe der Querschnitte über einer beliebigen Wagerechten in m,
u_1, u_2 die innere Energie und
i_1, i_2 den Wärmeinhalt für 1 kg der Flüssigkeit in den betrachteten Querschnitten (s. S. 316 u. f.) in WE,
P_1, P_2 die spez. Drücke in kg/qm,
γ_1, γ_2 die spez. Gewichte in kg/cbm und
v_1, v_2 die spez. Rauminhalte in cbm/kg in den betrachteten Querschnitten,

A das mechanische Wärmeäquivalent $= 1/_{427}$,
Q_{12} die auf der Strecke 1 bis 2 einem kg der strömenden Flüssigkeit von aufsen zugeführte Wärme in WE,
R_{12} die durch innere und äufsere Reibung verbrauchte Energie für 1 kg in mkg,
$g = 9{,}81$ m/sk² die Beschleunigung durch die Schwere.

Die Bedingung für die Stetigkeit der Bewegung ist

$$G = F_1 w_1 \gamma_1 = F_2 w_2 \gamma_2 = F_1 \frac{w_1}{v_1} = F_2 \frac{w_2}{v_2}.$$

Ferner nach dem Energieprinzip

$$A \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + u_2 - u_1 + A(P_2 v_2 - P_1 v_1) + A(h_2 - h_1) = Q_{12},$$

oder wenn man den Wärmeinhalt einführt,

$$A \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + i_2 - i_1 + A(h_2 - h_1) = Q_{12}.$$

Führt man die Wärmegleichung ein in der Form

$$dQ = di - A v dP \text{ (s. S. 316)},$$

so gilt für den vorliegenden Fall

$$Q_{12} + A R_{12} = i_2 - i_1 - A \int_1^2 v\,dP$$

und weiter

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \int_1^2 v\,dP + R_{12} + (h_2 - h_1) = 0.$$

In den meisten praktischen Fällen wird $(h_2 - h_1)$ sowie Q_{12} als sehr klein zu vernachlässigen sein, dann ist

$$A \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = i_1 - i_2 \qquad \text{und}$$

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = -\int_1^2 v\,dP - R_{12}.$$

Vernachlässigt man auch die Reibung, so ist $i_1 - i_2$ und $\int v\,dP$ nach der Gleichung der Adiabate zu bestimmen, da in diesem Fall der strömenden Flüssigkeit keine Wärme zugeführt wird.

B. Ausflufs.

Es bezeichne

p, P den unveränderlichen Druck in dem Raume, aus dem der Ausflufs stattfindet, in at und kg/qm,
t, T, v die Temperatur, absolute Temperatur und den spez. Rauminhalt daselbst,
p_0, P_0 den ebenfalls unveränderlichen Druck in dem Raume, in den das Gas einströmt,
t_0, T_0 die Temperatur des ausfliefsenden Strahles,
F_0 den Querschnitt der Ausflufsöffnung in qm,

α die Kontraktionszahl (s. S. 278),
w_0 die Ausflufsgeschwindigkeit.

Vernachlässigt man zunächst die Reibung und setzt die Geschwindigkeit im Ausflufsraum sehr klein gegen w_0, dann ist unter der Annahme, dafs der Strahl im Ausflufsquerschnitt den Druck der Umgebung p_0 erreicht

$$\frac{w_0^2}{2g} = \frac{i - i_0}{A} = \int_{P_0}^{P} v\,dP$$

d. h. die Ausströmungsenergie ist gleich der Arbeit, die das Gas (Dampf) vom Druck p in einer Kolbenmaschine beim Gegendrucke p_0 leisten könnte.

Die Reibung wird in der Regel, wie in der Hydraulik, durch die Einführung einer Geschwindigkeitszahl φ berücksichtigt.

a. Vollkommene Gase.

Da $i = c_p T + C$, $i_0 = c_p T_0 + C$ ist (s. S. 319 u. f.), so folgt

$$A \frac{w_0^2}{2g} = c_p (T - T_0)$$

und nach Einführung der Gleichung der Adiabate

$$w_0 = \varphi \sqrt{\frac{2 g c_p}{A} T \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]}$$

oder auch

$$w_0 = \varphi \sqrt{2 g \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} Pv \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]} \quad \ldots . \; 1)$$

$$\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \frac{T_0}{T},$$ siehe auch Tafel, S. 326.

Die Temperatur des ausströmenden Gases ist

$$t_0 = t - \frac{A}{c_p} \frac{w_0^2}{2g} = t - \varphi^2 T \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right].$$

Für reibungslosen Austritt, $\varphi = 1$, folgt T_0 aus vorstehender Formel und Tafel S. 326.

b. Wasserdampf.

Nach dem oben ausgesprochenen Satz ist die Ausströmungsenergie des Wasserdampfes gleich der Arbeit einer verlustfreien Dampfmaschine für dieselben Drücke, und es können daher die S. 341 für diese Arbeit gegebenen Formeln ohne weiteres zur Berechnung von $A \frac{w_0^2}{2g}$ dienen.

Im JS-Diagramm (s. Anm. S. 317) kann die Ausflufsgeschwindigkeit für nassen, trockenen und überhitzten Dampf unmittelbar abgegriffen werden.

c. Ausflufsexponent.

Die Formeln für den Ausflufs von Gasen sowie von gesättigtem Wasserdampf sind von gleicher Art, Gleichung 1), S. 357.

Für Wasserdampf ist $\varkappa = 1{,}035 + 0{,}1\,x$.

Es läfst sich nun nach Vorschlag von Zeuner die Reibung statt durch φ dadurch berücksichtigen, dafs man an Stelle des Exponenten der Adiabate $\varkappa$ einen etwas kleineren, den **Ausflufsexponenten** m, für die Expansion verwendet, so dafs

$$w_0 = \sqrt{2\,g\,\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\,Pv\left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right]}.$$

Der Ausflufsexponent beruht auf der Annahme einer unveränderlichen **Widerstandszahl** ζ (s. Hydraulik); es ist

$$m = \frac{\varkappa\,(1 + \zeta)}{1 + \varkappa\zeta}.$$

Die Beziehung zwischen Geschwindigkeitszahl φ und Ausflufsexponent m ist vom Druckverhältnis $p : p_0$ abhängig, u. zw. ist bei gegebenem Ausflufsexponenten die Geschwindigkeitszahl um so gröfser, je gröfser $p : p_0$ ist.

Für kleine Werte von $p : p_0$ gilt angenähert der Grenzwert für $p = p_0$

$$\varphi^2 = \frac{m - 1}{\varkappa - 1}\,\frac{\varkappa}{m}.$$

d. Form der Ausflufsdüsen.

Die Gleichungen für w_0 sind nicht nur für den Endquerschnitt F_0 einer Ausflufsdüse, sondern nach Einführung des entsprechenden Druckes p_x für jeden beliebigen Querschnitt F_x der Düsen gültig. Aus der Bedingung, dafs der Druck von dem Höchstwerte p stetig bis auf p_0 abnehmen mufs, folgt eine bestimmte Form der Düse.

Aus $G = \frac{w_x F_x}{v_x}$ folgt für Gase und Dämpfe

$$F_x = G : \sqrt{2\,g\,\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\,\frac{P}{v}\left[\left(\frac{p_x}{p}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p_x}{p}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]}.$$

Diese Gleichung ergibt für F_x bei einem bestimmten Druckverhältnis

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{2}{m + 1}\right)^{\frac{m}{m-1}} = \beta \qquad \lg\beta = \frac{3 + 0{,}1314\,m}{3 + m} - 1$$

einen kleinsten Querschnitt F_1.

Ist $p_0 : p > \beta$, so hat dieser Kleinstwert keine Bedeutung, und jede innen abgerundete Mündung, sich verengende Düse oder Oeffnung in dünner Wand wird einen zylindrischen Strahl von der gröfstmöglichen Ausflufsgeschwindigkeit ergeben. Ist jedoch $p_0 : p < \beta$, so mufs die Düse so geformt werden, dafs auf die innere Abrundung eine engste Stelle F_1 und dann eine allmähliche Erweiterung auf F_0 folgt.*) Das Verhältnis der Querschnitte $F_1 : F_0$ ist von dem Druckverhältnis $p_0 : p$ abhängig und findet sich leicht, wenn man in die Gleichung für F_x einmal $p_0 : p$ und einmal β einführt. Für trockenen Wasserdampf ergibt sich die Düsenerweiterung wie folgt

$\frac{p}{p_0}$	$\frac{F_0}{F_1}$	$\frac{d_0}{d_1}$	$\frac{w_0}{w_1}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{F_0}{F_1}$	$\frac{d_0}{d_1}$	$\frac{w_0}{w_1}$
100	13,80	3,72	2,58	20	3,97	1,99	2,18
90	12,69	3,56	2,56	10	2,44	1,56	1,92
80	11,56	3,40	2,54	8	2,07	1,44	1,86
70	10,40	3,22	2,51	6	1,72	1,31	1,74
60	9,16	3,03	2,47	4	1,35	1,16	1,55
50	7,98	2,83	2,43	2	1,02	1,01	1,12

Wendet man bei $p_0 : p < \beta$ eine sich erweiternde Düse nicht an, sondern läfst durch eine einfache Oeffnung oder sich verengende Düse ausströmen, so kann im Endquerschnitt der Aufsendruck nicht erreicht werden, sondern es stellt sich daselbst der höhere Druck $p_1 = p\beta$ ein. Die Geschwindigkeit im Endquerschnitt der Mündung (Düse) w_1 ist in diesem Fall unabhängig von p_0

$$w_1 = \sqrt{2\,g\,\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\,Pv\,\frac{m-1}{m+1}}$$

oder

$$w_1 = \varphi_1 \sqrt{2\,g\,\frac{\varkappa}{\varkappa + 1}\,Pv} = \varphi_1 \sqrt{g \varkappa P_1 v_1}\;{}^{**)} \qquad \varphi_1^2 = \frac{m-1}{\varkappa - 1}\,\frac{\varkappa + 1}{m+1}$$

Nach dem Austritt aus einer solchen Mündung breitet sich der Strahl infolge des Ueberdruckes aus.

e. Ausflufsmenge.

Allgemein ist $G = \frac{w_0 F_0}{v_0}$. v_0 berechnet sich aus $\frac{v_0}{v} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{m}}$ oder bei Benutzung der Geschwindigkeitszahl

für **Gase**

$$v_0 = v\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa P_0}\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{w_0^2}{2\,g}$$

für **Wasserdampf**

$$v_0 = v\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} + \frac{A}{\gamma_0 r_0}\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{w_0^2}{2\,g}.$$

*) Solche Düsen finden bei Dampfturbinen, Injektoren usw. Anwendung.

**) Dies ist, abgesehen von φ, die Gleichung der Schallgeschwindigkeit für den Zustand im Ausflufsquerschnitte.

Für $\frac{p_0}{p} > \beta$ ist

$$G = F_0 \sqrt{2\,g\,\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\,\frac{P}{v}\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]}.$$

Für $\frac{p_0}{p} < \beta$ ist

$$G = F_1 \sqrt{g\,\varkappa\,\frac{m-1}{\varkappa - 1}\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m-1}}\frac{P}{v}}$$

F_1 ist der kleinste Querschnitt der Düse oder Mündung.

f. Ausflufs bei geringem Ueberdruck.

Ist $p_0 : p > 0,9$, so kann mit genügender Genauigkeit (Fehler unter $2\,vH$) $v_0 = v$ gesetzt werden, und daher

$$w_0 = \varphi \sqrt{2\,gv\,(P - P_0)}.$$

In diesen Fällen gibt man die Ausflufsmenge V häufig in cbm statt dem Gewichte nach an:

$$V = \alpha F_0 w_0.$$

C. Zusammenstellung der Ausflufsformeln für Luft und gesättigten Wasserdampf. Erfahrungswerte.

a. Luft.

Für verschiedene Werte von m wird das Druckverhältnis β und die zugehörige Geschwindigkeitszahl φ_1 wie folgt

$m =$	1,4	1,38	1,35	1,30	1,25
$\beta =$	0,530	0,533	0.538	0,547	0.556
$\varphi_1^2 =$	1	0,940	0,876	0,767	0,654
$\varphi_1 =$	1	0,970	0,936	0,876	0,810

1. Ist $\frac{p_0}{p} > \beta$, so gelten

$$w_0 = 44,8\,\varphi \sqrt{T\left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{0,286}\right]}.$$

$\left(\frac{p_0}{p}\right)^{0,286} = \frac{T_0}{T}$ siehe Tafel S. 326.

Oder $$w_0 = 44,8 \sqrt{T\left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right]}$$

$$G = 1,53\,\alpha F_0\,P_0 \sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}} - 1\right]}$$

$$G = 1{,}53\,\mu F_0 P_0 \sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{0,286}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{0,286} - 1\right]}.$$

Die Ausflufsmenge in cbm vom Druck p_0 und der Temperatur T ist

$$V = 45{,}35\,\mu F_0 \sqrt{T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{0,286}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{0,286} - 1\right]}.$$

Für $p_0 : p > 0{,}5$ ist nach Weisbach und Grashof*)

Art der Ausflufsmündung	μ	α	φ	ζ	m	Bemerkungen
Bei kreisförmiger Mündung von 14 mm Durchmesser in dünner, ebener Wand	0,64	0,65	0,981	0,04	1,388	—
Bei kurzem, zylindrischem Ansatzrohre von 14 mm Durchmesser ohne innere Abrundung	0,815 0,813 0,831	1 1 1	0,821 0,838 0,866	0,490 0,444 0,362	1,243 1,252 1,271	bei $p_0 : p = 1{,}08$ „ $p_0 : p = 1{,}41$ „ $p_0 : p = 1{,}70$
Bei kurzem, kegelförmigem Mundstücke von 10 mm Mündungsdurchmesser	0,97	1	0,974	0,034	1,392	—

Nach v. Hauer ist für **kegelförmige Gebläsedüsen** $\mu = 0{,}86$ und für **zylindrische Ansatzrohre** bei Bessemergebläsen $\mu = 0{,}78$.

2. Ist $\frac{p_0}{p} < \beta$, so wird $w_1 = 18{,}3\,\varphi_1 \sqrt{T}$; $\quad G = 3970\,\varphi_1 F_1 \frac{p}{\sqrt{T}}$ und die Ausflufsmenge in cbm von p_0 und T

$$V = 11{,}6\,\varphi_1 F_1 \frac{p}{p_0}\sqrt{T}.$$

Nach Versuchen von Zeuner ist für innen gut abgerundete Mündungen $\varphi_1 = 0{,}96$. F_1 ist der engste Düsenquerschnitt.

Nach vielfachen Beobachtungen setzt sich das im austretenden Strahle noch enthaltene Arbeitsvermögen teilweise in Schwingungsenergie (Schallwellen) um, und es ist noch nicht ermittelt, ob es überhaupt möglich ist, durch geeignete Mündungsformen die volle Austrittsgeschwindigkeit w_0 zu erhalten.

3. **Bei geringem Ueberdruck** ist

$$w_0 = 24\,\varphi \sqrt{T\left(1 - \frac{p_0}{p}\right)} \qquad G = 0{,}82\,\alpha\varphi F_0 \sqrt{\frac{p}{T}(p - p_0)}.$$

Beim Austritt in die freie Luft ist, wenn h den Ueberdruck in mm, W.-S. und b den Barometerstand in mm Q.-S. bedeutet,

$$w_0 = 24\,\varphi \sqrt{\frac{T}{13{,}7\frac{b}{h} + 1}}$$

oder angenähert

$$w_0 = 0{,}24\,\varphi \sqrt{Th}.$$

Die Ausflufsmenge in cbm ist in allen diesen Fällen

$$V = \alpha\varphi F_0 w_0,$$

u. zw. bezogen auf T und p.

* Vrgl. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. I S. 580 bis 592.

b. Trocken gesättigter Wasserdampf.

$m =$	1,135	1,128	1,120	1,105	1,090
$\beta =$	0,577	0,579	0,581	0,583	0,585
$\varphi_1^2 =$	1	0,951	0,895	0,789	0,681
$\varphi_1 =$	1	0,975	0,946	0,888	0,825

1.
$$w_0 = 1680\,\varphi p^{0,03}\sqrt{1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{0,12}} \quad \text{oder} \quad w_0 = 2300\,\varphi\sqrt{\frac{\lg p - \lg p_0}{6,76 - 0,9\,\lg p_0}}.$$

Beim Ausströmen in die Atmosphäre wird

$$w_0 = 880\,\varphi\sqrt{\lg p}.$$

Nach Versuchen von Rosenhain*) ergaben sich bei Austritt in die freie Luft folgende Werte für φ

p	2,4	3,8	5	8	12	15
Oeffnung in dünner Wand, $d_1 = 4{,}8$ mm	0,90	0,87	0,86	0,86	0,86	0,85
Sich erweiternde Düse $d_1 = 4{,}8$ mm, $d_0 = 6{,}5$ mm, $l = 20$ mm	—	0,79	0,84	0,93	0,96	0,96

2. Ist $p_0 : p < \beta$, so berechnet sich die Geschwindigkeit im kleinsten Querschnitt F_1 der Mündung zu

$w_1 = 422\,\varphi_1\,p^{0,03}$, ist also nahezu unveränderlich, und die Ausflufsmenge in der Sekunde

$$G = 153\,\varphi_1 F_1\,p^{0,97}.$$

Nach Versuchen kann angenommen werden, dafs φ_1 meist nur wenig von 1 abweicht.

Für geringen Ueberdruck ist

$$w_0 = 579\,\varphi p^{0,03}\sqrt{1 - \frac{p_0}{p}}.$$

Bei Austritt in die Aufsenluft ist angenähert

$$w_0 = 5,79\,\varphi\sqrt{h} \qquad G = 3,4\,\alpha\varphi F_0\sqrt{h}$$

wo h der Ueberdruck in mm W.-S.

Werte von $p^{0,97}$.

$p =$	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
$p^{0,97} =$	1,48	1,96	2,43	2,90	3,37	3,83	4,30	4,76	5,22	5,68	6,14
$p =$	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12
$p^{0,97} =$	6,60	7,05	7,51	7,96	8,42	8,87	9,32	9,77	10,22	10,67	11,12

*) Vrgl. Inst. of Civil Engineers 1900.

3. Für das **Sicherheitsventil eines Dampfkessels** ist, wenn ∂ den Durchmesser des Ventilrohres in m, h die Ventilerhebung in m bezeichnet, nach Kolster die abblasende Dampfmenge in kg/sk

$$G = 595 \frac{h}{d} \frac{\pi \partial^2}{4} p^{0,97}.$$ (Werte von $p^{0,97}$ s. die vorstehende Tafel.)

Der **Querschnitt** F des Sicherheitsventils (mit Ausschlufs der Sitzfläche), welches

1) bei der Dampfspannung p at anfangen soll abzublasen und
2) eine gegebene Dampfmenge G in kg/sk entweichen lassen soll, wenn die Spannung auf p_1 at gestiegen ist, wird

$$F = \frac{56\,G}{\left(1 - \sqrt{\frac{p}{p_1}}\right) p_1^{0,97}} \text{ in qcm.}$$

Die erforderliche **Belastung** K (einschl. Eigengewicht des Ventils) ist, wenn a die (möglichst klein anzunehmende) wagerechte Projektion der Sitzfläche in qcm bezeichnet,

$$K = (F + 0,6\,a)(p - 1) \text{ kg.}$$

Soll das Sicherheitsventil bei der höchsten zulässigen Dampfspannung p_1 die ganze, bei voller Feuerung gleichzeitig im Kessel in einer Sekunde entwickelte Dampfmenge G entweichen lassen, so setze man unter der Annahme $p = 0,8\,p_1$

$$F = \frac{531\,G}{p_1^{0,97}} \text{ qcm.}$$

Da G aufser vom Grade der Anstrengung des Kessels wesentlich von dessen Heizfläche H abhängig ist, so setzt man gewöhnlich den Querschnitt des Sicherheitsventils für 1 qm Heizfläche

$$\frac{F}{H} = f = \varphi(p_1).$$

(Vrgl. Abschn. Kraftmaschinen unter Dampfkessel-Armatur.)

D. Bewegung der Gase und Dämpfe durch Rohrleitungen.

∂ in mm der gleichbleibende Durchmesser der Leitung,
l in m die Länge der Leitung,
G in kg/Stunde die durch die Leitung gehende Gewichtsmenge.

Für eine sehr kurze Leitungsstrecke dl gilt nach S. 356:

$$\frac{w\,dw}{g} + v\,dP + dR + dh = 0.$$

Für die Reibungsarbeit oder den Leitungswiderstand dR auf der Strecke dl mufs man zwei Fälle unterscheiden:

a) Die Geschwindigkeit ist kleiner als eine gewisse kritische Geschwindigkeit w_k. Dann stellt sich die geordnete schichtenweise oder Stromlinien-Bewegung ein, und die Reibung ist:

$$dR = \alpha \frac{\eta\, w}{\gamma\, \delta^2} dl;$$

η ist die Zähigkeit (Reibungszahl) der Flüssigkeit, α eine Konstante.

b) Die Geschwindigkeit ist gröfser als die kritische. Dann tritt wirbelnde Strömung ein, und es gilt angenähert:

$$dR = \beta \frac{w^2}{\delta} dl;$$

β angenähert konstant.

Die kritische Geschwindigkeit beträgt rd:

$$w_k = 2 \cdot 10^5 \frac{\eta}{\delta\, \gamma};$$

hierin ist die Zähigkeit in $C.G.S.$-Einheiten auszudrücken.

In nahezu allen technisch wichtigen Fällen liegen die Geschwindigkeiten über der kritischen. Für Luft von 20⁰ zeigt die folgende Tafel die Werte der kritischen Geschwindigkeit.

Kritische Geschwindigkeit für Luft von 20⁰.

$\delta =$	25	50	100	250	500
$p = 0{,}2$	6,00	3,00	1,50	0,60	0,30
1	1,20	0,60	0,30	0,12	0,06
10	0,12	0,06	0,03	0,012	0,006

Im folgenden soll nur der Fall b)

$w > w_k$ behandelt werden.

Für eine wagerechte Leitung folgt dann:

$$\frac{w\, dw}{g} + v\, dP + \beta \frac{w^2}{\delta} dl = 0.$$

Unter der Annahme stetiger Strömung ist $\frac{w}{v} =$ konst.; setzen wir ferner für die Zustandsänderung der Flüssigkeit längs des Rohres die allgemeine Gleichung $p\, v^m =$ konst. (Polytrope), so ergibt sich

$$dP \left[1 - \frac{w^2}{g\, m\, P v}\right] + \beta\gamma \frac{w^2}{\delta} dl = 0$$

oder, wenn wir die Schallgeschwindigkeit

$$w_s = \sqrt{g \varkappa P v}$$

einführen:

$$dP\left[1 - \frac{\varkappa}{m}\,\frac{w^2}{w_s^2}\right] + \beta\gamma\,\frac{w^2}{\delta}\,dl = 0\cdot$$

Wenn, wie in den meisten technischen Fällen, $w^2 : w_s^2$ sehr klein ist, so kann man für die in diesen Fällen stets vorhandene Druckabnahme schreiben:

$$dP = \beta\gamma\,\frac{w^2}{\delta}\,dl$$

und, wenn ΔP klein gegen P ist, auch für endliche Rohrstrecken:

$$\Delta P = \beta\gamma\,\frac{w^2}{\delta}\,l\,;$$

für γ und w sind in diesem Fall Mittelwerte einzuführen.

Fritzsche*) hat auf Grund eigener Versuche mit Luft sowie mit Benutzung aller früheren Versuche für β folgenden Ausdruck gefunden:

$$\beta = 6{,}02\,.\,\delta^{-0{,}269}\,.\,(\gamma w)^{-0{,}148}.$$

Dieser Wert stimmt auch vorzüglich mit den Ergebnissen neuer Versuche über die Fortleitung von gesättigtem und überhitztem Wasserdampf überein, welche vom bayer. Revisionsverein ausgeführt wurden.**) Er kann somit für Luft wie für Dampf Anwendung finden;

$$\text{mit } G = \frac{\gamma w \delta^2}{353{,}7} \text{ wird auch } \beta = 2{,}526\,\frac{\delta^{0{,}027}}{G^{0{,}148}}\cdot$$

Da die Veränderlichkeit von $\delta^{0{,}027}$ stets klein ist gegenüber dem erreichbaren Genauigkeitsgrad, so läfst sich (mit $\delta = 100$) einfach setzen:

$$\beta = \frac{2{,}86}{G^{0{,}148}},$$

dieser Wert kann aus der folgenden Tafel entnommen werden:

Widerstandszahlen für Rohrleitungen.

G	β	G	β	G	β	G	β
10	2,03	100	1,45	1000	1,03	10 000	0,73
15	1,92	150	1,36	1500	0,97	15 000	0,69
25	1,78	250	1,26	2500	0,90	25 000	0,64
40	1,66	400	1,18	4000	0,84	40 000	0,595
65	1,54	650	1,10	6500	0,78	65 000	0,555
100	1,45	1000	1,03	10000	0,73	100 000	0,520

*) Mitt. üb. Forschungsarb. (Im Druck.) Herausg. v. V. d. I.

**) Die Versuche ergaben im Mittel $\beta = 1{,}06$ für $\delta = 70$, $G = 860$ (im Mittel).

Die Werte gelten für einen gewöhnlichen (mittleren) Rauhigkeitsgrad der Rohrleitung.

In at beträgt der Druckabfall:

$$\varDelta p = \frac{\beta}{10\,000}\,\gamma\,\frac{w^2}{\delta}\,l$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\varDelta p = 12{,}5\,\beta\,\frac{G^2}{\gamma\,\delta^5}\,l$$

oder

$$\varDelta p = 0{,}0554\,\beta\,G\,\frac{w}{\delta^3}\,l$$

oder

$$\varDelta p = \frac{0{,}0532\,\beta}{10\,000}\sqrt{\frac{\gamma^3\,w^5}{G}}\cdot l.$$

a. Luftleitungen.

Für Gase lassen sich die allgemeinen Formeln noch umgestalten, es wird:

$$\frac{\varDelta p}{p} = \frac{\beta}{R\,T}\,\frac{w^2}{\delta}\,l.$$

R ist die Gaskonstante für Luft $= 29{,}2$, für p und T sind wie für w Mittelwerte für die betrachtete Rohrstrecke einzuführen.

b. Dampfleitungen.

Da sich $\frac{p}{\gamma''} = p\,v''$ für **trocken gesättigten Dampf** nur wenig ändert, so kann man setzen:

Für Hochdruckleitungen ($p = 4$ bis 20 at):

$$\frac{\varDelta p}{p} = \frac{0{,}51\,.\,\beta}{10\,000}\cdot\frac{w^2}{\delta}\,l$$

$$\varDelta p = 24{,}5\,\beta\,\frac{G^2}{p\,\delta^5}\,l \qquad \varDelta p = \frac{0{,}0194\,\beta}{10\,000}\sqrt{\frac{p^3\,w^5}{G}}\,l.$$

Für Niederdruckleitungen ($p = 1$ bis 4 at):

$$\frac{\varDelta p}{p} = \frac{0{,}56\,\beta}{10\,000}\,\frac{w^2}{\delta}\,l$$

und

$$\varDelta p = 22{,}5\,\beta\,\frac{G^2}{p\,\delta^5}\,l.$$

Für die Bestimmung des zweckmäſsigsten Leitungsdurchmessers sind der **Druckverlust durch Leitungswiderstand** und der **Wärmeverlust (Dampfverlust) durch äuſsere Abkühlung** maſsgebend. Mit der Verkleinerung des Rohrdurchmessers nimmt der Leitungswiderstand zu und die äuſsere Abkühlung ab.

Die Dampfverluste durch **äuſsere Abkühlung** bestimmen sich aus den Gesetzen des Wärmedurchgangs, S. 306 u. f.

Im folgenden sind einige Versuchsergebnisse mitgeteilt.

Stündliche Kondensationswassermenge *K* in kg/qm Rohrinnenfläche

(nach Gutermuth).*)

Versuchs-Dampfleitung	Isolierung der Leitung	Dampfspannung in at Ueberdruck	*K* Flanschen nicht umhüllt	*K* Flanschen umhüllt	Bemerkungen
guſseiserne Leitung: $l = 323$ m $\delta = 0{,}140$ m	Grünzweig & Hartmannsche Kork-Isoliermasse, 20 mm dick + 10 mm Filz und Blechmantel	3,0 4,0 5,0 6,0	1,03 1,09 1,21 1,33	. . . .	Schachtleitungen
dsgl.: $l = 365$ m $\delta = 0{,}294$ m	40 mm Korksteinschalen + 8 mm Asbestmasse	5,2	0,732	.	
schmiedeiserne Leitung: $l = 330$ m $\delta = 0{,}075$ m	Grünzweig & Hartmannsche Kork-Isoliermasse, 20 mm dick + 10 mm Filz	3,0 4,0 5,0 6,0	1,10 1,21 1,29 1,35	. . . .	
schmiedeiserne Leitung: $l = 22$ m $\delta = 0{,}120$ m	alte Kieselgurschnur, 25 mm dick	3,0 5,0	1,11 1,24	. .	wagerechte Leitungen
	neue Kieselgurschnur, 30 mm dick	3,0 5,0	0,93 1,13	. .	
	Knochsche Masse, 30 mm dick	3,0 5,0	0,93 1,128	. .	
	nackte Leitung	3,0 5,0	3,39 4,17	. .	
	Oertgen & Schulte: Kieselgurmasse, 20 mm dick.	3,0 5,0	0,96 1,128	0,85 0,956	
	Torfschalen, 35 mm dick, mit Asbestunterlage.	3,0 5,0	0,62 0,70	0,54 0,64	
	Asbest-Seidenformstücke, 26 mm dick, mit Asbestunterlage	3,0 5,0	0,71 0,812	. .	

*) S. Z. d. V. d. I. 1887, S. 670.

Die folgenden Versuche sind vom bayer. Revisionsverein mit Leitungen von 26 m Länge mit 6 Flanschen ausgeführt. Die Umhüllung bestand aus Diatomit:

Dampf- und Wärmeersparnis durch die Umhüllung von Dampfleitungen.

Temperaturgefälle zwischen Dampf und Luft	Wärmeverlust für 1 m in 1 Stunde			Dampf- und Wärmeersparnis	
	Nackte Leitung	Umhüllte Leitung			
		Flanschen frei	Flanschen umhüllt	Flanschen frei	Flanschen umhüllt
	WE	WE	WE	vH	vH
Lichte Weite der Leitung = 150 mm					
100	655	161	105	75	84
110	756	186	116	75	85
120	873	210	131	76	85
130	992	232	146	77	85
140	1118	258	161	77	86
150	1245	281	176	77	86
160	1385	308	191	78	86
170	1535	330	206	79	87
Lichte Weite der Leitung = 70 mm					
100	328	92	66	72	80
110	369	103	73,5	72	80
120	411	113	81	72,5	80,5
130	456	120	89	73,5	80,5
140	510	131	97	74,5	81
150	567	141	103	75	82
160	629	149	110	76,5	82,5
170	693	159	118	77	83
180	766	173	127	77,5	83,5

3. Für die **Ermittlung des zweckmäfsigsten Leitungsdurchmessers** ist unter Zugrundelegung der am Ende der Dampfleitung nötigen Dampfmenge und des nötigen Dampfdruckes folgende Ueberlegung mafsgebend.

α. Der Kesseldruck ist vorgeschrieben. Dann ist der zulässige Spannungsabfall bestimmt, und die Dampfgeschwindigkeit sowie der Leitungsdurchmesser ermitteln sich aus der Formel für

den Leitungswiderstand ohne Rücksicht auf die Kondensationsverhältnisse in der Leitung. Der Kondensationsverlust würde sich alsdann nur durch Erhöhung des Spannungsverlustes (also nur durch Verminderung des Leitungsdurchmessers) verringern lassen.

β. Der Kesseldruck ist nicht vorgeschrieben. Hierbei müssen Vergleichsrechnungen über den Dampfverbrauch der ganzen Dampfmaschinenanlage samt Leitung bei grofsem und kleinem Spannungsabfall, also bei enger und weiter Leitung sowie die besonderen praktischen Anforderungen an den Maschinenbetrieb den Leitungsdurchmesser bestimmen.

Im allgemeinen wird sich hinsichtlich der Dampfkosten grofser Spannungsabfall und enge Leitung vorteilhafter erweisen als geringer Spannungsabfall und weite Leitung.

E. Drosseln.

Wird in einen stetigen Flüssigkeitsstrom eine engere Durchgangsstelle (Ventil, Klappe usw.) eingeschaltet, so entsteht dadurch ein Druckabfall. Es sei p der unveränderliche Druck und w die Geschwindigkeit vor, p_0 und w_0 hinter der Drosselstelle.

Die Gleichung für den Durchgang durch den Drosselquerschnitt lautet

$$A \frac{w^2}{2g} + i = A \frac{w_0^2}{2g} + i_0.$$

Fast in allen praktischen Fällen wird der Unterschied der kinetischen Energie vor und nach dem Drosseln zu vernachlässigen sein; dann ergibt sich das einfache Gesetz: Der Wärmeinhalt bleibt durch Drosseln unverändert: $i = i_0$.

Daraus läfst sich der Zustand der Flüssigkeit nach dem Drosseln bestimmen, wenn man den Spannungsabfall sowie den Zustand vor dem Drosseln kennt (vrgl. S. 316).

a. Vollkommene Gase. (S. 318 u. f.)

Da für diese $i = c_p T + C$ ist, folgt $T = T_0$,
d. h. die Temperatur wird bei vollkommenen Gasen durch Drosseln nicht verändert.

Da die meisten Gase nicht genau den Gesetzen der vollkommenen Gase entsprechen, so treten geringe Abweichungen von diesem Gesetz auf, u. zw. in dem Sinne, dafs die Temperatur durch das Drosseln etwas sinkt. Von dieser Erscheinung hat Linde bei der Konstruktion seiner Maschine zur Verflüssigung von Gasen Gebrauch gemacht.

Die Temperaturänderung durch Drosseln ist bestimmt durch die allgemeine Gleichung

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_i = -\frac{1}{c_p}\left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_T = \frac{A}{c_p}\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P - v\right] = \frac{AT^2}{c_p}\left(\frac{\partial\left(\frac{v}{T}\right)}{\partial T}\right)_P.$$

Versuche von Thomson und Joule über das Drosseln haben ergeben

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_i = a\left(\frac{273}{T}\right)^2 \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} a = 0{,}27 \text{ für Luft,} \\ a = 1{,}35 \text{ für Kohlensäure.} \end{array}$$

b. Gesättigte Dämpfe. (S. 332 u. f.)

Es ist $i = i' + xr$ und daher

$$i' + xr = i_0' + x_0 r_0,$$

woraus sich die spezifische Dampfmenge x_0 nach dem Drosseln berechnen läfst (Anwendung s. Kältemaschinen, S. 347).

Wasserdampf wird durch Drosseln stets trockener, trockener Dampf überhitzt. Ergibt die Formel $x_0 > 1$, so ist Ueberhitzung eingetreten, und es gilt die Formel

$$i' + xr = i_0' + r_0 + 0{,}5\,(t_0 - \vartheta_0).$$

Die Gleichung kann zur Berechnung der ursprünglichen Dampffeuchtigkeit dienen, wenn die Ueberhitzungstemperatur gemessen wird (Anwendung beim Drosselkalorimeter zur Bestimmung der Feuchtigkeit von Kesseldampf).

Arbeitsverlust durch Drosseln.

Das Drosseln hat als nicht umkehrbarer Vorgang stets eine Verringerung der nutzbaren Arbeit der gedrosselten Flüssigkeit zur Folge. Dieser Verlust läfst sich für Dampfmaschinen und Kältemaschinen leicht berechnen, indem man die durch das Drosseln bewirkte Entropievermehrung mit der absoluten Kondensatortemperatur multipliziert (S. 315).

Die Entropievergröfserung berechnet sich aus der Wärmegleichung

$$T\,ds = di - Av\,dP \text{ zu } \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_i = -A\frac{v}{T}.$$

So lange die Druckverminderung $\varDelta p$ nicht sehr grofs ist, läfst sich demnach schreiben

$$\varDelta s = A\frac{v}{T}\varDelta P.$$

Für vollkommene Gase wird

$$\varDelta s = AR\frac{\varDelta p}{p} = \frac{2}{\mu}\frac{\varDelta p}{p}.$$

Für gesättigte Dämpfe wird

$$\varDelta s = A\frac{v' + x(v'' - v')}{\Theta}\varDelta P = \frac{APv' + x\psi}{\Theta}\frac{\varDelta p}{p}.$$

oder wenn x nicht sehr klein: $\varDelta s = \dfrac{x\psi}{\Theta}\dfrac{\varDelta p}{p}.$

Für überhitzten Dampf wird

$$\Delta s = A \frac{v'' + 50{,}9 : [P(t-\vartheta)]}{T} \Delta P = \frac{\psi + 0{,}12\,(t-\vartheta)}{T} \frac{\Delta p}{p}.$$

In diese Formeln sind für p, ϑ und ψ die Mittelwerte vor und nach dem Drosseln zu setzen.

Beispiel: Bei einer Auspuffmaschine werde der Dampf in der Zuleitung oder in den Eintrittskanälen von 10 auf 9 at gedrosselt, wie grofs ist der Arbeitsverlust $A L_d$? Gegendruck = 1,0.

a) Der Dampf sei trocken gesättigt:

$$A L_d = \Delta s\, \Theta_0 = \frac{\psi}{\Theta} \frac{\Delta p}{p} \Theta_0 = \frac{45{,}8}{450} \cdot \frac{1}{9{,}5} \cdot 372 = 3{,}8 \text{ WE}.$$

Nehmen wir den Dampfverbrauch der Maschine $D_i = 12{,}5$ also $A L_i = \frac{632}{12{,}5} =$ 50,7 WE, so beträgt der Drosselverlust $\frac{3{,}8}{50{,}7} \cdot 100 = 7{,}5$ vH der indizierten Leistung der Maschine.

b) Der Dampf sei überhitzt, $t = 350^0$:

$$A L_d = \frac{\psi + 0{,}12\,(t-\vartheta)}{T} \frac{\Delta p}{p} \Theta_0 = \frac{45{,}8 + 0{,}12 \cdot 173}{623} \cdot \frac{0{,}1}{1} \cdot 372 = 5{,}44 \text{ WE}.$$

wenn wir D_i hier zu 8,5 annehmen, ist dies 7,3 vH der indizierten Leistung.

Für dieselbe Maschine betrage die Drosslung beim Austritt 0,1 at [von 1,1 auf 1,0]. Dann ist im Falle:

a) Der austretende Dampf ist feucht, $x = 0{,}94$:

$$A L_d = \frac{x\psi}{\Theta} \frac{\Delta p}{p} \Theta_0 = \frac{0{,}94 \cdot 40{,}2}{373} \frac{0{,}1}{1{,}05} 372 = 3{,}6 \text{ WE oder } 7{,}1 \text{ vH der indizierten Arbeit.}$$

b) Der austretende Dampf ist überhitzt, $t = 150$:

$$A L_d = \frac{\psi + 0{,}12\,(t-\vartheta)}{T} \frac{\Delta p}{p} \Theta_0 = \frac{40{,}2 + 0{,}12 \cdot 50}{423} \frac{0{,}1}{1{,}05} 372 = 3{,}87$$

oder 5,2 vH der indizierten Arbeit.

Von grofser Bedeutung sind auch die Drosselverluste bei Kältemaschinen; der Rechnungsweg ist derselbe. Die Effektverluste durch Drosslung sind proportional dem Quadrate der Strömungsgeschwindigkeit und der Dichte und umgekehrt proportional dem Druck, also dem Ausdruck $\frac{w^2 \gamma}{p}$ oder einfacher $w^2 \mu$. In bezug auf das Molekulargewicht ist also Ammoniak am günstigsten; w hängt von der konstruktiven Ausführung ab. Am leichtesten kann w bei Kohlensäure klein gehalten werden, es folgt Ammoniak und dann schweflige Säure.

VII. VERBRENNUNG.

A. Feste Brennstoffe.*)

1. 100 G.-T. trockener atmosphärischer Luft enthalten 23,10 O_2, 75,55 N_2, 1,30 Ar, 0,05 CO_2.

100 R.-T. trockener atmosphärischer Luft enthalten 20,90 O_2, 78,13 N_2, 0,94 Ar, 0,03 CO_2,

die 3 letzten Bestandteile fafst man als „atmosphärischen Stickstoff" zusammen.

*) S. auch „Normen f. Leistungsversuche an Dampfkesseln usw."

Zu diesen Bestandteilen tritt noch der Gehalt der Luft an Wasserdampf, dessen Betrag sehr verschieden ist. (Größenordnung etwa 1 R.-T.) S. S. 321.

2. Bei **vollkommener Verbrennung** eines Brennstoffes verbindet sich der freie H unmittelbar mit dem C entweder zu leichtem Kohlenwasserstoff (Sumpf- oder Grubengas) CH_4 oder zu schwerem Kohlenwasserstoff (ölbildendem Gas oder Aethylen) C_2H_4, die beide, leicht brennbar, mit dem O der Luft zu CO_2 und zu H_2O verbrennen. Das Wasser des Brennstoffes wird zersetzt, H verbindet sich mit C zu einem Kohlenwasserstoff, O mit C zu CO; beide Gase verbrennen mit dem O der Luft zu CO_2 und H_2O.

Für alle Verbrennungserscheinungen gilt die Regel:

Die Wärmemenge, die bei der Verbindung zweier Stoffe frei wird, wird bei der Zerlegung wieder gebunden.

100	G.-T.	H_2O	enthalten	11,14	G.-T.	H	und	88,86	G.-T. O,
100	„	CO_2	„	27,27	„	C	„	72,73	„ O,
100	„	CO	„	42,86	„	C	„	57,14	„ O.

CO_2 in Berührung mit glühendem C reduziert sich zu CO ($CO_2 + C = 2\,CO$). — Die Wärmemenge ist dieselbe, ob C erst zu CO und dann zu CO_2 oder unmittelbar zu CO_2 verbrennt.

3. Die **Verdampfungsziffer** eines Brennstoffes gibt an, wieviel kg Wasser von bestimmter Temperatur durch 1 kg des Brennstoffes in Dampf von bestimmter Spannung verwandelt werden.

4. **Heizwert** (absoluter Heizeffekt) h eines Brennstoffes ist die Anzahl Wärmeeinheiten, die bei der vollkommenen Verbrennung von 1 kg des Brennstoffes entwickelt werden.

Enthält 1 kg des Brennstoffes C kg Kohlenstoff, H kg Wasserstoff, S kg Schwefel, O kg Sauerstoff und W kg hygroskopisches Wasser, und wird angenommen, dafs das Wasser der Verbrennungsgase als Dampf entweicht, so ist (Verbandsformel)

$$h = 8100\,C + 29000\,(H - {}^1/_8\,O) + 2500\,S - 600\,W \text{ in WE.}$$

Die Ermittlung des Heizwertes durch das Kalorimeter ist stets vorzuziehen.

5. Die zur Verbrennung von 1 kg Brennstoff theoretisch erforderliche **Luftmenge** L mit rd. 21 R.-T. Sauerstoff in 100 R.-T. Luft ist

$$L = \frac{{}^8/_3 C + 8H + S - O}{0{,}23} \text{ in kg oder } = \frac{{}^8/_3 C + 8H + S - O}{0{,}3} \text{ in cbm}$$

von 0° und 760 mm Q.-S.,

$$\text{oder } \frac{{}^8/_3 C + 8H + S - O}{0{,}275} \text{ in cbm von } 15^0 \text{ und 1 at (736 mm Q.-S.)}$$

Ergibt die Gasanalyse k R.-T. Kohlensäure, o R.-T. Sauerstoff und n R.-T. Stickstoff auf 100 R.-T. des Gases, und bezeichnet $v:1$ das Verhältnis der gebrauchten Luftmenge zu der theoretisch erforderlichen, so ist

$$v = \frac{n}{n - \frac{79}{21} o} \quad \text{oder} \quad v = \frac{21}{21 - 79 \frac{o}{n}}.$$

Heizwerte *h* für 1 kg Brennstoff.

(Die Werte der Tafel sind obere Heizwerte, d. h. sie beziehen sich auf flüssiges Wasser. S. S. 376.):

	WE		WE
Aether	8900	Masut (Petroleumrückstände)	10500
Alkohol	7100	Naphthalin	9700
Anilin	8800	Petroleum	11000
Antimon	960	Phosphor (P zu P_2O_5)	5950
Benzol	10000	Rohrzucker	4000
Blei	260	Rüböl, Olivenöl, Leinöl	9300
Braunkohlenteeröl	10000	Schiefspulver	700—800
Ehlormetyl	3200	Schwefel (S zu SO_2)	2220
Cisen (Fe zu FeO)	1260	Schwefelkohlenstoff	3400
,, (Fe zu Fe_3O_4)	1680	Schwefelwasserstoff	2740
,, (Fe zu Fe_2O_3)	1890	Silicium (Si zu SiO_2)	7830
Glyzerin	4300	Talg	8370
Holz	4100	Terpentinöl	10850
Holzgeist	5300	Wachs	9000
Kohlenstoff (C zu CO_2)	8140	Zellulose	4200
,, (C zu CO)	2440	Zink (Zn zu ZnO)	1300
Kupfer (Cu zu CuO)	590		

6. **Verbrennungs-Gasmenge *G*.** 1 kg Brennstoff ergibt bei seiner Verbrennung 1,86 C cbm Kohlensäure, ferner 1,86 C $(o:k)$ cbm Sauerstoff und 1,86 C $(n:k)$ cbm Stickstoff, alles reduziert auf 0^0 und 760 mm Q.-S. In cbm von 15^0 und 1 at ist 2,03 statt 1,86 zu setzen. Die Menge des in den Verbrennungsgasen enthaltenen Wasserdampfes wird berechnet aus dem Wassergehalte des Brennstoffes W und dem durch Verbrennung des Wasserstoffes gebildeten Wasser (9 H); sie beträgt für 1 kg Brennstoff

$$\frac{9\,H + W}{0{,}804} \text{ cbm von } 0^0 \text{ und } 760 \text{ mm Q.-S.}$$

Die Gesamtmenge der aus 1 kg Brennstoff entstandenen Verbrennungsgase ist mithin

$$G = \frac{1{,}86\,C}{k} + \frac{9\,H + W}{0{,}804} \text{ cbm von } 0^0 \text{ und } 760 \text{ mm Q.-S.}$$

7. **Verbrennungstemperatur** (pyrometrischer Heizwert) Θ eines Brennstoffes ist die von ihm bei der vollkommenen Verbrennung erzeugte Temperatur in ^{0}C.

Enthält 1 kg des Brennstoffes C kg Kohlenstoff, H kg Wasserstoff, O kg Sauerstoff, S kg Schwefel, W kg chemisch gebundenes Wasser und *A* kg Asche, so ist (unter Voraussetzung einer Anfangstemperatur

des Brennstoffes und der Verbrennungsluft von 0°, sowie dafs eine Luftmenge L cbm zutritt und sämtlicher C zu CO_2 verbrennt) die Verbrennungstemperatur des Brennstoffes

$$\Theta = \frac{h}{0{,}31\,L + 0{,}15\,C + 2{,}6\,H + 0{,}5\,W + 0{,}22\,(O - S) + 0{,}2\,A}.$$

Hierbei ist unveränderliche spez. Wärme der Verbrennungsgase angenommen. (S. folg. Kapitel.) Die Werte von Θ dienen nur zum Vergleiche verschiedener Brennstoffe, die absoluten Werte sind wegen der Zunahme der spez. Wärme und der eintretenden Dissoziation bedeutend niedriger. Genaue Berechnung von Θ im folgenden Kapitel.

8. **Zusammensetzung und Heizwert von deutschen Kohlen.***)

		Ruhrkohlen	Saarkohlen, Schlesische und Sächsische Kohlen	Oberbayerische Molasse-Kohlen	Sächsische Braunkohlen	Torf	Steinkohlen-Briketts	Braunkohlen-Briketts	Gaskoks	Westfäl. Anthrazit **)
100 G.-T. lufttrockener Kohle enthalten	Kohlenstoff C	80	75	53	40	44	82	52	84	85,42
	Wasserstoff H	4,7	5	4	3	4,5	4,2	4,3	0,8	3,82
	Sauerstoff O + Stickstoff N	6	10	12	11	25	3,7	16	3,4	4,68
	Schwefel S	1,5	1	5	2	0,5	1,2	2	1,0	1,23
	Wasser W	1,3	2,5	9	37	20	1,7	17	1,8	0,95
	Asche	6,5	6,5	17	7	6	7,2	9	9	3,9
Brennbare Stoffe in 100 G.-T. Kohle		92,2	91	74	56	74	91,1	74	89,2	95,2
100 G.-T. wasser- und aschefreier Stoffe enthalten	Kohlenstoff C	86,8	82,5	71,6	71,5	59,4	90	70	94,2	89,7
	Wasserstoff H	5,1	5,5	5,4	5,4	6,1	4,6	5,8	0,9	4,0
	Sauerstoff O + Stickstoff N	6,5	11	16,2	19,5	33,8	4,1	21,5	3,8	4,9
	Schwefel	1,6	1	6,8	3,6	0,7	1,3	2,7	1,1	1,3
100 T. Kohle geben	Koksausbeute	77	64	56	31	31	83	40	96	89,33
	festen Kohlenstoff	70	57	38	24	25	76	32	88	85,00
	flüchtige Bestandteile	22	33	35	33	49	15	43	2	9,72
Heizwert der Kohle		7650	7100	5200	3600	3800	7750	4800	7000	7975
Heizwert der brennbaren Stoffe		8300	7800	7100	6630	5400	8500	6540	7830	8380

*) Die Tafel enthält Mittelwerte für gute Kohlen nach Untersuchungen von Bunte Z. d. V. d. I. 1900 S. 669.

**) Z. d. V. d. I. 1905 S. 238.

B. Verbrennung gasförmiger und flüssiger Brennstoffe. *)

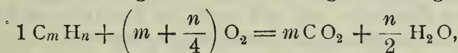
1. Von gasförmigen Brennstoffen kommen technisch in Betracht: Kohlenoxyd CO, Wasserstoff H_2 und eine Anzahl Kohlenwasserstoffe der allgemeinen Formel $C_m H_n$, darunter besonders: Methan CH_4, Aethylen C_2H_4, Azetylen C_2H_2.

Die Sauerstoff- und Luftmenge, die zur Verbrennung von 1 cbm eines Gases mindestens notwendig sind, seien: $S_{\min}$, und $L_{\min}$ in cbm.

Für Kohlenwasserstoffe $C_m H_n$ ist

$$S_{\min} = m + \frac{n}{4}, \qquad L_{\min} = \frac{1}{0{,}21} S_{\min}.$$

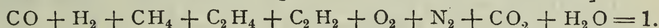
Für Kohlenwasserstoffe gilt die Verbrennungs-Gleichung



$$1\, C_m H_n + \left(m + \frac{n}{4}\right) O_2 = m\, CO_2 + \frac{n}{2} H_2O,$$

d. h. 1 Raum-Einheit des Gases verbrennt mit $\left(m + \frac{n}{4}\right)$ R.-E. Sauerstoff zu m R.-E. Kohlensäure und $\frac{n}{2}$ R.-E. Wasserdampf.

2. 1 R.-E. Gas sei aus folgenden Bestandteilen gemischt [die chemischen Zeichen sollen zugleich die Raumteile bezeichnen]:

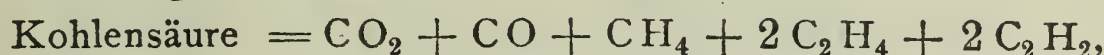


$$CO + H_2 + CH_4 + C_2H_4 + C_2H_2 + O_2 + N_2 + CO_2 + H_2O = 1.$$

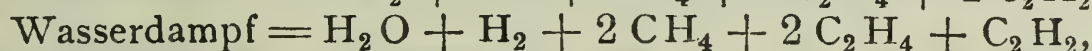
Die zur Verbrennung von 1 R.-E. dieser Mischung nötige Sauerstoffmenge in R.-E. ist

$$S_{\min} = \frac{CO + H_2}{2} + 2\, CH_4 + 3\, C_2H_4 + 2{,}5\, C_2H_2.$$

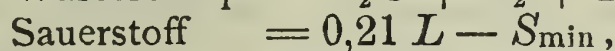
Als Verbrennungsgase ergeben sich in R.-E., wenn dem Gase L R.-E. Luft beigemischt werden:



Kohlensäure $= CO_2 + CO + CH_4 + 2\, C_2H_4 + 2\, C_2H_2$,



Wasserdampf $= H_2O + H_2 + 2\, CH_4 + 2\, C_2H_4 + C_2H_2$,



Sauerstoff $= 0{,}21\, L - S_{\min}$,



Stickstoff $= N_2 + 0{,}79\, L$.

Die Verbrennung hat im allgemeinen eine Veränderung (Verkleinerung) der Molekülzahl im Gefolge, dadurch ändert sich die Gaskonstante R und, gleiche Anfangs- und Endwerte von Druck und Temperatur vorausgesetzt, auch der Rauminhalt.

Für 1 R.-E. von $C_m H_n$ ist die Raumverkleinerung (Kontraktion) $\Delta V = \left(1 - \frac{n}{4}\right)$ R.-E. Ist die Gaskonstante des Gemisches von Gas und Luft vor der Verbrennung R' und nach derselben R'', so ist

$$\frac{R''}{R'} = \frac{1 + L - \Delta V}{1 + L}.$$

*) In diesem Kapitel sind wiederholt die Formeln und Tafeln über vollkommene Gase S. 318 bis 331 benutzt.

Für die obige Gasmischung ist

$$\varDelta V = \frac{CO + H_2 + C_2 H_2}{2}.$$

Da bei den gewöhnlichen Werten von Druck und Temperatur der Wasserdampf kondensiert, so tritt dadurch eine weitere Raumabnahme $\varDelta V'$ ein, die gleich dem früher berechneten Rauminhalt des dampfförmig gedachten Wassers ist.

3. Den **Heizwert** eines Brennstoffes bezieht man entweder auf die Gewichtseinheit (kg), h, oder auf die Raumeinheit, u. zw. auf 1 cbm bei 15° C und 1 at, H:

$$H = h\frac{\mu}{847}\frac{10000}{288} = h\frac{\mu}{24{,}4}; \qquad \mu h = 24{,}4\,H.$$

Der Heizwert hat erst eine bestimmte Bedeutung, wenn man den Zustand des Gemisches vor und nach der Verbrennung genau angibt. Hierbei kommen zwei Fälle besonders in Betracht:

α. Der Heizwert für gleichbleibenden Druck h_p, H_p, ist die Wärmemenge, die nach aufsen abgegeben wird, wenn Temperatur und Druck vor und nach der Verbrennung denselben Wert haben.

β. Der Heizwert für gleichbleibenden Rauminhalt h_v, H_v, ist die Wärmemenge, die abgegeben wird, wenn Temperatur und Rauminhalt vor und nach der Verbrennung gleiche Werte haben.

Die Heizwerte für gleichen Druck und gleichen Rauminhalt unterscheiden sich (gleichen Anfangszustand vorausgesetzt) durch die Arbeit, die der Raumveränderung $\varDelta V + \varDelta V'$ für gegebenen unveränderlichen Druck entspricht. Für den Druck von 1 at ist

$$H_p - H_v = A\,10000\,(\varDelta V + \varDelta V') = 23{,}4\,(\varDelta V + \varDelta V').$$

Der Unterschied der beiden Heizwerte ist sehr gering und kommt höchstens bei Wasserstoff in Betracht; für ihn ist bei 15° und 1 at

$$H_p - H_v = \frac{15000}{427} = 35 \text{ oder } 1{,}25 \text{ vH von } H_p.$$

Bezeichnen i', u', c_v', c_p' den Wärmeinhalt, die Energie und die spez. Wärmen für 1 kg des brennbaren Gemisches und i'', u'', c_v'', c_p'' dieselben Gröfsen nach der Verbrennung, O in kg die nötige Sauerstoffmenge für 1 kg des Brennstoffes, so ist

$$h_p = (1 + O)(i' - i''), \qquad h_v = (1 + O)(u' - u'').$$

Besteht das Gemenge vor und nach der Verbrennung nur aus Gasen, und bezeichnet man den Heizwert für 0° mit h_p^0, h_v^0, so ist der Heizwert für eine beliebige Temperatur t

$$h_p = h_p^0 + (1 + O)\left(c_p' - c_p''\right)t, \qquad h_v = h_v^0 + (1 + O)\left(c_p' - c_p''\right)t.$$

In der Regel kommt diese Abhängigkeit des Heizwertes von der Temperatur nicht in Betracht. Bestehen die Verbrennungserzeugnisse ganz oder zum Teil aus Wasser, so ändert sich der Heizwert bei der Verdampfungstemperatur sprungweise um das Produkt aus der Ver-

dampfungswärme r (s. S. 304 und 335) und der gebildeten Wassermenge. Letztere sei für 1 kg des Brennstoffes w kg, für 1 cbm W kg.

Für 1 kg Wasserstoff beträgt für atmosphärischen Druck $w r_{100} = 9 \,.\, 536{,}5 = 4820$ WE oder 14 vH des Heizwertes h_p. Die Aenderung von h_v ist $w \varrho_{100} = 9 \,.\, 496{,}3 = 4470$ WE.

4. Wenn die Verbrennung ohne Wärmeabgabe nach aufsen stattfindet, so wird die ganze entwickelte Wärme von den Verbrennungsgasen aufgenommen. Auch hier sind zwei Sonderfälle wichtig:

α. **Verbrennung bei unveränderlichem Druck:** Das Gemisch, enthaltend 1 kg Brennstoff und G kg Luft und Beimengungen, habe vor der Verbrennung die Temperatur t_1, nach der Verbrennung die Temperatur t; die gebildete Wassermenge sei w, dann ist

$$h_p + (1 + G)\, c_p'\, t_1 = w\, r_0 + (1 + G)\, c_p''\, t.$$

β. **Verbrennung bei unveränderlichem Rauminhalt:**

$$h_v + (1 + G)\, c_v'\, t_1 = w\, \varrho_0 + (1 + G)\, c_v''\, t.$$

Diese und die früheren Formeln gelten auch für veränderliche spez. Wärmen, wenn unter C_p', C_p'', C_v', C_v'' die mittleren spez. Wärmen zwischen 0^0 und t_1^0 bzw. t^0 verstanden werden.

Die Gröfsen $h_p - w r_0$ und $h_v - w \varrho_0$ nennt man den **unteren Heizwert** bei unveränderlichem Druck und unveränderlichem Rauminhalt. Tritt bei der Verbrennung keine Raumverminderung ein, ($\Delta V = 0$), so sind beide einander gleich; sonst unterscheiden sich beide durch den sehr kleinen, der Raumverminderung entsprechenden Arbeitswert. Man kann daher beide Werte einander gleich setzen und kurz mit h_u und H_u bezeichnen; setzt man noch abgerundet $r_0 = 600$, so erhält man die üblichen Formeln

$$h_u = h_p - w \,.\, 600, \qquad H_u = H_p - W \,.\, 600.$$

Zur praktischen Bestimmung von H_p und W und damit von H_u dient in bester Weise das Kalorimeter von Junkers.

Wenn die Temperatur t_1 vor der Verbrennung gering ist gegen t, so können mit Rücksicht auf die Unsicherheit der spez. Wärme der Verbrennungserzeugnisse die vorstehenden Verbrennungsgleichungen für den praktischen Gebrauch wie folgt vereinfacht werden:

$$h_u = (1 + G)\, c_p''\, (t - t_1) \text{ und } h_u = (1 + G)\, c_v''\, (t - t_1).$$

Für gasförmige Brennstoffe schreibt man die Verbrennungsgleichungen nach Raumteilen (r)

$$H_u + \Sigma (r'\, C_p')\, t_1 = \Sigma (r''\, C_p'')\, t,$$
$$H_u + \Sigma (r'\, C_v')\, t_1 = \Sigma (r''\, C_v'')\, t,$$

hierbei ist $\Sigma r''$ um den Betrag der Raumverkleinerung ΔV kleiner als $\Sigma r'$.

Ist p_1 der Druck vor und p der nach der Verbrennung im unveränderlichen Raum, so ist

$$\frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_1} \frac{R''}{R'}.$$

Nach den Versuchen von Regnault, Wiedemann (s. S. 318), Mallard & Le Chatelier, Berthelot & Vieille, Langen, Holborn & Austin und Holborn & Henning wachsen die spez. Wärmen der Verbrennungsgase Kohlensäure und Wasserdampf mit der Temperatur beträchtlich. Nach Versuchen von **Langen***) beträgt die mittlere spez Wärme C_v für 1 cbm von 15° und 1 at zwischen 0° und 1600°:

Für die zweiatomigen Gase (Luft, N_2, O_2, H_2) 0,236 gegen 0,203 bei niederen Temperaturen (s. S. 320), für Wasserdampf 0,380 (gegen 0,29) und für Kohlensäure 0,443 (gegen 0,29). Nimmt man lineares Anwachsen der spezifischen Wärmen an, so erhält man hieraus unter Mitberücksichtigung der Versuche bei tieferen Temperaturen folgende Formeln für die mittleren spez. Wärmen zwischen 0° und t^0 für 1 cbm von 15° und 1 at:

Für zweiatomige Gase:

$(C_v)_o^t = 0{,}196 + 0{,}000025\,t$ | $(C_p)_o^t = 0{,}277 + 0{,}000025\,t$

Für Wasserdampf:

$(C_v)_o^t = 0{,}243 + 0{,}000085\,t$ | $(C_p)_o^t = 0{,}324 + 0{,}000085\,t$

Für Kohlensäure:

$(C_v)_o^t = 0{,}28 + 0{,}0001\,t$ | $(C_p)_o^t = 0{,}361 + 0{,}0001\,t$

Für Methan und Aethylen, welche nur bei den niedrigeren Temperaturen vor der Verbrennung in Betracht kommen, läfst sich etwa setzen:

Methan:

$(C_v)_o^t = 0{,}235 + 0{,}0003\,t$ | $(C_p)_o^t = 0{,}316 + 0{,}0003\,t$

Aethylen:

$(C_v)_o^t = 0{,}305 + 0{,}00045\,t$ | $(C_p)_o^t = 0{,}386 + 0{,}00045\,t$

Die wirklichen spez. Wärmen C_v, C_p ergeben sich, wenn man in diesen Formeln den Faktor von t verdoppelt. Um die mittleren und wirklichen spez. Wärmen für 1 kg zu erhalten, müssen die auf 1 cbm (von 15° und 1 at) bezogenen Werte mit $\frac{24{,}4}{\mu}$ multipliziert werden.

Die Wärmemenge, welche nötig ist, um 1 cbm Gas bei unveränderlichem p oder v von t_1 auf $t_2{}^0$ zu erwärmen, berechnet sich nach folgendem Muster:

$$Q = (C)_o^{t_2}\, t_2 - (C)_o^{t_1}\, t_1,$$

$$Q = (a + b\,t_2)\,t_2 - (a + b\,t_1)\,t_1 = a\,(t_2 - t_1) + b\,(t_2{}^2 - t_1{}^2),$$

worin die Gröfsen a und b den obigen Gleichungen zu entnehmen sind.

Ueber 1800° C beginnt die Verbrennung allmählich immer unvollständiger zu werden, da dann Zersetzung von Kohlensäure und Wasserdampf eintritt.

---

*) Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ing.-Wesens, Heft 8 1903.

5. Verbrennung von Gasen und Gasgemischen.

In der Tafel S. 380 sind aufser den eingangs erwähnten einfachen Gasen einige technisch wichtige Gasgemische aufgenommen; da die Zusammensetzung dieser Gase veränderlich ist, so können die Tafelwerte hier nur ungefähre Anhaltpunkte bieten.

Den Berechnungen sind folgende mittleren Raumverhältnisse zugrunde gelegt:

Leuchtgas: $0{,}1\,CO + 0{,}45\,H_2 + 0{,}35\,CH_4 + 0{,}04\,C_2H_4 + 0{,}03\,CO_2 + 0{,}03\,N_2$,
Wassergas: $0{,}4\,CO + 0{,}5\,H_2 + 0{,}04\,CO_2 + 0{,}06\,N_2$.

Generatorgas (Mischgas, Dowsongas, Kraftgas): $0{,}18\,H_2 + 0{,}24\,CO + 0{,}06\,CO_2 + 0{,}52\,N_2$,
Gichtgas (Eisen-Hochofen): $0{,}03\,H_2 + 0{,}29\,CO + 0{,}08\,CO_2 + 0{,}60\,N_2$.

Häufig enthält Wassergas und Mischgas etwas CH_4, in diesem Falle steigt der Heizwert beträchtlich.

Wird 1 cbm eines Gases oder Gasgemisches mit L cbm Luft gemischt und bei unveränderlichem Rauminhalt verbrannt, so berechnet sich die Endtemperatur (t) aus folgender Gleichung:

$$H_u + [\Sigma(r'a) + 0{,}196\,.\,L]\,.\,t_0 + [\Sigma(r'b) + 0{,}000\,025\,L]\,t_0^2$$
$$= [\Sigma(r''a) + 0{,}196\,(L - S_{\min})]\,.\,t + [\Sigma(r''b) + 0{,}000\,025\,(L - S_{\min})]\,t^2.$$

r' sind die Raumteile des Gases vor der Verbrennung,
r'' die Räume der Verbrennungserzeugnisse mit dem gerade nötigen Sauerstoff $S_{\min}$,
a und b sind für die einzelnen Gase aus den oben gegebenen Gleichungen von der allgemeinen Form $[C_v]_0^t = a + b\,t$ einzusetzen,
t_0 ist die Temperatur vor der Verbrennung.

Die Gleichung ist ohne weiteres auch für Verbrennung bei unveränderlichem Druck gültig, nur sind dann die Werte von a aus den Formeln für $[C_p]_0^t$ zu entnehmen. Ebenso findet die Gleichung sinngemäfse Anwendung auf die Verbrennung von festen oder flüssigen Stoffen.

Bei Gasmaschinen enthält das brennbare Gemisch stets noch Rückstände von der vorigen Verbrennung. Es sei die Menge dieser Rückstände für 1 cbm Brenngas $= B$ cbm, dann berechnet sich die Endtemperatur wie folgt:

$$H_u + \left[\Sigma(r'a) + 0{,}196\,L + \frac{B}{1 + L - \Delta V}\left\{\Sigma(r''a) + 0{,}196\,(L - S_{\min})\right\}\right] t_0$$
$$+ \left[\Sigma(r'b) + 0{,}000025\,L + \frac{B}{1 + L - \Delta V}\left\{\Sigma(r''b) + 0{,}000025\,(L - S_{\min})\right\}\right] t_0^2$$
$$= \left(1 + \frac{B}{1 + L - \Delta V}\right)\Big\{[\Sigma(r''a) + 0{,}196\,(L - S_{\min})]\,t$$
$$+ [\Sigma(r''b) + 0{,}000\,025\,(L - S_{\min})]\,t^2\Big\}.$$

ΔV ist die Raumverkleinerung für 1 cbm Gas.

Meist wird der Fehler sehr gering sein, wenn man die Rückstände einfach als Luft behandelt und nach der ersten einfacheren Formel rechnet.

Verbrennung von Gasen.

	Molekulargewicht μ	Dichte, bezogen auf Luft δ	Zur Verbrennung von 1 cbm nötiger Sauerstoff, cbm S	Zur Verbrennung von 1 cbm nötige Luft, cbm L	Raumverminderung bei der Verbrennung von 1 cbm Gas ΔV	Gebildetes Wasser für 1 cbm Gas von 15° und 1 at in kg w	Oberer Heizwert für 1 kg Gas h	Unterer Heizwert für 1 kg Gas h_u	Oberer Heizwert für 1 cbm Gas von 15° und 1 at H	Unterer Heizwert für 1 cbm Gas von 15° und 1 at H_u
Kohlenoxyd CO	28	0,97	0,5	2,38	0,5	0	2440	2440	2800	2800
Wasserstoff H_2	2	0,07	0,5	2,38	0,5	0,74	34100	28700	2800	2360
Methan CH_4	16	0,554	2	9,52	0	1,47	13250	11900	8700	7820
Aethan C_2H_6	30	1,035	3,5	16,7	—0,5	2,21	12350	11300	15200	13900
Propan C_3H_8	44	1,52	5	23,8	—1	2,95	12000	11050	21700	19950
Butan C_4H_{10}	58	2,00	6,5	31,0	—1,5	3,69	11800	10900	28100	25900
Aethylen C_2H_4	28	0,965	3	14,3	0	1,47	12000	11250	13800	12920
Propylen C_3H_6	42	1,45	4,5	21,4	—0,5	2,21	11850	11100	20400	19100
Butylen C_4H_8	56	1,935	6	28,6	—1	2,95	11600	10870	26600	24850
Azetylen C_2H_2	26	0,90	2,5	11,9	0,5	0,74	12000	11600	12800	12360
Leuchtgas . .	12,58	0,434	1,10	5,21	0,275	0,91	9960	8900	5135	4590
Wassergas . .	15,66	0,54	0,45	2,15	0,45	0,369	3930	3580	2520	2300
Generatorgas .	24,25	0,84	0,21	1,00	0,21	0,133	1180	1100	1175	1095
Gichtgas . . .	28,48	0,98	0,16	0,76	0,16	0,022	768	757	896	883

Die folgende Zahlentafel gibt ohne besondere Berücksichtigung der Rückstände die Endtemperaturen und Enddrücke für die Verbrennung von Leuchtgas und Generatorgas von der oben angenommenen mittleren Zusammensetzung. Sie läfst ersehen, dafs hierbei der „Heizwert der Ladung“ $\frac{H_u}{1+L}$ in erster Linie mafsgebend ist. Dafs Leuchtgas niedrigere Temperaturen, aber höhere Drücke ergibt wie Generatorgas, ist eine Folge der geringeren Raumverminderung, denn diese wirkt auf Temperatur und Druck gerade entgegengesetzt ein.

Endtemperatur (t) und Druckzunahme $\left(\frac{p}{p_0}\right)$ bei der Verbrennung von Gasen im geschlossenen Raum.

$\frac{H_u}{1+L}=$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
	Generatorgas. $H_u = 1095$								
$t_0 =$ 0	1315 5,49	1480 6,00	1640 6,48	1790 6,91	1940 7,30	2060 7,66	2180 7,96	2295 8,28	2405 8,52
100	1385 4,19	1545 4,55	1700 4,90	1850 5,21	1985 5,48	2115 5,73	2230 5,95	2345 6,15	2455 6,34
200	1450 3,44	1610 3,72	1765 3,98	1910 4,23	2040 4,43	2170 4,62	2285 4,79	2395 4,95	2505 5,08
300	1520 2,95	1680 3,18	1830 3,39	1970 3,58	2100 3,75	2225 3,91	2340 4,05	2450 4,17	2555 4,27
400	1590 2,62	1750 2,81	1895 2,98	2030 3,14	2160 3,28	2280 3,40	2395 3,51	2505 3,62	2605 3,71
500	1660 2,36	1815 2,53	1960 2,67	2095 2,80	2220 2,92	2235 3,02	2445 3,12	2555 3,21	2655 3,30
	Leuchtgas. $H_u = 4590$								
$t_0 =$ 0	1290 5,62	1460 6,22	1615 6,74	1760 7,25	1895 7,71	2025 8,14	2145 8,53	2260 8,91	2365 9,27
100	1365 4,31	1525 4,72	1675 5,10	1820 5,46	1955 5,79	2080 6,10	2195 6,38	2310 6,64	2415 6,90
200	1435 3,54	1595 3,86	1740 4,16	1880 4,43	2015 4,69	2135 4,92	2250 5,14	2360 5,33	2465 5,54
300	1505 3,05	1660 3,30	1805 3,54	1945 3,76	2075 3,97	2190 4,16	2305 4,34	2415 4,50	2515 4,66
400	1575 2,70	1730 2,91	1870 3,11	2005 3,29	2135 3,47	2250 3,63	2360 3,78	2470 3,92	2570 4,05
500	1650 2,44	1800 2,63	1940 2,79	2070 2,95	2195 3,10	2310 3,23	2420 3,36	2525 3,48	2620 3,59

Obere Zeile t.

Untere Zeile $\frac{p}{p_0}$.

t_0 Anfangstemperatur

H_u Unterer Heizwert

L Luftmenge.

Zusammensetzung der Gase wie S. 379.

Als Beispiel sind im folgenden alle in Betracht kommenden Rechnungen für das **Leuchtgas** durchgeführt.

Bestandteile	R.-T. m	μ	μm	H_p	$m H_p$	Sauerstoff	
CO	0,10	28	2,80	2800	280	1/2	0,050
H_2	0,45	20	0,90	2810	1265	1/2	0,225
CH_4	0,35	16	5,60	8700	3045	2	0,700
C_2H_4	0,04	28	1,12	13800	550	3	0,120
CO_2	0,03	44	1,32	—	—	—	—
N_2	0,03	28	0,84	—	—	—	—
Summe	1,00	—	12,58	—	5140	—	1,095

Damit beträgt der Heizwert des Leuchtgases 5140 WE für 1 cbm bei 15° und 1 at. Die Gaskonstante ist $R' = \frac{848}{12,58} = 67,4$. Das Gewicht von 1 cbm ist $\frac{12,58}{24,4} = 0,516$ kg.

Die Dichtigkeit in bezug auf Luft ist $\frac{12,58}{29} = 0,434$.

Zur Verbrennung ist 1,095 cbm Sauerstoff oder $\frac{1,095}{0,21} = 5,21$ cbm Luft nötig. Es sei angenommen, dafs dem Gase 6,5 cbm Luft beigemengt werden, dann ergeben sich folgende Verbrennungserzeugnisse in cbm:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Kohlensäure} = 0,03 + 0,1 + 0,35 + 2 \,.\, 0,04 = 0,560 \\ \text{Wasserdampf} = 0,45 + 2 \,.\, 0,35 + 2 \,.\, 0,04 \quad = 1,230 \\ \left.\begin{array}{l}\text{Stickstoff und} \\ \text{Sauerstoff}\end{array}\right\} \quad 6,5 - 1,095 = \left.\begin{array}{r}0,03\\5,405\end{array}\right\} = 5,435 \end{array}\right\} = \Sigma(r'') \quad = L - S_{min}$$

Summe = 7,225 cbm.

Die Raumverminderung beträgt mithin: 1 + 6,5 — 7,225 = 0,275.
Die für 1 cbm Gas gebildete Wassermenge ist

$$W = 1,23 \cdot \frac{18}{24,4} = 0,91 \text{ kg},$$

daraus folgt der untere Heizwert des Gases

$$H_u = 5135 - 0,91 \,.\, 600 = 4590 \text{ WE}.$$

Es sei nun die Temperatur und die Druckerhöhung zu bestimmen, welche eintreten, wenn das Gas-Luft-Gemisch ohne Wärmeverlust bei gleichem Rauminhalt verbrennt, und zwar unter der Annahme, dafs dem Gemisch noch 1,5 cbm Rückstände beigemengt werden und dafs die Temperatur t_0 vor der Verbrennung 300° beträgt:

Aus der Gleichung S. 379 folgt dann:

$$t = 2037^{\circ}$$

und

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0} \cdot \frac{R''}{R'} = \frac{2310}{573} \cdot \frac{1 + 6,5 + 1,5 - 0,275}{1 + 6,5 + 1,5} = 3,91.$$

Wollte man die Rückstände als Luft betrachten und nach der vereinfachten Gleichung S. 379 rechnen, so erhält man:

$$t = 2096 \qquad \text{und} \qquad \frac{p}{p_0} = 4,01.$$

6. Von **flüssigen Brennstoffen** kommen hauptsächlich die Destillationserzeugnisse des Erdöls in Betracht. Alle sind Mischungen einer grofsen Anzahl von Kohlenwasserstoffen, und zwar hauptsächlich der Methanreihe $C_n H_{2n+2}$; sie unterscheiden sich wesentlich nur durch das spez. Gew. und die Flüchtigkeit (Siedepunkt), während die Zusammensetzung, der Heizwert, der Sauerstoffbedarf und die Verbrennungserzeugnisse nur wenig veränderlich sind.

Für Verbrennungsmaschinen wird am häufigsten Benzin und Petroleum (Leuchtöl) von den in der Tabellentafel S. 383 angenommenen mittleren Eigenschaften verwendet.

Flüssige Brennstoffe.

	Molekulargewicht μ	Spez. Gew. bei 15° γ	Siedetemperatur t_s	Oberer Heizwert für 1 kg h	Unterer Heizwert für 1 kg h_u	Zur Verbrennung von 1 kg nötiger Sauerstoff in cbm von 15° und 1 at S_{min}	Zur Verbrennung von 1 kg nötige Luftmenge in cbm von 15° und 1 at L_{min}	Bei der Verbrennung von 1 kg entsteht Kohlensäure in cbm von 15° und 1 at CO_2	Bei der Verbrennung von 1 kg entsteht Wasserdampf in cbm von 15° und 1 at H_2O	Dasselbe in kg H_2O
Alkohol C_2H_6O	46	0,794	78,3	7100	6400	1,59	7,6	1,06	1,59	1,174
Spiritus 95 Gew.-Proz.		0,809	78,5	6740	6000	1,51	7,2	1,01	1,66	1,224
„ 90 „		0,823	78,7	6390	5630	1,43	6,8	0,956	1,73	1,274
„ 85 „		0,836	78,9	6030	5240	1,35	6,4	0,903	1,79	1,324
„ 80 „		0,849	79,2	5680	4860	1,27	6,1	0,850	1,86	1,374
„ 75 „		0,861	79,6	5320	4470	1,19	5,7	0,796	1,93	1,424
„ 70 „		0,873	80,0	4970	4080	1,11	5,3	0,743	2,00	1,474
Benzol C_6H_6	78	0,885	80,4	10000	9590	2,35	11,2	1,88	0,94	0,693
Naphthalin $C_{10}H_8$ (Schmelztemp. 80°)	128	0,977 (bei 80°) 1,152 (fest b. 15°)	218	9700	9370	2,29	10,9	1,91	0,76	0,563
Pentan C_5H_{12}	72	0,627	37	11750	10850	2,71	12,9	1,70	2,03	1,500
Hexan C_6H_{14}	86	0,658	69	11550	10670	2,70	12,85	1,705	1,99	1,465
Heptan C_7H_{16}	100	0,683	98	11520	10660	2,69	12,8	1,71	1,95	1,440
Benzin	—	0,69∾0,71	80—110	10500 bis 11000	9800 bis 10200	2,7	12,8	1,71	1,95	1,44
Petroleum	—	0,78—0,82	200—250	10500 bis 11000	9800 bis 10200	2,7	12,8	1,73	1,87	1,38

Vergasung.

Generatorgas entsteht dadurch, dafs in einem Schachtofen (Generator) eine hohe Schicht glühender Kohle erhalten wird, durch welche Luft und Wasserdampf geblasen werden. Die Kohle verbrennt gröfstenteils zu Kohlensäure, von welcher der überwiegende Teil wieder zu Kohlenoxyd reduziert wird. Der Wasserdampf wird in Wasserstoff und Sauerstoff zersetzt. Danach besteht das erzeugte Gas aus CO, H_2, CO_2 und N_2, wobei die chemischen Zeichen zugleich die Raumteile der Stoffe in dem erzeugten Gas bezeichnen sollen. Das Verhältnis des Heizwertes der erzeugten Gasmenge zu dem Heizwert der gleichzeitig verbrannten Kohle bezeichnen wir als den Wirkungsgrad (η) des Generators. Dann gelten folgende Beziehungen:

$$H_2 + CO + CO_2 + N_2 = 1$$

$$\frac{21}{79} N_2 = 0{,}5\,CO + CO_2 - 0{,}5\,H_2$$

$$\eta\,(CO + CO_2) = 0{,}7\,(H_2 + CO)$$

und daraus folgen für die Zusammensetzung des Gases bei angenommenem CO_2-Gehalt:

$$H_2 + CO = \frac{8}{7}\,\frac{\eta}{3-\eta}\,(1 - CO_2)$$

$$CO + CO_2 = \frac{0{,}8}{3-\eta}\,(1 - CO_2)$$

$$N_2 = \frac{15}{7}\,\frac{1{,}4-\eta}{3-\eta}\,(1 - CO_2)$$

$$H_2 = \frac{8}{7}\,\frac{\eta - 0{,}7}{3-\eta}\,(1 - CO_2) + CO_2.$$

Es sei

$\mathfrak{H}$ der obere Heizwert für 1 cbm Gas bei 15⁰ und 1 at,
$\mathfrak{L}$ die Luftmenge in cbm für 1 cbm Gas,
$\mathfrak{K}$ die Kohlenstoffmenge in kg für 1 cbm Gas von 15⁰ und 1 at,
$\mathfrak{W}$ die zersetzte Wassermenge in kg für 1 cbm Gas von 15⁰ und 1 at;

dann gilt:

$$\mathfrak{H} = 2800\,(H_2 + CO); \quad \mathfrak{L} = \frac{N_2}{0{,}79}; \quad \mathfrak{K} = \frac{12}{24{,}4}\,(CO + CO_2); \quad \mathfrak{W} = \frac{18}{24{,}4}\,H_2.$$

Das Verhältnis von Luft zu Kohlenstoff ist:

$$\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}} = 6{,}9\,(1{,}4 - \eta).$$

Führt man in den Generator keinen Wasserdampf, sondern nur Luft ein, so erhält man **Luftgas**, das aus CO, N_2 und CO_2 besteht, und zwar ist:

$$CO = 1{,}652\,(0{,}21 - CO_2), \qquad N_2 = 0{,}652\,(1 + CO_2)$$

$$\eta = 0{,}7\,\frac{0{,}21 - CO_2}{0{,}21 - 0{,}395\,CO_2}.$$

Wassergas entsteht, wenn nur Wasserdampf in den Generator eingeblasen wird; es besteht aus H_2 und CO und meist etwas CO_2:

Es wird $\eta = 1{,}4$, d. h. dem Generator mufs noch eine Wärmemenge von 40 vH vom Heizwert des verbrannten Kohlenstoffes zugeführt werden. Dies geschieht durch **„Warmblasen"** mittels des Luftgasprozesses bei abwechselndem Betrieb.

Die Zusammensetzung des Wassergases wird:

$$H_2 = 0{,}5\,(1 + CO) \qquad CO = 0{,}5\,(1 - 3\,CO_2).$$

$\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{W}$ berechnen sich auch in diesen Sonderfällen nach den obenstehenden Formeln.

VIII. WINDDRUCK UND LUFTWIDERSTAND.

a. Winddruck auf ruhende Flächen.

1. Die Fläche ist winkelrecht zur Windrichtung.

Bezeichnet

F den Inhalt einer ruhenden, ebenen Fläche in qm,
P den senkrechten Winddruck auf F in kg,
v die Geschwindigkeit des Windes in m/sk,*)
g die Beschleunigung durch die Schwere $= 9{,}81$ m/sk²,
ψ eine Erfahrungszahl, die zwischen 1 und 3 liegt,

(Die frühere Annahme, dafs ψ mit F wachse, ist unhaltbar; indessen fehlen zur Zeit ausreichende Versuche und Angaben über die Abhängigkeit von ψ.)

γ das Gewicht von 1 cbm Luft in kg (vrgl. S. 319),

so ist (wie für den Stofs des unbegrenzten Wassers, s. S. 289)

$$P = \psi \gamma F \frac{v^2}{2g},$$

also der Winddruck p in kg/qm

$$p = \frac{P}{F} = \psi \gamma \frac{v^2}{2g}.$$

Für sehr dünne, ebene Platten (von etwa 0,1 qm Fläche) ist nach F. Grashof $\psi = 1{,}86$; mit $\gamma = 1{,}293$ kg/cbm (für trockene Luft von 0° bei 760 mm Q.-S.) ergibt sich hieraus

$$P = 0{,}122\, F v^2 \quad \text{und} \quad p = 0{,}122\, v^2,$$

wonach folgende Tafel berechnet ist:

$v =$	2	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42
$p =$	0,5	1,1	4,4	9,9	17,6	27,6	39,7	54,0	70,6	89,3	110,2	133,4	158,7	186,3	216,1

Nach dieser Formel sind auch die Winddrücke in der Beaufortschen **„Internationalen Skala für Windstärken“** (s. Abteil. II, Abschnitt Schiffbau) bestimmt.

Nach F. R. v. Löfsl**) ist $p = \gamma \frac{v^2}{g}$, womit $p = 0{,}1318\, v^2$ für $\gamma = 1{,}293$ wird (wie bei dem geraden Stofse eines Wasserstrahles auf eine ruhende Fläche), also unabhängig von Gröfse und Form der Fläche. Die Formel entspricht der ersten mit $\psi = 2$.

Eiffel fand aus sehr sorgfältigen Versuchen

$$P = K F v^2,$$

wo K für Geschwindigkeiten von 19 bis 40 m/sk $= 0{,}08$ gesetzt werden kann.

---

*) Bei dem Orkane am 12. Februar 1894 wurden folgende gröfste Windgeschwindigkeiten gemessen: Orkney-Inseln $v = 43$ m/sk, Holyhead $v = 39$ bis 40 m/sk, Fleetwood ein Windstofs mit $v = 54$ m/sk, Deutsche Seewarte in Hamburg $v = 42$ m/sk.

S. auch Z. d. V. d. I. 1904, S. 946 und Z. d. B. 1904, 7. Mai.

Die Windgeschwindigkeit v (also auch der Winddruck P) wächst mit dem Abstande von der Erdoberfläche; das hierfür geltende Gesetz ist noch nicht genau festgestellt. Nach Gust. Land (Anleitung zum Entwerfen gemauerter Schornsteine, Hannover 1898) nehme man den Winddruck p in x m Höhe über dem Erdboden um x kg/qm gröfser an als am Erdboden.

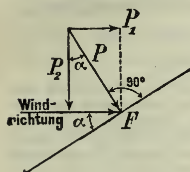
**) S. F. v. Löfsl: Die Luftwiderstands-Gesetze, Wien 1896.

Die nämlichen Gleichungen gelten auch für den Widerstand, den die ruhende Luft einer ebenen Fläche entgegensetzt, die sich winkelrecht zu ihrer Ebene bewegt.

2. Die Fläche ist geneigt zur Windrichtung.

Stöfst der Wind auf eine ruhende Fläche F, die mit der Windrichtung den Winkel α bildet (Abb. 162), so ist der winkelrecht auf die Fläche wirkende Winddruck

Abb. 162.



$$P = p_1 F,$$

worin, unter p den Wert unter **1.** verstanden, zu setzen ist:

1) nach I. Newton: $p_1 = p \sin^2 \alpha$,
2) nach F. R. v. Löfsl: $p_1 = p \sin \alpha$,
3) nach Rayleigh und E. Gerlach:

$$p_1 = p \frac{(4 + \pi) \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}. \quad {}^{*})$$

Für gekrümmte Flächen ergibt Formel 1), für ebene Flächen Formel 2) gute Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Die meist angewendete Formel 1) gibt die kleinsten, die Formel 3) die gröfsten Werte.

Der Normaldruck $P = p_1 F$ (s. Abb. 162) zerlegt sich in zwei Seitenkräfte

in der Richtung des Windes . . . $P_1 = p_1 F \sin \alpha$,
winkelrecht zu dieser Richtung . . $P_2 = p_1 F \cos \alpha$.

3. Hiernach ergibt sich für den Winddruck (in kg)

a) auf einen **Kreiszylinder**, dessen Achse winkelrecht zur Windrichtung ist

gemäfs Formel 1) . . $P_1 = {}^2/_3\, p F = 0{,}667\, p F = 0{,}667\, p d h$,
„ „ 2) . . $P_1 = {}^1/_4\, \pi p F = 0{,}785\, p F = 0{,}785\, p d h$,

worin d den Zylinderdurchmesser in m, h die Höhe des Zylinders in m und $F = d h$ in qm die Projektion der Zylinderfläche winkelrecht zur Windrichtung bedeutet;

b) auf ein regelmäfsiges **achtseitiges Prisma**, dessen Achse winkelrecht zur Windrichtung ist, höchstens

gemäfs Formel 1) . . . $P_1 = 0{,}707\, p F = 0{,}707\, p d h$,
„ „ 2) . . . $P_1 = 0{,}828\, p F = 0{,}828\, p d h$,

worin d der Durchmesser des dem regelmäfsigen Achteck eingeschriebenen Kreises in m, h die Höhe des Prismas in m und $F = d h$ ist;

c) auf ein regelmäfsiges **sechsseitiges Prisma** höchstens

gemäfs Formel 1) . . . $P_1 = 0{,}75\, p F = 0{,}75\, p d h$,
„ „ 2) . . . $P_1 = 0{,}866\, p F = 0{,}866\, p d h$.

---

*) S. Z. d. B. 1885 S. 203. Daselbst findet sich ein Vergleich der Ergebnisse dieser drei Formeln durch Zeichnung.

(Hierbei trifft der Wind 2 Seiten des Prismas. Trifft er 3 Seiten, davon eine senkrecht, so ist

$$P_1 = 0{,}625\, p D h = 0{,}721\, p d h,$$
$$\text{bzw. } P_1 = 0{,}75\, p D h = 0{,}866\, p d h,$$

worin D den Durchmesser des umschriebenen Kreises bezeichnet.)

d) auf ein **quadratisches Prisma**, dessen Höhe $= h$ und dessen Quadrat-Seitenlänge $= a$ in m ist,

α) wenn die Windrichtung winkelrecht zu einer der Seitenflächen ist:

$$P_1 = p a h,$$

β) wenn die Windrichtung winkelrecht zu einer der Diagonalen ist:

gemäfs Formel 1) . . . . . . $P_1 = 0{,}707\, p a h,$

" " 2) . . . . . . $P_1 = p a h.$

4. In der Litteratur finden sich über den verhältnismäfsigen Winddruck auf Oberflächen von Körpern mit kreisförmigem oder vieleckigem Querschnitt mannigfaltige, von den vorstehenden oft sehr abweichende Angaben. Nach Versuchen von Irminger (Kopenhagen) ist für den Kreiszylinder: $P_1 = 0{,}57\, p\, d\, h$, für das quadratische Prisma (Fall **3.** d α): $P_1 = 0{,}95\, p\, a\, h$, dsgl. (Fall **3.** d β): $P_1 = 0{,}79\, p\, a\, h$, für die Kugel $P_1 = 0{,}31\, p \cdot {}^1/_4\, \pi\, D^2$. Friedr. Ritter (Wien) berechnet*) für den Kreiszylinder $P_1 = 0{,}45\, p\, d\, h$, für die Kugel $P_1 = 0{,}33\, p \cdot {}^1/_4\, \pi\, D^2$.

5. Bei **Belastung von Dächern** usw. durch den Wind wird bisweilen berücksichtigt, dafs dieser bis zu 10^0 gegen die Wagerechte einfallen kann. Nach Lilienthal**) hat der Wind dagegen im allgemeinen eine unter 3^0 ansteigende Richtung.

Der normale Winddruck auf 1 qm Dachfläche ist gleich dem wagerechten Winddruck auf 1 qm Aufrifsfläche und gleich dem lotrechten Winddrucke auf 1 qm Grundfläche.

6. **Amtliche Bestimmungen über die Gröfse des Winddruckes** für statische Berechnungen.

1) **Preufs. Akademie des Bauwesens.** Nach den Gutachten vom 13. Juli 1889 und 17. April 1899***) genügt es für deutsche Windverhältnisse, bei der Berechnung der Standfestigkeit hoher Bauwerke $p = 125$ kg/qm und $p_1 = p \sin^2 \alpha$ (Formel 1) zu setzen. Rücksicht auf besondere örtliche Lage ist indes nicht ausgeschlossen. (Für Leuchttürme ist man bis $p = 330$ kg/qm gegangen.)

2) **Bauabteilung des Preufs. Ministeriums der öffentl. Arbeiten.** Nach Vorschrift vom 16. Mai 1890 ist $p \geqq 125$ kg/qm, bei freistehenden Gebäuden nötigenfalls p bis 250 kg/qm anzunehmen. Die Windrichtung ist dabei wagerecht zu wählen und die Formel 2) $p_1 = p \sin \alpha$ anzuwenden.

3) **Preufs. Ministerium der öffentl. Arbeiten;** Vorschrift für Brücken (vom September 1895). Bei belasteter Brücke ist $p = 150$ kg/qm, bei unbelasteter Brücke, falls dies für die Standsicherheit zu berücksichtigen ist, $p = 250$ kg/qm anzunehmen.

4) **Erlafs des Preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten und des Ministers für Handel und Gewerbe für die Berechnung der Standfestigkeit von Schornsteinen*****).** In der Regel $p = 125$ kg/qm (einschl. der Saugwirkung auf der Leeseite). Angriffspunkt ist der Schwerpunkt des lotrechten Schnittes der Säule. Ist der Flächeninhalt dieses Schnittes F, bei eckigen Schornsteinen rechtwinklig zu zwei gegenüberliegenden Flächen gemessen, so ist die Gröfse des Winddrucks: bei runden Schornsteinen $0{,}67\, p F$, bei achteckigen Schornsteinen $0{,}71\, p F$, und bei rechteckigen Schornsteinen $1{,}0\, p F$.

---

*) S. Fr. Ritter, Winddruck auf Zylinder- und Kugelflächen, Zeitschr. f. Luftschiffahrt u. Physik d. Atm., April/Mai 1896.

**) S. Lilienthal, Der Vogelflug; Berlin 1889, R. Gärtner.

***) S. Z. d. B. 1889 S. 279 u. 1899 S. 257.

****) S. Erlafs vom 30. April 1892, Z. d. V. d. I. 1902 S. 1117.

b. Winddruck auf bewegte Flächen (Windräder).

Bezeichnet

v die Geschwindigkeit des Windes in der Achsenrichtung eines Windrades in m/sk,

ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades (vrgl. S. 141 u. f.),

$u_x = x\omega$ die Umfangsgeschwindigkeit eines Elementes dF einer Flügelfläche im Abstande x (in m) von der Achse in m/sk,

l die Länge eines Flügels in m,

u_l die Umfangsgeschwindigkeit im Abstande l in m/sk,

b die gleichbleibende Flügelbreite in m,

a die Anzahl der Flügel,

φ den veränderlichen Wert des Neigungswinkels der Flügelfläche gegen die Windrichtung, von $\varphi = \beta$ bis $\varphi = \alpha$ wachsend,

γ sowie g und ψ s. S. 386,

so ist der **Triebdruck** gegen das Flächenelement dF im Abstande x von der Flügelachse

$$dP = \psi\gamma dF \frac{(v \sin\varphi - u_x \cos\varphi)^2}{2g} \cos\varphi.$$

Dieser Wert wird ein Maximum, wenn

$$\operatorname{tg}^2\varphi - 3\left(\frac{u_x}{v}\right)\operatorname{tg}\varphi = 2 \text{ ist.}$$

Durch Beobachtungen ist festgestellt worden, dafs für **Windmühlenräder,** bei denen $l = 12$ m und $a = 4$,

$$\frac{u_l}{v} = \frac{l\omega}{v} = 2{,}32, \quad \text{also} \quad \frac{u_x}{v} = \frac{x\omega}{v} = (2{,}32 : 12)\,x = 0{,}193\,x \text{ ist.}$$

Hiernach ergibt sich (mittels vorstehender Gleichung für $\operatorname{tg}\varphi$) für:

$x =$	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m
$\varphi =$	60°	64° 39′	68° 27′	71° 30′	73° 57′	75° 24′
$x =$	7 m	8 m	9 m	10 m	11 m	12 m
$\varphi =$	77° 29′	78° 48′	79° 50′	80° 54′	81° 29′	82° 8′

Die auf das Windmühlenrad übertragene **Leistung** ist

$$L = \frac{8}{81}\psi\gamma\frac{bv^4}{\omega g}\Big(\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)\Big) \text{ in mkg/sk,}$$

falls $$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\cos\varphi} + \frac{\cos^3\varphi + \cos\varphi}{2\sin^4\varphi} + \frac{3}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right).$$

Der **achsial wirkende Winddruck** gegen das Windmühlenrad ist

$$D = \frac{8}{27}\psi\gamma\frac{bv^3}{\omega g}\Big(\Omega(\alpha) - \Omega(\beta)\Big) \text{ in kg,}$$

falls $$\Omega(\varphi) = \frac{1 - 2\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\cos\varphi} + 2\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right).$$

DRITTER ABSCHNITT.

FESTIGKEITSLEHRE.

I. ALLGEMEINES UND VERSUCHSWERTE.*)

A. Erklärungen und allgemeine Gesetze.

Die Formänderung, die ein würfelförmiges Körperteilchen unter der Einwirkung äußerer Kräfte erfährt, besteht im allgemeinen aus **Längenänderungen** und aus **Winkeländerungen.** Ersteren entsprechen **Normalspannungen** σ, letzteren **Schubspannungen** τ in den Flächen des Körperteilchens.

a. Längenänderungen und Normalspannungen.

1. Wird ein gerader zylindrischer Stab von der Länge l und vom Durchmesser d an seinen Endflächen durch zwei gleiche, entgegengesetzt gerichtete, gleichmäßig über die Endflächen verteilte Zugkräfte P beansprucht, so erfolgt

1) eine Vergrößerung der Länge l um λ, also auf $l + \lambda$,
2) eine Verminderung des Durchmessers d um δ, also auf $d - \delta$.

Das Verhältnis $\varepsilon = \dfrac{\text{Verlängerung}}{\text{Ursprüngliche Länge}} = \dfrac{\lambda}{l}$ heißt **Dehnung.**

Das Verhältnis $\varepsilon_q = \dfrac{\delta}{d} = \dfrac{\varepsilon}{m}$ heißt **Querzusammenziehung.**

Der **Wert** $m = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_q} = \dfrac{\text{Dehnung}}{\text{Querzusammenziehung}}$ ist vom Stoffe des Stabes abhängig und liegt für isotrope Körper zwischen 3 und 4; für Metalle ist $m = {}^{10}/_{3}$.

2. Der Dehnung $\varepsilon = \lambda : l$ entspricht, wenn F den Stabquerschnitt bedeutet, die **Zugspannung** (Normalspannung) $\sigma = P : F$. (Die Spannung σ wird stets auf den ursprünglichen Stabquerschnitt bezogen.) Das Verhältnis

$$\frac{\text{Dehnung}}{\text{Spannung}} = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \alpha = \frac{1}{E}$$

*) Im wesentlichen nach C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 9. Aufl.; Stuttgart 1903 A. Bergsträsser.

heißt die **Dehnungszahl** (in qcm/kg) und sein umgekehrter Wert $E = 1 : \alpha$ das **Elastizitätsmaß** (in kg/qcm).

Es ist $$\frac{\lambda}{l} = \frac{\sigma}{E} \quad \text{oder} \quad \lambda = \alpha l \sigma,$$

ferner $$\alpha = \frac{F\lambda}{Pl} \quad \text{und} \quad E = \frac{Pl}{F\lambda}.$$

Die Dehnungszahl α eines Stoffes ist demnach die Verlängerung in cm, die ein aus dem Stoffe gefertigter Stab von 1 cm Länge und 1 qcm Querschnitt durch 1 kg Belastung erfährt, oder auch die Zahl, mit der man die Spannung σ multiplizieren muß, um die Dehnung zu erhalten, oder kurz: die Zunahme der Einheit der Länge für das Kilogramm Spannung.*)

Im allgemeinen ist α (oder E) abhängig von der Spannung σ. Für manche Stoffe (z. B. für Schweißeisen, Flußeisen, Stahl, Kupfer, Aluminium, Holz) ist jedoch α innerhalb gewisser Spannungsgrenzen nahezu unveränderlich; alsdann sind also die Dehnungen ε den Spannungen σ proportional, und es ist $\varepsilon = \alpha\sigma$ (**Hookesches Gesetz**). Die Spannung σ_P, bis zu der diese Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung stattfindet, heißt **Proportionalitätsgrenze.**

Die meisten Baustoffe haben keine Proportionalitätsgrenze. Für sie — mit Ausnahme von Marmor und Gummi — gilt bis zur Streckgrenze σ_f) nach C. Bach und W. Schüle mit hinreichender Genauigkeit das allgemeine Gesetz der elastischen Dehnungen

$$\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$$ **(Potenzgesetz).**

Hierin sind α_0 und n für jeden Stoff unveränderlich; für Gußeisen, Kupfer, Zinkguß, Granit, Sandstein, Zement, Zementmörtel und Beton ist $n > 1$, und die Dehnungen wachsen rascher als die Spannungen; für Leder und Hanfseile ist $n < 1$.**)

Bezeichnet α_σ den Wert der Dehnungszahl bei der Spannung σ, so ist nach dem Potenzgesetze

$$\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n = \int_0^\sigma \alpha_\sigma d\sigma, \quad \text{also} \quad \alpha_0 n \sigma^{n-1} d\sigma = \alpha_\sigma d\sigma,$$

woraus

$$\alpha_\sigma = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = (\alpha_0 n)\,\sigma^{n-1}.$$

Für den spannungslosen Zustand ($\sigma = 0$) würde hiernach $\alpha_\sigma = 0$, $E = \infty$ sein, alls $n > 1$ (Gußeisen usw.), und $\alpha_\sigma = \infty$, $E = 0$, falls $n < 1$ (Leder usw.).

In Abb. 1 sind, dem Verhalten eines Stabes bei allmählich wachsender Zugbeanspruchung entsprechend, die Spannungen σ als Funktion der Dehnungen ε dargestellt. OZ_0 = Achse der Dehnungen, OB_1 = Achse der zugehörigen Spannungen, Linie $OPSBZ$ = Span-

*) Die Dehnungszahl α läßt sich mit der Wärme-Ausdehnungszahl α (s. S. 297) vergleichen, die die Zunahme der Einheit der Länge eines Stabes für 1 Grad Temperaturerhöhung bedeutet.

) Ueber frühere Versuche, die das Gesetz $\sigma = a\varepsilon - b\varepsilon^2$ ergaben, s. Hartig, Civ.-Ing. 1893 S. 113. Vergl. auch R. Mehmke, Z. f. Math. u. Phys. 1897, Schlußheft. Für **Kautschuk ist nach A. Imbert (Civ.-Ing. 1893 S. 120)

$$\varepsilon = e^{m\sigma} - 1, \quad \text{also} \quad \alpha_\sigma = m e^{m\sigma}.$$

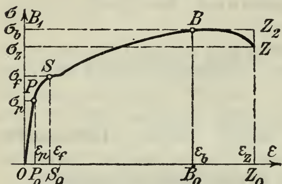
nungslinie. Es ist eine Proportionalitätsgrenze P vorausgesetzt, mithin OP eine Gerade.

Die Dehnungszahl α_σ ist die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der im Punkte (ε, σ) an die Spannungslinie gezogenen Tangente gegen die σ-Achse.

Streck- oder **Fließgrenze** σ_f (in kg/qcm) ist die oberhalb von σ_p liegende Spannung, bei der für manche Stoffe eine besonders rasche und bleibende Dehnung (ein Strecken, Fließen) eintritt. (S in Abb. 1.)

Mit wachsender Belastung tritt unter Zunahme der Dehnung bei B die **Höchstspannung** σ_b ein, die man gewöhnlich gleich der **Zugfestigkeit** K_z anzunehmen pflegt. Die Zugfestigkeit (Bruchspannung) K_z (in kg/qcm) ist indessen genauer die (auf den ursprünglichen Stabquerschnitt F bezogene) Spannung σ_z, bei der mit fortgesetzter Dehnung der Bruch des Stabes erfolgt (bei Z, Abb. 1). Als zugehörige Dehnung zu K_z gilt allgemein ε_z (statt des schwer meßbaren ε_b).

Abb 1.



Bei zerrissenen Stäben (von der ursprünglichen Länge l und dem Querschnitte F) ist noch festzustellen: die Länge l_b nach erfolgtem Bruch und der Querschnitt F_b an der Bruchstelle. Man nennt

$$\varphi = 100\,\frac{l_b - l}{l} \quad \text{die Dehnung und}$$

$$\psi = 100\,\frac{F - F_b}{F} \quad \text{die Querzusammenziehung (Einschnürung)}$$

des zerrissenen Stabes, ausgedrückt in vH der ursprünglichen Länge bzw. des ursprünglichen Querschnittes. ψ ist ein Maß für die **Zähigkeit** des Stoffes. (Ueber die Abhängigkeit der zu wählenden Länge l vom Stabquerschnitt F s. Stoffkunde.)

3. Wird der um λ gedehnte Stab entlastet, so verliert er die erlittene Formänderung nicht wieder vollständig; ist λ_1 die verschwindende Längenänderung, die sogenannte **elastische** (federnde) **Dehnung,** so ergibt sich die **bleibende** Dehnung $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$.

Für genügend kleine Belastungen sind die bleibenden Dehnungen λ_2 gleich null oder doch verschwindend klein. Die Spannung σ_e, bis zu der die bleibende Dehnung λ_2 nahezu $= 0$, der Stab also nahezu vollkommen elastisch ist, heißt die **Elastizitätsgrenze.**

Bei Metallen wird durch Hämmern, Walzen, Ziehen (bei Stahl auch durch Härten und bei Eisen auch durch verminderten P- oder C-Gehalt) die Elastizitätsgrenze σ_e erweitert, in geringem Maße auch die Zugfestigkeit K_z vergrößert, die Dehnbarkeit (die bleibende Formänderung λ_2) aber vermindert. — Ausglühen bewirkt das Gegenteil.

Ein Stoff ist um so elastischer, je größer die elastische (federnde) Längenänderung λ_1 im Vergleich zur ganzen Längenänderung λ ist. Das Verhältnis $\lambda_1 : \lambda$ dient daher als Maß für die **Vollkommenheit der Elastizität** (bei einer bestimmten Belastung). Für vollkommene Elastizität ist $\lambda_1 : \lambda = 1$; sonst ist das Verhältnis ein echter Bruch.

Die **Größe der Elastizität** α_1 ist die Federung der Längeneinheit für die Einheit der Spannung, also $\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{l\sigma}$.

4. Die durch eine bestimmte Belastung oder Entlastung zu erzielende Formänderung bedarf je nach dem Stoff einer kürzeren oder längeren Zeit, während deren die **elastische Nachwirkung** eintritt.

Die Formänderungen und ebenso die Festigkeit sind daher abhängig von der Zeit, innerhalb deren die Belastung von 0 bis zum Größtwerte wächst, und abhängig von der Dauer der vollen Belastung.

Eine besonders starke elastische Nachwirkung zeigt das Leder.

5. Die Formänderungen und die Festigkeit sind meist in hohem Grade abhängig von der **Temperatur.** (Weiteres hierüber s. S. 396 u. f.)

6. Vorstehende Erklärungen gelten sinngemäß auch für eine Druckbeanspruchung des Stabes.

Die **Druckspannung** σ bewirkt eine Verkürzung ε der Stablänge l um λ ($\varepsilon = \lambda : l$) und eine Vergrößerung des Durchmessers, Querdehnung (Querausbauchung) $\varepsilon_q = \varepsilon : m$. An Stelle der Streckgrenze σ_f tritt hier die **Quetschgrenze,** bei der der Stoff nach der Seite abfließt, ohne daß eine Zerstörung erfolgt.

Die **Druckfestigkeit** K (in kg/qcm), d. i. die Spannung, bei der der gedrückte Körper zerstört wird, nimmt mit zunehmender Stablänge ab.

Nach Bauschinger ist für Steine

$$K = \left(a + b\,\frac{\sqrt{F}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{F}}{{}^1\!/_4\,u}},$$

worin F der Querschnitt des gedrückten Prismas, h seine Höhe, u der Umfang seines Querschnittes, a und b zwei nur von der Stoffbeschaffenheit abhängige Zahlenwerte sind.

7. Arbeit der Längenänderung. Die Arbeit A, die zur Formänderung von 1 ccm eines prismatischen Stabes bis zu dessen Zerreißen (Zerdrücken) erforderlich ist, heißt das **Arbeitsvermögen** des Stoffes und wird dargestellt durch die Fläche $OPSBZZ_0O$ in Abb. 1; es ist (in cmkg/ccm):

$$A = \xi \sigma_b \varepsilon_z,$$

worin $\sigma_b \varepsilon_z$ das Rechteck $OB_1Z_2Z_0O$ aus σ_b und ε_z, und ξ (< 1) den Völligkeitsgrad bedeutet.

Wird ein Stab durch eine von null bis P stetig wachsende, an dem einen Stabende angreifende Kraft gedehnt oder gedrückt, wobei in dem um x cm von der Endfläche abstehenden Querschnitt F die Normalspannung σ entsteht, so ist allgemein die zur Erzeugung der Formänderung aufgewendete Arbeit (in cmkg)

$$A = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{P^2 dx}{EF} = \frac{1}{2}\int_0^l \alpha_\sigma \sigma^2 F dx.$$

Insbesondere für den prismatischen Stab vom Rauminhalt $Fl = V$ (in ccm) wird innerhalb der Proportionalitätsgrenze die Arbeit der Formänderung

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} Fl = \frac{\sigma^2}{2E} V = \frac{P}{2}\frac{\sigma}{E} l = \frac{1}{2} P\lambda,$$

wenn λ die Verlängerung oder Verkürzung des Stabes bedeutet.

Besteht, wie unter **3.** ausgeführt, λ aus einer elastischen (federnden) Verlängerung λ_1 und einer bleibenden Verlängerung λ_2, so ist nach F. Grashof die Arbeit der Längenänderung $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ für den prismatischen Stab

$$A = P\left(\tfrac{1}{2}\lambda_1 + \vartheta\lambda_2\right),$$

worin ϑ zwischen 0,75 und 1 liegt.

b. Winkeländerungen und Schubspannungen.

1. Aendern unter der Einwirkung einer äußeren Kraft zwei ursprünglich winkelrecht aufeinander stehende Flächenteilchen eines Körpers ihren rechten Winkel um γ (in Bogenmaß gemessen), so ist die Aenderung γ auch gleich der Strecke, um die sich zwei um 1 voneinander abstehende parallele Flächenteilchen gegeneinander verschoben haben. Die **Schiebung** oder Winkeländerung γ ist stets die Folge einer paarweise auftretenden **Schubspannung** τ in den beiden winkelrecht aufeinander stehenden Flächenteilchen.

Das Verhältnis $\dfrac{\text{Schiebung}}{\text{Schubspannung}} = \dfrac{\gamma}{\tau} = \beta = \dfrac{1}{G}$

heißt die **Schubzahl** (in qcm/kg) und der umgekehrte Wert $G = 1 : \beta$ das **Gleitmaß** oder das Schubelastizitätsmaß (in kg/qcm).

Die Schubzahl β ist demnach die Strecke in cm, um die sich zwei um 1 cm voneinander abstehende Flächenteilchen unter der Einwirkung der Schubspannung von 1 kg/qcm gegeneinander verschieben, oder der in Bogenmafs gemessene Winkel, um den sich der rechte Winkel zweier ursprünglich winkelrecht aufeinander stehenden Flächenteilchen bei 1 kg/qcm Schubspannung ändert.

2. Zwischen der Dehnungszahl α und der Schubzahl β sowie zwischen dem Elastizitätsmaß E und dem Gleitmafs G bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\beta = \frac{2(m+1)}{m}\alpha \quad \text{und} \quad G = \frac{m}{2(m+1)}E,$$

daher für $m = {}^{10}/_{3}$ (vrgl. S. 390):

$$\beta = 2{,}6\,\alpha \quad \text{und} \quad G = {}^{5}/_{13}\,E = 0{,}385\,E.$$

3. Schubfestigkeit K_s (in kg/qcm) ist die Schubspannung, bei der sich zwei gegeneinander verschobene Querschnitt-Ebenen eines Stabes trennen ($K_s = \mu_1 K_z$).

τ_p (in kg/qcm) ist die Schubspannung, die der Proportionalitätsgrenze σ_p (s. S. 391) entspricht.

Lediglich praktische Bedeutung haben: die **Biegungsfestigkeit** $K_b = \mu_0 K_z$ (in kg/qcm) als die rechnungsmäfsige gröfste Normalspannung, bei der der Bruch eines gebogenen, und die **Drehungsfestigkeit** K_d (in kg/qcm) als die rechnungsmäfsige gröfste Schubspannung, bei der der Bruch eines gedrehten Körpers eintritt.

c. Zulässige Spannung und Sicherheit gegen Bruch.

Die **zulässige Spannung** (k_z für Zug, k für Druck, k_b für Biegung, k_s für Schub, k_d für Drehung) ist die Spannung, bis zu der ein Körper durch äufsere Kräfte auf eine der verschiedenen Arten der Festigkeit beansprucht werden darf. Die zulässige Spannung liegt gewöhnlich unterhalb der Proportionalitätsgrenze und der Elastizitätsgrenze. — Weiteres s. S. 404 u. f.

(E, G, σ_p, σ_f in kg/qcm gelten für Zug und Druck.)

Eisensorte	Elastizitätsmaſs $E=\frac{1}{\alpha}$	Gleitmaſs $G=\frac{1}{\beta}$	Proportionalitätsgrenze σ_p	Streck- bzw. Quetschgrenze σ_f	Festigkeit für Zug K_z	Festigkeit für Druck K	Arbeitsvermögen A	Bemerkungen
Schweiſseisen, ‖ zur Sehnenrichtung	2 000 000	770000	1300 und mehr	1800 und mehr	3300 bis 4000 [1])	σ_f maſsgebd.	200 bis 700	see notes below
Fluſseisen . .	2 150 000	830000	1800 und mehr	2000 und mehr	3400 bis 4400	σ_f maſsgebd.	600 bis 800	
Fluſsstahl . .	2 200 000	850000	2500 bis 5000 [2])	2800 u. mehr; härterer Stoff ohne Streckgrenze	4500 bis 10000 u. mehr.	wenn weich, so ist σ_f maſsgebend; wenn hart, so $K \geqq K_z$.	Zäher Stahl 800 u. mehr	
Federstahl, ungehärtet	2 200 000	850000	5000 u. mehr		bis 10000 und mehr	.	.	
„ gehärtet	2 200 000 [2])	850000	7500 u. mehr	.	bis 17000 und mehr	.	.	
Stahlguſs [3]) . .	2 150 000	830000	2000 u. mehr	2100 und mehr	3500 bis 7000 u. mehr	wie bei Fluſsstahl.	Zäher Stahlguſs 700 u. mehr	
Guſseisen . .	750 000 bis 1 050 000	290000 bis 400000	σ_p und σ_f nicht vorhanden. Für Zug: $\varepsilon = \frac{1}{1\,250\,000}\sigma^{1,1}$; für Druck: $\varepsilon = \frac{1}{1\,180\,000}\sigma^{1,05}$.		1200 bis 2400	7000 bis 8500	8 bis 14	
Nickelstahl [4]) von Fried. Krupp	2 089 000	.	3400	$\varphi = 20$ vH, $\psi = 55$ vH	6900	.	900	

[1]) Gilt für **Schweiſseisen** ‖ zur Sehnenrichtung; für Schweiſseisen ⊥ zur Sehnenrichtung ist

$K_z = 2800$ bis 3500.

[2]) Nach Versuchen von Stribeck ist E unabhängig von dem Grade des Härtens (s. Z. d. V. d. I. 1901 S. 77).

[3]) Nach Versuchen von C. Bach (Z. d. V. d. I. 1899 S. 694) zeigte Stahlguſs von $K_z = 4300$ Dehnungen $\varphi = 27$ vH und Einschnürungen $\psi = 50$ vH.

[4]) **Nickelfluſseisen**

$K_z = 5000$, $\sigma_e = 3500$, $\varphi = 22$, $\psi = 60$

Nickelstahl weich

$K_z = 6000$, $\sigma_e = 4000$, $\varphi = 20$, $\psi = 55$

Nickelstahl mittelhart

$K_z = 6500 - 7000$, $\sigma_e = 4200 - 5000$, $\varphi = 18$, $\psi = 50$.

Werte des Völligkeitsgrades ξ

($A = \xi K_z \frac{\varphi}{100}$, s. S. 393).

Schweiſseisen . . . . . . 0,7—0,8,
Fluſseisen, zähes 0,63,
Fluſsstahl (für Maschinenteile) . . . . 0,6—0,75,
Stahlguſs, zäher . . . . 0,7.

Die **Sicherheit gegen Bruch** $\mathfrak{S}$ ist das Verhältnis der Festigkeit zur zulässigen Spannung; für Zugbeanspruchungen ist also die Sicherheit $\mathfrak{S} = K_z : k_z$, für Druckbeanspruchungen $\mathfrak{S} = K : k$ usw. Man spricht von einer $\mathfrak{S}$-fachen Sicherheit gegen Bruch.

B. Elastizitäts- und Festigkeitszahlen.

Alle Zahlenangaben beziehen sich auf **kg** und **qcm.** — Weitere Angaben über einzelne Baustoffe s. 4. Abschn., Stoffkunde.

a. Eisen und Stahl.

Werte von E, G, K_z, K, A s. Tafel S. 395.

Scherfestigkeit $K_s = \mu_1 K_z$. Gufseisen $\mu_1 = 1{,}02$ bis $1{,}17$, i. M. $= 1{,}10$; Schweifseisen in Stäben $\perp$ z. F. $\mu_1 = 0{,}78$—$0{,}82$, in Blechen $\mu_1 = 0{,}87$ längs, $\mu_1 = 0{,}84$ quer; für Flufseisen in Stäben $\perp$ z. F. $\mu_1 = 0{,}84$ bis $0{,}87$.

Anforderungen an die Festigkeit, Dehnung und Einschnürung von Eisen und Stahl mit Rücksicht auf den Verwendungszweck des Metalles s. 4. Abschn., Stoffkunde.

Einflufs der Temperatur. Für **Schweifseisen** ist

f. d. Temperatur $t =$	100°	200°	300°	400°	500°	600°	700°	800°
die Zugfestigkeit $=$	104	112	116	96	76	42	25	15

in vH der Zugfestigkeit K_z bei $t = +20^0$.

Für **Flufseisen** ist nach Versuchen von Martens und Rauh*), wobei
im angelieferten Zustande: $K_z = 4100$, $\varphi = 26{,}9$ vH, $\psi = 48{,}3$ vH,
geglüht . . . . $K_z = 3850$, $\varphi = 30{,}4$ vH, $\psi = 58{,}6$ vH,

für die Temperatur . . $t =$	-20^0	$+20^0$	100^0	200^0	300^0	400^0	500^0	600^0
Zugfestigkeit . . . $K_z =$	4100	3850	3950	5100	4750	3300	1900	1070
Elastizitätsmafs . $E:1000 =$	2070	2070	2010	1950	1880	1790	1510	1340
Dehnung . . . . . . $\varphi =$	37	37	22	19	23	45	66	99
Einschnürung . . . . $\psi =$	57	58	51	41	23	56	78	90,5

$K_{z\,min} = 3800$ für $t = 50^0$; $K_{z\,max} = 5150$ für $t = 240^0$; $\varphi_{min} = 19$ vH für $t = 160^0$
$\psi_{min} = 23$ vH für $t = 280^0$ (**Blaubrüchigkeit** des Flufseisens).

Für hochwertiges **Gufseisen** (mit $K_z = 2350$) ist nach C. Bach bei

$t = 300^0$ 400^0 500^0 570^0

die Zugfestigkeit $=$ 99 92 76 52 vH der Zugfestigkeit K_z bei 200^0.

Für **Stahlgufs****) fand C. Bach (bei einem vH-Gehalt von 0,18 C, 0,36 Mn, 0,28 Si, zusammen 0,29 an S, P, As, Cu) folgende Werte bei $\sim$ 40 Minuten Belastungsdauer

---

*) S. Mitteilungen aus den Königl. Techn. Versuchsanstalten zu Berlin, 1890 Heft IV S. 159 u. f.; ferner A. Ledebur, Z. d. V. d. I. 1896 S. 565 u. f. Weitere Versuche von C. Bach s. Z. d. V. d. I. 1904 S. 1300.

**) S. Z. d. V. d. I. 1903 S. 1762; 1904 S. 385.

für die Temperatur . . . $t =$	$+20^0$	100^0	200^0	300^0	400^0	500^0
Zugfestigkeit . . . . . $K_z =$	4165	4567	5253	5052	4043	2365
Streckgrenze . . . . . $\sigma_f =$	2375	2156	2186	1911	1384	.
Dehnung . . . . $\varphi =$	28	16	18	25	36	64
Einschnürung . . . . . $\psi =$	57	46	41	48	63	81

Bei Stahlgufs anderer Zusammensetzung ergaben sich noch erheblich gröfsere Verschiedenheiten, insbesondere der Dehnung, z. B. $\varphi_{200} = \frac{1}{3,3}\varphi_{20}$.

b. Kupfer und Kupferlegierungen.

Metallsorte	Elastizitätsmafs $E = \frac{1}{\alpha}$ kg/qcm	Proportionalitätsgrenze σ_p kg/qcm	Zugfestigkeit K_z kg/qcm	Dehnung φ vH	Einschnürung ψ vH	Arbeitsvermögen A cmkg/ccm
Kupferblech, gewalzt[1]	(1 150 000)	·[5]	2000 bis 2300[5]	35—38	45—50	711 ($\xi = 0,65$ bis 0,7)
Messing, gegossen .	800 000[2]	650	1500	13	17,5	
Rotgufs	900 000[3]	900	2000	6—20	10,52	23[4]
Geschützbronze . .	1 100 000[3]	300	3000	.	.	.
„ verdichtet .	1 100 000[3]	900	3200	.	.	.
Phosphorbronze, gegossen	.	.	2400[7]	.	.	.
Manganbronze (10 vH), gegossen	.	.	2500[7]	.	.	.
Deltametall s. S. 394						
Oerlikoner Bronze Nr. A., überschmiedet	.	2800	4400 bis 5600[6]	15—25	.	.

[1]) **Kupfer.** Feuerbüchs-Hartkupfer (geglüht) $K_z > 2300$, $\varphi > 38$, $\psi > 45$. Sonder-Feuerbüchskupfer und Sonder-Stehbolzenkupfer (geglüht) $K_z > 2700$, $\varphi > 35$, $\psi > 60$. Dsgl. „extra gehärtet" für Stehbolzen $K_z > 4000$, $\varphi = 4$, $\psi = 60$. Sonderkupfer für Zentrifugen usw. (geglüht) $K_z = 2700$, $\varphi > 35$, $\psi > 60$,
(hartgewalzt) $K_z = 3200$, $\varphi > 12$, $\psi > 50$.

[2]) Genauer ist $\varepsilon = \sigma^{1,085} : 947\,000$ für die erste,
$\varepsilon = \sigma : 800\,000$ (bis $\sigma = 650$) für wiederholte Beanspruchung.

[3]) Genauer ist $\varepsilon = \sigma^{1,028} : 734\,000$ für die erste,
$\varepsilon = \sigma : 900\,000$ (bis $\sigma = 900$) für wiederholte Beanspruchung.

[4]) $A = 115$ für $K_z = 1650$, $\varphi = 8,4$, $\psi = 13,5$,
$A = 466$ für $K_z = 2700$, $\varphi = 20,5$, $\psi = 23,2$.
ξ i. M. $= 0,8$.

[5]) **Kupfer.** Für gehämmertes Kupfer $K_z = 2700$, für gezogenes Kupfer $K_z = 3150$ für elektrolytisch gewonnenes Kupfer $K_z = 3800$. K_z wird durch fortgesetztes Hämmern um 20 vH gröfser, dabei φ um 80 vH kleiner.
σ_e nahezu $= 0$; bei wiederholt stark überangestrengtem Kupfer bis auf 600—1000
σ_p nahezu $= 0$; „ „ „ „ „ bis auf 600; alsdann ist $= 1\,150\,000$.

Für weiches Kupfer fand C. Bach etwa $\varepsilon = \sigma^{1,098} : 2\,200\,000$ für die erste Beanspruchung, $\varepsilon = \sigma^{1,074} : 1\,900\,000$ für wiederholte Beanspruchung.

[6]) Ueber die Festigkeit verschiedener **Bronzen** s. Z. d. B. 1885 S. 204.

[7]) Nach Tetmajer.

Deltametall (Schmelzpunkt 900 bis 1000°, spez. Gew. 7,8 bis 8,5).

Legierung		K_z	φ	ψ
I	Rohgufs gewalzt	5200 bis 6100 6800 bis 7000	6 bis 13 19 bis 23	11 bis 15 22 bis 29
II	Rohgufs geprefst	4300 bis 4800 5500 bis 6600	16 bis 23 15 bis 21	48 bis 54 42 bis 48
III	Rohgufs geschmiedet	3600 bis 4000 4300 bis 4700	23 bis 43 31 bis 40	25 bis 37 32 bis 53

Deltametall mit $K_z = 7330$ gewalzt hat $K_z = 7660$ geprefst.
Muntz-Metall gewalzt $K_z = 5050$, geprefst 5460.
Stahlbronze (von Fried. Krupp, 1902).

weich	$K_z = 5100$,	$\varphi = 33$,	$\psi = 32$,
hart	5800,	16,	18,
Marke L.D.	7400,	19,	19.

Einflufs des **Pressens** (nach dem Dickschen Verfahren) bei Messing:

Kupfergehalt vH	φ vH	K_z (kg/qcm) gewalzt	K_z (kg/qcm) geprefst	K_s (kg/qcm) gewalzt	K_s (kg/qcm) geprefst
60	49	3440	3720	2670	2540
58	41	4050	4250	2820	2730
55	32	4790	5230	3520	3130

Einflufs der Temperatur.

Kupferblech bei	50°	100°	150°	200°	250°	285°	367°	451°	556°
$K_z =$	98	95	91	85	79	75	66	51	33 vH

der Festigkeit bei etwa 10°. Nach Versuchen von Stribeck mit Stehbolzenkupfer nimmt K_z bei längerer Belastungsdauer (bis 30 st) mit wachsender Temperatur rascher ab als bei der gewöhnlichen Belastungsdauer; zwischen 300 und 400° beträgt K_z nur die Hälfte des Wertes für gewöhnliche Belastungsdauer. Aehnliches gilt für φ und ψ.

Bronze (91,4 Cu, 2,8 Zn, 5,5 Sn) mit $K_z = 2400$, $\varphi = 36$, $\psi = 52$ (Kaiserl. Werft, Kiel) hat nach C. Bach

bei	100°	200°	300°	400°	500°
noch $K_z =$	101	94	57	26	18 vH
$\varphi =$	98	96	32	0	0 vH
$\psi =$	91	93	31	0	0 vH

der Zugfestigkeit K_z, Dehnung φ und Querzusammenziehung ψ bei 20°.

Bronze (87 Cu, 4,3 Zn, 8,7 Sn) mit $K_z = 2490$, $\varphi = 17$, $\psi = 21$ (für Ventilgehäuse usw.) hat nach C. Bach

	bei	100^0	200^0	300^0	400^0	500^0
noch	$K_z =$	99	96	65	45	28 vH,
	$\varphi =$	116	103	39	9	2 vH,
	$\psi =$	94	90	41	5	0 vH.

der Zugfestigkeit K_z, Dehnung φ und Querzusammenziehung ψ bei 20^0.

Durana-Gufsmetall*) (58,7 Cu, 39,6 Zn, 1,0 Sn, 0,4 Pb, 0,34 Fe) der Dürener Metallwerke A.-G. Für langdauernde Belastung ergab sich

für die Temperatur $t =$	24^0	95^0	148^0	170^0	214^0	320^0	420^0	542^0
Zugfestigkeit . . $K_z =$	4080	3450	3140	2800	1800	650	200	50
Streckgrenze . . $\sigma_f =$	1800	1720	1700	1640	1250	450	160	.
Dehnung . . . . $\varphi =$	32	27	44	50	62	61	39	30
Einschnürung . . $\psi =$	36	33	50	51	52	53	40	42

c. Andere Metalle und Stoffe.

Aluminium,**) rein (98,5 bis 99 vH Al)
gegossen: $E = 675\,000$, $G = 260\,000$, $K_z = 930$ bis 1000, $\varphi = 8$ bis 13; gewalzt oder geschmiedet, 0,7 cm stark: längs $E = 726\,000$, $K_z = 1500$, $\sigma_p = 480$, $\varphi = 5$; quer $E = 690\,000$, $K_z = 1400$, $\sigma_p = 440$, $\varphi = 6$.

Aluminium-Bronze mit 10 vH Al: $E = 1\,200\,000$, gegossen $K_z = 6200$, $\varphi = 0{,}5$ vH, gewalzt $K_z = 5100$, $\varphi = 0{,}4$ vH. Aluminium-Bronze mit 5 vH Al: gewalzt, 1,2 bis 1,6 cm dick, $E = 1\,200\,000$, $K_z = 4300$, $\varphi = 50$ vH.

Aluminium-Messing (gegossen) mit 3 vH Al: $K_z = 6000$, $\varphi = 7{,}5$ vH
,, ,, ,, 1 vH Al: $K_z = 4000$, $\varphi = 50$ vH.

Magnesium:
$K_z = 2320$, $K = 2720$, $K_b = 1600$, $\sigma_p =$ nicht vorhanden.

Magnalium (mit 2 bis 23 vH Magnesium, 98 bis 77 vH Aluminium, 2,4 bis 2,57 spez. Gew., 600 bis 700^0 Schmelzpunkt): gegossen in Schalen $K_z = 3000$ bis 4500, in Sand $K_z = 1200$ bis 2100, gewalzt 2000 bis 2500 bei $\varphi = 5$ bis 10, geprefst 3700 bis 5000.

Zink, gewalzt, bei 16^0:***) Gehalt an Cd 0,03 bis 0,91 vH, Pb 0,02 bis 0,81 vH. Blechdicke 1,6 bis 3 mm. $E = 872\,000$ bis $1\,200\,000$, i. M. 960 000, $K_z = 2050$ bis 2570, i. M. 2350, $\varphi = 12$ bis 38, $\psi = 23$ bis 56.

Der Einflufs der **Belastungsdauer** ist hier besonders grofs; es fand sich

$$K_z = \frac{3225}{1 + 0{,}2392\sqrt{t}},$$

wo t die Dauer der Belastung in Minuten.
Für $t = 0$ (plötzliche Belastung) ist $K_z = 3225$.

Zinn: $E = 400\,000$, $K_z = 350$.

Blei, weich, gewalzt oder gegossen: $E = 50\,000$, $K_z = 125$, $\sigma_f = 50$ bis 150 (für Druck, je nach der Höhe des Versuchskörpers, $h : d = 2$ bis 0,1).

*) Nach Stribeck, s. Z. d. V. d. I. 1904, S. 897.
**) Im wesentlichen nach Tetmajer.
***) Nach E. Rasch, Dingl. Journ. 1907 S. 54.

Blei, hart (Hartblei): $K_z = 300$, $\sigma_f = 300$ (für Druck) $h:d = 1$.

Weifsmetall,*) 90 Pb, 10 Sb: $\sigma_f = 153$, $K_z = 500$, $E_z = 267\,000$, $\varphi = 0{,}8$, $\psi = 1{,}5$; Druck $\sigma_f = 218$, $K = 1190$, $E = 273\,000$; $K_b = 840$; $K_s = 360$.

85 Pb, 15 Sb: $\sigma_f = 145$, $K_z = 450$, $E_z = 270\,000$, $\varphi = 1{,}2$, $\psi = 2{,}4$; Druck $\sigma_f = 168$, $K = 1180$, $E = 286\,000$, $K_b = 730$, $K_s = 340$.

80 Pb, 15 Sb, 5 Sn: $\sigma_f = 128$, $K_z = 400$, $E_z = 275\,000$, $\varphi = 0{,}5$; Druck $\sigma_f = 160$, $K = 1100$, $E = 297\,000$, $K_b = 760$, $K_s = 300$.

Glas: $E = 700\,000$. $K_z = 250$. Für geblasenes Glas $K_b = 375$, für Rohglas $K_b = 200 + 160\,(1{,}5 - s)^2$, wo s die Glasdicke in cm.

Papierstoff (in geleimten Lagen): $K = 1500$.

d. Hölzer.

(Nach J. Bauschinger und L. Tetmajer.)

Die Festigkeitszahlen sind wesentlich abhängig vom Feuchtigkeitsgehalte: Die Festigkeit nimmt mit wachsender Feuchtigkeit erheblich ab; mit zunehmender Lagerungszeit vergröfsert sich die Druckfestigkeit bedeutend. E ist für Druck nahezu unveränderlich. — Die folgenden Angaben beziehen sich auf den ganzen Querschnitt (Kernholz und Splintholz zusammen).

Art der Beanspruchung	Feuchtigkeitsgehalt vH	Elastizitätsmafs E kg/qcm	Proportionalitätsgrenze σ_p kg/qcm	Festigkeit K kg/qcm	Feuchtigkeitsgehalt vH	Elastizitätsmafs E kg/qcm	Proportionalitätsgrenze σ_p kg/qcm	Festigkeit K kg/qcm
	Kiefer				**Eiche**			
Zug } parallel zur Faser	13	90000	.	790	.	108000	475	965
Druck } parallel zur Faser	18	96000	155	280	.	103000	150	345
Biegung[1]) .	23	108000	200	470	24	100000	215	600
Schub[2]) . .	25	.	.	45	.	.	.	75
	Fichte				**Buche**			
Zug } parallel zur Faser	16	92000	.	750	.	180000	580	1340
Druck } parallel zur Faser	19	99000	150	245	.	169000	100	320
Biegung[1]) .	29	111000	230	420	17	128000	240	670
Schub[2]) . .	38	.	.	40	.	.	.	85

[1]) Der Stammkern liegt in der Querschnittsmitte.

[2]) Abscherung parallel zur Faserrichtung in einer durch die Stammachse gehenden Ebene. K_s für das Kernholz $= 0{,}75\,K_s$ für den ganzen Querschnitt.

Nach Tetmajer ist, wenn $\mu_1 = K_s : K_z$, für Nadelholz $\mu_1 = 0{,}104$, nach Winkler für Nadelholz $\mu_1 = 0{,}064$ (|| z. F.), $\mu_1 = 0{,}032$ (⊥ z. F.), für Eichenholz $\mu_1 = 0{,}084$ (|| z. F.), $\mu_1 = 0{,}027$ (⊥ z. F.).

*) Nach Goodman, Dingl. Journ. 1906 S. 718.

e. Steine*) und Bindemittel.

Baustoff	Festigkeit (nach J Bauschinger) für Zug	Biegung	Schub	Bemerkung
Steine . . .	$K_z = 1/_{26}\ K$	$K_b = 1/_6\ K$	$K_s = 1/_{13}\ K$	.
Zementmörtel	$K_z = 1/_{10}$ bis $1/_6\ K$	$K_b = 1/_4\ K$	$K_s = 1/_6\ K$	K_z min = 16
Kalkmörtel .	$K_z = 1/_3\ K$	.	.	.
Beton . . .	$K_z = 1/_{12}$ bis $1/_{10}\ K$	.	$K_s > K_z$	.

Baustoff	Druckfestigkeit K kg/qcm	Baustoff	Druckfestigkeit K kg/qcm
Granit,[1]) Diorit, Syenit	800—2000	Mittelbrand- } Ziegelsteine[5])	200—300
Porphyr	1000—2600	Schwachbrand- } Ziegelsteine[5])	150—200
Basalt	1000—3200	Ziegelmauerwerk . . .	140
Trachyt	500—1000	Porige Vollsteine . .	150
Basaltlava	500	Korkstein[3])	17
Grauwacke	500—1500	" $K_b =$	7,2
Kohlensandstein . .	500—1800	Zement ohne Sandzusatz .	250—270
Keupersandstein . .	700—1800	Zementmörtel:	
Bruch- und Quadersandstein . . .	300—1000	1 R.-T. Portland-Zement + 1 R.-T. Sand	200 (nach 28 Tagen, davon 27 unter Wasser)
		1 R.-T. Portland-Zement + 2 " "	180
Kalkstein	400—2000	1 R.-T. Portland-Zement + 3 " "	160
Zement-Beton[2]) . .	80—250	Asbestzement[4]) nach 28 Tagen	
Kunstsandstein . .	450		
" $K_z =$	47		
Hochofenschlacke, getempert	1000—2500	unter Wasser erhärtet .	47
		an der Luft " .	85
Klinker-Ziegelsteine	300—900	guter Kalkmörtel . .	40

[1]) C. Bach fand beispielsweise für feinkörnig blauen **Granit**: $K = 1006$, $K_b = 84$, $K_s = 78$, $K_z = 45$.

[2]) In Würfelform, je nach Zusammensetzung, 28 Tage alt.

[3]) von Grünzweig & Hartmann in Ludwigshafen a. Rh.

[4]) der Asbestzementwerke, G. m. b. H., Hamburg. $K_z : K = 1 : 4$.

[5]) $K_z : K$ nach Hartig = 1 : 14 bis 1 : 15.

Das **Elastizitätsmafs** der Steine und Mörtel hängt in hohem Grade von der Spannung und (bei letzteren) von der Erhärtungszeit ab. Setzt man nach S. 387 $\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$, so ist nach C. Bach**) für

	$\frac{1}{\alpha_0}$	n	Beton (Druck):	$\frac{1}{\alpha_0}$	n
Granit (Zug)	240 000	1,40	1 Zem., $2^1/_2$ Sand, 5 Kies	298 000	1,145
" (Druck)	300 000	1,12	1 " 5 " 6 "	280 000	1,137
reinen Zement (Druck) . .	250 000	1,09	1 " 5 " 10 "	217 000	1,157
Zementmörtel 1 : $1^1/_2$ (Druck)	356 000	1,11	1 " $2^1/_2$ " 5 Sch.[1])	457 000	1,157
" 1 : 3 "	315 000	1,15	1 " 3 " 6 "	380 000	1,161
" 1 : $4^1/_2$ "	230 000	1,17	1 " 5 " 10 "	367 000	1,207

[1]) Sch. = Kalksteinschotter.

*) Ausführlichere Angaben über die Festigkeit natürlicher Gesteine s. Hugo Koch: Die natürlichen Bausteine Deutschlands; Berlin 1892, Ernst Toeche.

**) S. Z. d. V. d. I. 1897 S. 241.

Die Dehnungszahl bei der Spannung σ beträgt

$$\alpha_\sigma = \frac{1}{E_\sigma} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \alpha_0 n \sigma^{n-1},$$

die mittlere Dehnungszahl für die Spannungsgrenzen 0 und σ

$$\alpha = \frac{1}{E} = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \alpha_0 \sigma^{n-1};$$

z. B. ist für **Granit** die Dehnungszahl bei $\sigma = 45$ kg/qcm Druck $E_\sigma = 530\,400$, $E = 437\,600$; für **Zementmörtel** (1 : 4½) bei $\sigma = 30$ kg/qcm Druck $E_\sigma = 480\,000$, $E = 410\,000$.

Sandstein zeigt starke Veränderlichkeit von α_τ und E; z. B. fand C. Bach für Zug bei $k = 0$ bis 4,2 $E = 93\,700$, bei $k = 4,2$ bis 8,3 $E = 46\,000$, bei $k = 8,3$ bis 12,3 $E = 29\,250$, bei $k = 12,3$ bis 16,4 $E = 21\,000$ i. M.*)

Portland-Zement, sandfrei, wassersatt, 7 (bzw. 430) Tage alter Probekörper, ergab nach E. Hartig für den spannungslosen Zustand $E = 141\,000$ (bzw. 318 000). Für lufttrockenen Zementmörtel war i. M. $E = 257\,000$.

Bei **Zementmörtel** ergeben sich nach C. Bach für einen Sandzusatz von 0, 1,5, 3 u. 4,5 R.-T. (zu 1 R.-T. Zement) zwischen 0 u. 40 kg/qcm Druck durchschn. $E = 211\,000$, 281 000, 232 000, 159 000 (Die spezifischen Gewichte waren dabei 2,065, 2,117, 2,04, 1,91.) Der Sandzusatz vermindert daher zunächst die Elastizität, weiterer Zusatz vermehrt sie wieder.

Beton aus 1 R.-T. Portland-Zement, 2½ R.-T. Sand, 5 R.-T. Kies, 77 Tage alt, hat nach Druckversuchen von C. Bach**)

für $\sigma =$ 0 bis 7,9	$E = 306\,000$	$\sigma = 23,7$ bis 31,6	$E = 212\,000$
7,9 „ 15,8	256 000	31,6 „ 39,5	194 000
15,8 „ 23,7	226 000	Weitere Angaben s. S. 401 unten.	

Die Werte E sind Mittelwerte für die angegebenen Druckgrenzen.

Nach den preufs. „Bestimmungen f. d. Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten“ vom 24. 5. 1907 ist bei Verbundkonstruktionen E für Beton (Druck) $= \frac{1}{15} E$ für Eisen anzunehmen, sofern nicht ein anderer Wert nachgewiesen wird; das ergibt $E_{Beton} = \frac{1}{15} \cdot 2\,150\,000 = 143\,000$. Für Strafsen- und Eisenbahnbrücken ist nach Bestimmungen der Königl. Eisenbahn-Direktion Berlin $E_{Beton} = \frac{1}{10} E_{Eisen}$ (= 215 000) anzunehmen. Dieser Wert findet sich auch anderwärts.

Versuche über E bei Zug von Weifs und Freytag (1901) lehren, dafs die meist übliche Annahme: $E_{Zug} = \frac{1}{9}$ bis $\frac{1}{25} E_{Druck}$, i. M. $= \frac{1}{16} E_{Druck}$, nicht zutrifft. Danach ist $E_{Zug} : E_{Druck} = 0,88$ bis 0,73 für $\sigma = 3$ bis 6 kg/qcm.

Ziegel (mit $K = 284$, $K_z = 20$) haben nach E. Hartig durchschnittlich $E = 93\,000$, Klinker (Mergelklinker mit $K = 780$, $K_z = 52$) $E = 210\,000$.†)

Nach Versuchen an Gewölben††) ist das mittlere Elastizitätsmafs E für die Spannungsgrenzen 0 und σ_p

für Bruchstein	Ziegelstein	Stampfbeton	Moniergewölbe
$E = 60\,400$	27 800	246 000	333 500.

*) Weiteres s. Z. d. V. d. I. 1900 S. 1169. — **) S. Z. d. V. d. I. 1896 S. 1391. — ***) S. E. Mörsch, Der Eisenbetonbau, 1906 S. 25 u. f. — †) S. Zivil-Ing. 1893 S. 323. — ††) S. Bericht des Gewölbe-Ausschusses des österr. Ing.- u. Arch.-Vereins in Wien, auch Z. ö. I. u. A. V. 1895.

f. Zugorgane.

Die Zugfestigkeit der **Drähte** ist abhängig vom Drahtdurchmesser. Sind c und K_0 Unveränderliche, so ist für den Drahtdurchmesser d in **mm** die Zugfestigkeit in kg/qcm

$$K_z = \frac{c}{d} + K_0.$$

(K_0 bedeutet demnach die Zugfestigkeit des Stoffes für $d = \infty$.)

Werte von c und K_0 nach Karmarsch.

Drahtsorte	ungeglüht c	ungeglüht K_0	geglüht c	geglüht K_0	Drahtsorte	ungeglüht c	ungeglüht K_0	geglüht c	geglüht K_0
Bester Eisendraht .	1590	6370	380	3310	Messingdraht . . .	1020	5480	700	2870
Gewöhnl. Eisendraht	2290	4580	640	2870	Harter Bleidraht . .	0	220	.	.
Stahldraht	2670	6370	380	5730	Weicher Bleidraht .	0	170	.	.
Zinkdraht	220	1270	.	.	Platindraht	1210	2230	960	1850
Kupferdraht	960	3500	0	2360	Bronzedraht	1860	5030	.	.

Vom Drahtdurchmesser unabhängige, mittlere Werte der Zugfestigkeit K_z enthält die folgende Tafel.

Stoff	Elastizit.-mafs für Zug $E = 1 : \alpha$ kg/qcm	Prop.-grenze für Zug σ_p kg/qcm	Zugfestigkeit K_z kg/qcm	Bemerkungen
Eisendraht blank gezogen	.	4200	5600 (bis 7000)	Für einmal geflochtene (Drahtspiral-) Seile $E_1 = 0{,}6\,E$,
Eisendraht geglüht . .	2000000	2000	4000 [1])	für doppelt geflochtene (übliche) Seile
Bessemerstahldraht blank . .	.	5200	6500	$E_1 = 0{,}6^2\,E$,
Bessemerstahldraht geglüht .	2150000	2250	4000—6000	für dreifach geflochtene Seile
Tiegelstahldraht . .	2150000	10000	9000—19000 [2])	(mehrere Litzen zu einem Strang, mehrere Stränge zu
Zinkdraht	150000	.	1900	einem Seil — Kabelseile)
Kupferdraht	1300000	1200	4000	$E_1 = 0{,}6^3\,E$,
Bronzedraht	.	.	4600—7100	worin E das Elastizitätsmafs
Siliziumbronzedraht	.	.	6500—8500	des betr. Drahtes ist.[4])
Doppelbronzedraht .	.	.	7600	
Höpermetalldraht (verbess. Phosphorbronze) blank .	.	.	14000	$\varphi = 1$ vH
Höpermetalldraht (verbess. Phosphorbronze) geglüht	.	.	6300	$\varphi = 72$ vH
Deltametalldraht . .	.	.	bis 9840	
Messingdraht . . .	1000000	1300	5000	
Aluminiumdraht . . .	.	.	2300—2700	bei 460^0 $K_z = 160$
Magnaliumdraht . .	.	.	3300—3700	$\varphi = 6$ vH
Bleidraht	70000	.	220 hart; 170 weich	$G = 26250$
Lederriemen, neu . .	1250	160	250—450 [3])	Leder für Zug: $\varepsilon = \frac{1}{415}\,\sigma^{0,7}$, falls $\sigma = 3{,}9$ bis $27{,}2$
Lederriemen, gebraucht	2250	.		
Manila- und Schleifshanfseile . . .	6000 bis 15000 i. M. 7500 [5])		1200 bis 1350 neu [6]); 500 alt [5])	
Drahtseile	s. o. bei Eisen- u. Stahldraht.		.	

[1]) Verzinkter, geglühter Flufseisendraht für Telegraphenzwecke $K_z = 4000$ bis 4300.

[2]) J. Fowler & Co. in Leeds verwenden bei Drahtseilen zur Kraftübertragung für landwirtschaftliche Maschinen Stahldraht von $K_z = 25\,300$; s. Z. d. B. 1886 S. 371. — Für sogen. Pflugstahldraht ist $K_z = 18\,000$.

Verzinkter Telegraphendraht $K_z = 13\,500$. — Flufsstahldraht zu Förderseilen (namentlich bei Menschenförderung) $K_z = 11\,500$ bis 13 000, u. Umst. bis 20 000 gewählt.

[3]) Bei schnellem Zerreifsen. Für monatelange Belastung sinkt K_z bis auf das $^2/_3$-fache herab.

Zugfestigkeit K_z **anderer Riemen:***) Schlangenleder (100 mm breit, sehr dünn) 500; Chromleder (Mitte der Bauchseite, Längsrichtung) 600 bis 900 (gegen 300 bis 400 bei lohgarem Leder); Ramieriemen 820; gewebte Baumwollriemen 360, genähte dsgl. 450 bis 520; Balatariemen 450; Kameelhaarriemen (Kette Kameelhaar, Einschlag Baumwolle) 400 kg/qcm.

[4]) Werte von K_z für **Drahtseile** s. auch 6. Abschn., Maschinenteile.

[5]) Bezogen auf den tatsächl. Querschnitt der Litzen $= 0{,}66 \frac{\pi d^2}{4}$, wo d der Seildurchmesser. Bezieht man K_z auf den Querschnitt $\frac{\pi d^2}{4}$, so ergeben sich Werte $= ^2/_3$ der angegebenen.

C. Zulässige Spannungen.

a. Zulässige Spannungen für den Maschinenbau.

Erklärung des Begriffes der zulässigen Spannung s. S. 394.

In nachstehender Tafel**) gelten die zulässigen Spannungen unter I, wenn die Belastung eine ruhende ist.

Die zulässigen Spannungen unter II gelten, wenn die Belastung beliebig oft wechselt, derart, dafs die durch sie hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von null bis zu einem gröfsten Werte stetig wachsen und dann wieder auf null zurücksinken (z. B. wiederholte Dehnung, wiederholte Biegung, wiederholte Drehung nach einer Richtung hin).

Die zulässigen Spannungen unter III gelten, wenn die Belastung beliebig oft wechselt, derart, dafs die durch sie hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von einem gröfsten negativen Werte stetig wachsen bis zu einem gröfsten positiven, absolut gleich grofsen Werte, dann wieder abnehmen (z. B. wiederholte Biegung und wiederholte Drehung nach entgegengesetzten Richtungen hin). Der Wechsel der Beanspruchung kann auch durch Aenderung der Temperatur bewirkt werden.

Für die zwischenliegenden Arten der Belastung können dazwischenliegende, den Spannungsgrenzen entsprechende Werte genommen werden.

Wenn Bauteile gegen die Wirkung bewegter Massen widerstandsfähig zu machen sind, so ist dafür eine besondere Rechnung anzustellen und u. Umst. die eigentümliche Beanspruchung (Stöfse) durch Verminderung der zulässigen Spannungen schätzungsweise zu berücksichtigen.

Gegenüber der Wirkung bewegter Massen sowie gegenüber der Einwirkung von Spannungen, die durch stark wechselnde Belastungen oder durch starke Wärmeschwankungen veranlafst werden, empfiehlt sich die Wahl eines Stoffes mit ausreichend grofsem Arbeitsvermögen.

---

*) S. Thomae, Z. d. V. d. I. 1901 S. 353.

**) Vrgl. C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 9. Aufl. S. 45.

Zulässige Spannungen in kg/qcm, nach C. Bach.

Art der Festigkeit und Belastung		Schweifseisen[1])	Flufseisen[2]) von	Flufseisen[2]) bis	Flufsstahl[2]) von	Flufsstahl[2]) bis	Stahlgufs von	Stahlgufs bis	Gufseisen	Kupferblech gewalzt
Zug k_z	I	900	900	1200	1200	1500	600	900	300	600[5])
	II	600	600	800	800	1000	400	600	200	300
	III	300	300	400	400	500	200	300	100	.
Druck k	I	900	900	1200	1200	1500	900	1200	900	.
	II	600	600	800	800	1000	600	900	600	.
Biegung k_b	I	900	900	1200	1200	1500	750	1050	.	.
	II	600	600	800	800	1000	500	700	.[3])	.
	III	300	300	400	400	500	250	350	.	.
Schub k_s	I	720	720	960	960	1200	480	840	300	.
	II	480	480	640	640	800	320	560	200	.
	III	240	240	320	320	400	160	280	100	.
Drehung k_d	I	360	600	840	900	1200	480	840	.	.
	II	240	400	560	600	800	320	560	.[4])	.
	III	120	200	280	300	400	160	280	.	.

[1]) Für **vorzügliches Schweifseisen** können die angegebenen zulässigen Spannungen um Beträge bis zu einem Drittel höher genommen werden, sofern die hierdurch zugelassenen gröfseren Formänderungen in ihrer Gesamtheit mit dem Zwecke des Bauteiles vereinbar sind. Wo zu befürchten steht, dafs die Gesamtformänderung die mit Rücksicht auf den Zweck des Bauteiles als zulässig erachtete Grenze überschreitet, ist von dieser auszugehen.

[2]) Die höheren Werte sind nur bei durchaus zuverlässigem, nicht zu weichem Stoff anzuwenden (vrgl. S. 395). — Für **Draht** gelten, entsprechend der gröfseren Zugfestigkeit, gröfsere Werte für k_z, u. zw. $k_z = \frac{1}{3} K_z$ bis $\frac{1}{5} K_z$.

[3]) Für **bearbeitetes Gufseisen** (vrgl. S. 423) setze man die zulässige **Biegungsspannung**

$$k_b = \mu k_z \sqrt{\frac{e}{z_0}}, \text{ worin}$$

$\mu = 1{,}20$ bis $1{,}33$, und für den Balkenquerschnitt:
e den Abstand der am stärksten gespannten Faser von der Nullachse,
z_0 den Abstand des Schwerpunktes der auf der einen Seite der Nullachse gelegenen Querschnittfläche von der Nullachse bezeichnet.

Versuche ergaben für den rechteckigen Querschnitt $k_b = 1{,}7\,k_z$, für den kreisförmigen Querschnitt $k_b = 2{,}05\,k_z$, für den I-förmigen Querschnitt $k_b = 1{,}45\,k_z$.

Für **vorzügliches Gufseisen** in Formen, die Gewähr für geringe Gufsspannungen und vollkommene Dichtheit bieten, können die für k_b gegebenen Werte um Beträge bis zu einem Viertel höher genommen werden.

Für **Rohgufs** ergab sich $k_b = 1{,}4\,k_z$ bzw. $k_b = 1{,}7\,k_z$ und $k_b = 1{,}2\,k_z$ bei den vorstehend bezeichneten Querschnitten.

[4]) Die zulässige **Drehungsspannung** k_d des **bearbeiteten Gufseisens** setze man

für den kreisförmigen Querschnitt . . . . $k_d =$ (reichlich) k_z,
" " kreisringförmigen und hohlelliptischen Querschnitt $k_d = 0{,}8\,k_z$ bis k_z,
" " elliptischen Querschnitt . . . . $k_d = k_z$ bis $1{,}25\,k_z$,
" " quadratischen Querschnitt . . . . $k_d = 1{,}4\,k_z$,
" " rechteckigen Querschnitt . . . . $k_d = 1{,}4\,k_z$ bis $1{,}6\,k_z$,
" " hohlrechteckigen Querschnitt . . . . $k_d = k_z$ bis $1{,}25\,k_z$,
" " I-, [-, +-, L-förmigen Querschnitt . . . . $k_d = 1{,}4\,k_z$ bis $1{,}6\,k_z$

Der Einfluſs der Guſshaut ist hier geringer als bei der Biegungsspannung.

Die zulässige **Zugspannung** k_z für Guſseisen s. in Tafel S. 405.

5) Bei Windkesseln groſser Feuerspritzen sei $k_z \geq 800$, bei Zentrifugen $k_z = 500$.

Für **Federstahl** ist nach C. Bach im Falle II für den ungehärteten Zustand $k_b = 3600$ kg/qcm, für den gehärteten Zustand $b_b = 4300$ kg/qcm. Nach Wöhler wähle man für gehärtete Eisenbahnfedern i. M. $k_b = 6500$ kg/qcm, wobei ein Spielen zwischen 6500 und 8600 zulässig; Stambke empfiehlt $k_b = 5500$ bis 5800 kg/qcm unter Zugrundelegung der ruhigen Last.

b. Zulässige Spannungen für den Hochbau (in kg/qcm).

1. Metalle.

I. Vorschrift der **Berliner Baupolizei** (vom 21. Februar 1887 u. 3. März 1899) und der **Bauabteilung des preuſs. Ministeriums der öffentlichen Arbeiten** (vom 16. Mai 1890).

Metall	Zug k_z	Druck k	Schub k_s
Schweiſseisen	750 (1000)	750 (1000)	600 (750) [2]
Fluſseisen[1]	875 (1000)	875 (1000)	. (750) [2]
Gewölbtes Eisenwellblech .	500	500	.
Eisendraht	1200	.	.
Guſseisen.	250	500	200
Zinkblech	200	200	$k_b = 150$

1) Bei Fluſseisenstäben genau berechneter, zusammengesetzter Konstruktionssysteme läſst die Berliner Bau-Polizei k_z und $k = 1000$ kg/qcm zu. (Bekanntmachung vom 3. März 1899.)

2) Die (eingeklammerten) Werte für Schweiſs- und Fluſseisen läſst die Ministerial-Bauabteilung für solche Bauteile zu, die keinen Erschütterungen oder starken Belastungswechseln ausgesetzt sind, und nur dann, wenn eine Prüfung des Eisens vor der Abnahme stattgefunden hat.

Für Fluſseisenstäbe in Bauteilen aus **Eisenbeton,** insbesondere bei Beanspruchung der Bauteile auf Biegung, ist $k_z = k = 1000$ (Minist.-Erl. für Hochbauten v. 24. 5. 07).

II. Das **Deutsche Normalprofilbuch** (6. Aufl. 1904) empfiehlt, bei Hochbauwerken, die keinen nennenswerten Erschütterungen ausgesetzt sind, für **Schweiſseisen** $k_z = k = 1000$ und für **Fluſseisen** = 1200 kg/qcm zu wählen.

III. Vorschrift des preuſs. Ministeriums der öffentlichen Arbeiten vom Februar und Juli 1897 für **Bahnsteighallen** und **Dachbinder** der preuſsischen Staatsbahnen.

1. Bei Bauteilen, deren Querschnitt durch Eigengewicht und Schneedruck allein bestimmt wird, ist bei Annahme von 75 kg/qm Schneedruck für **Fluſseisen** 1200 kg/qcm als gröſste Beanspruchung zuzulassen und für **Schweiſseisen** 10 vH weniger.

2. Bei Bauteilen, die durch Eigengewicht, Schneedruck und Winddruck (diesen zu 150 kg/qm winkelrecht zur getroffenen Fläche angenommen) beansprucht werden, ist für **Fluſseisen** bis 1600 kg/qcm und für **Schweiſseisen** 10 vH weniger zuzulassen.

3. Die Berechnung gedrückter Teile auf Knickfestigkeit nach der Eulerschen Formel [2) S. 410] soll mit mindestens 4-facher Sicherheit erfolgen.

4. Niete: zulässige Scherspannung höchstens 1000 kg/qcm, zulässiger Lochleibungsdruck höchstens 2000 kg/qcm.

IV. Zulässige Spannungen des Eisens bei **Brücken** gemäſs preuſs. Minist.-Erlaſs vom 1. Mai 1903 s. Abschn. Statik der Baukonstruktionen.

V. Ueber die zulässigen Spannungen des Schweiſs- und Fluſseisens für **wiederholte** Zug- und Druckbeanspruchungen mit Rücksicht auf Stöſse, Zuschlag- und Nebenspannungen s. S. 411 u. f.

VI. Ueber zulässige Spannungen des Eisens bei **Eisenbeton-Ingenieurbauten** s. Abschn. Statik der Baukonstruktionen.

2. Hölzer.

Die **fett** gedruckten Zahlen sind von der Berliner Baupolizei und der Bauabteilung des preufs. Ministeriums der öffentlichen Arbeiten vorgeschrieben.

Holzart	Zug k_z	Druck k	Schub k_s	Holzart	Zug k_z	Druck k	Schub k_s
Eschenholz	100—120	66	.	Kiefernholz . . .	**100**	**60**	10
Eichen- und Buchenholz	**100**	**80**	20	dsgl. für zeitweilige Bauten . .	120	70	15
dsgl. für zeitweilige Bauten .	120	90	20	Tannenholz	60	50	.

3. Andere Baustoffe.

Die **fett** gedruckten Zahlen sind von der Berliner Baupolizei und der Bauabteilung des preufs. Ministeriums der öffentlichen Arbeiten, die **eingeklammerten** Zahlen nur von letzterer vorgeschrieben.

Baustoff	Druck k	Baustoff	Druck k
Basalt	75	Marmor	24
Basaltlava	**(40)**	Kunstsandstein . . .	45
Granit	**45**	Steine aus Zement, Sand und Schlacken . . .	12
Sandstein, je nach Härte	**15—30**	Gufsbeton, Schüttbeton	5—10
,, im Mittel . .	20	Stampfbeton*) guter Ausführung für Brücken (1 Zement, 2,5 bis 3 Sand, 5 bis 6 Kies)	20—35
Rüdersdorfer Kalkstein in Quadern	**25**	für Fundamente (durchgehende)	10—15
Kalksteinmauerwerk in Kalkmörtel	**5**	für Decken (1 Zement + 3 Sand) (Berl. B.-P.) .	**30**
Ziegelmauerwerk, gewöhnl., in Kalkmörtel	**7**	Glas**)	25
dsgl., in Zementmörtel	**11 (12)**	Rammpfähle, je nach Bodenart	20—40
Klinkermauerwerk, bestes, in Zementmörtel	**12—14 (14—20)**	Guter Baugrund***) .	**2,5** (bis **5**)
Mauerwerk a. porigen Steinen	**3—6**		

*) Nach dem preufs. Min.-Erl. v. 24. 5. 07 sind bei **Verbundkonstruktionen** für den Beton zulässig: für Druck bei Biegung $1/6$ K, bei achsialem Druck $1/10$ K, für Zug bei Biegung $1/10$ K (bei fehlendem Nachweise der Zugfestigkeit), oder $2/3$ K_z, wenn K_z versuchsmäfsig nachgewiesen ist, ferner die zul. Schub- und Haftspannung $\tau = 4{,}5$ kg/cm² (bei fehlendem Nachweise der Schubfestigkeit K_s), oder $= 1/5$ der nachgewiesenen Schubfestigkeit K_s.

) Für **geblasenes Glas ist $k_b = 125$ kg/qcm, für **Rohglas** (von $s = 0{,}5$ bis 1,5 cm Dicke) ist nach Schwering $k_b = 1/3\,[200 + 160\,(1{,}5 - s)^2]$ kg/qcm.

***) Der Baugrund darf mit zunehmender Tiefe der Bausohle **stärker** beansprucht werden. (Näheres im Abschnitt Hochbau.)

Bestimmungen über die Beanspruchung der bei **Schornsteinen** verwendeten Stoffe (Min.-Erl. v. 30. April 1902) s. Abschn. Kraftmaschinen, Dampfkessel.

II. FESTIGKEIT GERADER STÄBE.

Bemerkung. Wo nicht ausdrücklich anders bemerkt, ist stets das Hookesche Gesetz (S. 391) als gültig angenommen.

A. Zug- und Druckfestigkeit.

1. Die **Belastung** P in kg, die ein auf Zug oder Druck beanspruchter **prismatischer** Stab vom Querschnitte F qcm mit Sicherheit tragen kann, ist $P = Fk_z$ oder $P = Fk$, wenn k_z die zulässige Zugspannung, k die zulässige Druckspannung in kg/qcm bedeutet.

Ist der Stab von veränderlichem Querschnitte, so ist für die Berechnung der Tragkraft der kleinste Querschnitt mafsgebend.

Gedrückte Stäbe, deren Länge im Verhältnis zu den Abmessungen des Querschnittes bedeutend ist, sind auf **Knickfestigkeit** zu berechnen; Näheres s. S. 413 u. f.

Die bei der Spannung σ oder der Belastung P eintretende **elastische Verlängerung** oder **Verkürzung** λ eines prismatischen Stabes von der ursprünglichen Länge l beträgt [$\lambda : l = \varepsilon$ s. S. 390]

$$\lambda = \frac{\sigma}{E} l, \text{ oder } \lambda = \frac{Pl}{FE},$$

wenn E das (als unveränderlich angenommene) Elastizitätsmafs für Zug bzw. Druck bezeichnet. Ueber die bei der elastischen Längenänderung verrichtete **Arbeit** s. S. 393, unter **6.**

Abb. 2.

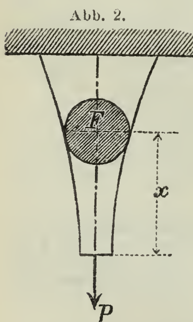
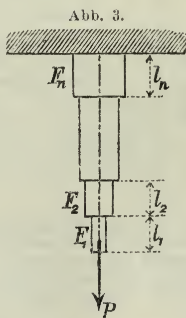


Abb. 3.



2. Die Form eines Stabes von **gleichem Widerstande** gegen Zug und Druck (Abb. 2) mit Rücksicht auf das Eigengewicht ist, wenn die Schwerachse des Stabes in die Richtung der angreifenden Kraft P fällt, bestimmt durch die Gleichung

$$F = \frac{P}{k} e^{\frac{\gamma}{k} x}, \text{ oder}$$

$$\lg F = \lg \frac{P}{k} + 0{,}4343 \frac{\gamma}{k} x,$$

worin

F den veränderlichen Querschnitt des Stabes in dem beliebigen Abstande x cm vom belasteten Ende in qcm,
P die am Stabende wirkende Belastung in kg,
k die zulässige Zug- oder Druckspannung in kg/qcm,
γ das Eigengewicht des Stabes in kg/ccm,
e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen (s. S. 43) bezeichnet.

Bezeichnet ferner für die aus prismatischen Teilen von verschiedenen Querschnitten zusammengesetzte **Annäherungsform** des Stabes von gleichem Widerstande gegen Zug und Druck (Abb. 3)

l_n die Länge des n^{ten} prismatischen Stabteiles, vom belasteten Ende an gerechnet, in cm,

F_n den Querschnitt dieses Teiles in qcm, so gilt die Gleichung

$$F_n = \frac{P k_{n-1}}{(k-\gamma l_1)(k-\gamma l_2)\ldots\ldots(k-\gamma l_n)}.$$

Die bei der Längenänderung des Stabes von gleichem Widerstande gegen Zug oder Druck verrichtete **Arbeit** ist in cmkg

$$A = \frac{P}{\gamma}\frac{k^2}{2E}\left(e^{\frac{\gamma}{k}x} - 1\right);$$

ist l die Stablänge, so beträgt die **elastische Verlängerung** des Stabes

$$\lambda = \frac{kl}{E}.$$

3. Druck auf Körper mit gewölbter Oberfläche.*) (Hertzsche Gleichungen.)

a) **Zwei Kugeln.** Beim zentrischen Druck zweier Kugeln, deren Halbmesser $= r_1$ und r_2 cm und deren Dehnungszahlen $= \alpha_1$ und α_2, ergibt sich, wenn P die Druckkraft bedeutet und für beide Kugeln das Verhältnis $m = \varepsilon : \varepsilon_q$ (s. S. 390) $= {}^{10}/_3$ angenommen wird,

der Halbmesser der kreisförmigen Druckfläche (in cm) aus

$$a^3 = 0{,}68\, P \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}};$$

die größte Druckspannung

$$\sigma_{\max} = 1{,}5 \frac{P}{\pi a^2}$$

in der Mitte der Druckfläche (in kg/qcm) aus

$$\sigma^3_{\max} = 0{,}235 \frac{P\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2};$$

die Strecke (in cm), um die sich unter der Last P die Kugeln einander nähern, aus

$$y^3 = 0{,}46\, P^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Für $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{E}$, also für gleich elastische Kugeln ergibt sich:

$$a^3 = 1{,}36 \frac{P}{E\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)},$$

*) Nach C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 5. Aufl. 1905, S. 172. — Versuche von Stribeck s. Z. d. V. d. I. 1907 S. 1500.

$$\sigma^3{}_{\max} = 0{,}059\, PE^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2,$$

$$y^3 = 1{,}84\, \frac{P^2}{E^2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Für zwei gleich große Kugeln vom Halbmesser r

$$a^3 = 0{,}68\, \frac{Pr}{E} = 0{,}34\, \frac{Pd}{E},$$

$$\sigma^3{}_{\max} = 0{,}235\, \frac{PE^2}{4\, r^2} = 0{,}94\, \frac{PE^2}{d^2},$$

$$y^3 = 3{,}68\, \frac{P^2}{E^2 r} = 7{,}36\, \frac{P^2}{E^2 d}.$$

b) **Kugel und ebene Platte.** Für $r_1 = r$, $r_2 = \infty$ gehen die ersten beiden Gruppen von Gleichungen über in:

$$a^3 = 0{,}68\, Pr\, (\alpha_1 + \alpha_2), \quad \text{bezw.} \quad a^3 = 1{,}36\, \frac{Pr}{E},$$

$$\sigma^3{}_{\max} = \frac{0{,}235\, P}{r^2\, (\alpha_1 + \alpha_2)^2}, \quad ,, \quad \sigma^3{}_{\max} = 0{,}059\, \frac{PE^2}{r^2},$$

$$y^3 = \frac{0{,}46\, P^2\, (\alpha_1 + \alpha_2)^2}{r}, \quad ,, \quad y^3 = 1{,}84\, \frac{P^2}{Er}.$$

Aus der zweiten Gleichung rechts folgt

$$P = 4\, cr^2 = cd^2,$$

wo c eine nur von der Art des Stoffes abhängige Unveränderliche $= 0{,}45\, \frac{\sigma^3 \max}{E^2}$ ist.

c) **Zwei Kreiszylinder.** Sind r_1 und r_2 die Halbmesser der Grundflächen, l die Höhe der Zylinder (in cm), so ergibt sich die Breite der rechteckigen Druckfläche (in cm) aus

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0{,}29\, \frac{P}{l}\, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}},$$

$$\sigma^2{}_{\max} = \left(\frac{4}{\pi}\, \frac{P}{bl}\right)^2 = 0{,}35\, \frac{P}{l}\, \frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Für $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{E}$, also für gleich elastische Zylinder ergibt sich

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0{,}58\, \frac{P}{El}\, \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}},$$

$$\sigma^2{}_{\max} = 0{,}175\, \frac{PE}{l} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Für zwei gleich große Zylinder, deren Halbmesser $= r$,

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0{,}29 \frac{Pr}{El},$$

$$\sigma^2{}_{\max} = 0{,}35 \frac{PE}{lr}.$$

d) **Kreiszylinder und ebene Platte.** Für $r_1 = r$, $r_2 = \infty$ ergibt sich aus vorstehenden Gleichungen:

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0{,}29 \frac{Pr}{l}(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \text{bezw.} \quad \left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0{,}58 \frac{Pr}{El},$$

$$\sigma^2{}_{\max} = 0{,}35 \frac{P}{lr(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad \text{,,} \quad \sigma^2{}_{\max} = 0{,}175 \frac{PE}{lr}.$$

Aus der zweiten Gleichung rechts folgt

$$P = 2clr = cld,$$

wo c eine nur von der Art des Stoffes abhängige Unveränderliche $= 2{,}86 \frac{\sigma^2{}_{\max}}{E}$ ist.

e) Wegen der zum Teil unzutreffenden Voraussetzungen der Hertzschen Theorie (u. a. sind die Zugspannungen in Ebenen quer zur Druckrichtung nicht berücksichtigt) sind die Werte der Unveränderlichen c in allen Fällen durch **Versuche** zu ermitteln; Weiteres hierüber s. 6. Abschn. Maschinenteile, G. Lager.

4. Wahl der zulässigen Zug- und Druckspannung.

Für Bauteile, die eine im wesentlichen **ruhende** Belastung haben, sind die Werte von k_z und k auf S. 405 und 406 angegeben.

Bei stark **wechselnder** Belastung, namentlich bei eisernen Brücken mit veränderlicher Verkehrslast, sind die zulässigen Spannungen mit Rücksicht auf die Ergebnisse der Wöhlerschen Dauerversuche zu wählen. Diese Ergebnisse sind folgende:

1) Wiederholte Beanspruchung eines Stabes führt den Bruch bei einer geringeren Spannung herbei als bei dem Werte K_z bzw. K für ruhende Last.

2) Die Anzahl der zum Bruche erforderlichen Beanspruchungen ist um so größer, je kleiner die größte Spannung (bei unveränderlicher kleinster Spannung) ist, oder je größer die kleinste Spannung (bei unveränderlicher größter Spannung) ist.

3) Die größte Spannung, bei der selbst nach unbegrenzt vielen Belastungswechseln ein Bruch nicht eintritt (**Arbeitsfestigkeit**), ist um so größer, je größer die kleinste Spannung ist.

Hiernach ist es angemessen, die Größe der zulässigen Spannung abhängig zu machen von den Grenzen der Spannkraft. Bei Brücken ist außerdem die Wirkung von Stößen der Verkehrslast zu berücksichtigen.

Insbesondere für **eiserne Stäbe** (bei Brückenträgern) ergibt sich folgende Querschnittbestimmung. Es bezeichne

F in qcm den (kleinsten) Querschnitt eines Stabes,
S_0 in kg die durch das Eigengewicht allein in dem Stabe hervorgerufene Spannkraft,

S_1 in kg die durch die ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Spannkraft, die auf derselben Seite von null liegt wie S_0,

S_2 in kg die durch die ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Spannkraft, die auf der entgegengesetzten Seite von null liegt wie S_0 (wenn also S_0 und S_1 den Stab auf Zug beanspruchen, so ist S_2 ein Druck und umgekehrt),

σ_e die Elastizitätsgrenze in kg/qcm (vrgl. S. 392); für Schweifseisen ist $\sigma_e = 1600$ kg/qcm, für Flufseisen ist $\sigma_e = 2000$ kg/qcm;

k die zulässige Zug- oder Druck-Spannung bei ruhender Verkehrslast in kg/qcm,

ζ die Stofszahl der Verkehrslast (s. S. 413),

μ eine Zahl, welche die Neben- und Zuschlagspannungen berücksichtigt (s. S. 413),

$S_{\min}$ und $S_{\max}$ in kg die kleinste und die gröfste Spannkraft des Stabes durch das Eigengewicht und durch die mit der entsprechenden Stofszahl multiplizierte Verkehrslast.

Bei der Berechnung von **Blechträgern** treten an die Stelle der Spannkräfte S_0, S_1, S_2, $S_{\min}$, $S_{\max}$ die entsprechenden Biegungsmomente M oder $\mathfrak{M}$ (in cmkg) und an die Stelle von F das Widerstandsmoment W (in cm³).

α) Formeln von Th. Landsberg.*)

Annahmen: Stofszahl $\zeta = 1,5$; $\sigma_{\min} + \zeta(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = {}^2/_3\,\sigma_e$.

1) Für **nur gezogene oder nur gedrückte** Stäbe

Schweifseisen	Flufseisen
$F = \frac{S_0}{1050} + \frac{S_1}{700}$.	$F = \frac{S_0}{1350} + \frac{S_1}{900}$.

2) Für **gezogene und gedrückte** Stäbe, falls

$$S_2 > \frac{2}{3} S_0 \quad \text{und} \quad S_2 - S_1 < \frac{4}{3} S_0 \text{ ist,}$$

Schweifseisen	Flufseisen
$F = \frac{S_0}{1575} + \frac{S_1}{700} + \frac{S_2}{2100}$.	$F = \frac{S_0}{2000} + \frac{S_1}{900} + \frac{S_2}{2700}$.

3) Für **gezogene und gedrückte** Stäbe, falls

$$S_2 > \frac{2}{3} S_0 \quad \text{und} \quad S_2 - S_1 > \frac{4}{3} S_0 \text{ ist,}$$

Schweifseisen	Flufseisen
$F = -\frac{S_0}{1575} + \frac{S_1}{2100} + \frac{S_2}{700}$.	$F = -\frac{S_0}{2000} + \frac{S_1}{2700} + \frac{S_2}{900}$.

*) S. Z. h. A. u. J. V. 1888 S. 575.

β) Formeln von Häseler.

Allgemein ist $$F = \frac{S_0 + S_1}{k}.$$

Ist der Stab **nur auf Zug oder nur auf Druck** (ohne Knickgefahr) beansprucht, so setze man

$$k = \frac{\sigma_e}{\mu} \frac{S_0 + S_1}{S_0 + \zeta S_1}.$$

Ist dagegen der Stab kurz hintereinander **Zug- und Druckbeanspruchungen** (ohne Knickgefahr) unterworfen, so empfiehlt sich

$$k = \frac{\sigma_e}{\mu} \frac{S_0 + S_1}{S_0 + \zeta S_1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{S_{min}}{S_{max}}\right).$$

Nach H. Müller-Breslau ersetze man in dieser Formel den Faktor $^1/_2$ durch $^1/_3$.

Stofszahl ζ. Gerber empfiehlt $\zeta = 1{,}5$; Winkler für Eisenbahnbrücken $\zeta = 1{,}3$, für Strafsenbrücken $\zeta = 1{,}2$; Häseler nimmt ζ mit der Stützweite veränderlich an und empfiehlt

für $l =$	5	10	15	20	40	60	80	100	150 m
$\zeta =$	1,7	1,6	1,5	1,3	1,3	1,25	1,2	1,2	1,2

Werte von μ bei Balkenträgern auf zwei Stützen.

Art der Träger	Nebenspannung	Zusatzspannung	Zuschlag für etwaige Mehrbelastung	demnach
	in vH der durch S erzeugten Spannung			$\mu =$
Blechträger	10	30	20	1,6
Fachwerkträger:				
Knotenpunkte starr	40	30	20	1,9
Knotenpunkte gelenkig . . .	15	15	20	1,5

Die in den **preufsischen Vorschriften für die Berechnung eiserner Brücken** (Minist.-Erl. vom 1. Mai 1903) bestimmten zulässigen Spannungen s. Abschn.: Statik der Baukonstruktionen.

Für **Maschinenteile** ist der Einflufs stark wechselnder Belastung auf die zulässige Spannung in den Angaben von C. Bach auf S. 404 bis 406 berücksichtigt.

B. Knickfestigkeit.

Gedrückte Stäbe, deren Länge im Vergleiche zu ihren Querschnittabmessungen grofs ist, sind gegen Knicken widerstandsfähig zu gestalten.

Wenn auch die Belastung zentrisch ist, d. h. im Schwerpunkte der Endflächen angreift, so tritt doch, da die Stabachse nicht genau geradlinig und der Stoff nicht vollkommen gleichartig ist, eine Ausbiegung des Stabes ein, die zunächst unbestimmbar bleibt.

1. Eulersche Formeln.

Bezeichnet

l die Länge des auf Knicken beanspruchten Stabes in cm,

J das kleinste äquatoriale Trägheitsmoment des gefährlichen Stab-Querschnittes a (s. Abb. 4 bis 7) in cm^4,

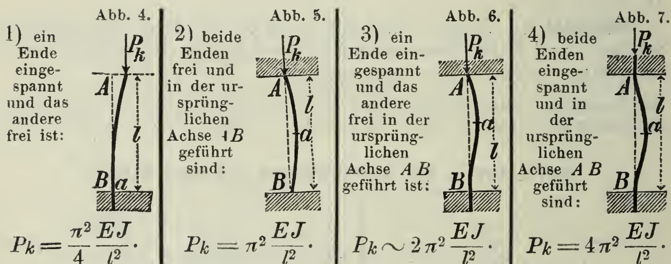
F den kleinsten Querschnitt des Stabes in qcm,

k die zulässige Druckspannung des Stoffes in kg/qcm,

E das Elastizitätsmafs des Stoffes in kg/qcm (s. S. 391, 396 u. f.),

so ist nach L. Euler je nach der Befestigungsweise der Stabenden

die Knickbelastung P_k (in kg), wenn



1) ein Ende eingespannt und das andere frei ist: $P_k = \frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{l^2}$.

2) beide Enden frei und in der ursprünglichen Achse AB geführt sind: $P_k = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$.

3) ein Ende eingespannt und das andere frei in der ursprünglichen Achse AB geführt ist: $P_k \sim 2\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$.

4) beide Enden eingespannt und in der ursprünglichen Achse AB geführt sind: $P_k = 4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$.

Für π^2 darf angenähert 10 gesetzt werden.

Nach Versuchen von J. Bauschinger*) sind die Werte von P_k die Grenzbelastungen, bei denen die von vornherein vorhandene, mit allmählich wachsender Belastung des Stabes entsprechend zunehmende Durchbiegung fast plötzlich jeden mefsbaren Wert überschreitet.

Nach denselben Versuchen sind die Eulerschen Formeln nur dann anwendbar, wenn die mittlere Knickspannung $K_k = P_k : F$ (s. u.) die Elastizitätsgrenze σ_e nicht überschreitet. (Vrgl. hierzu ferner die Angaben von Kirsch und von Tetmajer S. 416 u. f.)

Die **zulässige Belastung** (Tragfähigkeit) des auf Knicken beanspruchten Stabes beträgt (in kg) nur

$$P = P_k : \mathfrak{S},$$

wenn $\mathfrak{S}$ den Sicherheitsgrad gegen Knicken bedeutet. Ergibt sich jedoch (bei kleinen Stablängen l) die zulässige Druckbelastung

$$P_0 = k\,F$$

kleiner als P, so ist die Tragfähigkeit des Stabes $= P_0$.

---

*) Vrgl. Z. d. B. 1886 S. 353 u. f. Ueber die Bedeutung der Eulerschen Formeln s. auch: Zimmermann, Z. d. B. 1886 S. 217 u. f.; Kriemler, Z. d. B. 1901 S. 238.

Bei Querschnitt-Ermittlungen auf Grund der Eulerschen Formeln ist daher stets zu untersuchen, ob die zulässige Druckspannung k für den gewählten Querschnitt nicht überschritten ist.

In den meisten Fällen ist der **Befestigungsfall** 2) (s. Abb. 5) für die Rechnung vorauszusetzen, da auf vollkommene Einspannung eines Stabendes nur selten zu rechnen ist. Durch Einführung des Trägheitshalbmessers i (in cm), bestimmt durch die Gleichung $J = Fi^2$ (s. S. 213), erhält man für Fall 2) auch den Ausdruck

$$P_k = \frac{\pi^2 E F i^2}{l^2},$$

woraus die beim Bruche des Stabes vorhandene **mittlere Knickspannung** K_k sich ergibt zu

$$K_k = \frac{P_k}{F} = \pi^2 E \left(\frac{i}{l}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{x^2},$$

wenn das Verhältnis $l : i$ mit x bezeichnet wird.

Die **zulässige Knickspannung** σ_k beträgt

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{x^2 \mathfrak{S}}.$$

Die **Grenzlänge** l_0 (in cm), d. i. die Stablänge, bei der die Tragfähigkeit für Druck und Knicken die gleiche ist, bestimmt sich aus der Bedingung $\sigma_k = k$; es ergibt sich die verhältnismäfsige Grenzlänge

$$x_0 = \frac{l_0}{i} = \pi \sqrt{\frac{E}{\mathfrak{S} k}},$$

und bei gleicher Sicherheit gegen Druck und Knicken, wenn K die Druckfestigkeit bezeichnet,

$$x_0 = \frac{l_0}{i} = \pi \sqrt{\frac{E}{K}}.$$

In folgender Tafel sind für die wichtigsten Baustoffe die bei Hochbauten üblichen Werte des Sicherheitsgrades $\mathfrak{S}$ gegen Knicken, die erforderlichen kleinsten Trägheitsmomente J des Stabquerschnittes sowie die Grenzlängen l_0 für den Belastungsfall 2, S. 414 angegeben.

Im folgenden bezeichnet

P die zulässige Belastung in **kg**, P_1 dieselbe in **t**,

l die Stablänge in **m**,

b die kleinere Rechteckseite } des Stabquerschnittes in m.
d den Kreisdurchmesser }

Bezeichnungen	Gufseisen	Schweifseisen	Flufseisen	Flufsstahl	(Kiefern-)holz
Druckfestigkeit K . kg/qcm	7500	3750	4400	6250	280
Zuläss. Druckspannung k „	500	750	875	1250	60
Elastizitätsmafs E . „	1 000 000	2 000 000	2 150 000	2 200 000	120 000
Sicherheitsgrad gegen Knicken $\mathfrak{S}$ . . .	8*)	5**)	5	5	10
Erforderliches kleinstes äquat. Trägheitsmoment des gefährl. Querschnittes in cm^4 $J =$	$\frac{Pl^2}{125} = 8\,P_1\,l^2$	$\frac{Pl^2}{400}$**) $= 2{,}5\,P_1\,l^2$	$\frac{Pl^2}{430} = 2{,}33\,P_1\,l^2$	$\frac{Pl^2}{445} = 2{,}24\,P_1\,l^2$	$\frac{Pl^2}{12} = 83{,}3\,P_1\,l^2$
Vrhm. Grenzlänge $x_0 = l_0 : i =$	50	72,5	69,5	59,0	44,4
für das Rechteck $(i = b\sqrt{1/12})$; $l_0 : b =$	14,4	21,0	20,1	17,1	12,8
„ die Kreisfläche $(i = 1/4\, d)$; $l_0 : d =$	12,5	18,1	17,4	14,8	11,1
„ den Kreisring mit kleinem δ $(i = d\sqrt{1/8})$ $l_0 : d =$	17,6	25,6	24,5	20,9	.

Für Steinprismen quadratischen Querschnitts beträgt die verhältnismäfsige Grenzlänge nach Tetmajer $x_0 = 52$; für gefugtes Mauerwerk liegen Versuchswerte nicht vor.

Der auf Knicken berechnete Querschnitt braucht nur bei a (Abb. 5) vorhanden zu sein; an den Enden genügt der der zulässigen Druckspannung k entsprechende Querschnitt; das Gesetz der Abnahme des Querschnittes nach den Enden hin hat nur geringen Einflufs auf die Tragfähigkeit.

Für die Belastungsfälle 1), 3) und 4) (S. 414 ist das Trägheitsmoment J 4-mal, bzw $1/2$-mal und $1/4$-mal zu nehmen. Die Grenzlänge l_0 ist dabei $1/2$-mal, bzw. 1,41-mal und 2-mal so grofs wie die Tafel angibt.

Nach Versuchen von B. Kirsch***) mit 20 mm dicken Puddeleisenstangen ist das Verhältnis der Knicklasten in den Fällen 2), 3) und 4) nicht $= 1 : 2 : 4$, sondern veränderlich je nach der Schlankheitsziffer $l : i = x$, und zwar für $x = 100$ (wobei etwa die Gültigkeit der Eulerschen Formel beginnt) etwa nur $1 : 1{,}05 : 1{,}13$ und für $x = 200$ immer erst $1 : 1{,}78 : 3$. Ist $x < 100$, so erhöht die Einspannung den Knickwiderstand nur unerheblich (vrgl. unter **2**).

Der Belastungsfall 2) setzt Spitzenlagerung des Stabes voraus. Bei **Flächenlagerung** findet eine u. U. erhebliche Einspannwirkung statt, die nach v. Emperger****) durch Verminderung der Knicklänge l bis auf $0{,}7\,l$ (Verdopplung der Tragfähigkeit) berücksichtigt werden kann.

---

*) Die Berliner Baupolizei verlangt für **gufseiserne Säulen** $\mathfrak{S} = 8$ bei genau zentraler Belastung. Erfolgt jedoch, wie meist, der Angriff eines Teiles der Lasten (z. B. durch Träger auf Säulen-Konsolen) exzentrisch, so sind die exzentrisch angreifenden Lasten mit 50 vH Zuschlag, sowohl bei Berechnung auf Knicken als auf Druck einzuführen, oder es ist die Säule — bei bekannter Gröfse der Last-Exzentrizität — auf zusammengesetzte Festigkeit (Druck und Biegung) zu berechnen, wobei die Veränderlichkeit der Nutzlast zu berücksichtigen ist.

**) Die Berliner Baupolizei verlangt bei Privatbauten $\mathfrak{S} = 6$ und demgemäfs

$$J = 3\,P_1\,l^2.$$

***) S. Z. d. V. d. I. 1905 S. 907.

****) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1898 S. 1114.

2. Tetmajersche Formeln. Nach Versuchen von Tetmajer*) ist die Eulersche Formel 2) (bei Spitzenlagerung) nur anwendbar, wenn $x = l : i \geqq 80$ (Gufseisen), 112 (Schweifseisen), 105 (Flufseisen), 90 (Flufsstahl), 100 (Holz).

Für kleinere Stablängen ergibt sich die Knickspannung beim Bruche (in kg/qcm)

$$K_k = P_k : F = K\,(1 - a\,x + b\,x^2),$$

worin K, a und b Unveränderliche bedeuten, und zwar ist

Stoff	K	a	b	Grenzen für x	
				min	max
Gufseisen	7760	0,01546	0,00007	5	80
Schweifseisen	3030	0,00426	0	10	112
Flufseisen	3100	0,00368	0	10	105
Flufsstahl	3350	0,00185	0	.	90
Holz	293	0,00662	0	1,8	100

Für einen Stab von bekanntem Querschnitt ist der Sicherheitsgrad gegen Knicken $\mathfrak{S} = K_k : \sigma$, wo K_k den vorstehend bezeichneten Wert und σ die Druckspannung $(= P : F)$ in kg/qcm bedeuten.

Zur Querschnitt-Ermittlung dient die Gleichung

$$F\,(1 - a\,x + b\,x^2) = \frac{\mathfrak{S}\,P}{K},$$

woraus die Abmessungen versuchsweise zu berechnen sind.

Nach B. Kirsch ist in den Belastungsfällen 3) und 4) (Abb. 6 u. 7) bei Anwendung vorstehender Formeln für Schweifseisen statt der Unveränderlichen 3030 und 0,00426 zu setzen 3120 und 0,00328, bzw. 3440 und 0,00310 (vrgl. unter 1).

Genietete Stäbe verhalten sich wie einfache Walzprofile, falls die Nietabstände nicht gröfser sind als das 7-fache der gefafsten Platten- und Winkeleisendicke und die Schwächung der Stabquerschnitte durch Nietlöcher nicht mehr als 12 vH beträgt.

3. Johnson und **Ostenfeld****) setzen für **Schweifs-** und **Flufseisen** die zulässige Knickspannung

$$\sigma_k = \sigma\,(1 - c\,x^2),$$

worin σ die zulässige Druckspannung in kg/qcm,

$x = l : i$,

und c eine Unveränderliche ist, die auf Grund der Tetmajerschen Versuche zu 1 : 30 000 bestimmt wurde.

Setzt man $F = \xi i^2$, mithin $J = F i^2 = \xi i^4$, wobei der Wert von ξ nur abhängig ist von der Form des Stabquerschnittes, so erhält man den erforderlichen Querschnitt gegen Knicken (in qcm):

$$F = F_0 + {}^1/_3\,\xi\,l^2,$$

wenn F_0 den erforderlichen Querschnitt gegen Druck $(= P : k)$ in qcm und l die Stablänge in **m** bezeichnet. Diese Formel ist gültig, falls $F < 2\,F_0$; ergibt sich $F > 2\,F_0$, so benutze man die Eulersche Formel.

*) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1896 S. 1404.
**) S. Z. d. V. d. I. 1898 S. 1462; 1902 S. 1858.

Die Gröfse ξ ändert sich nur langsam mit der Querschnittgröfse; in die Formel sind zunächst folgende Näherungswerte einzusetzen:

Querschnitt	ξ	Querschnitt	ξ	Querschnitt	ξ
L, gleichschenklig .	6,0	⊥, $b = 2h$ . .	7,5	][, 1 cm lichter Abstand . .	6,0
L. $b:h = 2:3$ . .	7,0	⊥, $b = h$ . . .	5,0	dsgl., Abstand so, dafs $J_x = J_y$	1,2
desgl. 1:2 . .	11,0	I	10,0	4 Quadranteisen ohne Zwischenlagen	1,8
(b u. h Schenkellängen		[.	7,0		
⊥. $b = 2h$	7,5	4 Winkeleisen, 1 cm l. Abstd.	4,0		

Nach vorläufiger Bestimmung von F und J ist mit dem genaueren Werte von ξ die Rechnung zu wiederholen.

Ferner ist genau für das Quadrat $\xi = 12$, für das Rechteck $b h \xi = 12 \frac{h}{b}$ $(h > b)$. für den Kreis $\xi = 4\pi$, für den Kreisring vom mittleren Halbmesser ρ und der Dicke δ, wenn $\delta : \rho = 0{,}05,\ 0{,}1,\ 0{,}15,\ 0{,}2 : \xi = 0{,}63,\ 1{,}25,\ 1{,}87,\ 2{,}50$.

4. Naviersche oder Schwarz-Rankinesche Formel.

$$\text{Zulässige Knickspannung } \sigma k = \frac{\sigma}{1 + \mu x^2},$$

worin σk, σ, x die Bedeutung unter **3.** haben und μ eine — sehr verschieden angegebene — Unveränderliche bezeichnet, und zwar ist nach Tetmajers Versuchen für

Gufseisen ($x = 20-150$) $\mu = 0{,}00070$
Schweifseisen ($x = 20-250$) $\mu = 0{,}00016$
Flufseisen ($x = 20-250$) $\mu = 0{,}00014$
Holz ($x = 20-200$) $\mu = 0{,}00023$
für schmiedb. Konstruktionseisen i. M. $\mu = 0{,}00015$.

Nach Scharowski dagegen setze man für Gufseisen $\mu = 0{,}0002$, für Schweifseisen $\mu = 0{,}0001$.

Die Formel entspricht der Beanspruchung des Stabes auf Druck und Biegung durch eine exzentrisch angreifende Achsialkraft. Dabei bedeutet μ den Ausdruck

$$\frac{e}{l} \frac{p}{l},$$

wo p die unbestimmte Exzentrizität der Last und e das halbe Querschnittsmafs in der Biegungsebene ist. Nach Krohn*) ist $\mu = \frac{k}{8E}$; das ergibt für Schweifseisen $\mu = 0{,}00005$, Gufseisen $\mu = 0{,}00011$.

Nach **R. Bredt****) ist für Schweifseisen

$$\sigma k = \frac{\sigma}{1 + 0{,}00001\, x^3},$$

wo σk, σ und x die frühere Bedeutung haben.

5. Zeichnerisches Verfahren von **L. Vianello**, für beliebige Belastungen des Stabes durch Achsialkräfte sowie für veränderlichen Stabquerschnitt (z. B. für Druckglieder eines Fachwerkträgers).***)

*) Vergl. Z. d. B. 1885 S. 400.
**) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1894 S. 878.
***) S. Z. d. V. d. I. 1898 S. 1436. Die Eulerschen Formeln für Stäbe, die in bestimmten Punkten ihrer Länge festgehalten sind, s. Wit enbauer, Z. d. V. d. I. 1902 S. 501; für Stäbe, die aufserdem noch in beliebigen Punkten belastet sind. Z. d. V. d. I. 1903 S. 245.

Zu einer beliebig gewählten elastischen Linie als Grundlinie berechne man die Biegungsmomente für eine Anzahl von Punkten des Stabes, wobei auch das Moment der in den Befestigungspunkten angreifend zu denkenden Querkraft $[Q = (\Sigma Pf) : l]$ zu berücksichtigen ist und zeichne die Momentenfläche. Nach dem Mohrschen Verfahren (S. 432) konstruiere man nun die elastische Linie als die zur Momentenfläche als Belastungsfläche gehörige Seillinie mit der Polweite EJ. Ist G die Fläche der Grundlinie, B die Fläche der ermittelten elastischen Linie, so ist die Sicherheit des Stabes gegen Knicken $\mathfrak{S} = G : B$. Verkleinert man in diesem Verhältnisse die Ordinaten der elastischen Linie, so erhält man eine genauere Grundlinie, mit der das Verfahren zu wiederholen ist, falls die Abweichung von der zuerst gewählten Grundlinie erheblich war.

Für eine gleichmäßig über die Länge l verteilte Achsialkraft (z. B. **Eigengewicht**) ist bei dem prismatischen Stabe die Knickbelastung

im Befestigungsfalle 1) (S. 414): $P_k = 3{,}2 \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{l^2}$,

" " 2) : $P_k = 1{,}9 \, \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$,

oder gleich der Knickbelastung eines prismatischen Stabes, der nur an den Enden belastet ist und die Länge $l_1 = 0{,}56 \, l$, bezw. $l_1 = 0{,}73 \, l$ hat. Im Falle 2) liegt der gefährliche Querschnitt a im Abstande $0{,}45 \, l$ vom unteren Stabende.

6. Ueber die Knickfestigkeit gerader Stäbe mit **elastischer Querstützung** s. H. Zimmermann, Z. d. B. 1906 S. 251.

7. Ueber die Knickfestigkeit **gegliederter Stützen** s. Engesser, Z. d. B. 1889 S. 483.

C. Schubfestigkeit.

Ergeben die auf einen Stab wirkenden äußeren Kräfte für den in Betracht kommenden Querschnitt F (s. Abb. 8) eine in dessen Ebene, u. zw. in die Richtung der Symmetrieachse OY fallende und die Stabachse winkelrecht schneidende Kraft (Schubkraft, Querkraft) Q, so wird der Querschnitt auf Schubfestigkeit beansprucht.

Abb. 8.

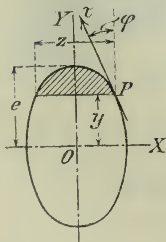
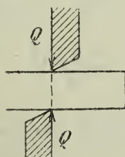


Abb. 8a.



Diese Beanspruchung tritt nie allein auf, sondern ist stets von einem Biegungsmoment begleitet. Sieht man hiervon ab, fallen also Schubkraft Q und die gleichgroße Stützkraft genau in eine Ebene (Abb. 8a), so kann gleichmäfsige Verteilung der Schubkraft auf den Querschnitt und parallele Richtung aller Schubspannungen angenommen werden, so dafs dann

$$\tau = \frac{Q}{F}.$$

Im allgemeinen ergibt diese Formel zu kleine Werte für die gröfste Schubspannung des Querschnittes. Bei Anwesenheit auch nur des kleinsten Biegungsmomentes (wenn also die beiden Kräfte Q nicht genau zusammenfallen) verteilt sich die Schubkraft ungleichmäfsig über den Querschnitt, u. zw. ist die im Punkte P durch die Schubkraft Q hervorgerufene **Schubspannung** τ (s. S. 394), die nicht nur in der Ebene des Querschnittes, sondern auch winkelrecht zum Querschnitt auftritt, nach beiden Richtungen bei den Bezeichnungen der Abb. 8:

$$\tau = \frac{Q S_y}{J z \cos \varphi}, \text{ und es mufs sein } \tau_{max} \leqq k_s.$$

Hierin ist J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes, bezogen auf die zu Q winkelrecht stehende Schwerachse OX, und

$$S_y = \int_y^e y z \, d y$$

das statische Moment des gestrichelten Querschnitteiles, bezogen auf dieselbe Achse OX.

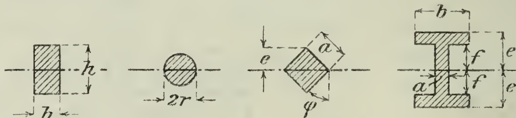
Die zur Symmetrieachse OY und zur Richtung von Q parallele Seitenspannung von τ ist

$$\tau_y = \tau \cos \varphi = \frac{Q S_y}{J z}.$$

Es wird $\tau = 0$ für $y = e$.

Für einen **rechteckigen Querschnitt** bh (Abb. 9) ist

Abb. 9. Abb. 10. Abb. 11. Abb. 12.



$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]$$

und $$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} \text{ für } y = 0.$$

Für einen **Kreis** mit dem Halbmesser r (Abb. 10) ist

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}$$

und $$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \text{ für } y = 0.$$

Für einen **Kreisring,** wenn die Wandstärke verhältnismäfsig klein gegen den lichten Durchmesser, ist für die Mitte ($y = 0$)

$$\tau_{\max} = 2 \frac{Q}{F} .$$

Für ein **übereck liegendes Quadrat** (Abb. 11) ist

$$\tau = \frac{Q\sqrt{2}}{a^2}\left[1 + \frac{y\sqrt{2}}{a} - 4\left(\frac{y}{a}\right)^2\right]$$

und $$\tau_{\max} = \frac{9}{4\sqrt{2}} \frac{Q}{a^2} = 1{,}591 \frac{Q}{F} \text{ für } y = \frac{e}{4} .$$

Für einen **I-förmigen Querschnitt** (Abb. 12) ist für $y = 0$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{4} \frac{Q}{a} \frac{b e^2 - (b-a) f^2}{b e^3 - (b-a) f^3} .$$

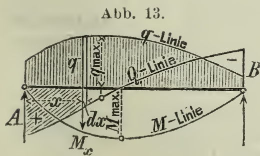
D. Biegungsfestigkeit.

a. Allgemeines über die äufseren Kräfte gerader Träger.

Unter der Voraussetzung, dafs alle äufseren Kräfte, also auch die Auflagerdrücke (Stützkräfte, Reaktionen) A und B (vrgl. S. 167 u. f.), winkelrecht zur Schwerachse des wagerechten Balken sangreifen (d. h., dafs äufsere Kräfte in der Richtung der Balkenachse nicht vorkommen), bezeichnet man mit:

Querkraft Q eines Querschnittes (Transversal-, Schub-, Vertikalkraft) die der Mittelkraft aller links vom Querschnitte wirkenden äufseren Kräfte gleiche und parallele Kraft; sie ist positiv, wenn sie aufwärts (also für den rechten Trägerteil abwärts) wirkt;

Abb. 13.



Biegungsmoment M eines Querschnittes das Moment der Mittelkraft oder (s. S. 160) die algebraische Summe der Momente aller links von dem Querschnitte wirkenden äufseren Kräfte; M ist positiv, wenn rechtsdrehend (oder für den rechten Trägerteil linksdrehend).

1. Der Träger habe eine **stetige Belastung** q in kg/cm (Abb. 13). Wählt man die Längsrichtung des Trägers als x-Achse, so ist für einen beliebigen Träger-Querschnitt (x)

$$Q = A - \int q\,dx; \quad dQ = -q\,dx; \quad \text{also} \quad \frac{dQ}{dx} = -q \qquad \text{I.}$$

$$dM = Q\,dx; \qquad \text{also} \quad \frac{dM}{dx} = Q \quad . \quad . \quad . \qquad \text{II.}$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{III.}$$

Trägt man also von einer wagerechten Geraden aus unter jedem Querschnitte die zugehörigen Werte Q und M als Ordinaten auf, so gelten für die erhaltenen Q- und M-Linien die Beziehungen:

1. Die trigonom. Tangente (Neigung) der Q-Linie bei x ist $= - q$.
2. Die trigonom. Tangente (Neigung) der M-Linie bei x ist $= Q$.
3. $M_x = \int_0^x Q\,dx = [Q\text{-Fläche}]_0^x$ (nach Gleichung II).

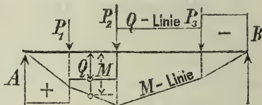
Aus 1. folgt: Die Querkraft Q ist ein Maximum in jedem Querschnitte, für den $q = 0$; die Q-Linie hat einen Wendepunkt da, wo $q = \max$.

Aus 2. folgt: Ein (relatives) M_{max} tritt in jedem Querschnitt ein, für den die Querkraft $Q = 0$ ist oder von $+$ in $-$ übergeht.

Aus 3. folgt: M wird **null** in jedem Querschnitt, für den die Q-Fläche (bestehend aus $+$- und $-$-Teilen) gleich null wird.

2. Wirken nur **Einzelkräfte** P_1, P_2 usw. auf den Träger (Abb. 14), so ist auf der Länge zwischen zwei benachbarten Einzelkräften die Querkraft Q unveränderlich und das Biegungsmoment M, bezogen auf x, vom ersten Grade. Die Q-Linie eines solchen Trägers ist eine Staffellinie, die M-Linie ein Vieleck.

Abb. 14.

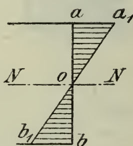


3. Die Querkraft Q erzeugt Schubspannungen τ in der Querschnittebene (vrgl. S. 394 und 419) und gleich grofse Schubspannungen in Ebenen parallel zur Balkenachse, das Moment M Normalspannungen σ winkelrecht zum Querschnitt.

b. Spannungen.

Bei der Biegung eines Balkens behalten nur die Fasern einer einzigen, durch die Balkenachse gehenden Schicht, der **Nullschicht** (neutralen Faserschicht NN, Abb. 15), ihre ursprüngliche Länge; diese Schicht schneidet jeden zur Schwerachse winkelrechten Querschnitt in der **Nullinie** (neutralen Achse). Die Nullinie geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes, ist gerade und trennt die gedehnten Fasern so von den verkürzten, dafs die Zug- und Druckspannungen proportional der Entfernung von ihr zunehmen. Dabei ist das Hookesche Gesetz (S. 391) als zutreffend vorausgesetzt, also angenommen, dafs die ursprünglich ebenen Querschnitte des Balkens nach der Biegung eben verbleiben.

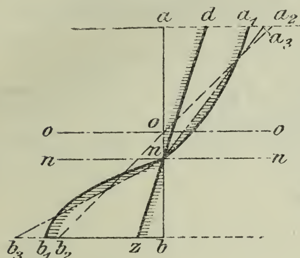
Abb. 15.



Für den Querschnitt $a\,b$ (Abb. 15) ergibt sich also als Linie der Spannungen und Dehnungen die Gerade $a_1\,o\,b_1$, die die Querschnittlinie in der Nullinie (in o) schneidet. $a\,a_1$ und $b\,b_1$ sind die gröfsten Spannungen des Querschnittes; das Dreieck $o\,a\,a_1$ stellt etwa Druckspannungen (Zusammendrückungen), das Dreieck $o\,b\,b_1$ Zugspannungen (Dehnungen) dar.

Sind die Dehnungen des Stoffes den Spannungen nicht proportional und aufserdem für Zug und Druck verschieden (z. B. bei Gufseisen, Steinen, Zement und Beton), so ist die Lage der Nullinie veränderlich; sie erfahrt nach der Seite der geringeren Dehnung, der gröfseren Festigkeit, hin eine Abweichung von der Schwerachse, die mit zunehmendem Biegungsmomente wächst, anderseits aber auch abhängig ist von den Unveränderlichen des Dehnungsgesetzes $\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$ (s. S. 391).*) Die Nullschicht hat demnach in der Längsrichtung des Trägers eine von dessen Achse abweichende Lage und Krümmung.

Abb. 16.



Den allgemeinen Fall der Spannungsverteilung und der Dehnungen für einen Querschnitt $a\,b$ stellt hiernach Abb. 16 dar. Die Nullinie $n\,n$ liegt aufserhalb der Schwerachse $o\,o$ des Querschnittes; die Linie der Dehnungen dnz ist, da der Querschnitt eben bleibt, eine Gerade, dagegen setzt sich die Linie der Spannungen $a_1\,n\,b_1$ aus zwei Kurven $\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$ mit verschiedenen Unveränderlichen zusammen. $a_2\,b_2$ würde die dem Hookeschen Gesetz entsprechende Spannungslinie sein. Ersetzt man die Kurve $n\,a_1$ durch die Gerade $n\,a_3$, die Kurve $n\,b_1$ durch die Gerade $n\,b_3$ derart, dafs Fläche $n\,a\,a_1 = \triangle\, n\,a\,a_3$ und Fläche $n\,b\,b_1 = \triangle\, n\,b\,b_3$, so erhält man eine angenähert richtige Spannungsverteilung, wie sie namentlich der Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen neuerdings häufig zugrunde gelegt wird.

Bei den vorstehend genannten Baustoffen nehmen die Spannungen weniger zu als die Dehnungen; deshalb ergibt sich σ_{max} in Wirklichkeit stets kleiner als auf Grund des Hookeschen Gesetzes.

Die für diese Stoffe aus Biegungsversuchen auf Grund der Gleichung V auf S. 424 bestimmte Biegungsfestigkeit (die scheinbare Zugfestigkeit) nähert sich der (wirklichen) Zugfestigkeit umsomehr, je mehr der Abstand z_0 des Schwerpunktes der auf der einen Seite der wagerechten Schwerlinie liegenden Querschnittsfläche dem Werte e gleichkommt; sie überschreitet die Zugfestigkeit umsomehr, je mehr sich der Stoff nach der wagerechten Schwerlinie zusammendrängt.

Bei rechteckigem Querschnitte beträgt nach L. Geusen u. a.**) das Verhältnis μ_0 der Biegungsfestigkeit K_b zur wirklichen Zugfestigkeit K_z

für Gufseisen, Granit und Kalkstein $\mu_0 = 2$,
„ Sandstein . . . . $\mu_0 = 3$,
„ Beton . . . . $\mu_0 = 2{,}2$.

Für diese Stoffe nimmt man dementsprechend $k_b = \mu_0 k_z$. (Für Gufseisen vrg S. 405, wobei $\mu_0 = \mu \sqrt{e : z_0}$.)

Je zwei Schubspannungen, die eine Kante eines beliebigen kleinen, würfelförmigen Körperteilchens winkelrecht schneiden, sind gleich grofs und haben gegen die Kante übereinstimmende Richtung (vrgl. S. 420).

Bemerkung. Nachstehende Verfahren der Spannungsermittlung gelten annähernd auch für **gekrümmte Stäbe,** u. zw. um so genauer, je gröfser der Krümmungshalbmesser im Verhältnis zur Querschnitthöhe ist.

---

*) Für den rechteckigen Querschnitt haben R. Latowski und L. Geusen (s. Z. d. V. d. I. 1897 S. 941 u. 1898 S. 463) die Nullinie und Spannungsverteilung angegeben. Fernere Arbeit hierüber s. Z. ö. I. u. A. V. 1903 S. 286 u. 1904 Nr. 11. Die Grundzüge einer allgemeinen Theorie auf Grund des Dehnungsgesetzes $\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$ mit Berücksichtigung verschiedener Unveränderlichen für Zug und Druck s. C. Bach: Elastizität und Festigkeit, 5. Aufl. S. 224.

**) Vrgl. L. Geusen, Z. d. V. d. I. 1898 S. 463.

1. Die Momentenebene geht durch eine Hauptachse des Querschnittes.

In diesem Falle fällt die Nullinie mit der anderen Hauptachse des Querschnittes zusammen.

1. Normalspannungen.

Es sei σ die Normalspannung einer Faser in kg/qcm,
y der Abstand der Faser von der Nullinie in cm,
σ_1 die Normalspannung für $y = 1$ cm, also $\sigma_1 = \sigma : y$,
e_1 und e_2 der Abstand der entferntesten gezogenen bzw. gedrückten Faser (Randfaser) in cm,
e allgemein der gröfsere dieser beiden Abstände,
k_z die zulässige Zugspannung in kg/qcm,
k die zulässige Druckspannung in kg/qcm,
k_b die zulässige Biegungsspannung in kg/qcm,
J das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die Nullinie, in cm^4.

Alsdann gelten die **Grundgleichungen**

$$\sigma_1 = \frac{M}{J} = \frac{\text{Biegungsmoment}}{\text{Trägheitsmoment}}, \quad \text{also} \quad \sigma = \frac{M}{J} y \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV.}$$

Damit die zulässigen Grenzspannungen nicht überschritten werden, mufs sein

$$\sigma_{max} = \frac{M}{J} e_1 < k_z \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = \frac{M}{J} e_2 < k.$$

Die Werte $J : e_1 = W_1$ und $J : e_2 = W_2$ werden die **Widerstandsmomente** des Querschnittes für die Zug- bzw. die Druckseite genannt. Hiernach entstehen die allgemeinen **Festigkeitsbedingungen**

$$\frac{M}{W_1} \overline{\overline{<}} k_z ; \qquad \frac{M}{W_2} \overline{\overline{<}} k.$$

Ist k_z von k verschieden, so sind beide Formeln zu benutzen. Ist die Nullinie eine Symmetrie-Achse des Querschnittes ($e_1 = e_2$), so folgt $W_1 = W_2$, und es ist die dem kleineren der beiden k-Werte entsprechende Formel mafsgebend.

Sind die zulässige Zug-, Druck- und Biegungsspannung einander gleich, $k_z = k = k_b$ (z. B. bei Schweifseisen, Flufseisen, Flufsstahl), und nennt man $J : e = W$ das Widerstandsmoment schlechthin (wobei der kleinere der beiden Werte W_1 und W_2 gemeint ist), so gelten die Festigkeitsgleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \textbf{Spannungsberechnung:} & \sigma_{max} = M : W \\ \text{für } \textbf{Querschnittsberechnung:} & W = M : k_b \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{V.}$$

(Tafel der W für verschiedene Querschnitte s. S. 434 u. f.)

Der **gefährliche Querschnitt** (Bruchquerschnitt) eines Trägers, der dessen Berechnung zugrunde zu legen ist, ergibt sich nach Gleichung V aus der Bedingung

$$M : W (= \sigma_{max}) = \max.$$

Für **Träger gleichen Querschnittes** ist W unveränderlich, also der gefährliche Querschnitt der, worin M seinen Höchstwert erreicht, d. h.,

bei dem die Querkraft $Q = \frac{dM}{dx} = 0$ ist oder von + in — übergeht. (Vrgl. S. 422.) Für solche Träger auf zwei Stützen hat man zur Querschnittsermittlung folgendes

Rechnungsverfahren. 1) **Bestimmung der Auflagerdrücke:** Die algebraische Summe der Produkte aus sämtlichen Lasten und den Abständen ihrer Angriffpunkte (bei Streckenlasten der Schwerpunkte) vom Auflager B, geteilt durch die Freilänge l, ergibt den Auflagerdruck A. Der Auflagerdruck B wird entsprechend wie A oder als Unterschied der Gesamtbelastung und des Auflagerdruckes A gefunden.

2) Addiert man, von dem einen Trägerende ausgehend, die aufeinanderfolgenden Belastungen so weit, bis sich der zugehörige Auflagerdruck ergibt oder (bei Einzellasten) überschritten wird, so liegt an dieser Stelle der **gefährliche Querschnitt.** Streckenlasten betrachtet man hierbei als die Summe von Einzellasten über den Einheiten (d. h. über den einzelnen cm) der Freilänge.

3) Multipliziert man den Auflagerdruck A (oder B) (in kg) mit der Strecke von A (bzw. B) bis zum gefährlichen Querschnitt (in cm) und zieht davon die Summe der Produkte aus den auf dieser Strecke wirkenden Lasten (in kg) und den Abständen ihrer Angriffpunkte (bei Streckenlasten der Schwerpunkte) vom gefährlichen Querschnitt (in cm) ab, so erhält man M_{max} (in cmkg), das, durch k_b (in kg/qcm) geteilt, das **erforderliche Widerstandsmoment** W (in cm^3) ergibt.

Die Tafel auf S. 446 u. f. gibt die Berechnung der Träger für die häufigeren Belastungsfälle.

Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung (s. S. 463) ergeben für jeden Querschnitt denselben Wert von σ_{max}; hierzu ist also nach Gleichung V die Bedingung zu erfüllen

$$\sigma_{max} = M : W = \text{unveränderlich},$$

d. h. M und W müssen sich für die ganze Trägerlänge nach demselben Gesetz ändern.

2. Schubspannungen.

Die Schubkraft auf die Längeneinheit des Trägers, im Abstande y von der Nullschicht, ist nach S. 419 (Abb. 8) in kg/cm

$$T_y = \tau_y z = \frac{Q S_y}{J} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{VI.}$$

Weiteres für die wichtigsten Querschnitte ist auf S. 420 angegeben.

3. Hauptspannungen.

Die in einem Flächenteilchen des Stabquerschnittes gleichzeitig auftretende Normalspannung σ und Schubspannung τ ergeben nach jeder Richtung in der Biegungsebene eine bestimmte Normalspannung; trägt man alle diese Spannungen von dem Flächenteilchen aus auf ihren Richtungen ab, so liegen die Endpunkte auf der **Spannungsellipse,** von der zwei zugeordnete Durchmesser die Richtungen von

σ und τ haben. Die Halbachsen der Spannungsellipse, σ_{max} und σ_{min} sind die **Hauptspannungen.** Entsprechend ergeben sich aus der Dehnung ε und der Schiebung γ die **Dehnungsellipse** (Deformationsellipse) und ihre Halbachsen, die **Hauptdehnungen** ε_{max} und ε_{min}.

Die Richtungen der Halbachsen dieser beiden Ellipsen stimmen (bei durchaus gleichartigen Körpern) zwar überein, dagegen stehen infolge der Querzusammenziehung ε_q die Gröfsen $\varepsilon \frac{max}{min}$ und $\sigma \frac{max}{min}$ selbst nicht zueinander in der einfachen Beziehung $\varepsilon = \alpha \sigma$.

Denkt man sich die Hauptdehnungen ε_{max} und ε_{min} entstanden durch Wirkung zweier Spannungen σ'_{max}, σ'_{min} gemäfs der Gleichung $\varepsilon = \alpha \sigma$, so heifsen σ'_{max}, σ_{min} die **idealen Hauptspannungen** (nach C. Bach die gröfste [Zug- und Druck-] Anstrengung des Punktes).

Von den Hauptspannungen σ_{max}, σ_{min} bringt jede in ihrer eigenen Richtung eine achsiale, in der Richtung der anderen (auf ihr winkelrecht stehenden) Hauptspannung eine Quer-Längenänderung hervor; σ_{max} und σ_{min} lassen sich daher ersetzen durch die idealen Hauptspannungen σ'_{max} und σ'_{min}, von denen jede in ihrer Richtung allein die Formänderung bewirkt, die σ_{max} und σ_{min} zusammen bewirken würden.

Die **Hauptspannungen** des Querschnittsteilchens ergeben sich aus der herrschenden Normalspannung σ und Schubspannung τ zu

$$\sigma \frac{max}{min} = {}^1/_2\,\sigma \pm {}^1/_2 \sqrt{\sigma^2 + 4\,\tau^2}.$$

Mit Rücksicht auf das doppelte Vorzeichen ist σ_{max} stets eine Zug-, σ_{min} stets eine Druckspannung.

Der Winkel ψ, unter dem $\sigma \frac{max}{min}$ gegen die Balkenachse geneigt ist, ergibt sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\,\psi = \mp \frac{2\,\tau}{\sigma}\,.$$

Die Richtungen der Hauptspannungen stehen daher winkelrecht aufeinander.

Für $\tau = 0$ (z. B. für die von der Nullinie entferntesten Querschnittsteile eines Trägers) wird $\psi = 0$ und $\sigma_{max} = \sigma$, $\sigma_{min} = 0$, d. h., die gröfste Dehnung findet in der Richtung der Balkenachse statt.

Für $\sigma = 0$ (z. B. für die Nullinie des Querschnittes) wird $\psi = \mp 45^0$ und $\sigma_{max} = + \tau$, $\sigma_{min} = - \tau$, d. h., Schubspannungen allein erzeugen Hauptspannungen, die unter Winkeln von 45^0 gegen die Balkenachse geneigt sind.

Die **idealen Hauptspannungen** (gröfsten Beanspruchungen) des Querschnittsteilchens sind

$$\sigma' \frac{max}{min} = \frac{m-1}{2m}\,\sigma \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2};$$

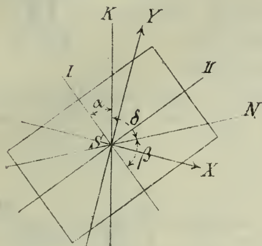
hierin bedeutet $m = {}^{10}/_3$ das Verhältnis $\varepsilon : \varepsilon_q$ (Näheres s. S. 390), $\alpha_0 = k_z : \frac{m+1}{m} k_s$ (für Zug) oder $\alpha_0 = k : \frac{m+1}{m} k_s$ (für Druck) das Beanspruchungs-Verhältnis. Bei durchaus gleichartigen Körpern ist $\alpha_0 = 1$; sonst ist α_0 mittels der Tafel auf S. 446 zu bestimmen.

Für $m = {}^{10}/_3$ wird

$$\sigma'\frac{\max}{\min} = 0{,}35\,\sigma \pm 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2},$$

worin $\alpha_0 = \frac{k_z}{1{,}3\,k_s}$, bzw. $\alpha_0 = \frac{k}{1{,}3\,k_s}$.

Abb. 17.



2. Beliebige Momentenebene.

(Unsymmetrische Belastung.)

Als **Kraftlinie** SK werde die Schnittlinie der durch die Träger-Schwerachse gehenden Momentenebene mit der Querschnittebene bezeichnet; ferner seien (Abb. 17)

J_x und J_y die Trägheitsmomente für zwei beliebige, sich rechtwinklig schneidende Schwerachsen SX, SY,

$J_{\max} = J_{\rm I}$, $J_{\min} = J_{\rm II}$ die Hauptträgheitsmomente,

α der Winkel zwischen Kraftlinie SK } und erster Hauptachse $S{\rm I}$

β der Winkel zwischen Nullinie SN } (für $J_{\max}$),

δ der Winkel zwischen Kraftlinie SK und Nullinie SN.

1. Beziehungen zwischen Kraftlinie und Nullinie.

Kraftlinie und Nullinie bilden zwei zugeordnete Achsen des Querschnittes (für die das Zentrifugalmoment = 0 ist). Daher läſst sich die eine der beiden Linien aus der gegebenen anderen mit dem Trägheitskreise leicht finden; vrgl. S. 219, Abb. 92. Sind die Hauptachsen des Querschnittes gegeben, so findet man die Nulllinie auch ohne Trägheitskreis nach dem nachstehenden zeichnerischen Verfahren (s. u. 2.). Rechnerisch ergibt sich β aus der Beziehung

$$\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta = J_{\rm I} : J_{\rm II}.$$

2. Spannungsermittlung.

α) Gegeben die **Hauptachsen** $S{\rm I}$ mit $J_{\max} = J_{\rm I}$ und $S{\rm II}$ mit $J_{\min} = J_{\rm II}$.

Rechnerisches Verfahren (vrgl. Abb. 18). Ist

$M_1 = M\sin\alpha$ = Seitenmoment von M, winkelrecht zu $S{\rm I}$,

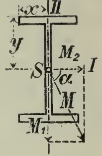
$M_2 = M\cos\alpha$ = Seitenmoment von M, winkelrecht zu $S{\rm II}$,

so ist die Spannung in einem beliebigen Punkte mit den Koordinaten x, parallel zu $S{\rm I}$, und y, parallel zu $S{\rm II}$:

$$\sigma = \frac{M_1}{J_{\rm I}}\,y + \frac{M_2}{J_{\rm II}}\,x.$$

σ_{max} ergibt sich, wenn man für x, y die Koordinaten des am weitesten von der zugehörigen Nullinie gelegenen Randpunktes des Querschnittes einsetzt, wobei die Nullinie im allgemeinen vorher zeichnerisch nach Abb. 19 oder 20 bestimmt werden mufs.

Abb. 18.



Für Querschnitte, deren Umhüllung ein Rechteck ist, z. B. I- und [-Profile ergibt sich hiernach einfach

$$\sigma_{max} = \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2} = M\left(\frac{\sin\alpha}{W_1} + \frac{\cos\alpha}{W_2}\right) = \frac{M}{W'},$$

wobei W_1 und W_2 die Widerstandsmomente, bezogen auf die Hauptachsen und den am weitesten von diesen gelegenen Randpunkt sind.

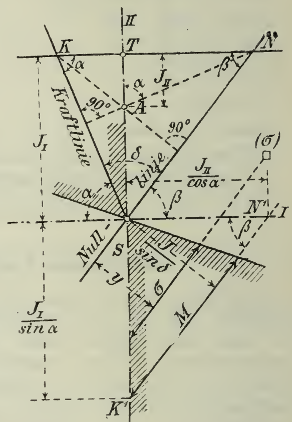
Den Ausdruck

$$W' = \frac{1}{\dfrac{\sin\alpha}{W_1} + \dfrac{\cos\alpha}{W_2}} = \frac{W_1\,W_2}{W_1\cos\alpha + W_2\sin\alpha}$$

nennt man die **Widerstandsgröfse** des Querschnitts für die Kraftebene M (oder für die zugehörige Nullinie). Einfache Konstruktion von W' s. S. 429.

Zeichnerisches Verfahren (nach R. Land)*) s. Abb. 19.

Abb. 19.



SK sei die Kraftlinie; auf Achse SII trage $ST = J_{\rm I}$, $TA = J_{\rm II}$ (also $SA = J_{\rm I} - J_{\rm II}$) ab, so schneiden sich die Geraden KTN (parallel zu SI) und AN (winkelrecht zu SK) in einem Punkte N der Nullinie, die zugleich winkelrecht zu KA steht. (Denn es ist $TN = J_{\rm II}\,\mathrm{tg}\,\alpha = J_{\rm I} : \mathrm{tg}\,\beta$.)

Spannungsfläche. Trage auf SI (Abb. 19) $SN = AN = J_{\rm II} : \cos\alpha$ (oder $SK = SK = J_{\rm I} : \sin\alpha$ auf SII), ferner auf der durch N (oder K) gelegten Parallelen $K\ N$ zu SN an beliebiger Stelle den Wert M ab, so begrenzen die von S ausgehenden Strahlen nach den Endpunkten von M die Spannungsfläche mit Ordinaten σ, parallel zu SN, aus der σ_{max} und σ_{min} sofort zu entnehmen sind. M hat von S den Abstand $J : \sin\delta = J : \sin(\alpha + \beta)$, worin $J = J_{\rm I}\cos^2\beta + J_{\rm II}\sin^2\beta$ das Trägheitsmoment, bezogen auf die Nullinie SN ist. Der Mafsstab für diese Strecken σ folgt daher aus der allgemeinen Formel

$$\sigma = \left(M : \frac{J}{\sin\delta}\right) y,$$

wenn man hierin anstatt der Buchstaben den Maßstab ihrer zeichnerischen Darstellung setzt.

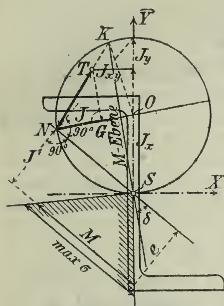
*) S. Z. d. B. 1893. S. 465.

Beispiel für die Maßstäbe: Längen (y): 1 cm = 2 cm Wirklichkeit, Momente (M): 1 cm = 5000 cmkg, Trägheitsmomente (J): 1 cm = 100 cm⁴ wird der Maßstab der Spannungen (σ):

$$1 \text{ cm} = \frac{5000 \text{ cmkg} \cdot 2 \text{ cm}}{100 \text{ cm}^4} = 100 \text{ kg/qcm}.$$

β) Gegeben der **Trägheitskreis** (bestimmt aus J_x, J_y und J_{xy}, für zwei **beliebige,** winkelrechte Schwerachsen SX, SY, vrgl. S. 218), s. Abb. 20. Die Nullinie ist die der Kraftlinie SK zugeordnete Achse SN, bestimmt durch die Sehne KTN. Das auf NS bezogene Trägheitsmoment ist nach S. 218 $J = NG$. Da $\angle NOK = 2 NSK = 2\delta$, so ist $\angle KNO = \frac{1}{2}(180^0 - 2\delta) = 90^0 - \delta$, also $\angle NTG = \delta$ und $TN = J' = J : \sin \delta$. Bedeutet y den Abstand eines Querschnittpunktes von der Nullinie, so ist die Spannung in diesem Punkte*)

Abb. 20.



$$\sigma = \frac{M}{J'}\, y \text{ und } \sigma_{max} = \frac{M}{J'}\, e = \frac{M}{J : \sin \delta}\, e,$$

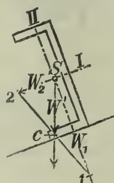
wobei $e = y_{max}$.

Spannungsfläche. Zieht man im Abstande $J' = TN$ von der Nullinie eine Parallele zu SN, trägt auf dieser die Strecke M auf, so begrenzen die von S ausgehenden beiden Strahlen nach den Endpunkten von M die Spannungsfläche mit Ordinaten σ, parallel zu SN, deren Maßstab wie vorstehend unter α) bestimmt wird.

Bemerkung. Kann sich ein Träger infolge äußerer Anordnung benachbarter Bauteile nur nach bestimmter Richtung durchbiegen, so ist hierdurch die Lage der Nullinie SN, winkelrecht zur Biegungsebene, sowie die Strecke TN aus dem Trägheitskreise gegeben, und umgekehrt ist die Lage der wirkenden Momentenebene (beeinflußt durch die seitlichen Widerstände) bestimmt.

Die **Widerstandsgröße** W' für die Nullinie SN (vrgl. α) ist hiernach

Abb. 21.



$$W' = \frac{J'}{e} = \frac{J}{e \sin \delta} = \frac{W}{\sin \delta},$$

wenn $W (= J : e)$, entsprechend S. 424, das Widerstandsmoment für die Nullinie SN bezeichnet.

Es ist also allgemein

$$\sigma_{max} = \frac{\text{Biegungsmoment}}{\text{Widerstandsgröße}} = \frac{M}{W'} = \frac{M}{W : \sin \delta} \quad . \quad \text{V a.}$$

Formel V auf S. 424 ist hiervon der Sonderfall für $\delta = 90^0$, d. h. für die Hauptachsen.

Für Querschnitte, deren Umhüllung ein Rechteck ist, z. B. I- und ⊏-Profile, ergibt sich W für eine beliebige Lage des Querschnittes zu der lotrechten Kraftlinie einfach nach Abb. 21, indem man die auf die beiden Hauptachsen bezogenen Widerstandsmomente

*) S. R. Land, Die Ermittlung der Spannungsverteilung usw., Z. f. B. 1892 S. 554 auch als Sonderdruck erschienen bei Wilh. Ernst & Sohn, Berlin.

$W_1 = S_1$ (winkelrecht zu SI) und $W_2 = S2$ (winkelrecht zu SII) nach beliebigem Maßstabe (z. B. 1 cm = 20 cm³) aufträgt und den Schnittpunkt c der lotrechten Kraftlinie mit der Geraden 12 bestimmt. Dann ist $W' = Sc$ (im Maßstabe von W_1 und W_2) und $\sigma_{max} = M : W$.

Nach R. Land bezeichnet man die Linie 12 als einen Teil der W'-Grenze, die durch Auftragen jeder Widerstandsgröße von S aus auf der zugehörigen Kraftlinie entsteht und die sich hier als Rhombus darstellt. Die durch die W'-Grenze bestimmte Fläche heißt die polarsymmetrische W'-Fläche.*) Ueber ihre Form und ihre Beziehung zum Kern s. S. 480.

3. Querschnittbestimmung.

α) Für die häufig angewendeten **I- und [-Walzprofile** läßt sich nach der in 2., α) (S. 427) gegebenen Gleichung für σ_{max}, wenn man dafür k_b setzt, nachstehendes Verfahren ableiten, wobei die Richtung der Kraftlinie (Momentenebene) und die Lagen der Hauptachsen gegeben seien. Man zerlege das gegebene Moment M in die Seitenmomente M_1 winkelrecht zur ersten Hauptachse SI und M_2 winkelrecht zur zweiten Hauptachse SII (vrgl. Abb. 18, S. 428); dann ist das erforderliche Widerstandsmoment

$$W_1 = (M_1 + u M_2) : k_b, \quad \text{worin} \quad u = W_1 : W_2.$$

Man setze also für ein schätzungsweise passendes Profil aus den Profiltafeln (s. 5. Abschn.) die zugehörige Verhältniszahl u ein, bestimme nach vorstehender Formel den Wert W_1 und setze die zum nächst passenden Profile gehörige Verhältniszahl $W_1 : W_2 = u$ von neuem in die Formel, um den genaueren, mindestens erforderlichen Wert W_1 zu erhalten. Mittelwerte für die erste Schätzung sind

für I-Profile $u = 9$, für [-Profile $u = 7$,**)
für Differdinger I-Profile $u = 5$.

Beispiel: Ein I-Träger hat durch ein einseitiges Gewölbe einen wagerechten Schub aufzunehmen; es seien folgende Größtwerte der Seitenmomente M für die Trägermitte berechnet: $M_1 = 50\,000$ cmkg (in lotrechter Ebene), $M_2 = 100\,000$ cmkg (in wagerechter Ebene). Für k_b = 875 kg/qcm ist nach vorstehender Formel

$$W_1 = (50\,000 + 9 \cdot 100\,000) : 875 = 1086 \text{ cm}^3.$$

Am nächsten liegt das Normal-Profil Nr. 36 mit $W_1 = 1088$ cm³, für das $u = W_1 : W_2 = 9{,}53$ ist; also wird genauer: $W_1 = (50\,000 + 9{,}52 \cdot 100\,000) : 875 = 1146$ cm³ d. h., I Nr. 36 genügt nicht als Trägerquerschnitt; es ist zu wählen I Nr. 38 mit $W = 1262$ cm³.

β) Für den **rechteckigen** Querschnitt hb ist $u = h : b$, und man erhält

$$h^3 = 6u(M_1 + uM_2) : k_b; \quad b = h : u.$$

Bei den Normalprofilen für Bauhölzer (s. 4. Abschn., Stoffkunde) liegt u zwischen 1 und 1,43; bei größter Abweichung vom Quadrat ist für starke Querschnitte (von 18 · 24 cm ab) $u = 1{,}3$, für mittelstarke $u = 1{,}4$. Rechnungsverfahren wie unter α).

γ) Zeichnerische Bestimmung des Querschnittes von **Z-Walzprofilen** s. Z. d. B. 1904 S. 69.

---

*) Ueber Eigenschaften und Anwendung dieser Fläche für beliebige Querschnitte s. Z. d. V. d. I. 1898 S. 445.

**) Die Verhältnisse u für die deutschen Normalprofile s. im Deutschen Normalprofil-Buch für Walzeisen, 6. Aufl. 1904.

c. Elastische Formänderungen gerader Träger.

Als Anfangspunkt der rechtwinkligen Koordinaten werde ein Trägerauflager, bei Freiträgern das freie Trägerende gewählt. Die x-Achse sei die ursprünglich gerade Achse des Trägers.

1. Elastische Formänderung durch Biegungsmomente.

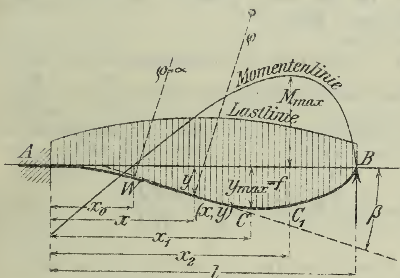
1. Die gegenseitige **Verdrehung** zweier parallelen Träger-Querschnitte x_1 und x_2 durch das **Biegungsmoment** M ist zwischen x_1 und x_2 bei unveränderlichem Trägheitsmomente J:

$$\beta = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\varrho} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M\,dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\int_{x_1}^{x_2} M\,dx = \frac{1}{EJ} \cdot \Big[\text{Momentenfläche}\Big]_{x_2}^{x_1}.$$

E s. S. 390, 396 u. f. Ist J veränderlich, so tritt in die vorstehende Formel für J ein beliebiger fester Wert J_c (zweckmäßig der größte der vorhandenen J-Werte) ein und an Stelle der gegebenen Momentenfläche eine verzerrte, deren Ordinaten $M' = M\dfrac{J_c}{J}$ sind.

2. Die **elastische Linie** (Biegungslinie, Kurve $ACCB_1$ in Abb. 22) ist die durch die angreifenden Kräfte gebogene (ursprünglich gerade) Achse des Trägers; für ihren Krümmungshalbmesser ϱ gilt die Formel

Abb. 22.



$$\varrho = \frac{EJ}{M} \quad . \; . \; . \text{ VII.}$$

Die Trägerachse (AB) erfährt bei der Biegung meist nur kleine Neigungen β, so daß in der allgemeinen Formel für ϱ (S. 95) annähernd $ds = dx$ (oder $\cos\beta = 1$, $\sin\beta \sim \beta$) gesetzt werden darf. Hiermit ergibt sich die **Differentialgleichung der elastischen Linie** ACC_1B:

$$\pm\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} = \frac{1}{\varrho} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \text{ VIII.}$$

Durch einmalige Integration ergibt sich hieraus $\dfrac{dy}{dx}$, d. h. die Tangente des Biegungswinkels β im Punkte (xy) ($\operatorname{tg}\beta$ in Abb. 22); durch zweimalige Integration die Gleichung der elastischen Linie, wobei die Integrations-Konstanten durch die jeweiligen Auflagerbedingungen des Trägers gegeben sind. Für ein festes oder ein wagerecht gleitendes Auflager (B in Abb. 22) ist

$y = 0$, und für ein eingespanntes Trägerende (A in Abb. 22) ist $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\beta = 0$. **Wendepunkte** (nach S. 96, W entsprechend x_0 in Abb. 22) der elastischen Linie finden sich für Querschnitte, in denen $M = 0$ (d. h. $\varrho = \infty$) ist. Die gröfste **Durchbiegung** f des Trägers (in C Abb. 22, entspr. x_1) ist aus der Bedingung $y = \max$ zu ermitteln. (Davon zu unterscheiden ist der Querschnitt des gröfsten Biegungsmomentes (C_1 in Abb. 19a, entspr. x_2), der sich aus der Bedingung $M = EJ\frac{d^2 y}{dx^2} = \max$ ergibt.) Die Bedingung dafür, dafs die elastische Linie ein **Kreis** sei, ist

$$\frac{\varrho}{E} = \frac{J}{M} = \text{unveränderlich.}$$

Dieses rechnerische Verfahren ist nur für einfache Belastungsfälle zweckmäfsig. — Gleichung elastischer Linien für bestimmte Belastungsfälle s. S. 446 u. f.

3. **Verfahren von Mohr** für allgemeinere Belastungsfälle. Die Durchbiegung y bei einem Querschnitte C ist gleich dem $(1:EJ)$-fachen Werte des Momentes für C, das durch die gegebene M-Fläche als neue Belastungsfläche des Trägers erzeugt wird. Ist J veränderlich, so wird, wie vorstehend unter 1., J durch J_c und die M-Fläche durch die verzerrte M'-Fläche ersetzt. — Die elastische Linie kann hiernach, als Momentenlinie aufgefafst, auch zeichnerisch als **Seillinie** gefunden werden, u. zw. für die vorhin erwähnte neue Belastungsfläche und die Polweite EJ bezw. EJ_c.

4. **Arbeit der Biegung.** Durch das Biegungsmoment M erfährt das Teilchen dx des Stabes eine Drehung um $d\beta = \frac{dx}{\varrho} = \frac{M\,dx}{EJ}$, gemessen als Bogen für den Halbmesser 1 (s. unter 1); mithin ist die Arbeit, die bei dieser Drehung verrichtet wird, $dA = \frac{1}{2}\,M\,d\beta$, und

$$A = \frac{1}{2}\int_0^l M\,d\beta = \frac{1}{2}\int_0^l M\frac{dx}{\varrho} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2\,dx}{EJ} \quad . \; . \; . \quad \text{IX.}$$

Bei Einzellasten ist die Integration für die verschiedenen Strecken von l einzeln auszuführen.

Hiernach ist für die auf S. 446 u. f. angegebenen Belastungsfälle A zu ermitteln. Man erhält z. B.

für Fall 1.	$A = \frac{1}{2}\,Pf$,	für Fall 8. u. 12.	$A = \frac{8}{25}\,Pf$,
für Fall 7.	$A = \frac{1}{5}\,Pf$,	für Fall 14.	$A = \frac{17}{42}\,Pf$ usw.

2. Elastische Formänderung durch die Schubkräfte.*)

Der Gleitwinkel zweier um dx voneinander entfernten Querschnitte durch die Wirkung der Schubkraft Q beträgt für Walz- und Blech-

*) S. R. Land, Einflufs der Schubkräfte usw. Z. f. B. 1894 S. 611 u. f. (Auch als Sonderdruck zu beziehen von Wilh. Ernst u. Sohn.)

träger, alleinige und gleiche Verteilung der Schubspannungen auf den Trägersteg vorausgesetzt, annähernd

$$\gamma = \frac{Q}{F' G} = \frac{dM}{F' G\, dx},$$

worin F' den Stegquerschnitt in qcm und G das Gleitmafs in kg/qcm bezeichnet.

Für andere Querschnitte ist statt F' der genaue Ausdruck $\frac{Q}{\int \tau^2 df}$ zu setzen, worin das Integral über den ganzen Querschnitt zu nehmen ist.

Demnach ist die Durchbiegung des Trägers infolge der Schubkräfte im Abstande x vom Auflager:

$$y = \int_0^x \gamma\, dx = \int_0^x \frac{dM}{F' G} = \frac{M_x - M_0}{F' G},$$

wo M_0 das Biegungsmoment über der Stütze bedeutet.

Für $M_0 = 0$, also für den einfachen Träger auf zwei Stützen, ist

$$y = \frac{M_x}{F' G} \qquad \text{X.}$$

d. h. die durch die Schubkräfte erzeugte elastische Linie ist die Seillinie, die zu der gegebenen Belastungsfläche des Trägers mit der Polweite $F' G$ gehört.

Ist der Stegquerschnitt F' veränderlich, so kann das unter 1. angegebene Mohrsche Verfahren sinngemäfs (statt J setze F', statt Momentenfläche Belastungsfläche) Anwendung finden.

Durch den Einflufs der Schubkräfte, den man meist vernachlässigt, wird die Durchbiegung eines Trägers um etwa 8 bis 12 vH vergröfsert. Umgekehrt ergibt sich das Elastizitätsmmafs E, aus Biegungsversuchen berechnet, zu klein, wenn der Einflufs der Schubkräfte nicht berücksichtigt wird.*)

Die **Arbeit der Formänderung** des Trägers durch die Schubkräfte ist

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^l Q\gamma\, dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Q^2 dx}{F' G} \qquad \text{XI.}$$

d. Trägheits- und Widerstandsmomente.

Erklärung und allgemeine Gesetze über Trägheitsmomente s. S. 213 u. f.; zeichnerische Bestimmung der Trägheitsmomente s. S. 217 u. f.; Bestimmung der Trägheitsmomente mittels Pendelversuches s. S. 210.

*) S. Z. d. V. d. I. 1888 S. 222 u. f.

Aequatoriale Trägheitsmomente und Widerstandsmomente der üblichsten Querschnittsformen.

Bei den **unsymmetrischen** Querschnitten Nr. 7 und 12 ist nur das **kleinere** (mafsgebende) der beiden Widerstandsmomente W_1 und W_2 angegeben (vrgl. S. 424). — Trägheits- und Widerstandsmomente der deutschen **Normalprofile für Walzeisen** s. im 4. Abschn., Stoffkunde. Trägheitsmomente für **Blechträger**-Querschnitte s. Abteil. III, Abschn.: Brückenbau. Trägheits- und Widerstandsmomente für Profile breitfüfsiger **Eisenbahnschienen** s. Abteil. III, Abschn.: Eisenbahnwesen.

Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
1*)		$J = \frac{b h^3}{12}$	$W = \frac{b h^2}{6}$
2**)		$J = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{h^3}{6}$
3**)		$J = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{\sqrt{2}}{12} h^3 = 0{,}1179\, h^3$***)
4		$J = \frac{b}{12}(H^3 - h^3)$	$W = \frac{b}{6} \frac{H^3 - h^3}{H}$
5†)		$J = \frac{H^4 - h^4}{12}$	$W = \frac{1}{6} \frac{H^4 - h^4}{H}$
6†)		$J = \frac{H^4 - h^4}{12}$	$W = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{H^4 - h^4}{H} = 0{,}1179 \frac{H^4 - h^4}{H}$

*) Ausführliche Tafel s. S. 442 u. f.

**) Ausführliche Tafel s. S. 441.

***) Schneidet man die obere und die untere Ecke wagerecht ab, so wird W gröfser; die beiderseitige Verkürzung um je $1/18$ der Diagonale ergibt $W_{max} = 0{,}1242\, h^3$.

†) Hierzu kann die Tafel S. 441 benutzt werden.

Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
7		$J = \frac{b\,h^3}{36}$ $e = \frac{2}{3}\,h$	$W = \frac{b\,h^2}{24}$
8		$J = \frac{5\sqrt{3}}{16}\,R^4$ $= 0{,}5413\;R^4$	$W = \frac{5}{8}\,R^3$
9			$W = 0{,}5413\;R^3$
10		$J = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6}\,R^4$ $= 0{,}6381\;R^4$	$W = 0{,}6906\;R^3$*)
11	**Regelmäfsiges Vieleck.** *F* ist der Flächeninhalt, *a* die Seite, *R* der Halbmesser des umliegenden, *r* der des einliegenden Kreises. Beliebige Achse durch den Mittelpunkt. (Weiteres s. S. 120.)	$J = \frac{F}{24}\,(6\,R^2 - a^2)$ $= \frac{F}{48}\,(12\,r^2 + a^2)$ $J \sim \frac{F\,R^2}{4}$	$W \sim \frac{F\,R}{4}$
12		$J = \frac{6\,b^2 + 6\,b\,b_1 + b_1^2}{36\,(2\,b + b_1)}\,h^3$ $e = \frac{1}{3}\,\frac{3\,b + 2\,b_1}{2\,b + b_1}\,h$	$W = \frac{6\,b^2 + 6\,b\,b_1 + b_1^2}{12\,(3\,b + 2\,b_1)}\,h^2$
13		$J = \frac{B\,H^3 + b\,h^3}{12}$	$W = \frac{B\,H^3 + b\,h^3}{6\,H}$

*) In bezug auf eine Diagonale ist $W = 0{,}6381\;R^3$.

Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
14		$J = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
15		$J = \frac{1}{3}(Be_1^3 - bh^3 + ae_2^3)$ $e_1 = \frac{1}{2}\,\frac{aH^2 + bd^2}{aH + bd}$ $e_2 = H - e_1$	
16		$J = \frac{1}{3}(Be_1^3 - B_1 h^3 + be_2^3 - b_1 h_1^3)$ $e_1 = \frac{1}{2}\,\frac{aH^2 + B_1 d^2 + b_1 d_1 (2H - d_1)}{aH + B_1 d + b_1 d_1}$	
17*)		$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$ $= 0{,}0491\, d^4$ $= 0{,}7854\, r^4$ $= F\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{F}{4} r^2$ $J \sim 0{,}05\, d^4$	$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}$ $= 0{,}0982\, d^3$ $= 0{,}7854\, r^3$ $= \frac{F}{4} r$ $W \sim 0{,}1\, d^3$
18**)	$d_m = \frac{1}{2}(D + d)$ $s = \frac{1}{2}(D - d)$	$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$ $= \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$ $= \frac{1}{4} F (R^2 + r^2)$ $J \sim 0{,}05\,(D^4 - d^4)$	$W = \frac{\pi}{32}\,\frac{D^4 - d^4}{D}$ $= \frac{\pi}{4}\,\frac{R^4 - r^4}{R}$ $W \sim 0{,}8\, d_m^2 s$
19		$J = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$ $= 0{,}1098\, r^4$	$W_2 = 0{,}1908\, r^3$ $W_1 = 0{,}2587\, r^3$ $e_1 = 0{,}4244\, r$
20		$J = 0{,}1098\,(R^4 - r^4) - \frac{0{,}283\, R^2 r^2 (R - r)}{R + r}$ $J \sim 0{,}3\, \delta r_1^3$	$e_1 = \frac{4}{3\pi}\,\frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}$ $e_2 = R - e_1$

*) Ausführliche Tafel s. S. 438.
**) Ausführliche Tafel s. S. 439.

Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
21		$J = \frac{\pi a^3 b}{4} = 0{,}7854\, a^3 b$	$W = \frac{\pi a^2 b}{4} = 0{,}7854\, a^2 b$
22		$J = \frac{\pi}{4}(a^3 b - a_1{}^3 b_1)$ $\sim \frac{\pi}{4} a^2 (a + 3b)\,\delta$ J und W auf die Achse $2b$ bezogen	$W \sim \frac{\pi}{4} a (a + 3b)\,\delta$
23		$J = \frac{1}{12}\left[\frac{3\pi}{16} d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h - d)\right]$ $W = \frac{1}{6h}\left[\frac{3\pi}{16} d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h - d)\right]$	
24	Trägerwellblech.	$J = \frac{\delta}{4}\left(\frac{\pi B^3}{16} + B^2 h + \frac{\pi B h^2}{2} + \frac{2}{3} h^3\right)$ worin $h = H - {}^1/_2\, B$ $W = \frac{2J}{H + \delta}$	
25	Flaches Wellblech. (Welle aus Parabelbogen.)	$J = \frac{64}{105}(b_1 h_1{}^3 - b_2 h_2{}^3)$, worin $h_1 = {}^1/_2 (H + \delta)$ | $b_1 = {}^1/_4 (B + 2{,}6\,\delta)$ $h_2 = {}^1/_2 (H - \delta)$ | $b_2 = {}^1/_4 (B - 2{,}6\,\delta)$ $W = \frac{2J}{H + \delta}$	

Weitere Angaben für **Wellbleche** s. 5. Abschn., Stoffkunde.

Nach R. F. Mayer*) ist für alle Wellbleche (24 u. 25)

$$J = \eta\,\delta\,H^3,$$

worin η eine von dem Verhältnis $n = B : H$ abhängige Zahl ist, die aus folgender Tafel zu entnehmen ist. (Geradlinige Zwischenschaltung zulässig.)

n	η	n	η	n	η	n	η	n	η	n	η	n	η
0,3	0,20792	0,9	0,28180	1,5	0,34571	2,1	0,40173	2,6	0,45025	3,1	0,50307	3,6	0,55895
0,4	0,22101	1,0	0,29310	1,6	0,35553	2,2	0,41101	2,7	0,46051	3,2	0,51404	3,7	0,57041
0,5	0,23377	1,1	0,30412	1,7	0,36512	2,3	0,42051	2,8	0,47094	3,3	0,52511	3,8	0,58195
0,6	0,24622	1,2	0,31489	1,8	0,37451	2,4	0,43023	2,9	0,48151	3,4	0,53630	3,9	0,59357
0,7	0,25837	1,3	0,32540	1,9	0,38370	2,5	0,44014	3,0	0,49222	3,5	0,54758	4,0	0,60526
0,8	0,27023	1,4	0,33568	2,0	0,39270								

*) Siehe L. v. Tetmajer, Angew. Elast.- u. Festigkeitsl. 3. Aufl. 1905 S. 133.



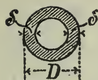
1. Kreisförmiger Querschnitt.

J = äquatoriales Trägheitsmoment, W = Widerstandsmoment.

d	$J=\frac{\pi d^4}{64}$	$W=\frac{\pi d^3}{32}$	d	$J=\frac{\pi d^4}{64}$	$W=\frac{\pi d^3}{32}$	d	$J=\frac{\pi d^4}{64}$	$W=\frac{\pi d^3}{32}$
1	0,0491	0,0982	51	332086	13023	101	5108055	101150
2	0,7854	0,7854	52	358908	13804	102	5313378	104184
3	3,976	2,651	53	387323	14616	103	5524830	107278
4	12,57	6,283	54	417393	15459	104	5742532	110433
5	30,68	12,27	55	449180	16334	105	5966604	113650
6	63,62	21,21	56	482750	17241	106	6197171	116928
7	117,9	33,67	57	518166	18181	107	6434357	120268
8	201,1	50,27	58	555497	19155	108	6678287	123672
9	322,1	71,57	59	594810	20163	109	6929087	127139
10	490,9	98,17	**60**	636172	21206	**110**	7186886	130671
11	718,7	130,7	61	679651	22284	111	7451813	134267
12	1018	169,6	62	725332	23398	112	7723997	137929
13	1402	215,7	63	773272	24548	113	8003571	141656
14	1886	269,4	64	823550	25736	114	8290666	145450
15	2485	331,3	65	876240	26961	115	8585417	149312
16	3217	402,1	66	931420	28225	116	8887958	153241
17	4100	482,3	67	989166	29527	117	9198425	157238
18	5153	572,6	68	1049556	30869	118	9516956	161304
19	6397	673,4	69	1112660	32251	119	9843689	165440
20	7854	785,4	**70**	1178588	33674	**120**	10178763	169646
21	9547	909,2	71	1247393	35138	121	10522320	173923
22	11499	1045	72	1319167	36644	122	10874501	178271
23	13737	1194	73	1393995	38192	123	11235450	182690
24	16286	1357	74	1471963	39783	124	11605311	187182
25	19175	1534	75	1553156	41417	125	11984229	191748
26	22432	1726	76	1637662	43096	126	12372350	196387
27	26087	1932	77	1725571	44820	127	12769824	201100
28	30172	2155	78	1816972	46589	128	13176799	205887
29	34719	2394	79	1911967	48404	129	13593424	210751
30	39761	2651	**80**	2010619	50265	**130**	14019852	215690
31	45333	2925	81	2113051	52174	131	14456235	220706
32	51472	3217	82	2219347	54130	132	14902727	225799
33	58214	3528	83	2329605	56135	133	15359483	230970
34	65597	3859	84	2443920	58189	134	15826658	236219
35	73662	4209	85	2562392	60292	135	16204411	241547
36	82448	4580	86	2685120	62445	136	16792899	246954
37	91998	4973	87	2812205	64648	137	17292282	252442
38	102354	5387	88	2943748	66903	138	17802721	258010
39	113561	5824	89	3079853	69210	139	18324378	263660
40	125664	6283	**90**	3220623	71569	**140**	18857416	269392
41	138709	6766	91	3366165	73982	141	19401999	275206
42	152745	7274	92	3516586	76448	142	19958294	281103
43	167820	7806	93	3671992	78968	143	20526466	287083
44	183984	8363	94	3832492	81542	144	21106684	293148
45	201289	8946	95	3998198	84173	145	21699116	299298
46	219787	9556	96	4169220	86859	146	22303933	305533
47	239531	10193	97	4345671	89601	147	22921307	311855
48	260576	10857	98	4527664	92401	148	23551409	318262
49	282979	11550	99	4715315	95259	149	24194414	324757
50	306796	12272	**100**	4908738	98175	**150**	24850496	331340

Bemerkung. Betrug der Wert der ersten Dezimale 5 oder mehr, so wurde der Einer um eine Einheit erhöht.

2. **Kreisringförmiger Querschnitt.** *)



F Querschnitt, *J* Trägheitsmoment, *W* Widerstandsmoment.

Die Gewichte *g* (in kg/m) beziehen sich auf **glatte, gufseiserne Rohre (Säulen)**; 1 cbm Gufseisen wiegt 7250 kg. Für **Schweifseisen** sind die Werte *g* mit 1,076, für **Flufseisen** mit 1,083, für gewalzten und gegossenen **Flufsstahl** mit 1,084 zu multiplizieren.

D mm	*δ* mm	*F* cm²	*J* cm⁴	*W* cm³	*g* kg/m
80	10	22,0	137	34,2	16,0
	12	25,6	153	38,2	18,6
	14	29,0	165	41,2	21,0
90	10	25,1	204	45,3	18,2
	12	29,4	229	50,9	21,3
	14	33,4	250	55,6	24,2
	16	37,2	267	59,3	27,0
100	10	28,3	291	58,2	20,5
	12	33,2	327	65,4	24,1
	14	37,8	359	71,8	27,4
	16	42,2	385	77,0	30,6
	18	46,4	409	81,8	33,6
110	10	31,4	397	72,2	22,8
	12	36,9	450	81,8	26,8
	14	42,2	497	90,4	30,6
	16	47,3	537	97,6	34,2
	18	52,0	572	104	37,7
120	10	34,6	527	87,8	25,1
	12	40,7	601	100	29,5
	14	46,6	666	111	33,8
	16	52,3	724	121	37,9
	18	57,7	773	129	41,8
	20	62,8	817	136	45,5
130	10	37,7	683	105	27,3
	12	44,5	782	120	32,3
	14	51,0	871	134	37,0
	16	57,3	949	146	41,5
	18	62,3	1019	157	45,9
	20	69,1	1080	166	50,1
140	12	48,3	997	142	35,0
	14	55,4	1114	159	40,2
	16	62,3	1218	174	45,2
	18	68,9	1311	187	50,0
	20	75,4	1395	199	54,7
150	12	52,0	1248	166	37,7
	14	59,8	1347	180	43,4
	16	67,4	1534	205	48,9
	18	74,7	1656	221	54,1
	20	81,7	1766	235	59,2
	22	88,6	1866	249	64,2
	24	95,0	1955	261	68,9

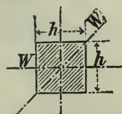
D mm	*δ* mm	*F* cm²	*J* cm⁴	*W* cm³	*g* kg/m
160	14	64,2	1727	216	46,5
	16	72,4	1899	237	52,5
	18	80,3	2056	257	58,2
	20	88,0	2200	275	63,8
	22	95,4	2329	291	69,2
	24	103	2445	306	74,3
170	14	68,6	2104	244	49,7
	16	77,4	2320	273	56,1
	18	85,9	2517	296	62,4
	20	94,3	2699	318	68,3
	22	102	2863	337	74,2
	24	110	3013	354	79,8
180	14	73,0	2534	282	52,9
	16	82,4	2798	311	59,7
	18	91,6	3042	338	66,4
	20	101	3268	363	72,9
	22	103	3475	386	79,2
	24	118	3663	407	85,3
190	14	77,4	3017	318	56,1
	16	87,5	3338	351	63,4
	18	97,3	3636	383	70,5
	20	107	3914	413	77,4
	22	116	4168	439	84,2
	24	125	4401	463	90,8
200	16	92,5	3944	394	67,1
	18	103	4303	430	74,6
	20	113	4638	464	82,0
	22	123	4948	495	89,2
	24	133	5344	534	96,2
	26	142	5499	556	103,0
	28	151	5743	574	109,7
	30	160	5968	597	116,1
210	16	97,5	4619	440	70,7
	18	109	5047	481	78,7
	20	119	5448	519	86,6
	22	130	5819	554	94,2
	24	140	6166	587	101,6
	26	150	6488	618	109,0
	28	160	6786	646	116,1
	30	170	7062	673	123,0

*) Aus F. Boerner, Statische Tafeln usw. Berlin. 2. Aufl. 1907, Wilhelm Ernst & Sohn.

D mm	δ mm	F cm²	J cm⁴	W cm³	g kg/m
220	16	103	5342	486	74,3
	18	114	5873	534	82,8
	20	126	6346	577	91,1
	22	137	6839	622	99,2
	24	148	7203	655	107,2
	26	158	7589	690	114,9
	28	169	7949	723	122,5
	30	179	8282	753	129,8
230	16	109	6207	540	78,0
	18	120	6630	577	86,9
	20	132	7341	638	95,6
	22	144	7862	684	104,3
	24	155	8351	726	112,6
	26	167	8809	766	120,8
	28	178	9238	803	128,8
	30	189	9637	838	136,7
240	18	126	7785	649	91,0
	20	138	8434	703	100,2
	22	151	9042	753	109,3
	24	163	9546	796	118,1
	26	175	10154	846	126,7
	28	186	10659	888	135,2
	30	198	11133	928	143,5
250	18	131	8880	710	95,1
	22	158	10334	827	114,3
	26	183	11633	931	132,7
	30	207	12778	1022	150,3
	34	231	13790	1103	167,3
260	18	137	10073	775	99,2
	22	164	11746	904	119,3
	26	191	13243	1019	138,5
	30	217	14577	1121	157,2
	34	241	15691	1207	175,0
270	18	143	11369	842	103,3
	22	171	13286	984	124,3
	26	199	15000	1111	144,5
	30	226	16539	1225	164,0
	34	252	17914	1327	182,8
280	18	148	12774	912	107,4
	22	178	14947	1068	129,3
	26	207	16909	1208	150,4
	30	236	18674	1334	170,8
	34	263	20257	1447	190,5

D mm	δ mm	F cm²	J cm⁴	W cm²	g kg/m
290	18	154	14289	986	111,5
	22	185	16743	1155	134,3
	26	216	18970	1308	156,3
	30	245	20983	1447	177,6
	34	273	22798	1573	198,2
300	20	176	17330	1155	127,5
	24	208	19966	1331	150,9
	28	239	22363	1491	173,5
	32	269	24535	1636	195,3
	36	299	26479	1765	216,5
	40	327	28262	1884	236,9
320	20	188	21302	1331	136,7
	24	223	24558	1535	161,8
	28	257	27580	1724	186,3
	32	290	30390	1900	209,9
	36	321	32905	2057	232,9
	40	352	35186	2199	255,1
340	20	201	25838	1520	145,8
	24	239	29912	1759	172,8
	28	274	33665	1980	198,9
	32	310	37115	2183	224,5
	36	344	40277	2369	249,3
	40	377	43165	2539	273,3
360	20	214	30977	1721	154,9
	24	253	35935	1996	183,6
	28	292	40526	2251	211,7
	32	330	44773	2487	239,0
	36	366	48680	2704	265,6
	40	402	52276	2904	291,5
	44	437	55582	3088	316,7
380	20	226	36756	1935	164,0
	24	270	42718	2248	194,6
	28	308	48262	2540	224,5
	32	346	53400	2811	253,6
	36	383	58379	3073	282,1
	40	418	62593	3294	309,8
	44	453	66671	3509	336,8
400	20	239	43210	2160	173,1
	24	284	50306	2515	205,5
	28	336	56917	2846	237,2
	32	370	63103	3156	268,3
	36	412	68852	3443	298,5
	40	452	74195	3710	327,7
	44	492	79154	3958	356,8
	48	531	83744	4187	384,8

3. Quadratischer Querschnitt.



$J = \frac{h^4}{12}$ = Trägheitsmoment für alle Schwerachsen.

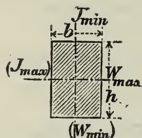
$W = \frac{h^3}{6}$ = Widerstandsmoment für eine Schwerachse parallel den Seiten.

$W_1 = \frac{\sqrt{2}}{12} h^3 = 0{,}117\,851\,130\, h^3$ Widerstandsmoment für eine Diagonale.

(Vrgl. hierzu Fufsnote S. 434.)

h	J	W	W_1	h	J	W	W_1
1	0,0833	0,1667	0,1179	31	76960	4965,2	3510,9
2	1,3333	1,3333	0,9428	32	87381	5461,3	3861,7
3	6,7500	4,5000	3,1820	33	98827	5989,5	4235,2
4	21,333	10,667	7,5425	34	111361	6550,7	4632,0
5	52,083	20,833	14,731	35	125052	7145,8	5052,8
6	108,00	36,000	25,456	36	139968	7776,0	5498,4
7	200,08	57,167	40,423	37	156180	8442,2	5969,5
8	341,33	85,333	60,340	38	173761	9145,3	6466,7
9	546,75	121,50	85,913	39	192787	9886,5	6990,7
10	833,33	166,67	117,85	40	213333	10667	7542,5
11	1220,1	221,83	156,86	41	235480	11487	8122,3
12	1728,0	288,00	203,64	42	259308	12348	8731,3
13	2380,1	366,17	258,92	43	284900	13251	9369,9
14	3201,3	457,33	323,38	44	312341	14197	10039
15	4218,8	562,50	397,74	45	341719	15188	10739
16	5461,3	682,67	482,71	46	373121	16223	11471
17	6960,1	818,83	579,00	47	406640	17304	12236
18	8748,0	972,00	687,30	48	442368	18432	13033
19	10860	1143,2	808,33	49	480400	19608	13865
20	13333	1333,3	942,81	50	520833	20833	14731
21	16207	1543,5	1091,4	51	563767	22109	15633
22	19521	1774,7	1254,9	52	609301	23435	16571
23	23320	2027,8	1433,9	53	657540	24813	17545
24	27648	2304,0	1629,2	54	708588	26244	18557
25	32552	2604,2	1841,4	55	762552	27729	19607
26	38081	2929,3	2071,3	56	819541	29269	20696
27	44287	3280,5	2319,6	57	879667	30866	21825
28	51221	3658,7	2587,0	58	943041	32519	22994
29	58940	4064,8	2874,2	59	1009780	34230	24204
30	67500	4500,0	3182,0	60	1080000	36000	25456

4. Rechteckiger Querschnitt.



$$J_{\min} = \frac{b^3 h}{12}.$$

$$W_{\max} = \frac{b h^2}{6}.$$

Bemerkung. $J_{\max} = \frac{b h^3}{12}$ ergibt sich aus $W_{\max}$ der Tafel durch Multiplikation mit $\frac{h}{2}$;

$W_{\min} = \frac{b^2 h}{6}$ ergibt sich aus $J_{\min}$ der Tafel durch Division mit $\frac{b}{2}$.

Querschnitt h	b	J_{min}	W_{max}
1	1	0,0833	0,1667
2	1	0,1667	0,6667
	2	1,3333	1,3333
3	1	0,2500	1,5000
	2	2,0000	3,0000
	3	6,7500	4,5000
4	1	0,3333	2,6667
	2	2,6667	5,3333
	3	9,0000	8,0000
	4	21,333	10,667
5	1	0,4167	4,1667
	2	3,3333	8,3333
	3	11,250	12,500
	4	26,667	16,667
	5	52,083	20,833
6	1	0,5000	6,0000
	2	4,0000	12,000
	3	13,500	18,000
	4	32,000	24,000
	5	62,500	30,000
	6	108,00	36,000
7	1	0,5833	8,1667
	2	4,6667	16,333
	3	15,750	24,500
	4	37,333	32,667
	5	72,917	40,833
	6	126,00	49,000
	7	200,08	57,167
8	1	0,6667	10,667

Querschnitt h	b	J_{min}	W_{max}
8	2	5,3333	21,333
	3	18,000	32,000
	4	42,667	42,667
	5	83,333	53,333
	6	144,00	64,000
	7	228,67	74,667
	8	341,33	85,333
9	1	0,7500	13,500
	2	6,0000	27,000
	3	20,250	40,500
	4	48,000	54,000
	5	93,750	67,500
	6	162,00	81,000
	7	257,25	94,500
	8	384,00	108,00
	9	546,75	121,50
10	1	0,8333	16,667
	2	6,6667	33,333
	3	22,500	50,000
	4	53,333	66,667
	5	104,17	83,333
	6	180,00	100,00
	7	285,83	116,67
	8	426,67	133,33
	9	607,50	150,00
	10	833,33	166,67
11	1	0,9167	20,167
	2	7,3333	40,333
	3	24,750	60,500
	4	58,667	80,667
	5	114,58	100,83

Querschnitt h	b	J_{min}	W_{max}
11	6	198,00	121,00
	7	314,42	141,17
	8	469,33	161,33
	9	668,25	181,50
	10	916,67	201,67
	11	1220,1	221,83
12	1	1,0000	24,000
	2	8,0000	48,000
	3	27,000	72,000
	4	64,000	96,000
	5	125,00	120,00
	6	216,00	144,00
	7	343,00	168,00
	8	512,00	192,00
	9	729,00	216,00
	10	1000,0	240,00
	11	1331,0	264,00
	12	1728,0	288,00
13	1	1,0833	28,167
	2	8,6667	56,333
	3	29,250	84,500
	4	69,333	112,67
	5	135,42	140,83
	6	234,00	169,00
	7	371,58	197,17
	8	554,67	225,33
	9	789,75	253,50
	10	1083,3	281,67
	11	1441,9	309,83
	12	1872,0	338,00
	13	2380,1	366,17

Querschnitt h	Querschnitt b	J_{min}	W_{max}
14	1	1,1667	32,667
	2	9,3333	65,333
	3	31,500	98,000
	4	74,667	130,67
	5	145,83	163,33
	6	252,00	196,00
	7	400,17	228,67
	8	597,33	261,33
	9	850,50	294,00
	10	1166,7	326,67
	11	1552,8	359,33
	12	2016,0	392,00
	13	2563,2	424,67
	14	3201,3	457,33
15	1	1,2500	37,500
	2	10,000	75,000
	3	33,750	112,50
	4	80,000	150,00
	5	156,25	187,50
	6	270,00	225,00
	7	428,75	262,50
	8	640,00	300,00
	9	911,25	337,50
	10	1250,0	375,00
	11	1663,8	412,50
	12	2160,0	450,00
	13	2746,3	487,50
	14	3430,0	525,00
	15	4218,8	562,50
16	1	1,3333	42,667
	2	10,667	85,333
	3	36,000	128,00
	4	85,333	170,67
	5	166,67	213,33
	6	288,00	256,00
	7	457,33	298,67
	8	682,67	341,33
	9	972,00	384,00
	10	1333,3	426,67
	11	1774,7	469,33
	12	2304,0	512,00
	13	2929,3	554,67
16	14	3658,7	597,33
	15	4500,0	640,00
	16	5461,3	682,67
17	1	1,4167	48,167
	2	11,333	96,333
	3	38,250	144,50
	4	90,667	192,67
	5	177,08	240,83
	6	306,00	289,00
	7	485,92	337,17
	8	725,33	385,33
	9	1032,8	433,50
	10	1416,7	481,67
	11	1885,6	529,83
	12	2448,0	578,00
	13	3112,4	626,17
	14	3887,3	674,33
	15	4781,3	722,50
	16	5802,7	770,67
	17	6960,1	818,83
18	1	1,5000	54,000
	2	12,000	108,00
	3	40,500	162,00
	4	96,000	216,00
	5	187,50	270,00
	6	324,00	324,00
	7	514,50	378,00
	8	768,00	432,00
	9	1093,5	486,00
	10	1500,0	540,00
	11	1996,5	594,00
	12	2592,0	648,00
	13	3295,5	702,00
	14	4116,0	756,00
	15	5062,5	810,00
	16	6144,0	864,00
	17	7369,5	918,00
	18	8748,0	972,00
19	1	1,5833	60,167
	2	12,667	120,33
	3	42,750	180,50
	4	101,33	240,67
19	5	197,92	300,83
	6	342,00	361,00
	7	543,08	421,17
	8	810,67	481,33
	9	1154,3	541,50
	10	1583,3	601,67
	11	2107,4	661,83
	12	2736,0	722,00
	13	3478,6	782,17
	14	4344,7	842,33
	15	5343,8	902,50
	16	6485,3	962,67
	17	7778,9	1022,8
	18	9234,0	1083,0
	19	10860	1143,2
20	1	1,6667	66,667
	2	13,333	133,33
	3	45,000	200,00
	4	106,67	266,67
	5	208,33	333,33
	6	360,00	400,00
	7	571,67	466,67
	8	853,33	533,33
	9	1215,0	600,00
	10	1666,7	666,67
	11	2218,3	733,33
	12	2880,0	800,00
	13	3661,7	866,67
	14	4573,3	933,33
	15	5625,0	1000,0
	16	6826,7	1066,7
	17	8188,3	1133,3
	18	9720,0	1200,0
	19	11432	1266,7
	20	13333	1333,3
21	1	1,7500	73,500
	2	14,000	147,00
	3	47,250	220,50
	4	112,00	294,00
	5	218,75	367,50
	6	378,00	441,00
	7	600,25	514,50

Querschnitt h	b	J_{min}	W_{max}
21	8	896,00	588,00
	9	1275,8	661,50
	10	1750,0	735,00
	11	2329,3	808,50
	12	3024,0	882,00
	13	3844,8	955,50
	14	4802,0	1029,0
	15	5906,3	1102,5
	16	7168,0	1176,0
	17	8597,8	1249,5
	18	10206	1323,0
	19	12003	1396,5
	20	14000	1470,0
	21	16207	1543,5
22	1	1,8333	80,667
	2	14,667	161,33
	3	49,500	242,00
	4	117,33	322,67
	5	229,17	403,33
	6	396,00	484,00
	7	628,83	564,67
	8	938,67	645,33
	9	1336,5	726,00
	10	1833,3	806,67
	11	2440,2	887,33
	12	3168,0	968,00
	13	4027,8	1048,7
	14	5030,7	1129,3
	15	6187,5	1210,0
	16	7509,3	1290,7
	17	9007,2	1371,3
	18	10692	1452,0
	19	12575	1532,7
	20	14667	1613,3
	21	16979	1694,0
	22	19521	1774,7
23	1	1,9167	88,167
	2	15,333	176,33
	3	51,750	264,50
	4	122,67	352,67
	5	239,58	440,83
	6	414,00	529,00

Querschnitt h	b	J_{min}	W_{max}
23	7	657,42	617,17
	8	981,33	705,33
	9	1397,3	793,50
	10	1916,7	881,67
	11	2551,1	969,83
	12	3312,0	1058,0
	13	4210,9	1146,2
	14	5259,3	1234,3
	15	6468,8	1322,5
	16	7850,7	1410,7
	17	9416,6	1498,8
	18	11178	1587,0
	19	13146	1675,2
	20	15333	1763,3
	21	17750	1851,5
	22	20409	1939,7
	23	23320	2027,8
24	1	2,0000	96,000
	2	16,000	192,00
	3	54,000	288,00
	4	128,00	384,00
	5	250,00	480,00
	6	432,00	576,00
	7	686,00	672,00
	8	1024,0	768,00
	9	1458,0	864,00
	10	2000,0	960,00
	11	2662,0	1056,0
	12	3456,0	1152,0
	13	4394,0	1248,0
	14	5488,0	1344,0
	15	6750,0	1440,0
	16	8192,0	1536,0
	17	9826,0	1632,0
	18	11664	1728,0
	19	13718	1824,0
	20	16000	1920,0
	21	18522	2016,0
	22	21296	2112,0
	23	24334	2208,0
	24	27648	2304,0
25	1	2,0833	104,17

Querschnitt h	b	J_{min}	W_{max}
25	2	16,667	208,33
	3	56,250	312,50
	4	133,33	416,67
	5	260,42	520,83
	6	450,00	625,00
	7	714,58	729,17
	8	1066,7	833,33
	9	1518,8	937,50
	10	2083,3	1041,7
	11	2772,9	1145,8
	12	3600,0	1250,0
	13	4577,1	1354,2
	14	5716,7	1458,3
	15	7031,3	1562,5
	16	8533,3	1666,7
	17	10235	1770,8
	18	12150	1875,0
	19	14290	1979,2
	20	16667	2083,3
	21	19294	2187,5
	22	22183	2291,7
	23	25348	2395,8
	24	28800	2500,0
	25	32552	2604,2
26	1	2,1667	112,67
	2	17,333	225,33
	3	58,500	338,00
	4	138,67	450,67
	5	270,83	563,33
	6	468,00	676,00
	7	743,17	788,67
	8	1109,3	901,33
	9	1579,5	1014,0
	10	2166,7	1126,7
	11	2883,8	1239,3
	12	3744,0	1352,0
	13	4760,2	1464,7
	14	5945,3	1577,3
	15	7312,5	1690,0
	16	8874,7	1802,7
	17	10645	1915,3
	18	12636	2028,0
	19	14861	2140,7

Querschnitt h	b	J_{min}	W_{max}
26	20	17333	2253,3
	21	20066	2366,0
	22	23071	2478,7
	23	26362	2591,3
	24	29952	2704,0
	25	33854	2816,7
	26	38081	2929,3
27	1	2,2500	121,50
	2	18,000	243,00
	3	60,750	364,50
	4	144,00	486,00
	5	281,25	607,50
	6	486,00	729,00
	7	771,75	850,50
	8	1152,0	972,00
	9	1640,3	1093,5
	10	2250,0	1215,0
	11	2994,8	1336,5
	12	3888,0	1458,0
	13	4943,3	1579,5
	14	6174,0	1701,0
	15	7593,8	1822,5
	16	9216,0	1944,0
	17	11054	2065,5
	18	13122	2187,0
	19	15433	2308,5
	20	18000	2430,0
	21	20837	2551,5
	22	23958	2673,0
	23	27376	2794,5
	24	31104	2916,0
	25	35156	3037,5
	26	39546	3159,0
	27	44287	3280,5
28	1	2,3333	130,67
	2	18,667	261,33
	3	63,000	392,00
	4	149,33	522,67
	5	291,67	653,33
	6	504,00	784,00

Querschnitt h	b	J_{min}	W_{max}
28	7	800,33	914,67
	8	1194,7	1045,3
	9	1701,0	1176,0
	10	2333,3	1306,7
	11	3105,7	1437,3
	12	4032,0	1568,0
	13	5126,3	1698,7
	14	6402,7	1829,3
	15	7875,0	1960,0
	16	9557,3	2090,7
	17	11464	2221,3
	18	13608	2352,0
	19	16004	2482,7
	20	18667	2613,3
	21	21609	2744,0
	22	24845	2874,7
	23	28390	3005,3
	24	32256	3136,0
	25	36458	3266,7
	26	41011	3397,3
	27	45927	3528,0
	28	51221	3658,7
29	1	2,4167	140,17
	2	19,333	280,33
	3	65,250	420,50
	4	154,67	560,67
	5	302,08	700,83
	6	522,00	841,00
	7	828,92	981,17
	8	1237,3	1121,3
	9	1761,8	1261,5
	10	2416,7	1401,7
	11	3216,6	1541,8
	12	4176,0	1682,0
	13	5309,4	1822,2
	14	6631,3	1962,3
	15	8156,3	2102,5
	16	9898,7	2242,7
	17	11873	2382,8
	18	14094	2523,0
	19	16576	2663,2

Querschnitt h	b	J_{min}	W_{max}
29	20	19333	2803,3
	21	22381	2943,5
	22	25733	3083,7
	23	29404	3223,8
	24	33408	3364,0
	25	37760	3504,2
	26	42475	3644,3
	27	47567	3784,5
	28	53051	3924,7
	29	58940	4064,8
30	1	2,5000	150,00
	2	20,000	300,00
	3	67,500	450,00
	4	160,00	600,00
	5	312,50	750,00
	6	540,00	900,00
	7	857,50	1050,0
	8	1280,0	1200,0
	9	1822,5	1350,0
	10	2500,0	1500,0
	11	3327,5	1650,0
	12	4320,0	1800,0
	13	5492,5	1950,0
	14	6860,0	2100,0
	15	8437,5	2250,0
	16	10240	2400,0
	17	12283	2550,0
	18	14580	2700,0
	19	17148	2850,0
	20	20000	3000,0
	21	23153	3150,0
	22	26620	3300,0
	23	30418	3450,0
	24	34560	3600,0
	25	39063	3750,0
	26	43940	3900,0
	27	49208	4050,0
	28	54880	4200,0
	29	60973	4350,0
	30	67500	4500,0

e. Träger mit unveränder-

Die Freilängen l, Durchbiegungen f, Trägerhöhen h, Koordinaten x und y und die sonstigen lässige Biegungsspannung k_b (s. S. 396, 404 u. f.) und das Elastizitätsmaſs E des querschnittes für die wagerechte Schwerachse in cm⁴ und das

Arbeit der Biegung

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B Biegungsmoment M	Tragkraft P Erforderl. Widerstandsmoment W
1.		$B = P.$ $M = Px.$ $M_{max} = Pl.$	$P = \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{k_b}.$
2.		$A = B = \frac{P}{2}.$ $M = \frac{Px}{2}.$ $M_{max} = \frac{Pl}{4}.$	$P = 4\frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{4k_b}.$
3.		$A = \frac{Pc_1}{l}$; $B = \frac{Pc}{l}.$ Für AC: $M = \frac{Pc_1 x}{l}$; für BC: $M = \frac{Pcx_1}{l}.$ $M_{max} = \frac{Pcc_1}{l}.$	$P = k_b W \frac{l}{cc_1}.$ $W = \frac{Pcc_1}{lk_b}.$
4.	Vrgl. auch Fall 25, S. 458.	$A = \frac{5}{16}P$; $B = \frac{11}{16}P.$ Für AC: $M = \frac{5}{16}Px$; für C: $M = \frac{5}{32}Pl$; für BC: $M = Pl\left(\frac{5}{32} - \frac{11}{16}\frac{x_1}{l}\right).$ $M_{max} = \frac{3Pl}{16}.$	$P = \frac{16}{3}\frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{3}{16}\frac{Pl}{k_b}.$

*) Die Formeln für die Auflagerdrücke und die Biegungsmomente gelten auch für Träger mit veränderlichem Querschnitt.

Für die Berechnung **eingemauerter** Träger ist der Sicherheit halber stets ein Freiaufliegen anzunehmen; es sind hierbei also die Fälle Nr. 4 (S. 446 u. 447), 5, 9 (S. 448 u. 449) und 10 (S. 450 u. 451) **nicht** zu benutzen.

lichem Querschnitt.*)

Längen-Abmessungen sind in cm, die äufseren Kräfte A, B, P, Q usw. in kg, die zu-
Trägerstoffes (s. S. 390, 396 u. f.) in kg/qcm, das Trägheitsmoment J des Träger-
zu J gehörige Widerstandsmoment W in cm³ auszudrücken.

s. S. 432 u. 433.

Gleichung der elastischen Linie	Durchbiegung f**)	Bemerkungen
$y = \frac{Pl^3}{2EJ}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$. $\operatorname{tg}\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{Pl^3}{2EJ}\left(\frac{1}{l} - \frac{x^2}{l^3}\right)$. $\operatorname{tg}\beta(x=0) = \frac{Pl^2}{2EJ} = \frac{3f}{2l}$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3}$ $= \frac{2}{3}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Freiträger. Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y = \frac{Pl^3}{16EJ}\left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{48}$ $= \frac{1}{6}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{c^2 c_1^2}{6l}\left(2\frac{x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c^2 c_1}\right)$, $y_1 = \frac{P}{EJ}\frac{c_1^2 c^2}{6l}\left(2\frac{x_1}{c_1} + \frac{x_1}{c} - \frac{x_1^3}{c_1^2 c}\right)$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3}\frac{c^2}{l^2}\frac{c_1^2}{l^2}$; $f_{\max}$ für $x = c\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c_1}{3c}}$, wenn $c > c_1$; $x_1 = c_1\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c}{3c_1}}$, wenn $c < c_1$.	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt bei C.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{32}\left(\frac{x}{l} - \frac{5}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$, $y_1 = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{32}\left(\frac{1}{4}\frac{x_1}{l} + \frac{5}{2}\frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3}\frac{x_1^3}{l^3}\right)$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{7l^3}{768}$; für $x = l\sqrt{1/5}$ ist $f_{\max} = \sqrt{1/5}\,\frac{Pl^3}{48EJ}$.	Halb eingespannter Träger. Gefährlicher Querschnitt bei B. Wendepunkt bei $x_1 = {}^5/_{22}\,l$.

**) Mit f ist die Durchbiegung im Angriffpunkte der Einzellast P, mit $f_{\max}$ (oder f_m) die gröfste Durchbiegung bezeichnet worden, falls f nicht damit übereinstimmt. — Ueber die Vergröfserung von f (und von y) durch den Einflufs der Schubkräfte s. S. 432 u. 433.

Für schwierigere Belastungsfälle empfiehlt sich „Das analytisch-graphische Verfahren zur Bestimmung der Durchbiegung zwei- und dreifach gestützter Träger" von M. Klofs, Berlin 1902. A. Seydel.

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B Biegungsmoment M	Tragkraft P Erforderl. Widerstandsmoment W
5.	vrgl. auch Sonderfall 26, S. 459.	$A = B = \frac{P}{2}$ Für AC: $M = \frac{Pl}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\right)$; für CB: $M = \frac{Pl}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{3}{4}\right)$. $M_{max} = \frac{Pl}{8}$.	$P = 8\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{8 k_b}$.
6.	Dieselben Formeln gelten, wenn AB die Lastpunkte und die Enden des Trägers gestützt sind.	$A = B = P$. Für AB: $M = Pc =$ konst.	$P = \frac{k_b W}{c}$. $W = \frac{Pc}{k_b}$.
7.		$B = P$. $M = \frac{Px^2}{2l}$. $M_{max} = \frac{Pl}{2}$.	$P = 2\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{2 k_b}$.
8.		$A = B = \frac{P}{2}$. $M = \frac{Px}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$. $M_{max} = \frac{Pl}{8}$.	$P = 8\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{8 k_b}$.
9.	vrgl. auch Fall 25, S. 458.	$A = \frac{3}{8}P$; $B = \frac{5}{8}P$. $M = \frac{Px}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l}\right)$. $M_{max} = \frac{Pl}{8}$ (absolutes Maximum). $M_C = \frac{9}{128}Pl$ (relatives Maximum). bei $x = {}^3/_8\, l$.	$P = 8\frac{k_b W}{l}$. (Tragkraft nicht gröfser als im Falle 8.) $W = \frac{Pl}{8 k_b}$.

Gleichung der elastischen Linie	Durchbiegung f	Bemerkungen
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{16}\left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right).$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{192}$ $= \frac{1}{12}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}.$	Eingespannter Träger. Gefährliche Querschnitte bei A, B und C. Wendepunkte bei $x = {}^1/_4\, l$ und $x = {}^3/_4\, l$.
$y = f_1 - \left[\varrho - \sqrt{\varrho^2 - ({}^1/_2\, l - x)^2}\right],$ worin $\varrho = \frac{EJ}{Pc}$ = unveränderlich. Die elastische Linie zwischen A und B ist ein Kreisbogen mit dem Halbmesser ϱ.	f_1 in der Mitte der Stützweite: $f_1 = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{8}\frac{c}{l}$ $= \frac{1}{4}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h} = \frac{l^2}{8\varrho}.$ $f_2 = \frac{P}{EJ}\left(\frac{c^3}{3} + \frac{c^2 l}{2}\right).$	Frei aufliegender*) Träger mit Kragstücken. Gefährlicher Querschnitt an einer beliebigen Stelle zwischen A und B.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{6}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{l^4}\right).$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{8}$ $= \frac{1}{2}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}.$	Freiträger. Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{24}\left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right).$ $\operatorname{tg} \tau_{(x=0)} = \frac{P}{EJ}\frac{l^2}{24} = 3{,}2\,\frac{f}{l}.$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{5\,l^3}{384}$ $= \frac{5}{24}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}.$	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte. Verbundplatten von der Länge a u. der Breite b mit winkelrecht sich kreuzenden Eiseneinlagen können, wenn $a < 1{,}5\,b$, berechnet werden aus $M_{max} = \frac{p\,b^2}{12}$. (Preufs. Min.-Bstg.)
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{48}\left(\frac{x}{l} - 3\frac{x^3}{l^3} + 2\frac{x^4}{l^4}\right).$	$f_{max} = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{185}$, worin $\frac{1}{185} = \frac{78 + 110\sqrt{33}}{2 \cdot 16^4}$ $f_C = \frac{175}{8^5}\frac{P}{EJ}\,l^3$ $= \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{187}.$	Halb eingespannter Träger. Gefährlicher Querschnitt bei B. Durchbiegung f_{max} bei $x' = {}^1/_{16}\, l(1 + \sqrt{33})$ $= 0{,}4215\, l$. Wendepunkt bei $x = {}^3/_4\, l$. M_C bei $x = {}^3/_8\, l$.

*) Fehlt das Kragstück bei A, so findet sich f_{max} im Abstande $0{,}578\, l$ von A, u. zw. ist $f_{max} = 0{,}064\,\frac{P}{EJ}\,l^2 c$, die Durchbiegung im Lastpunkte $f_2 = \frac{P}{EJ}\frac{c^2}{3}(c + l)$.

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B Biegungsmoment M	Tragkraft P Erforderl. Widerstandsmoment W
10.	Vrgl. auch Fall 26, S. 459.	$A = B = \frac{P}{2}$. $M = \frac{Pl}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$. $M_{\max} = {}^1/_{12}\, Pl$ (absolutes Maximum). $M_C = {}^1/_{24}\, Pl$ (relatives Maximum).	$P = 12\,\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{12\,k_b}$.
11.		$B = P$. $M = \frac{P}{3}\,\frac{x^3}{l^2}$. $M_{\max} = \frac{Pl}{3}$.	$P = 3\,\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{3\,k_b}$.
12.		$A = \frac{1}{3}P$; $B = \frac{2}{3}P$. $M = \frac{P}{3}x\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$. $M_{\max} = \frac{2}{9\sqrt{3}}Pl = 0{,}128\,Pl$.	$P = \frac{9\sqrt{3}}{2}\,\frac{k_b W}{l} = 7{,}794\,\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{7{,}794\,k_b}$.
13.		$A = B = \frac{P}{2}$. $M = Px\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2\,x^2}{3\,l^2}\right)$. $M_{\max} = \frac{Pl}{12}$.	$P = 12\,\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{12\,k_b}$.
14.		$A = B = \frac{P}{2}$. $M = Px\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{l^2}\right)$. $M_{\max} = \frac{Pl}{6}$.	$P = 6\,\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{6\,k_b}$. *)

*) Ist die Lastbegrenzung im Falle 14 statt eines Dreieckes eine **Parabel**, deren Scheitel über Trägermitte liegt, so ist

$$P = 6{,}4\,\frac{k_b W}{l} \quad \text{und} \quad W = \frac{5}{32}\,\frac{Pl}{k_b}.$$

Gleichung der elastischen Linie	Durchbiegung f	Bemerkungen
$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{24}\left(\frac{x^2}{l^2}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right)$. Erklärung der Abbildg. für Nr. 10. Parabel I: Momentenlinie für freie Auflagerung in A u. B. (Fall 8, Seite 448). Parabel II: desgl. für feste Einspannung in A u. B. (Fall 10, S. 450.) Parabel III: desgl. für die dem kleinsten M_{max} entsprechende Art der Einspannung in A u. B; hierfür ist $M_A=M_B=M_C=\frac{1}{16}Pl$.	$f=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{384}$ $=\frac{1}{16}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Eingespannter Träger. Gefährlicher Querschnitt bei A und B. Wendepunkte für $x=\frac{1}{2}l\left(1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, also bei $x_1=0{,}7887\,l$ und $x_2=0{,}2113\,l$.
$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$.	$f=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{15}$ $=\frac{2}{5}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Freiträger. Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{180}\left(7\frac{x}{l}-10\frac{x^3}{l^3}+3\frac{x^5}{l^5}\right)$.	Gröfste Durchbiegung für $x=l\sqrt{1-\sqrt{8/15}}=0{,}5193\,l$: $f=\frac{Pl^3}{EJ}\frac{2+5\sqrt{8/15}}{225}\cdot\sqrt{1-\sqrt{8/15}}$ $=0{,}01304\frac{Pl^3}{EJ}$.*)	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt für $x=\frac{l}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}l\sqrt{3}=0{,}5774\,l$.
$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left(\frac{3}{8}\frac{x}{l}-\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}-\frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$.	$f=\frac{P}{EJ}\frac{3\,l^3}{320}$ $=\frac{9}{40}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left(\frac{5}{8}\frac{x}{l}-\frac{x^3}{l^3}+\frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$.	$f=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{60}$ $=\frac{1}{5}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.

*) Da die Werte von M_{max} und f für den Fall 12 mit den entsprechenden Werten für den Fall 8 (s. S. 448 u. 449) fast genau übereinstimmen, so können bei Ermittlung von M_{max} und f derartige „Dreiecklasten" und „Trapezlasten" (parallele Seiten des Lastfeldes winkelrecht zur Trägerrichtung) für gewöhnliche Fälle als gleichmäfsig verteilte Lasten angesehen werden. Die Auflagerdrücke hingegen weichen bis um $\frac{1}{6}$ der Gesamtlast von den nach Fall 8 ermittelten Werten ab.

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B	Gröfstes Biegungsmoment $M_{\max} = Wk_b$
15.		$A = B = \frac{P}{2}$. Für $b = 0$ s. Fall 14.	$Wk_b = \frac{8a^2 + 3b(4a+b)}{24(a+b)} P$.
16.	**Kragträger.** Gefährliche Querschnitte in A, B und C. Wendepunkte für $x = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - cl}$. $M_A = M_B$ mit entgegengesetztem Vorzeichen wie M_C.	$A = B = \frac{P}{2}$.	Für AB: $M_x = \frac{Px}{2}\left(1 - \frac{c}{x} - \frac{x}{l}\right)$; für $x \overline{\overline{<}} c$: $M_x = -\frac{Px^2}{2l}$.
		Die absoluten Gröfstwerte $M_A = M_B = \frac{Pc^2}{2l}$ und (für die Trägermitte) $M_C = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{4} - c\right)$ sind gleich für $c = (\sqrt{1/2} - 1/2)\, l = 0{,}207\, l$, u. zw. $M_A = M_C = M_{\max} = 0{,}021\,447\, Pl \backsim 1/_{47}\, Pl$; dies ist (für die verschiedenen Werte von c) das relativ **kleinste** $M_{\max}$, so dafs alsdann $W = \frac{Pl}{47\, k_b}$ und $P = 47\, \frac{k_b W}{l}$; d. h., die Tragkraft ist fast 6-mal so grofs als im Falle 8 (S. 448), wenn $a = 0{,}586\, l$.	
17. *)		$A = \frac{P(2c + b)}{2l}$; $B = \frac{P(2a + b)}{2l}$.	$Wk_b = A\left(a + \frac{bA}{2P}\right)$.
		Für $a = c$ ist $A = B = \frac{P}{2}$.	Für $a = c$ ist $Wk_b = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{b}{4}\right)$.
18. *)		$A = \frac{P(2l-a) + P_1 a_1}{2l}$; $B = \frac{P_1(2l-a_1) + Pa}{2l}$.	Für $A < P$: $Wk_b = \frac{A^2 a}{2P}$; für $B < P_1$: $Wk_b = \frac{B^2 a_1}{2P_1}$.
		Ist $P = P_1$, $a = a_1$ und $l - 2a = b$, so ist $A = B = P$ und $Wk_b = 1/_2\, Pa = 1/_4\, P(l - b)$.	

*) Ausführliche Tafeln der im Hochbau oft vorkommenden Belastungsfälle 17, 18, 19 und ähnlicher s. R. Labes, Tafeln zur Bestimmung der Querschnitte gewalzter eiserner Träger usw., Berlin 1893. Wilhelm Ernst & Sohn.

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B	Gröfstes Biegungsmoment $M_{max} = Wk_b$
19. *)	Linie der M_{max}; μ - $\frac{1}{8{,}65}$ $\frac{9}{64}$ $\frac{4}{27}$ max $\frac{1}{8}$; A, P, B, x, l, a; $\frac{l}{4}$ $\frac{l}{2}$ $\frac{2l}{3}$	$A = \frac{P(2l-a)}{2l}$; $B = \frac{Pa}{2l}$. — M_{max} für $x = a\left(1 - \frac{a}{2l}\right) < a$.	$M_{max} = Wk_b = \frac{P}{2} a \left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2 = \mu Pl$, worin $\mu = \frac{1}{2}\frac{a}{l}\left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2$. $\mu_{max} = {}^4/_{27}$ für $a = {}^2/_3\, l$; dann ist $x = {}^4/_9\, l$.

20. **Krangleisträger.** (Abb. 23.)

2 gleiche Lasten P im unveränderlichen Abstande a; x veränderlich, u. zw. zwischen 0 und $^1/_2\, l$.

Die Formeln gelten nur, falls beide Lasten P auf der Länge l stehen.

Abb. 23.

$$A = P\left(1 - \frac{2x}{l} + \frac{a}{l}\right);$$

$$B = P\left(1 + \frac{2x}{l} - \frac{a}{l}\right).$$

$$M_1 = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l} + \frac{2x}{l}\frac{a}{l} - \frac{4x^2}{l^2}\right);$$

$$M_2 = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l} - \frac{2a^2}{l^2} + \frac{2x}{l}\frac{3a}{l} - \frac{4x^2}{l^2}\right).$$

$M_{1\,max}$ für $x = {}^1/_4\, a$. ($M_{2\,max}$ für $x = {}^3/_4\, a$.)

$$M_{max} = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2.$$

Für $x = 0$ (oder $x = a$) ist

$$M_1 \text{ (oder } M_2) = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l}\right); \quad M_2 \text{ (oder } M_1) = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l} - \frac{2a^2}{l^2}\right).$$

Für $x = \frac{a}{2}$ ist $\quad M_1 = M_2 = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l}\right)$.

$a : l$	A_{max}	$M_{1\,max}$	M_2 für $x = {}^1/_4\, a$	Bemerkung
0	2,0 P	0,50000 Pl	0,50000 Pl	Ist $a : l > 2 - \sqrt{2} = 0{,}586$, so ist der **absolute** Gröfstwert von M_1 stets $= {}^1/_4\, Pl$, wobei die Last 1 in Trägermitte steht.
0,1	1,9 „	0,45125 „	0,44625 „	
0,2	1,8 „	0,40500 „	0,38500 „	
0,3	1,7 „	0,36125 „	0,31625 „	
0,4	1,6 „	0,32000 „	0,24000 „	
0,5	1,5 „	0,28125 „	0,15625 „	
0,586	1,414 „	0,25000 „	0,07850 „	
0,667	1,333 „	(0,22222 „)	0	

Für zwei ungleiche Lasten P_1, P_2 empfiehlt sich folgendes zeichnerische Verfahren*) (Abb. 24). Die stets unter einer der beiden Lasten liegenden größten Momente sind

$$M_x = \frac{P_1}{l}(l - x)\,x + \frac{P_2}{l}[(l - a) - x)]\,x$$

und

$$M_{x_1} = \frac{P_2}{l}(l - x_1)\,x_1 + \frac{P_1}{l}[(l - a) - x_1]\,x_1.$$

Abb. 24.

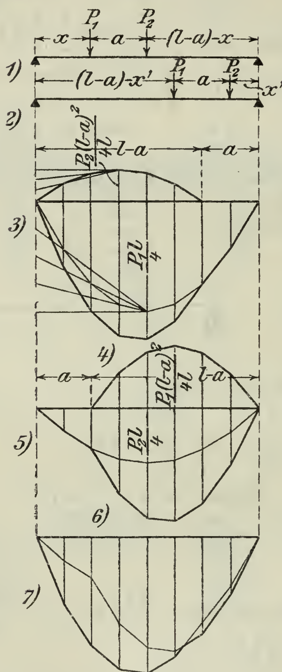
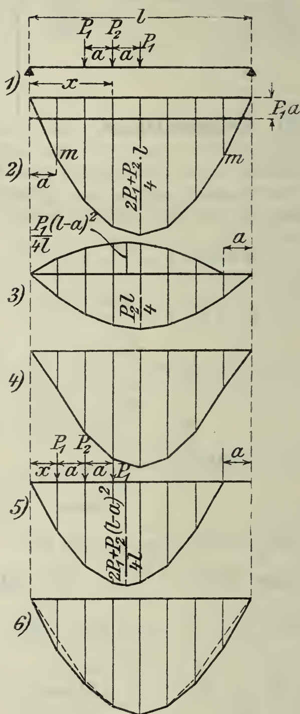


Abb. 25.



Das erste Glied des Ausdruckes für M_x stellt eine Parabel mit der Länge l und der Pfeilhöhe $\frac{P_1\,l}{4}$,

---

*) Nach L. Andrée, Dingl. Journ. 1906 S. 657.

das zweite Glied stellt eine Parabel von der Länge $(l - a)$ und der Pfeilhöhe $\frac{P_2}{4\,l}(l-a)^2$ dar.

Beide Kurven lassen sich, wie Abb. 24, 3 zeigt, über einer Geraden konstruieren und (in 4) im gleichen Sinne aneinandertragen. Die so gefundene Linie liefert für jeden Balkenquerschnitt das Maximalmoment, gemessen unter der Last P_1.

In gleicher Weise, den Ausdruck für M_{x1} zeichnerisch dargestellt, gelangt man (in 5, 6) zu einer Kurve, deren Verlauf die Maximalmomente wiedergibt, gemessen unter der Last P_2. Werden beide Linien auf einer gemeinsamen Grundlinie zusammengeworfen, so ergibt sich ein Umrifs (7), dessen Ordinaten die gröfsten Momente für jeden Querschnitt des Trägers angeben.

Bei drei Lasten P_1, P_2, P_1, deren äufsere (P_1) von der mittleren gleichen Abstand a haben (Abb. 25), liegen für den mittleren Trägerteil die gröfsten Momente M_x unter der Mittellast P_2; es ist

$$M_x = \frac{2\,P_1 + P_2}{l}(l-x)\,x - P_1\,a.$$

Das erste Glied dieser Gleichung läfst sich aufzeichnen als eine Parabel von der Länge l und der Bogenhöhe $\frac{2\,P_1 + P_2}{4}\,l$, während das zweite, unveränderliche Glied als Gerade einfach in Abzug gebracht wird (2).

Die so gefundene Linie hat nur Gültigkeit bis zum Punkte m im Abstande a vom Auflager, von hier aus verläuft sie im Bogen einer Kurve, der bereits für das Lastenpaar $P_1 - P_2$ nachgewiesen ist. Die Konstruktion ist nach Mafsgabe der Gleichung

$$M_x = \frac{P_2}{l}(l-x)\,x + \frac{P_1}{l}[(l-a)-x]\,x$$

aufzustellen (s. 3). Die nunmehr vorgenommene Vereinigung der in 2 u. 3 erhaltenen Linien liefert ein Gebilde (4), welches die gröfsten Momente, gemessen unter der Last P_2, angibt.

Je nach den Verhältnissen der Aufgabe können die Momente unter der Last P_1 nach den Auflagern zu gröfser sein als unter P_2, so dafs es notwendig ist, auch jene zu bestimmen.

Mit bezug auf die Bezeichnungen von 5) ergeben sich die Momente unter der Last P_1 zu $M_x = \frac{2\,P_1 + P_2}{l}[(l-a)-x]\,x$; dieser Ausdruck stellt eine Parabel (5) von der Länge $(l-a)$ und der Bogenhöhe $\frac{2\,P_1 + P_2}{4\,l}(l-a)^2$ dar.

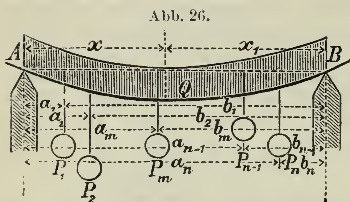
Die Uebertragung dieser Kurve in 4 zeigt, ob es notwendig war, sie besonders festzustellen.

Da die Belastungsweise, infolgedessen auch der gefundene Umrifs symmetrisch ist, so ergeben sich die absoluten Maximalmomente aller Querschnitte aus 6.

Mehrfache Belastung. Ist ein Träger durch mehrere der auf S. 446 bis 452 aufgeführten Belastungen gleichzeitig beansprucht, so addieren sich die Biegungsmomente sowie die Ordinaten der elastischen Linien der einzelnen Belastungsfälle; aus den Summen sind die Werte von $M_{max} = W k_b$ und f_{max} nebst den zugehörigen Werten von x zu ermitteln. In Nr. 21 bis 26 sind einige häufiger vorkommende Fälle mehrfacher Belastung behandelt.

21. **Fall 3 mehrfach, außerdem Fall 8.** (Abb. 26.) Die Auflagerdrücke sind

Abb. 26.



$$A = \Sigma\left(\frac{Pb}{l}\right) + \frac{Q}{2},$$

$$B = \Sigma\left(\frac{Pa}{l}\right) + \frac{Q}{2}.$$

Ist $\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_{m-1} < A$ und

gleichzeitig $\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m > A$,

so liegt der **gefährliche Querschnitt** zwischen P_{m-1} und P_m; sein Abstand vom Auflager A ist bestimmt durch die Formel

$$x = \left(A - \sum_1^{m-1} P\right) : \frac{Q}{l},$$

und es wird

$$M_{max} = W k_b = \sum_1^{m-1} Pa + \frac{Q}{2\,l} x^2.$$

Ist $\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m < A < \sum_1^{m} P + \frac{Q}{l} a_m$, so liegt der gefährliche Querschnitt in P_m, d. h., es ist $x = a_m$, und es wird

$$M_{max} = W k_b = \sum_1^{m-1} Pa + P'_m a_m + \frac{Q}{l} a_m^2,$$

worin
$$P'_m = A - \left[\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m\right].$$

Ist (in Abb. 26) $Q = 0$, so fällt der gefährliche Querschnitt in den Angriffpunkt der Einzellast P_m, wenn

$$\sum_1^{m-1} P < \Sigma\left(\frac{Pb}{l}\right) < \sum_1^{m} P,$$

und es wird
$$M_{max} = W k_b = \sum_1^{m-1} Pa + P'_m a_m.$$

worin
$$P'_m = \Sigma\left(\frac{Pb}{l}\right) - \sum_1^{m-1} P.$$

22. Fall 3 und 8 zugleich (Abb. 27).

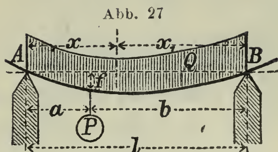


Abb. 27

Es sei $a < b$.

$$A = P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2},$$

$$B = P\frac{a}{l} + \frac{Q}{2}.$$

Bezeichnet x_1 den Abstand des gefährlichen Querschnittes vom Auflager B, so ist, wenn

α) $\frac{P}{Q} < \frac{b-a}{2a}$:

$$x_1 = \frac{Bl}{Q} = \frac{P}{Q}a + \frac{l}{2},$$

$$M_{\max} = Wk_b = B\frac{x_1}{2} = \frac{B^2 l}{2Q}.$$

β) $\frac{P}{Q} > \frac{b-a}{2a}$:

$$x_1 = b,$$

$$M_{\max} = Wk_b = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{ab}{l}.$$

Durchbiegung im Angriffpunkte von P:

$$f = \left(P + \frac{l^2 + ab}{8ab}Q\right)\frac{a^2 b^2}{3EJl}.$$

Im **Sonderfalle** $a = b = \frac{1}{2}l$ [Fall 2 und 8 zugleich] wird

$$A = B = \tfrac{1}{2}(P + Q), \qquad M_{\max} = Wk_b = \tfrac{1}{8}(2P + Q)\,l,$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}l \quad \text{und} \quad f_{\max} = \frac{P + \frac{5}{8}Q}{EJ}\,\frac{l^3}{48}.$$

23. Fall 8 nebst Streckenlast (Abb. 28).

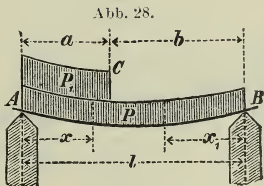


Abb. 28.

$$A = \frac{P}{2} + P_1\left(1 - \frac{a}{2l}\right),$$

$$B = \frac{P}{2} + P_1\frac{a}{2l} = P + P_1 - A.$$

Wenn $\frac{P}{P_1} < \frac{a}{l - 2a}$, so ist der Abstand des gefährlichen Querschnittes vom Auflager A

$$x = \frac{A}{\frac{P}{l} + \frac{P_1}{a}} \quad \text{und} \quad M_{\max} = Wk_b = A\frac{x}{2} = \frac{A^2 a l}{2(Pa + P_1 l)}.$$

Wenn $\frac{P}{P_1} = \frac{a}{l - 2a}$, so liegt der gefährliche Querschnitt in C (also $x = a$), und es ist $M_{\max} = Wk_b = \frac{1}{2}Aa = \frac{1}{2}Bb$.

Wenn $\frac{P}{P_1} > \frac{a}{l - 2a}$, so ist der Abstand des gefährlichen Querschnittes vom Auflager B

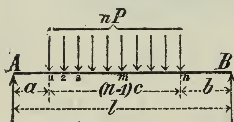
$$x_1 = \frac{Bl}{P} = \frac{l}{2} + \frac{P_1}{P}\frac{a}{2} \quad \text{und} \quad M_{\max} = Wk_b = B\frac{x_1}{2} = \frac{B^2 l}{2P}.$$

Im **Sonderfalle** $a = b = \frac{1}{2}l$ und $P_1 = \frac{1}{2}P$ wird

$A = \frac{7}{8}P$ und $B = \frac{5}{8}P$, ferner $x = \frac{7}{16}l$ und $M_{\max} = Wk_b = A\frac{x}{2} = \frac{49}{256}Pl.$

24. Frei aufliegender Träger, durch n **gleiche Einzellasten** P belastet, die in $n - 1$ **gleichen Abständen** c angreifen (Abb. 29).

Abb. 29.



$$A = \frac{nP}{l}\left(b + \frac{n-1}{2}c\right),$$

$$B = \frac{nP}{l}\left(a + \frac{n-1}{2}c\right).$$

Der gefährliche Querschnitt liegt im Angriffpunkte der m^{ten} Last, wenn

$$P > (mP - A) > 0,$$

so daß $\quad M_{\max} = Wk_b = Aa + (m-1)(A - \frac{1}{2}mP)c.$

Für den **Sonderfall** $a = b$ wird $A = B = \frac{1}{2}nP$. Teilen hierbei die Angriffpunkte der n Kräfte P die Freilänge l in $n_1 = n + 1$ gleiche Teile von der Länge $(l : n_1) = a = b$, so ist,

wenn n_1 eine gerade Zahl: $M_{\max} = Wk_b \frac{n_1}{8}Pl,$

wenn n_1 eine ungerade Zahl: $M_{\max} = Wk_b = \frac{n_1^2 - 1}{8n_1}Pl.$

Es wird für $n_1 = 3$ (Belastung in den Drittelpunkten) . . . $Wk_b = \frac{1}{3}Pl,$
„ $n_1 = 4$ („ „ „ Viertelpunkten) . . . $Wk_b = \frac{1}{2}Pl,$
„ $n_1 = 5$ („ „ „ Fünftelpunkten) . . . $Wk_b = \frac{3}{5}Pl,$
„ $n_1 = 6$ („ „ „ Sechstelpunkten) . . . $Wk_b = \frac{3}{4}Pl,$
„ $n_1 = 7$ („ „ „ Siebentelpunkten) . . $Wk_b = \frac{6}{7}Pl.$

25. **Fall 9 und verallgemeinerter Fall 4 zugleich** (Abb. 30).

$$A = P\frac{b^2(3a + 2b)}{2l^3} + \frac{3}{8}Q,$$

$$B = P\frac{(2a^2 + 6ab + 3b^2)a}{2l^3} + \frac{5}{8}Q;$$

Stützenmoment $M_B = P\frac{ab(2a + b)}{2l^2} + Q\frac{l}{8},$

Moment in C $\quad M_C = P\frac{ab^2(3a + 2b)}{2l^3} + Q\frac{(3b - a)a}{8l}.$

$M_{\max}$ ergibt sich für $x = \frac{A l}{Q}$, falls dieser Wert $< a$, und zwar ist dann

$$M_{a\max} = \frac{A^2}{2\,Q}\,l.$$

Die Bedingung für $x < a$ ist

$$\frac{P}{Q} < \frac{l^2}{4\,b^2}\,\frac{5\,a - 3\,b}{3\,a + 2\,b}.$$

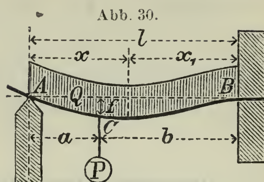


Abb. 30.

Anderseits ergibt sich $M_{\max}$ für $x = \frac{A - P}{Q}\,l$, falls dieser Wert $> a$ (oder $x_1 < b$), u. zw. ist dann

$$M_{b\,\max} = \frac{B^2}{2\,Q}\,l - M_B = P\,a + \frac{(A - P)^2}{2\,Q}\,l.$$

Die Bedingung für $x > a$ $(x_1 < b)$ ist

$$\frac{P}{Q} < \frac{l^2\,(3\,b - 5\,a)}{4\,a\,(2\,a^2 + 6\,a\,b + 3\,b^2)}.$$

Zur Querschnittberechnung dient das absolut gröfste der drei Momente M_B, M_C und $M_{a\max}$ (oder $M_{b\max}$).

Durchbiegung im Angriffpunkte der Einzellast P:

$$f = \frac{P}{EJ}\,\frac{a^2\,b^3\,(4\,a + 3\,b)}{12\,l^3} + \frac{Q}{EJ}\,\frac{a\,b^2\,(3\,a + b)}{48\,l}.$$

26. **Fall 10 und verallgemeinerter Fall 5 zugleich** (Abb. 31).

$$a < b.$$

$$A = P\,\frac{(3\,a + b)\,b^2}{l^3} + \frac{Q}{2};$$

$$B = P\,\frac{(a + 3\,b)\,a^2}{l^3} + \frac{Q}{2};$$

$$M_{\max} = M_A = W k_b = P\,\frac{a\,b^2}{l^2} + \frac{Q\,l}{12}.$$

Gefährlicher Querschnitt in A.

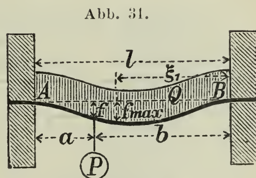


Abb. 31.

Durchbiegung im Angriffpunkte von P:

$$f = \frac{1}{EJ}\left(P\,\frac{a^3\,b^3}{3\,l^3} + Q\,\frac{a^2\,b^2}{24\,l}\right).$$

Für den **Sonderfall** $Q = 0$ ist die gröfste Durchbiegung

$$f_{\max} = \frac{P}{EJ}\,\frac{2\,a^2\,b^3}{3\,(a + 3\,b)^2}$$

im Abstande ξ_1 von B, u. zw. ist

$$\xi_1 = \frac{2b}{a+3b} l,$$

wogegen die Durchbiegung im Angriffpunkte von P nur beträgt

$$f = \frac{P}{EJ} \frac{a^3 b^3}{3 l^3}.$$

f. Querschnitt-Ermittlung für Walzträger mit Rücksicht auf Durchbiegung.

Die **Durchbiegung** f eines Trägers soll zur möglichsten Beschränkung der dynamischen Wirkungen auch unter der gröfsten Last meist einen bestimmten Bruchteil der Freilänge l nicht überschreiten; im Hochbau nimmt man erfahrungsgemäfs $f \leqq {}^1/_{600}\, l$, im Brückenbau gewöhnlich $f \leqq {}^1/_{1000}\, l$.

Bei **Flufseisen - Trägern** mit $E = 2\,150\,000$ kg/qcm, von beliebigem, aber überall gleichem Querschnitt ist in den am häufigsten vorkommenden Belastungsfällen 2 (S. 446) und 8 (S. 448) stets $f \leqq {}^1/_{600}\, l$ bzw. ${}^1/_{1000}\, l$, sofern der für die zulässige Spannung k_b berechnete Trägerquerschnitt eine Höhe h besitzt, deren Verhältnis zur Freilänge l gröfser ist als der Wert ζ in nachstehender Tafel.

Liefert die allgemeine Formel $M = W k_b$ einen Träger von geringerer Höhe als ζl, so ist mit Rücksicht auf die Durchbiegung f der Trägerquerschnitt aus der aus Spalte 6 der Tafel S. 447, 448 u. f. sich ergebenden Formel

$$J = c P l^2$$

zu berechnen, worin J das Trägheitsmoment des Querschnitts in **cm**^{4}, P die Last in **t**, l die Freilänge in **m** bezeichnet und der Zahlenwert c (entsprechend f und k_b) der folgenden Tafel zu entnehmen ist.

Gröfste Durchbiegung			$f = {}^1/_{600}\, l$			$f = {}^1/_{1000}\, l$		
Zulässige Spannung k_b			750	875	1000	750	875	1000
Fall 2, S. 446.	↓P, ←l→	$1 : \zeta = l : h =$	28,1	24,6	21,1	16,9	14,7	12,6
		$c =$	58,1			96,9		
Fall 8, S. 448.	P (gleichmäfsig verteilt), ←l→	$1 : \zeta = l : h =$	22,5	19,7	16,9	13,5	11,8	10,1
		$c =$	36,3			60,6		

Ist z. B. für einen gleichmäfsig über die Freilänge $l = 5{,}0$ m belasteten Flufseisen-Hochbauträger die für $k_b = 875$ sich ergebende Querschnitthöhe kleiner als ${}^1/_{19,7} \cdot 5{,}0 = 25$ cm, so ist der Querschnitt besser aus der Formel $J = 36{,}3\, P l^2$ zu berechnen. (Vergl. ferner die Beispiele 2 und 3 auf S. 462 u. f.)

Wird ein Walzträger gleichzeitig durch die gleichmäfsig verteilte Last Q und durch die Einzellast P in Trägermitte beansprucht, so

ersetze man, falls die Durchbiegung f bei der Querschnitt-Bestimmung berücksichtigt werden soll, Q durch eine in Trägermitte angreifende Einzellast $^5/_8\,Q$ und wende alsdann auf die Last $P + {}^5/_8\,Q$ den Belastungsfall 2, wie vorstehend an. (Vrgl. Beispiel 3, S. 462.)

Für die Ermittlung des Träger-Querschnittes auf Grund der zulässigen Spannung k_b ist dagegen die Last Q nur zur Hälfte als Einzellast in Trägermitte zu berücksichtigen. (S. Sonderfall unter Nr. 22 auf S. 457.)

g. Beispiele.

Bemerkung: **In den nachstehenden Beispielen sind für die Träger gewalzte deutsche Normal-I-Profile und Flufseisen mit $k_b = 875$ kg/qcm vorausgesetzt.**

Beispiel 1. Ein **Freiträger** von 1,50 m Freilänge ist nach Abb. 32 belastet mit 900 + 450 + 800 + 150 = 2300 kg. Das Träger-Eigengewicht werde vernachlässigt.

In C ist erforderlich:

$$W = \frac{800 \,.\, 50 + (0{,}5 : 1{,}5) \,.\, 900 \,.\, 25}{875} = 54{,}3 \text{ cm}^3,$$

in B: $W = \dfrac{800 \,.\, 150 + 150 \,.\, 30 + 900 \,.\, {}^1/_2 \,.\, 150 + 450 \,.\, {}^1/_3 \,.\, 100}{875} = \dfrac{207\,000}{875} = 237 \text{ cm}^3.$

Für AC genügt I Nr. 12 mit $W = 54{,}5$ cm³. — Für BC kann je nach Umständen gewählt werden:

2 I Nr. 16 mit $W = 2 \,.\, 117 = 234$ cm³, oder 1 I Nr. 21 mit $W = 244$ cm³, oder 3 I Nr. 14 mit $W = 3 \,.\, 81{,}7 = 245$ cm³, oder (nach Abb. 33) 2 I Nr. 15 und 1 I Nr. 12 mit $W = 2 \,.\, 97{,}9 + {}^{12}/_{15} \,.\, 54{,}5 = 239$ cm³. [Da das schwächere I Nr. 12 sich hierbei nur ebensoviel durchbiegen kann wie die beiden stärkeren I Nr. 15, mithin das schwächere I-Eisen nicht voll beansprucht wird, so ist sein $W = 54{,}5$ cm³ im Verhältnis der Profilhöhen vermindert eingeführt.]

Die Gesamtlast 2300 kg greift im Abstande $\dfrac{207\,000}{2\,300} = 90$ cm vor der Kante B an.

Da eine Bewegung des Trägers ausgeschlossen sein soll, so mufs 1) das Drehbestreben des Trägers durch das Moment einer genügenden Gegenlast (durch das sogen. Stabilitätsmoment, vrgl. S. 169) aufgehoben werden und 2) ein für die Last und

Abb. 32.

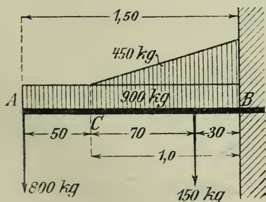


Abb. 33.

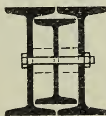
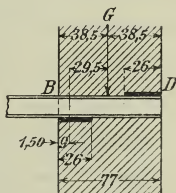


Abb. 34.



Gegenlast genügendes Träger-Auflager vorhanden sein. Nimmt man die Drehachse auf $^1/_3$ der Plattenbreite (26 : 3 = rd. 9 cm) von der Kippkante B an*), so ist das Lastmoment (Kippmoment)

$$M = 207\,000 + 9 \,.\, 2300 = 227\,700 \text{ cmkg}.$$

*) Es empfiehlt sich, auch bei Berechnung des Trägerquerschnittes eine ähnliche Annahme zu machen, das Biegungsmoment also 227 700 cmkg anzunehmen.

Wirkt die Gegenlast am Hebelarme 38,5 — 9 = 29,5 cm, so ist der Nachweis einer Gegenlast $G > 227\,700 : 29{,}5 = 7720$ kg erforderlich.

Die 26 cm breite und 39 cm lange Unterlagplatte bei B (Abb. 34) beansprucht das sie unterstützende Klinkermauerwerk in Zementmörtel im Mittel mit

$$k = \frac{2300 + 7720}{26 \cdot 39} = 10 \text{ kg/qcm},$$

was nach Tafel **3.**, S. 407, zulässig ist. Deckplatte bei D 26 . 29 cm (zur besseren Druckverteilung auf das Mauerwerk).

Richtiger ist es, die beiden Platten entsprechend den bei B und D auftretenden Kantenpressungen zu bemessen. Wählt man beide Platten 39 cm lang und ihre Breite so, daſs sie mindestens zusammen die Wanddicke 77 cm ausmachen, so sind die Kantenpressungen

$$\text{bei } B \quad k_1 = \frac{7720}{77 \cdot 39} + \frac{2 \cdot 2300}{77 \cdot 39} \cdot \left(2 + \frac{3 \cdot 90}{77}\right)$$
$$= 2{,}57 + 8{,}43 = 11{,}00 \text{ kg/qcm},$$

$$\text{bei } D \quad k_2 = -\frac{7720}{77 \cdot 39} + \frac{2 \cdot 2300}{77 \cdot 39} \left(1 + \frac{3 \cdot 90}{77}\right)$$
$$= -2{,}57 + 6{,}90 = 4{,}33 \text{ kg/qcm}.$$

Die kleinsten Plattenbreiten ergeben sich

$$\text{für Platte } B \text{ zu } \frac{11{,}0}{11{,}0 + 4{,}33} \cdot 77 = 55 \text{ cm},$$

$$\text{„ „ } D \text{ „ } 77 - 55 = 22 \text{ cm}.$$

Da die Kantenpressung bei B nicht besonders hoch ist, so dürfte eine geringere Breite (40 bis 45 cm) der Platte B zulässig sein.

Beispiel 2. Gewalzte Träger einer **massiven Decke** von ungewöhnlicher Stützweite. Freilänge = 10,5 m; Teilung = 1,95 m. Deckeneigengewicht (einschl. Träger) = 400 kg/qm; Nutzlast = 250 kg/qm. Es liegt der Belastungsfall 8, S. 448, vor. Belastung

$$P = (10{,}5 \cdot 1{,}95) \text{ qm} \cdot 650 \text{ kg/qm} = 13\,325 \text{ kg}.$$

Erforderlich ohne Rücksicht auf die Durchbiegung

$$W = \frac{13\,325 \cdot 1050}{8 \cdot 875} = 1999 \text{ cm}^3,$$

so daſs I Nr. 45 mit $W = 2045$ cm³ noch genügen würde. Soll aber die gröſste Durchbiegung kleiner sein als $^1/_{600}$ der Freilänge, also $f < 1050 : 600 = 1{,}75$ cm, so ist nach S. 460 I Nr. 45 zu schwach, denn die Höhe $h = 45$ cm ist kleiner als $\zeta l = 1050 : 19{,}7 = 53{,}4$ cm. Daher ist in diesem Falle erforderlich ein Trägheitsmoment

$$J = 36{,}3 \cdot 13{,}3 \cdot 10{,}5^2 = 53\,227 \text{ cm}^4;$$

gewählt I Nr. $47^1/_2$ mit $J = 56\,410$ cm⁴. Nach S. 449 wird für I Nr. $47^1/_2$

$$f = \frac{5}{384} \frac{13\,325 \cdot 1050^3}{2\,150\,000 \cdot 56\,410} = 1{,}65 \text{ cm};$$

hiervon ist eine Durchbiegung $\frac{400}{650} \cdot 1{,}65 = 1{,}0$ cm beständig vorhanden.

Unterlegplatten 26 · 26 cm genügen für $^1/_2 \cdot 13\,325 = 6660$ kg Auflagerdruck.

Beispiel 3. Die beiden Träger eines 1 m breiten **Laufsteges** (im Bühnenraume eines Theaters) liegen 12 m frei.

Gröſste zufällige Last in Brückenmitte: Eine Beleuchtungsvorrichtung mit 3 Mann zur Bedienung, zusammen höchstens 450 kg; hiervon kommen auf jeden der beiden Träger $^1/_2 \cdot 450 = 225$ kg.

Eigengewicht des Steges für 1 m:

1) Träger (geschätzt) 2 · 42 = ...	84 kg
2) Bohlenbelag, 4 cm st., 1,0 · 1,0 · 0,04 = 0,04 cbm zu 650 kg/cbm = . .	26 „
3) Geländer, Befestigungsschrauben usw., rd.	8 „
zusammen	118 kg

Auf jeden Träger entfällt an Eigengewicht $12{,}0 \cdot \frac{118}{2} =$ . . . . 708 kg.

Erforderlich ohne Rücksicht auf die Durchbiegung [vrgl. den Sonderfall 22 auf S. 457 und ferner S. 460]:

$$W = \frac{(^1/_2 \cdot 708 + 225)\ 1200}{4 \cdot 875} = 199\ \text{cm}^3,$$

so dafs I Nr. 20 mit $W = 214$ cm³ reichlich genügen würde. Soll aber die gröfste Durchbiegung kleiner sein als $^1/_{600}$ der Freilänge, also $f < 2$ cm, so ist nach S. 461 erforderlich:

$$J = 58{,}1 \cdot (^5/_8 \cdot 0{,}708 + 0{,}225) \cdot 12{,}0^2 = 5589\ \text{cm}^4;$$

es ist also zu wählen I Nr. 26 mit $J = 5735$ cm⁴.

Die Durchbiegung hierbei wird

$$f = \frac{1200}{600} \frac{5589}{5735} = \text{rd. } 1{,}9\ \text{cm};$$

hiervon ist eine Durchbiegung

$$\frac{^5/_8 \cdot 708}{^5/_8 \cdot 708 + 225} \cdot 1{,}9 = 1{,}3\ \text{cm}$$

beständig vorhanden.

Für I Nr. 20 würde die gröfste Durchbiegung geworden sein

$$f = \frac{1200}{600} \frac{5589}{2139} = 5{,}2\ \text{cm}.$$

Beispiel 4. Die **Holzbalken** der Decke eines Wohnzimmers liegen 6,6 m frei. Auf 1 m Belastungsbreite entfallen $6{,}6 \cdot 1{,}0 \cdot 500 = 3300$ kg; hierfür ist erforderlich ($k_b = 60$ kg/qcm)

$$W = \frac{3300 \cdot 660}{8 \cdot 60} = 4538\ \text{cm}^3.$$

Nach Tafel S. 445 hat ein Balken von 26 · 30 cm Querschnitt ein $W = 3900$ cm³, er genügt also für eine Balkenteilung $t = 3900 : 4538 = 0{,}86$ m.

[Die Berliner Baupolizei gestattet, bei Balken unter 6 m Freilänge die Teilung t bis zu $^1/_3$ gröfser (d. h. k_b bis zu 80 kg/qcm) zu wählen. Näheres s. Abt. III, Abschn. Hochbau).]

h. Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung.

Sind bei einem Träger die gröfsten Werte der Biegungsspannung

$$\sigma_{\max}\ (= k_b) = M : W$$

in jedem Querschnitte gleich, so nennt man den Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung (vrgl. S. 425). Für solche Träger sind im folgenden einige brauchbare Formen angegeben.

Die punktierten Linien des Längsschnittes geben dessen durch Tangenten **angenäherte Form** an.

In den Fällen 5, 9, 10 und 11 kann, ähnlich wie in 1, die x-Achse auch als Symmetrieachse des Längsschnittes angenommen werden.

Ein Träger, der nur durch ein auf die Länge l **unveränderliches Biegungsmoment** beansprucht wird (s. S. 467, Fall 3), mufs bei gleichem Widerstande überall denselben Querschnitt haben.

Längs- und Querschnitt des Trägers	Querschnitte	Begrenzung des Längsschnittes	Formeln zur Berechnung der Querschnitt-Abmessungen
Die Last P greift am Ende des Trägers an.			
1 a).	Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	1 a). Obere Begrenzung: Gerade; untere Begrenzung: Gemeine Parabel.	$y^2 = \frac{6P}{b k_b} x.$ $h = \sqrt{\frac{6Pl}{b k_b}}.$
1 b).		1 b). Gemeine Parabel. (Vrgl. S. 104.)	Durchbiegung in A: $f = \frac{8P}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3.$
2. [Elastische Linie ein Kreisbogen.]	Rechtecke von gleicher Höhe h und veränderlicher Breite y.	Gerade Linie.	$y = \frac{6P}{h^2 k_b} x.$ $b = \frac{6Pl}{h^2 k_b}.$ Durchbiegung in A: $f = \frac{6P}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3.$
3.	Aehnliche Rechtecke von der Höhe y und der Breite z; Verhältnis der Seiten: $z : y = \alpha$.	Kubische Parabel*)	$y^3 = \frac{6P}{\alpha k_b} x.$ $z = \alpha y.$ $h = \sqrt[3]{\frac{6Pl}{\alpha k_b}}.$ $b = \alpha h.$
4.	Kreise vom Durchmesser y.	Kubische Parabel*)	$y^3 = \frac{32P}{\pi k_b} x.$ $d = \sqrt[3]{\frac{32Pl}{\pi k_b}}$

*) **Konstruktion der kubischen Parabel** (Abb. 35, S. 465) **und der semikubischen Parabel** (Abb. 36). Gegeben der Scheitel A, die Achse AX und ein Punkt P der Parabel:

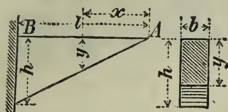
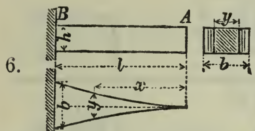
Längs- und Querschnitt des Trägers	Querschnitte	Begrenzung des Längsschnittes	Formeln zur Berechnung der Querschnitt-Abmessungen
Last Q gleichmäfsig über den Träger verteilt.			
	Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	Gerade Linie.	$y = x\sqrt{\frac{3\,Q}{b\,l\,k_b}}$. $h = \sqrt{\frac{3\,Q\,l}{b\,k_b}}$.
6.  [Elastische Linie ein Kreisbogen.]	Rechtecke von gleicher Höhe h und veränderlicher Breite y.	Gemeine Parabel. (Vrgl. S. 104.)	$y = \frac{3\,Q}{l\,k_b}\,\frac{x^2}{h^2}$. $b = \frac{3\,Q\,l}{k_b\,h^2}$. Durchbiegung in A: $f = \frac{3\,P}{b\,E}\left(\frac{l}{h}\right)^3$.

Abb. 35.
Kubische Parabel.

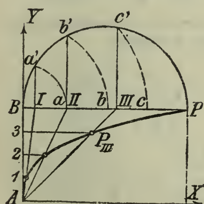
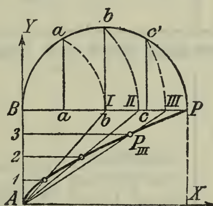
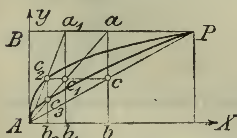


Abb. 36.
Semikubische Parabel.



Konstruiere das Rechteck $ABPX$, teile AB (durch 1, 2, 3) und BP (durch a, b, c) in gleich viele (hier vier) gleiche Teile und beschreibe über BP einen Halbkreis. Mache dann z. B. in Abb. 35 die Sehne $Bc' = Bc$ und ziehe c'III winkelrecht zu BP (bzw. ziehe in Abb. 36 cc' winkelrecht zu BP und BIII $=$ Sehne Bc'); AIII schneidet die zu AX parallele Linie $3\,P_{III}$ im Punkte P_{III} der Parabel.

Abb. 37.



Ist der Halbkreis für die Zeichnung unbequem, so verwende man Abb. 37 zur Konstruktion. Wähle c beliebig auf AP, acb, $a_1c_1b_1$, $c_2c_3b_2$ winkelrecht zu AX, cc_1c_2 parallel zu XA, c_1 und c_3 auf Aa, c_2 auf Aa_1. Alsdann ist

c_1 ein Punkt der gemeinen Parabel,

c_2 ein Punkt der kubischen Parabel,

c_3 ein Punkt der semikubischen Parabel.

Längs- und Querschnitt des Trägers	Querschnitte	Begrenzung des Längsschnittes	Formeln zur Berechnung der Querschnitt-Abmessungen
7.	Aehnliche Rechtecke von der Höhe y und der Breite z; Verhältnis der Seiten $z:y=\alpha$.	Semikubische Parabel. (Vrgl. die Fufsnote S. 465.)	$y^3=\frac{3Q}{\alpha k_b}\frac{x^2}{l}$. $z=\alpha y$. $h=\sqrt[3]{\frac{3Ql}{\alpha k_b}}$. $b=\alpha h$.
8.	Kreise vom Durchmesser y.	Semikubische Parabel. (Vrgl. die Fufsnote S. 465.)	$y^3=\frac{16Q}{\pi l k_b}x^2$. $d=\sqrt[3]{\frac{16Ql}{\pi k_b}}$.

Die Last P wirkt in C.

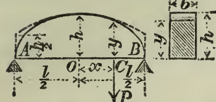
9.	Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	Obere Begrenzung: Zwei gemeine Parabeln. (Vrgl. S. 104.)	$y^2=\frac{6P(l-p)}{blk_b}x$. $y_1{}^2=\frac{6Pp}{blk_b}x_1$. $h=\sqrt{\frac{6P(l-p)p}{blk_b}}$.

Last Q gleichmäfsig über den Träger verteilt.

10.	Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	Obere Begrenzung: Ellipse. (Vrgl. S. 99.)	$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{3Ql}{4bk_b}}=1$. $h=\sqrt{\frac{3Ql}{4bk_b}}$. **Durchbiegung in Q:** $f=\frac{1}{64}\frac{Ql^3}{EJ}=\frac{3}{16}\frac{Q}{bE}\left(\frac{l}{h}\right)^3$.*)

*) Bei ausgeführten Blechträgern von nahezu gleichem Widerstande gegen Biegung ist nach R. Land

$$=\frac{1}{70}\frac{Ql^3}{EJ}=\frac{6}{35}\frac{Q}{bE}\left(\frac{l}{h}\right)^3.$$

Längs- und Querschnitt des Trägers	Querschnitte	Begrenzung des Längsschnittes	Formeln zur Berechnung der Querschnitt-Abmessungen
Lage des Angriffpunktes C der Last P veränderlich.			
11. 	(Wandernde Einzellast.) Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	Obere Begrenzung: Ellipse. (Vrgl. S. 92.)	$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{3\,Pl}{2\,b\,k_b}}=1.$ $h=\sqrt{\frac{3\,Pl}{2\,b\,k_b}}.$

i. Träger von kleinstem Biegungswinkel am Ende und von kleinster Durchbiegung.*)

Belastungsfall	Bedingung	b-konst	h=konst.	
1.	$f_{\min}$	$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $h'=\frac{1}{2}h$	$y=b\,\frac{x}{l}$ $b'=0$	$y=d\left(\frac{x}{l}\right)^{1/3}$ $d'=\frac{2}{3}d$
	$\beta_{\min}$	$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^{1/4}$ $h'=\frac{3}{4}h$	$y=b\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $b'=\frac{1}{2}b$	$y=d\left(\frac{x}{l}\right)^{1/6}$ $d'=\frac{5}{6}d$
2.	$f_{\min}$	$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^{3/4}$ $h'=\frac{1}{4}h$	$y=b\left(\frac{x}{l}\right)^{3/2}$ $\left(b'=-\frac{1}{2}b\right)$	$y=d\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $d'=\frac{1}{2}d_0$
	$\beta_{\min}$	$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $h'=\frac{1}{2}h$	$y=b\,\frac{x}{l}$ $b'=0$	$y=d\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $d'=\frac{2}{3}d$
3.	$f_{\min}$	$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^{1/4}$ $h'=\frac{3}{4}h$	$y=b\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $b'=\frac{1}{2}b$	$y=d\left(\frac{x}{l}\right)^{1/6}$ $d'=\frac{5}{6}d$
	$\beta_{\min}$	$y=h$ $h'=h$	$y=b$ $b'=b$	$y=d$ $d'=d$

Diese Werte gelten auch für den Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung (vrgl. S. 463).

*) Nach G. Kull, Dingl. Journ. 1906 S. 481.

k. Träger auf mehreren Stützen.

(Durchlaufende Träger.)

1. Biegungsmomente über den Stützpunkten.

Bedeuten (Abb. 38)

M_0, M_1, M_2 die Momente über den drei beliebigen, aufeinander folgenden Stützen 0, 1, 2,

y_0, y_1, y_2 die Höhen der Stützpunkte 0, 1, 2 unter einer beliebigen Wagerechten, so ist

$$1)\quad 6\,EJ\left(\frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1}\right) = M_0 l_0 + 2\,M_1\,(l_0 + l_1) + M_2\,l_1 + \frac{\Sigma P a_0\,(l_0^2 - a_0^2)}{l_0} + \frac{\Sigma P a_1\,(l_1^2 - a_1^2)}{l_1} + {}^1/_4\,(q_0\,l_0^3 + q_1\,l_1^3).$$

(Dreimomentengleichung.)

Für einen Träger, der nur durch Lasten beansprucht wird, die auf den einzelnen Strecken gleichmäfsig verteilt sind, erhält man die **Clapeyronsche Gleichung**

$$2)\quad 6\,EJ\left(\frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1}\right) = M_0 l_0 + 2\,M_1\,(l_0 + l_1) + M_2\,l_1 + {}^1/_4\,(q_0\,l_0^3 + q_1\,l_1^3).$$

Liegen sämtliche Stützen gleich hoch, so geht die Gleichung 2) über in

$$3)\quad \ldots\quad M_0 l_0 + 2\,M_1\,(l_0 + l_1) + M_2\,l_1 = -\,{}^1/_4\,(q_0\,l_0^3 + q_1\,l_1^3).$$

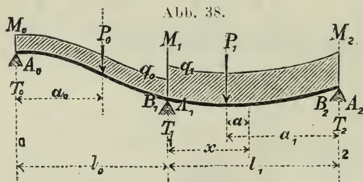


Abb. 38.

Sind n Felder, also $n + 1$ Stützen vorhanden, so lassen sich $n - 1$ Gleichungen von der Form 1), 2) oder 3) aufstellen; es können dann aus diesen und den beiden Gleichungen, die die Befestigungen der Enden des Trägers kennzeichnen (z. B. $M_0 = M_n = 0$ usw.), die $n + 1$ Momente über den $n + 1$ Stützen berechnet werden.

2. Stützendrücke.

1. Es seien

A_0, A_1 . . . A_{n-1} die von den jeweilig rechts gelegenen Feldern herrührenden Anteile der Gesamt-Stützendrücke,

B_1, B_2 . . . B_n die von den jeweilig links gelegenen Feldern herrührenden Anteile der Gesamt-Stützendrücke,

$T_0, T_1 \ldots T_n$ die Gesamt-Stützendrücke, so daſs also

$$T_0 = A_0, \quad T_1 = A_1 + B_1, \; \ldots, \quad T_n = B_n \text{ ist.}$$

Das **Moment** an irgend einer Stelle in der Entfernung x von der Stütze 1 ist

$$M = M_1 - \frac{q_1 x^2}{2} - \sum_0^x P_1 a + A_1 x;$$

hieraus ergibt sich für $x = l_1$

$$A_1 = \frac{M_2 - M_1}{l_1} + \frac{q_1 l_1}{2} + \frac{\Sigma P_1 a_1}{l_1}.$$

Entsprechend erhält man

$$B_1 = \frac{M_0 - M_1}{l_0} + \frac{q_0 l_0}{2} + \frac{\Sigma P_0 a_0}{l_0};$$

mithin ist der **Gesamt-Stützendruck** der Stütze 1:

$$T_1 = \frac{q_0 l_0 + q_1 l_1}{2} - M_1 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_0}\right) + \frac{M_2}{l_1} + \frac{M_0}{l_0} + \frac{\Sigma P_1 a_1}{l_1} + \frac{\Sigma P_0 a_0}{l_0}.$$

Beispiel.

Träger frei aufliegend auf drei Stützen in gleichen Abständen l. Belastung des einen Feldes $= 0$, des anderen gleichmäſsig durch q kg/cm. (Abb. 39.)

$$M_0 = M_2 = 0.$$

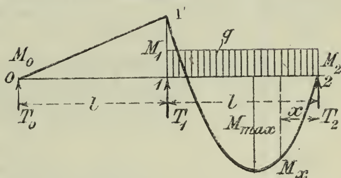
Nach Gleichung 3 ist daher

$$4\, M_1 l = -\, {}^1\!/_4\, q\, l^3,$$

woraus

$$M_1 = -\, {}^1\!/_{16}\, q\, l^2 = -\, 0{,}0625\; q\, l^2.$$

Abb. 39.



$$T_0 = + \frac{M_1}{l} = -\, {}^1\!/_{16}\, q\,.$$

$$T_1 = \frac{ql}{2} - \frac{2\,M_1}{l} = \frac{ql}{2} + {}^1\!/_8\, q\, l = {}^5\!/_8\, q\, l.$$

$$T_2 = \frac{ql}{2} + \frac{M_1}{l} = \frac{ql}{2} - {}^1\!/_{16}\, q\, l = {}^7\!/_{16}\, q\, l.$$

$$M_x = +\, T_2 x - \frac{q x^2}{2} = {}^7\!/_{16}\, q\, l\, x - {}^1\!/_2\, q\, x^2.$$

$$M = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = {}^7\!/_8\, l.$$

$$M_{\max} \text{ für } {}^7\!/_{16}\, q\, l - q\, x = 0, \text{ also } x = {}^7\!/_{16}\, l.$$

$$M_{\max} = {}^1\!/_2\, ({}^7\!/_{16})^2\, q\, l^2 = {}^{49}\!/_{512}\, q\, l^2 = 0{,}0957\; q\, l^2.$$

Es ergibt sich daher die in Abb. 39 eingetragene Momentenlinie 0 1' 2. Da $M_{\max} > M_1$ (absol.), so ist $M_{\max}$ für die Querschnittbestimmung maſsgebend.

Durchlaufende Träger

auf gleich hohen und gleich weit voneinander entfernten Stützen.
Belastung gleichmäfsig über den ganzen Träger verteilt.

Werte	Anzahl der Stützen							Einheiten
	3	4	5	6	7	8	9	
T_0	0,3750	0,4000	0,3929	0,3947	0,3942	0,3944	0,3943	ql
T_1	1,2500	1,1000	1,1428	1,1317	1,1346	1,1337	1,1340	„
T_2	.	.	0,9286	0,9736	0,9616	0,9649	0,9640	„
T_3	.	.	.	.	1,0192	1,0070	1,0103	„
T_4	.	.	.	.	.	.	0,9948	„
M_1	0,1250	0,1000	0,1071	0,1053	0,1058	0,1056	0,1057	ql^2
M_2	.	.	0,0714	0,0789	0,0769	0,0775	0,0773	„
M_3	.	.	.	.	0,0865	0,0845	0,0850	„
M_4	.	.	.	.	.	.	0,0825	„
$M_{1\max}$	0,0703	0,0800	0,0772	0,0779	0,0777	0,0778	0,0777	„
$M_{2\max}$	.	0,0250	0,0364	0,0332	0,0340	0,0338	0,0339	„
$M_{3\max}$	.	.	.	0,0461	0,0433	0,0440	0,0438	„
$M_{4\max}$	.	.	.	.	.	0,0405	0,0412	„
x_1	0,375	0,4000	0,3930	0,3947	0,3942	0,3944	0,3943	l
x_2	.	0,5000	0,5357	0,5264	0,5327	0,5281	0,5283	„
x_3	.	.	.	0,5000	0,4904	0,4930	0,4923	„
x_4	.	.	.	.	.	0,5000	0,5026	„
ξ_1	0,750	0,8000	0,7860	0,7894	0,7884	0,7887	0,7887	„
ξ_2	.	0,2760	0,2659	0,2680	0,2675	0,2680	0,2680	„
	.	0,7240	0,8055	0,7830	0,7899	0,7884	0,7890	„
ξ_3	.	.	.	0,1964	0,1960	0,1962	0,1960	„
	.	.	.	0,8036	0,7850	0,7897	0,7880	„
ξ_4	.	.	.	.	.	0,2153	0,2150	„
	.	.	.	.	.	0,7847	0,7900	„

Hierbei bezeichnen

T_0, T_1 . . . die Gegendrücke der Stützen,

M_1, M_2 . . . die (negativen) Momente über den Stützen,

$M_{1\max}$, $M_{2\max}$ . . . die gröfsten Momente in den einzelnen Feldern,

x_1, x_2 . . . die Entfernungen der Momente $M_{1\max}$ . . . von den nächsten links liegenden Stützen,

ξ_1, ξ_2 . . . die Entfernungen der Wendepunkte der elastischen Linien von diesen Stützen,

l die Länge jedes Feldes,

q die Belastung f. d. Längeneinheit jedes Feldes.

Da alles in bezug auf die Mitte des Trägers symmetrsich ist, sind die Angaben nur bis zur Mitte durchgeführt.

Die Werte der T, M, $M_{\max}$, x und ξ nähern sich mit wachsender Stützenzahl den entsprechenden Werten von Fall 10 S. 450 für die Mittelfelder; für die Endfelder stimmen sie bei 3 Stützen mit Fall 9 S. 448 überein.

2. Legt man bei einem Träger von der Länge $2l$ cm, der mit q kg/cm gleichmäfsig belastet ist und durch drei (gleich hohe und gleich weit [d. h. um je l cm] voneinander entfernte) Stützen getragen wird, die **Mittelstütze tiefer** als die beiden Aufsenstützen, u. zw. um das Mafs (in cm)

$$f = 0{,}0131 \frac{q\,l^4}{EJ},$$

so wird dadurch seine Tragfähigkeit auf das 1,457-fache erhöht.

In diesem Fall erreicht die Tragfähigkeit ihren Gröfstwert, da das Moment über der Mittelstütze gleich ist dem gröfsten Moment in den einzelnen Feldern:

$M_1 = M_{1\,max} = 0{,}0858\,q\,l^2$ $\quad T_0 = 0{,}4142\,q\,l;$ $\quad T_1 = 1{,}1716\,q\,l.$

Ueber die Berechnung durchlaufender Träger mit **veränderlicher Belastung** vrgl. Abt. III, Abschn. Statik der Baukonstruktionen.

E. Drehungsfestigkeit.

Der zu betrachtende Querschnitt des prismatischen Stabes wird durch ein Kräftepaar beansprucht, dessen Ebene winkelrecht zur Stabachse steht. — Es bezeichne

M_d das Moment des drehenden Kräftepaares in cmkg,
$G = 1 : \beta = {}^5/_{13}\,E = 0{,}385\,E$ das Gleitmafs in kg/qcm (s. S. 394),
τ_{max} die gröfste im Querschnitt auftretende Schubspannung in kg/qcm,
k_d die zulässige Drehungsspannung des Stoffes in kg/qcm,
l die Länge des auf Verdrehung beanspruchten Stabes in cm,
V seinen Rauminhalt in ccm,
ϑ den verhältnismäfsigen Verdrehungswinkel zweier um 1 cm voneinander abstehenden Stabquerschnitte unter der Einwirkung von M_d, gemessen in cm als Bogen vom Halbmesser 1 cm.

Der Mittelpunkt (Nullpunkt) der Verdrehungsbogen, d. h. der Querschnittpunkt, der eine Verschiebung durch das Moment M_d nicht erfährt, in dem also die Schubspannung $= 0$ wird, ist der Schwerpunkt des Querschnittes.

a. Zulässiges Drehmoment.

Für eine zulässige Drehungsspannung k_d des Stoffes darf das Drehmoment M_d für die wichtigsten Querschnitte die nachstehenden Werte nicht überschreiten.*) Die Formeln 5—11 sind nur annähernd genau.**)

Werte von k_d (in kg/qcm) s. S. 405.

Nr.	Querschnitt	Zulässiges Drehmoment	Bemerkungen
1	(Kreis, Durchmesser d)	$M_d = \frac{\pi}{16} d^3 k_d$	τ_{max} in den Punkten des Umfanges Im Abstande ρ von der Achse ist $\tau = \frac{2\rho}{d}\tau_{max}$.

*) Abweichende Ergebnisse einer Untersuchung von Autenrieth über Querschnitte mit Mittelpunkt, s. Z. d. V. d. I. 1901 S. 1099.

**) Genauere Untersuchungen, insbesondere über die Spannungsverteilung auf die Querschnitte auf Grund von Versuchen mit Lamellen aus Seifenlösung, s. H. Anthes, Dingl. Journ. 1907 S. 342.

Nr.	Querschnitt	Zulässiges Drehmoment	Bemerkungen
2		$M_d = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D} k_d$ $M_d \sim 1{,}6\, d_m^2\, \delta\, k_d$	τ_{max} in den Punkten des äufseren Umfanges $d_m = \frac{1}{2}(D + d)$ $\delta = \frac{1}{2}(D - d)$
3		$M_d = \frac{\pi}{16} b^2 h k_d$ $(h > b)$	τ_{max} in den Endpunkten der kleinen Achse b In den Endpunkten der grofsen Achse h ist $\tau = \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{b h^2}$
4		$M_d = \frac{\pi}{16} \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b} k_d$ $(h_0 : h = b_0 : b;\ h > b)$	τ_{max} in den Endpunkten der kleinen Achse b In den Endpunkten der grofsen Achse h ist $\tau = \frac{16}{\pi} \frac{M_d h}{b h^3 - b_0 h_0^3}$
5		$M_d = \frac{2}{9} b^2 h k_d$ $(h > b)$	τ_{max} in den Mitten der Seiten h In den Mitten der Seiten b ist $\tau = \frac{9 M_d}{2 b h^2}$ In den Querschnittecken $\tau = 0$
6		$M_d = \frac{2}{9} h^3 k_d$	τ_{max} in den Mitten der Seiten In den Querschnittecken $\tau = 0$
7		$M_d = \frac{2}{9} \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b} k_d$ $(h_0 : h = b_0 : b)$	τ_{max} in den Mitten der Seiten h In den Querschnittecken $\tau = 0$
8		$M_d = \frac{b^3}{20} k_d$	
9		$M_d = \frac{b^3}{1{,}09} k_d$	

Nach Versuchen von C. Bach*) läfst sich die Drehungsfestigkeit des **dreieckigen** und **trapezförmigen** Querschnittes auf den Rechteckquerschnitt von derselben Höhe zurückführen. Die in die Gleichung unter 5 einzuführende Breite b erhält man dabei, indem man von dem Schwerpunkt S des Trapezes oder Dreiecks Winkelrechte SE, SF auf die Seiten fällt und durch die Fufspunkte EF Parallelen zur Achse zieht. Diese sind die Seiten des Ersatzrechteckes.



*) S. Z. d. V. d. I. 1906 S. 481.

Nr.	Querschnitt	Zulässiges Drehmoment	Bemerkungen
10	[I- und ⊏-Querschnitt mit h, s, b, $\frac{b_0}{2}$, b_0, h_0]	$M_d = \frac{2}{9} s^2 (h + 2 b_0) k_d$	Für den ⊏-Querschnitt ist vorausgesetzt $s \geqq 0{,}2\, h$ und b_0 nicht erheblich gröfser als s.
11	[Kreuz- und L-Querschnitt mit h, s, b]	$M_d = \frac{2}{9} s^2 (h + b - s) k_d$	Für den L-Querschnitt ist vorausgesetzt $s \geqq 0{,}2\, h$.

Der Faktor von k_d in den vorstehenden Gleichungen für M_d heifst das **Widerstandsmoment gegen Drehung** und wird mit W_d bezeichnet. Für kreisförmige und kreisähnliche Querschnitte ist (ähnlich, wie für Biegungsfestigkeit, vrgl. S. 424):

$$W_d = \frac{J_p}{e},$$

worin $J_p = J_x + J_y$ das polare Trägheitsmoment des Querschnittes (vrgl. S. 215 u. f.) und e den Abstand des am weitesten von der Längs-Schwerachse (Nullachse) des Stabes entfernten Querschnittpunktes bezeichnet.

Für eckige Querschnittformen ist dieser Satz nicht zutreffend.

b. Verdrehungswinkel.

Der verhältnismäfsige Verdrehungswinkel, d. h. der zum Halbmesser 1 cm gehörige Verdrehungsbogen zweier 1 cm voneinander abstehenden Querschnitte, ist

$$\vartheta = \zeta \frac{J_x + J_y}{4\, J_x J_y} \frac{M_d}{G} = \zeta \frac{J_p}{4\, J_x J_y} \frac{M_d}{G}.$$

Der Wert ζ hierin ist nach F. Grashof:

$\zeta = 1$ für kreisförmige und kreisringförmige Querschnitte,
$\zeta = 1{,}2$ für quadratische und elliptische Querschnitte,
$\zeta = 1{,}2$ bis $1{,}5$ für mehr längliche, rechteckige Querschnitte.

Der Verdrehungswinkel ψ für die ganze Stablänge l (Verdrehung der Endquerschnitte gegeneinander) beträgt

$$\psi = l\, \vartheta.$$

Nach Versuchen von C. Bach hat ϑ für die wichtigsten Querschnitte die nachstehenden Werte. Diese Werte entsprechen (abweichend von Grashof) für elliptische Querschnitte $\zeta = 1$ und für alle rechteckigen Querschnitte $\zeta = 1{,}2$.

Nr.	Querschnitt	Verhältnismäfsiger Verdrehungswinkel ϑ, wenn bekannt ist: Drehmoment M_d in cmkg	Gröfste Schubspannung τ_{max} in kg/qcm	Arbeit A der Drehung in cmkg
1	Kreis, d	$\vartheta = \frac{M_d}{G J_p} = \frac{32}{\pi d^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 2 \frac{\tau_{max}}{G} \frac{1}{d}$	$\frac{1}{4} \frac{\tau^2_{max}}{G} V$
2	Kreisring, d, D	$\vartheta = \frac{32}{\pi (D^4 - d^4)} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 2 \frac{\tau_{max}}{G} \frac{1}{D}$	$\frac{1}{4} \frac{\tau^2_{max}}{G} \frac{D^2 + d^2}{D^2} V$
3	Ellipse, h, b	$\vartheta = \frac{16}{\pi} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = \frac{\tau_{max}}{G} \frac{b^2 + h^2}{b h^2}$	$\frac{1}{8} \frac{\tau^2_{max}}{G} \frac{b^2 + h^2}{h^2} V$
4	Rechteck, h, b	$\vartheta = 3{,}6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M_d}{G}$ *)	$\vartheta = 0{,}8 \frac{\tau_{max}}{G} \frac{b^2 + h^2}{b h^2}$ *)	$\frac{4}{45} \frac{\tau^2_{max}}{G} \frac{b^2 + h^2}{h^2} V$
5	Quadrat, h, h	$\vartheta = 7{,}2 \frac{1}{h^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 1{,}6 \frac{\tau_{max}}{G} \frac{1}{h}$	$\frac{8}{45} \frac{\tau^2_{max}}{G} V$
6	Dreieck, b, b, b	$\vartheta = 46{,}2 \frac{1}{b^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 2{,}31 \frac{\tau_{max}}{G} \frac{1}{b}$	.
7	Sechseck, b	$\vartheta = 0{,}967 \frac{1}{b^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 0{,}9 \frac{\tau_{max}}{G} \frac{1}{b}$	.

Nach de Saint Venant**) ist näherungsweise, und zwar auch für stark vom Rechteck und Kreise abweichende Querschnitte wie z. B. I-Profile:

$$\vartheta = 40 \frac{J_p}{F} \frac{M_d}{G},$$

worin F den Querschnitt in qcm bedeutet. (Der genaue Wert der Konstanten schwankt je nach der Querschnittform nur zwischen 38,5 und 42,68.)

*) Statt des Koeffizienten 3,6 ist genauer für $h : b = 1, 2, 4, 8$ zu setzen 3,56, 3,50, 3,35, 3,21; statt des Koeffizienten 0,8 entsprechend 0,79, 0,78, 0,74, 0,71.

**) S. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1879.

F. Zusammengesetzte Festigkeit.

Im folgenden bedeutet

- l die Länge des Stabes in cm,
- F den Querschnitt des Stabes in qcm,
- S den Schwerpunkt des Stabquerschnittes,
- J_{I} das gröfste äquatoriale Trägheitsmoment von F in cm^4,
- J_{II} das kleinste „ „ „ „ „ „
- P die den Stab auf Zug oder Druck beanspruchende Kraft (Achsialkraft) in kg,
- Q die den Stab auf Abscheren beanspruchende Kraft (Querkraft) in kg,
- M das Biegungsmoment in cmkg,
- E das Elastizitätsmafs in kg/qcm (s. S. 391),
- m ($= 10/3$) das Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung (vrgl. S. 390).

a. Beanspruchung durch Normalspannungen.

Zug (oder Druck) und Biegung.

I. Der Baustoff ist gegen Zug und gegen Druck widerstandsfähig.

Das Biegungsmoment M und die Achsialkraft P lassen sich auf eine Kraft P zurückführen, die in einem Punkte A der Kraftlinie (im Abstande $p = M : P$ vom Schwerpunkte) angreift, so dafs $M = Pp$.

1. Bestimmung der Nullinie für den Angriffpunkt A.

1) **Nach Mohr,** mit Benutzung der Haupt-Trägheitshalbmesser a und b: Auf den Hauptachsen des Querschnittes SI mit J_{I} und SII mit J_{II} (Abb. 40) trage man die Strecken $SC = b$ und $SB = a$ ab, verbinde C mit dem Fufspunkte V des von A auf SII, B mit dem

Abb. 40.

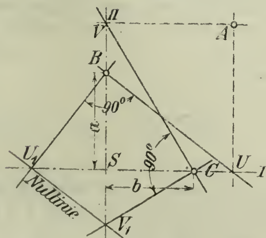
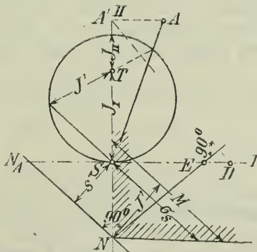


Abb. 41.

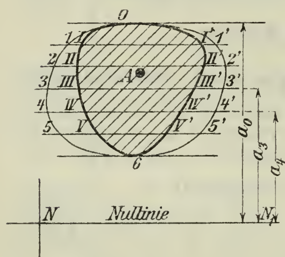


Fufspunkte U des von A auf SI gefällten Lotes, errichte in B eine Winkelrechte auf BU, in C eine Winkelrechte auf CV, so schneiden diese die Achsen SI und SII in zwei Punkten U_1 und V_1 der Nullinie.

2) **Nach R. Land***), mit Benutzung des Trägheitskreises, Abb 41. Die Nullinie ist parallel zu der durch den Schwerpunkt S gehenden, der Kraftlinie SA zugeordneten Achse SA'' und hat von dieser den Abstand $s = J' : Fp$. Die Lage der Nullinie wird zweckmäfsig durch ihren Schnitt N mit einer Hauptachse bestimmt. Man zeichne den Trägheitskreis so, dafs er eine durch S gehende Hauptachse berührt, z. B. die Achse SI, wobei der Trägheitshauptpunkt T auf der anderen Hauptachse SII liegt. Trage auf SI die festen Strecken $SE = J_1 : n$ und $SD = n : F$ ab, beide im Zeichnungsmafsstabe des Querschnittes, wobei n eine passend gewählte Gröfse dritter Ordnung (z. B. $n = 100$ cm³). Ziehe AA' parallel SI, EN winkelrecht zu DA', dann ist die Nullinie NN_A parallel SA''. — Dieses Verfahren ist besonders zweckmäfsig bei der nachstehenden Spannungsermittlung unter **2.**

3) Die Umkehrung der unter 1) und 2) gegebenen Verfahren liefert zu einer gegebenen Nullinie den entsprechenden Angriffpunkt A.

Abb. 42.



Häufig genügt auch die Bestimmung mittels der sog. **wirksamen Fläche.** Diese Fläche erhält man, wenn die parallel zur Nullinie genommenen Schnittlängen des Querschnittes auf diesen Parallelen im Verhältnis ihres Abstandes von der Nullinie verkleinert aufgetragen und die Endpunkte verbunden werden; die am weitesten von der Nullinie entfernte Schnittlänge bleibt dabei unverändert.

So ergibt sich für den Querschnitt 0 1 2 3 4 5 6 5'...0 in Abb. 42 die wirksame Fläche 0 III 6 III' 0 (gestrichelt), wenn man z. B. III III' $= \frac{a_3}{a_0} \cdot (3\,3')$, IV IV' $= \frac{a_4}{a_0} \cdot (4\,4')$ macht usw.

Der Schwerpunkt A der wirksamen Fläche (beispielsweise zeichnerisch zu ermitteln) ist dann der zur Nullinie NN_1 gehörige Angriffpunkt.

2. Spannungsermittlung. Die Spannung σ_s im Schwerpunkte ist unabhängig von der Lage des Angriffpunktes (also auch von der Größe des Momentes $M = Pp$), es ist $\sigma_s = P : F$, mit dem Sinne von P (d. h. Druckspannung, wenn P eine Druckkraft), also σ_s gleich der mittleren Spannung des Querschnittes.

Die Spannungen ergeben sich zu

$\sigma = \frac{M}{J'} y$, worin, wie früher (s. S. 424) und nach Abb. 41, $J' = J : \sin \delta = TA''$ und y den Abstand eines Querschnittpunktes von der vorher gezeichneten Nullinie NN_A bedeutet. Die **zeichnerische Spannungsverteilung** kann daher ähnlich wie nach Abb. 20 (S. 428) geschehen, wobei der Nullpunkt der Spannungsfläche auf der neuen Nullinie liegen muß. Die **Grenzspannung** σ_{max} kann aus der zeich-

*) Vrgl. R. Land: Die Ermittlung der Spannungsverteilung usw., Z. f. B. 1892 S. 552 u. f. (Sonderdruck zu beziehen durch Wilh. Ernst & Sohn, Berlin.)

nerischen Spannungsverteilung abgegriffen werden, oder sie berechnet sich zu

$$\sigma_{max} = \frac{M}{J'} e, \quad \text{worin } e = y_{max}.$$

Ohne Zeichnung der Nullinie ergeben sich (mittels des Trägheitskreises) die Grenzspannungen σ_{max} und σ_{min} wie folgt:

Zeichne die der Kraftlinie SA zugeordnete Schwerachse SA'', Abb. 41 (oder SN in Abb. 20, S. 429), d. i. die Nullinie bei Beanspruchung durch das Moment Pp allein, und nenne die beiderseits von SA'' gemessenen größten Abstände eines Randpunktes von F nach der Seite von A (P) hin e_1 mit Vorzeichen von P (bei Zugkraft $+$, sonst $-$), nach der anderen Seite hin e_2 mit anderem Vorzeichen, dann ist

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max} \\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\sigma_s + \sigma_1 = \dfrac{P}{F} + \dfrac{M}{J'} e_1 \quad \text{und} \\ \sigma_s + \sigma_2 = \dfrac{P}{F} + \dfrac{M}{J'} e_2,\end{matrix}\right.$$

wo σ_{max} der größere und σ_{min} der kleinere der beiden ermittelten Werte ist.

Bestimmung der Grenzspannungen σ_{max} und σ_{min} mit Hilfe der Kernpunkte s. unter **5.** S. 479.

3. Beziehungen zwischen Angriffpunkt und Nullinie. Wandert der Angriffpunkt der Kraft P auf einer Geraden AA_1, so drehen sich die zugehörigen Nullinien um einen Punkt N, der der Angriffpunkt für die als Nullinie betrachtete Gerade AA_1 ist, und umgekehrt. Man nennt Angriffpunkt und zugehörige Nullinie einander zugeordnet.

4. Der Kern des Querschnittes*) ist die Fläche, innerhalb deren der Angriffpunkt A der Kraft liegen muß, wenn der Querschnitt F ausschließlich Spannungen einerlei Vorzeichen erfahren soll. Liegt A außerhalb des Kernes, so entstehen sowohl Zug- als Druckspannungen; liegt A auf der **Kerngrenze**, so ergeben sich Randspannungen bis zum Werte null, ohne daß sie das Vorzeichen wechseln. Die Kerngrenze ist daher die Linie, die der Angriffpunkt A beschreibt, wenn die Nullinie alle möglichen den Querschnitt berührenden Lagen annimmt, oder, entsprechend **3.**: Beschreibt der Angriffpunkt A die Umhüllungslinie (nicht zu verwechseln mit der Umrißlinie) des Querschnittes, so umhüllen die zugehörigen Nullinien den Kern; jeder Ecke E der Umhüllungslinie entspricht also eine gerade Grenzlinie e des Kernes, u. zw. ist die Richtung von e zugeordnet der Richtung des Polstrahles vom Schwerpunkte S nach der Ecke E. Umgekehrt entspricht jeder Geraden H der Querschnittumhüllung eine Ecke h des Kernes, u. zw. haben H und Sh zugeordnete Richtungen.

Die **Kernpunkte** für eine Kraftlinie sind die Schnittpunkte der Kerngrenze mit der Kraftlinie. Der Abstand r (in cm) jedes Kern-

*) Theorie des Kernes auf Grund des allgemeinen Spannungsgesetzes $\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$ s. Engesser, Z. d. V. d. I. 1898 S. 903.

punktes vom Schwerpunkte S heißt die **Kernweite** (Widerstandshalbmesser); es ist allgemein

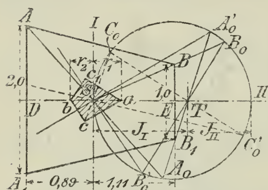
$$r = \frac{W'}{F} = \frac{W}{F \sin \delta},$$

wo W, W', δ und F die Bedeutung von S. 429 und 475 haben.

Der Kern ist hiernach polar-ähnlich der W'-Fläche (s. S. 429) mit S als Pol und dem Aehnlichkeitsverhältnis $1 : F$.

Für eine Hauptachse des Querschnittes als Kraftlinie ist die Kernweite $r = W : F$.

Abb. 43.



Die **Zeichnung des Kernes** erfolgt nach einem der beiden Verfahren unter **1.** oder mit Hilfe der „wirksamen Fläche" (S. 476); am einfachsten berechnet man r für die Kernpunkte einer Hauptachse, konstruiert mittels der bekannten Hauptträgheitsmomente J_{I}, J_{II} den Trägheitskreis (vrgl. S. 218) und hiermit die den Ecken der Querschnittumhüllung zugeordneten Richtungen der Kernseiten. Abb. 43 zeigt z. B. die Ermittlung des Kernes für ein **Trapez.**

Abb. 43: $F = 3$ qcm, $J_I = 0{,}963$ cm⁴, $J_{II} = 0{,}629$ cm⁴, $W_1 = 0{,}963 : 0{,}89 = 1{,}08$ cm³, $W_2 = 0{,}963 : 1{,}11 = 0{,}87$ cm³, $r_1 = 1{,}08 : 3{,}0 = 0{,}36$ cm, $r_2 = 0{,}87 : 3{,}0 = 0{,}29$ cm. Richtung von ac (parallel $A_0' S$) zugeordnet AS, von bc (parallel $S B_0$) zugeordnet BS Probe: Richtung Sc muß zugeordnet sein der Richtung AB ($S C_0'$ parallel AB).

Näherungsweise ist $Sb = \frac{1}{3} SD$, $Sa = \frac{1}{3} SE$.

Kern und geringste Kernweite $r_{\min}$ einiger Querschnitte.

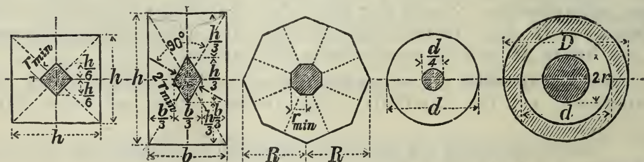
Quadrat (Abb. 44). $r_{\min} = \frac{h}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}1179\, h.$

Diagonalen des Kernes $= \frac{1}{3} h$.

Rechteck (Abb. 45). $r_{\min} = \frac{bh}{6\sqrt{b^2 + h^2}}$.

Diagonalen des Kernes $= \frac{1}{3} h$ und $\frac{1}{3} b$.

Abb. 44. Abb. 45. Abb. 46. Abb. 47. Abb. 48.

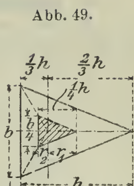


Dreieck, gleichschenkliges (Abb. 49).

$r_1 = {}^1\!/_6 h, \qquad r_2 = {}^1\!/_{12} h.$

Kern ein ähnliches Dreieck, Grundlinie $= {}^1\!/_4 b$, Höhe $= {}^1\!/_4 h$.

Abb. 49.



Achteck (Abb. 46). $r_{\min} = 0{,}2256\,R$.

Kreis (Abb. 47). $r = {}^1\!/_8\, d =$ konst.

Hohles Quadrat (äußere Seite $= H$, innere Seite $= h$). Kern ein Quadrat, ähnlich wie in Abb. 44.

$$r_{\min} = \frac{H}{6}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(\frac{h}{H}\right)^2\right] = 0{,}1179\,H\left[1+\left(\frac{h}{H}\right)^2\right].$$

Hohles Achteck [Halbmesser der beiden umliegenden Kreise $= R_a$ und R_i, Wandstärke $= 0{,}9239\,(R_a - R_i)$].

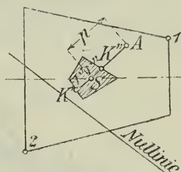
Kern ein Achteck, ähnlich wie in Abb. 46.

$$r_{\min} = 0{,}2256\,R_a\left[1+\left(\frac{R_i}{R_a}\right)^2\right].$$

Kreisring (Abb. 48). $r = \frac{D}{8}\left[1+\left(\frac{d}{D}\right)^2\right] =$ konst.

5. Bestimmung der Grenzspannungen mittels der Kernpunkte. Sind die Kernpunkte K', K'' für eine gegebene Kraftlinie AS (Abb. 50) bekannt, so bestimmen sich die Grenzspannungen $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ des Querschnittes (vrgl. S. 476) wie folgt.

Abb. 50.



Bezeichnen $M' = P \cdot \overline{AK'}$ und $M'' = P \cdot \overline{AK''}$ die Momente der Kraft P (in A), bezogen auf die Kernpunkte, W' und W'' die Widerstandsgrößen für die der Kraftlinie zugeordnete Nullinie (vrgl. S. 429), so ist

$\sigma_{\max}$ und $\sigma_{\min} = M' : W'$ und $M'' : W''$.

Bei symmetrischen Querschnitten ist stets

$$\sigma_{\max} = M' : W', \quad \sigma_{\min} = M'' : W''.$$

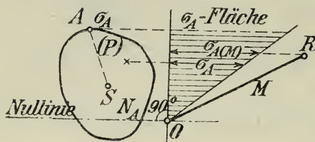
Für W' und W'' darf nach **4.** gesetzt werden Fr' bzw. Fr'', wenn r' und r'' die Kernweiten auf der Kraftlinie bezeichnen; da ferner $AK' = p + r'$, $AK' = p - r''$, so erhält man auch

$$\sigma_{\max} = \left(1+\frac{p}{r'}\right)\frac{P}{F}, \qquad \sigma_{\min} = \left(-1+\frac{p}{r''}\right)\frac{P}{F}.$$

Die Vorzeichen von σ sind mit Hilfe der Nullinie zu bestimmen: In Abb. 50 ist z. B. für eine Druckkraft P $\sigma_{\max}$ (in 1) Druck, $\sigma_{\min}$ (in 2) Zug, da 1 auf der nämlichen Seite, 2 auf der entgegengesetzten Seite der Nullinie liegt wie A.

6. Gegenseitigkeit der Spannungen, nach R. Land.*) Sind A und B zwei beliebige Querschnittpunkte, so erzeugt eine Kraft P in A eine Spannung in B, die gleich ist der Spannung in A, erzeugt von P in B. (Hieraus folgen die Beziehungen unter **3.**)

Abb. 51.



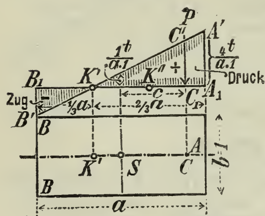
7. Einflufsfläche einer Spannung.*) Trägt man für einen beliebigen Spannungszustand die Spannungen σ in ihren Angriffpunkten als Längen winkelrecht zum Querschnitt auf, so bilden ihre Endpunkte eine Ebene, die sogen. **Spannungsfläche**, die durch seitliche Projektion dargestellt werden kann (Abb. 51).

Trägt man anderseits die veränderlichen Werte σ_A eines festen Punktes A bei wandernder Kraft $P = 1$ t in deren Angriffpunkten auf, so entsteht die **Einflufsfläche** für σ_A, oder kurz die σ_A-Fläche. Aus **6.** folgt hiernach:

Die Einflufsfläche der Spannung σ_A ist gleich der Spannungsfläche für die feste Kraft $P = 1$ t in A. Diese Spannungsfläche kann nach Abb. 41, S. 475, gezeichnet werden, wobei $M = 1 \text{ t} \cdot SA$ ist.

Wirkung eines Momentes M cmt $= (M$ cm$) \cdot (1$ t$)$. Trägt man vom Nullpunkte O der σ_A-Fläche aus OR gleich und parallel M cm ab (Abb. 46), so gibt die zu R gehörige Ordinate die Spannung $\sigma_{A(M)}$, erzeugt durch das Moment M. Man kann hiernach für die blofse Wirkung von Momenten die σ_A-Fläche parallel mit sich verschieben, so dafs der Nullpunkt O auf S fällt, wobei die Spannungsfläche die Lage von Abb. 20, S. 429, erhält.

Abb. 52.



8. Rechteck. Die Einflufsfläche einer Randspannung σ_A für Rechtecke von der Länge a, der Breite $b = 1$ m kann vorteilhaft bei Mauer- und Gewölbequerschnitten benutzt werden (Abb. 52). Krafteinheit sei 1 t. Die gerade Grenzlinie $A'K'B'$ der σ_A-Fläche, bezogen auf A_1B_1, geht durch den zu A gehörigen Kernpunkt K' ($K'A_1 = {}^2/_3\, a$) und schneidet bei S die Ordinate $\sigma_s = 1$ t: $a \cdot 1$ und bei dem Randpunkte A die Ordinate 4 t: $a \cdot 1$ ab, die nach einem σ-Mafsstabe aufzutragen sind.

Eine in dem beliebigen Punkte C angreifende Kraft P (in t) erzeugt alsdann eine Randspannung in A:

$$\sigma_A = + P \cdot \overline{C_1 C'}.$$

Eine $+$-Spannung in A entsteht nur, solange P auf der Strecke $AK' = {}^2/_3\, a$ angreift.

*) S. Z. f. B. 1892 S. 564.

Rechnerisch ergibt sich für die Randspannungen (gröfsten Kantenpressungen):

$$\sigma_A = \frac{6\,M_k'}{a^2} \quad \text{und} \quad \sigma_B = \frac{6\,M_k''}{a^2},$$

worin M_k' und M_k'' die Momente von P, bezogen auf die Kernpunkte K' und K'' sind. Greift die Kraft P in C an (auf AS, Abb. 52), und setzt man die Exzentrizität (Abweichung vom Schwerpunkte) $SC = c$, so ist auch

$$\left.\begin{matrix}\sigma_A\\ \sigma_B\end{matrix}\right\} = \sigma\frac{\max}{\min} = \frac{P}{a^2}(a \pm 6c) = \frac{P}{a}\left(1 \pm \frac{6c}{a}\right).$$

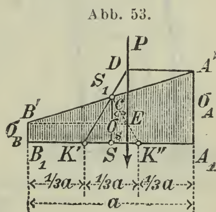
Soll der Querschnitt **nur** Druckspannungen erhalten, so mufs $6c : a < 1$, also $c < {}^1/_6\,a$ sein, d. h. die **Kraft** P **mufs im mittleren Drittel** $K'K''$ **der Querschnittlänge angreifen.**

Da beim Rechteckquerschnitte ab

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_s} = 1 + \frac{6c}{a} = \left(\frac{a}{6} + c\right) : \frac{a}{6},$$

so ergibt sich folgendes einfache **zeichnerische Verfahren** zur Ermittlung der **Randspannungen** (Abb. 53):

Abb. 53.



Man trägt im Schwerpunkte S die mittlere Spannung $\sigma_s = P : a = SS_1$ winkelrecht zu A_1B_1 auf, zieht $K'S_1$ bis zum Schnitte D mit der Richtung der angreifenden Kraft P, dann DA' parallel B_1A_1 und die Schlufslinie $A'S_1B'$, so sind die Ordinaten der Spannungslinie $A'B'$ (gestrichelte Fläche $A'S_1B'B_1A_1$) die durch P erzeugten Querschnittspannungen; A_1A' und B_1B' sind die Randspannungen.

Auch findet man B' mittels der durch den Schnittpunkt E von SK'' mit P gelegten Parallelen EB' zu A_1B_1. — Das vorstehende Verfahren gilt entsprechend für eine **aufserhalb** des Kernpunkt-Abstandes $K'K''$ auf der Mittellinie angreifende Kraft.

9. Bei **langen Stäben,** die eine merkliche Ausbiegung durch die lotrechte Kraft P erfahren (Abb. 54 und 55, S. 482), ergibt sich

Benennung	**bei exzentr. Zuge** (Abb. 54)	**bei exzentr. Drucke** (Abb. 55)
Gleichung der elastischen Linie	$y = \frac{p}{\operatorname{Cof}\omega l}(\operatorname{Cof}\omega x - 1)$	$y = \frac{p}{\cos\omega l}(1 - \cos\omega x)$
Gröfste Ausbiegung	$f = p\left(1 - \frac{1}{\operatorname{Cof}\omega l}\right)$	$f = p\left(\frac{1}{\cos\omega l} - 1\right)$
Biegungsmoment	$M_x = Pp\,\frac{\operatorname{Cof}\omega x}{\operatorname{Cof}\omega l}$ Für $x = l$ ist $M_{\max} = Pp$	$M_x = Pp\,\frac{\cos\omega x}{\cos\omega l}$ Für $x = 0$ ist $M_{\max} = \frac{Pp}{\cos\omega l}$
Gröfste Spannungen	$\sigma\frac{\max}{\min} = \sigma_s\left(1 \pm \frac{pF}{W}\right)$	$\sigma\frac{\max}{\min} = \sigma_s\left(1 \mp \frac{pF}{W\cos\omega l}\right)$

Abb. 54. Abb. 55.

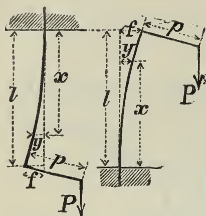
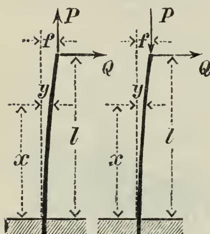


Abb. 56. Abb. 57.



Die Bedeutung der Hyperbelfunktion $\mathfrak{Cof}$ s. S. 65. Die Gröfse ω hat den Wert

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{EJ}},$$

worin E das Elastizitätsmafs in kg/qcm und J (in cm^4) das Trägheitsmoment des Querschnittes F, bezogen auf die winkelrecht zur Biegungsebene stehende Schwerlinie von F. W ist das zu J gehörige Widerstandsmoment in cm^3.

Näherungsformeln ergeben sich, wenn man in den vorstehenden Formeln setzt

$$\mathfrak{Cof}\ \omega\, l = 1 + \frac{Pl^2}{2EJ}$$

und

$$\cos \omega\, l = 1 - \frac{Pl^2}{2EJ}.$$

10. Statt der exzentrisch angreifenden Kraft P (unter **9.** seien eine exzentrisch angreifende Achsialkraft P und eine am Stabende wirkende Querkraft Q vorhanden (Abb. 56 und 57). Bedeutung der Hyperbelfunktionen $\mathfrak{Sin}$, $\mathfrak{Cof}$ und $\mathfrak{Tg}$ s. S. 65. Gröfse ω wie vorstehend unter **9.**

Benennung	**Zugkraft** P (Abb. 56)	**Druckkraft** P (Abb. 57)
Gleichung der elastischen Linie	$y = \frac{Q}{P}\left(x - \frac{1}{\omega}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\omega l - \mathfrak{Sin}\,\omega(l-x)}{\mathfrak{Cof}\,\omega l}\right)$	$y = \frac{Q}{P}\left(-x + \frac{1}{\omega}\,\frac{\sin\omega l - \sin\omega(l-x)}{\cos\omega l}\right)$
Gröfste Ausbiegung	$f = \frac{Q}{P}\left(l - \frac{\mathfrak{Tg}\,\omega l}{\omega}\right)$	$f = \frac{Q}{P}\left(\frac{\operatorname{tg}\omega l}{\omega} - l\right)$
Biegungs-moment	$M_x = \frac{Q}{\omega}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\omega(l-x)}{\mathfrak{Cof}\,\omega l}$ Für $x = 0$ ist $M_{\max} = \frac{Q}{\omega}\,\mathfrak{Tg}\,\omega l$	$M_x = \frac{Q}{\omega}\,\frac{\sin\omega(l-x)}{\cos\omega l}$ Für $x = 0$ ist $M_{\max} = \frac{Q}{\omega}\operatorname{tg}\omega l$
Gröfste Spannungen	$\sigma\frac{\max}{\min} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}$	$\sigma\frac{\max}{\min} = -\frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}$

11. Stab mit gelenkigen Enden auf zwei Stützen, in der Mitte durch die Einzellast $2Q$ belastet und aufserdem durch die Achsialkraft $\pm P$ beansprucht (Abb. 58 und 59). Hierfür gelten ohne weiteres die Formeln unter **10.**

Abb. 58.

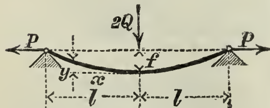
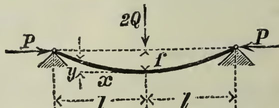


Abb. 59.



12. Stab mit gelenkigen Enden auf zwei Stützen, durch die auf die Länge $2l$ gleichmäfsig verteilte Kraft $2Q$ belastet und aufserdem durch die Achsialkraft $\pm P$ beansprucht. Bezeichnungen im übrigen wie in Abb. 58 und 59.

Benennung	**Zugkraft P** (Abb. 58, jedoch $2Q$ gleichmäfsig verteilt.)	**Druckkraft P** Abb. 59, jedoch $2Q$ gleichmäfsig verteilt.
Gleichung der elastischen Linie	$y = \frac{Q}{P}\left(\frac{x^2}{2l} - \frac{1}{l\omega^2}\frac{\mathfrak{Cos}\,\omega x - 1}{\mathfrak{Cos}\,\omega l}\right)$	$y = \frac{Q}{P}\left(-\frac{x^2}{2l} + \frac{1}{l\omega^2}\frac{1 - \cos\omega x}{\cos\omega l}\right)$
Gröfste Ausbiegung	$f = \frac{Q}{P}\left[\frac{l}{2} - \frac{1}{l\omega^2}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\omega l}\right)\right]$	$f = \frac{Q}{P}\left[-\frac{l}{2} + \frac{1}{l\omega^2}\left(\frac{1}{\cos\omega l} - 1\right)\right]$
Biegungsmoment	$M_x = \frac{Q}{l\omega^2}\left(1 - \frac{\mathfrak{Cos}\,\omega x}{\mathfrak{Cos}\,\omega l}\right)$ Für $x = 0$ ist $M_{\max} = \frac{Q}{l\omega^2}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\omega l}\right)$	$M_x = \frac{Q}{l\omega^2}\left(\frac{\cos\omega x}{\cos\omega l} - 1\right)$ Für $x = 0$ ist $M_{\max} = \frac{Q}{l\omega^2}\left(\frac{1}{\cos\omega l} - 1\right)$
Gröfste Spannungen	$\sigma\frac{\max}{\min} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}$	$\sigma\frac{\max}{\min} = -\frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}$

Bemerkung. Der Wert $M_{\max} = \frac{Q}{l\omega^2}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\omega l}\right)$ nähert sich bei längeren Stäben sehr schnell dem Grenzwerte $M_0 = \frac{Q}{l\omega^2}$, entsprechend einer gröfsten Biegungsspannung $\sigma_{\max} = \frac{M_0}{W} = \frac{Q}{l}\frac{E}{P}\frac{J}{W} = q\frac{E}{P}e$, wenn q die Belastung für 1 cm Stablänge und e den Abstand der am stärksten gezogenen Faser von der Nullinie bedeutet.

Der Grenzwert $\sigma_{\max}$ ist die Biegungsspannung, die der Stab erleiden würde, wenn er — ohne jede Steifigkeit — nach der parabolischen Kettenlinie frei durchhängen könnte. Diese Grenzspannung ist unabhängig von der Stützweite $2l$.*)

II. Der Baustoff ist nur gegen Druck (nicht gegen Zug) widerstandsfähig.

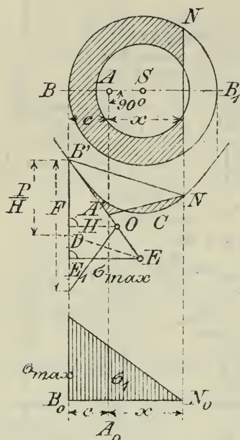
Diese ungünstige Annahme wird der Sicherheit wegen bei gewöhnlichem Mauerwerk gemacht, bei dem keine Zugübertragung durch den Mörtel, sondern ein Klaffen der Fugen zu erwarten ist und das durch wagerechte Kräfte (Winddruck, Erddruck usw.) beansprucht wird. [Bei bestem Klinkermauerwerk in Zementmörtel mit $k = 14$ bis 20 kg/qcm erscheint eine Zugbeanspruchung k_z bis 2,5 kg/qcm mitunter noch zulässig.] Man setzt hierbei voraus, dafs, sofern die Druckkraft P aufserhalb des Kernes des Querschnittes angreift, der gedrückte Teil des Querschnittes (der wirksame Querschnitt) von dem vollständig unwirksamen Teile durch eine gerade Nulllinie getrennt ist und die Druckspannungen im Verhältnis der Entfernungen von dieser Nullinie wachsen.

Der Spannungskörper bildet einen Keil (s. Abb. 60), dessen Kante N_0 die Nullinie und dessen Höhe die gröfste Randspannung $\sigma_{\max}$ ist. N_0 und $\sigma_{\max}$ sind so zu bestimmen, dafs der Inhalt des

*) S. Z. d. V. d. I. 1897 S. 855 u. f.

Spannungskeiles $= P$ ist und dafs seine lotrechte Schwerlinie mit P zusammenfällt.

Abb. 60.



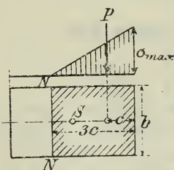
Bezeichnet S_1 das statische Moment und J_1 das Trägheitsmoment des wirksamen Querschnitteiles F_1, bezogen auf die Nullinie NN, so ergibt sich der Abstand des Angriffpunktes A von der Nullinie

$$x = J_1 : S_1$$

und die Länge des wirksamen Querschnitteiles $= c + J_1 : S_1$, wenn c den Abstand des Punktes A von der nächsten Querschnittkante B bedeutet.

Beliebiger Querschnitt. Der Angriffpunkt A der Druckkraft P liege auf einer Hauptachse BSB_1 des Querschnittes (Abb. 60). Nach dem **Verfahren von Mohr***) zeichne man die zum gegebenen (Gesamt-) Querschnitte F als Belastungsfläche gehörige Seillinie für eine Kraftrichtung winkelrecht zu BB_1 mit der (beliebigen) Polweite H, ziehe AA' winkelrecht zu BB_1 bis zum Schnitte A' mit der Endtangentean B' und die Gerade $A'N$ derart, dafs das Dreieck $B'NA'$ gleich ist der Fläche $B'NC$ (zwischen Seillinie und $B'N$), oder dafs die beiden gestrichelten Flächen einander gleich sind. Dann ist die Gerade durch N, winkelrecht zu BB_1, die gesuchte Nullinie. Macht man nun

Abb. 61.



$$B'D = P : H = \text{Kraft} : \text{Fläche}$$

(H im Mafsstabe von F für den Kräfteplan zu messen), DE parallel $B'N$, so ist die Randspannung in B $\sigma_{max} = EE_1$ (winkelrecht zu $B'D$), u. zw. ist EE_1 zu messen wie $P : H$. $\sigma_1 = P : F_1$ ist die mittlere Spannung des wirksamen Querschnitteiles.

Rechteck (Abb. 61). Greift P auf einer Hauptachse im Abstande c von der nächsten Kante an, so verteilt sich der Druck auf die Länge $3c$ (Nullinie $= NN$), und an der Kante ist

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3bc}.$$

Hohlquadrat. S. Preufs, Z. f. Arch.- u. Ing.-W. 1903 S. 425.

Kreis. Nach P. Neumann**) ist angenähert

$$\sigma_{max} = \left(0{,}372 + 0{,}056\,\frac{c}{r}\right)\frac{P}{c\sqrt{rc}},$$

*) O. Mohr, Abhandl. a. d. Gebiete d. techn. Mechanik, 1906 S. 262, Wilhelm Ernst u. Sohn.

**) S. Z. d. B. 1901 S. 371.

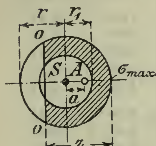
worin r den Halbmesser des Kreises und c den kleinsten Abstand des Kraftpunktes vom Kreisumfange bedeutet.

Ferner ergibt sich nach Keck angenähert der Abstand der Nulllinie vom Umfangspunkte (B) aus

$$\frac{c+x}{c} = 2{,}33 + 0{,}58 \left(\frac{c}{r}\right)^2 .$$

Kreisring. (Abb. 62.) Ist r der äufsere, r_1 der innere Halbmesser, σ die mittlere Druckspannung, die die Querschnittfläche $\pi\,(r^2 - r_1^2)$ durch die Druckkraft P erfahren würde, a die Abweichung der Druckkraft vom Mittelpunkte (Exzentrizität), z der Abstand der Nullinie vom entferntesten Randpunkte, σ_{max} die Pressung in letzterem, so ergeben für verschiedene Verhältnisse $a:r$ und $r_1:r$ die beiden folgenden Tafeln*) die Lage der Nullinie (Werte $z:r$) und die gröfste Randpressung (Werte $\sigma_{max}:\sigma$).

Abb. 62.



1. Werte $z:r$ (Lage der Nullinie).

$\frac{a}{r}$	$\frac{r_1}{r}$ = 0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	$\frac{a}{r}$
0,25	2,00	.	.	.	.	.	.	0,25
0,30	1,82	.	.	.	.	.	.	0,30
0,35	1,66	1,89	1,98	.	.	.	.	0,35
0,40	1,51	1,75	1,84	1,93	.	.	.	0,40
0,45	1,37	1,61	1,71	1,81	1,90	.	.	0,45
0,50	1,23	1,46	1,56	1,66	1,78	1,89	2,00	0,50
0,55	1,10	1,29	1,39	1,50	1,62	1,74	1,87	0,55
0,60	0,97	1,12	1,21	1,32	1,45	1,58	1,71	0,60
0,65	0,84	0,94	1,02	1,13	1,25	1,40	1,54	0,65
0,70	0,72	0,75	0,82	0,93	1,05	1,20	1,35	0,70
0,75	0,59	0,60	0,64	0,72	0,85	0,99	1,15	0,75
0,80	0,47	0,47	0,48	0,52	0,61	0,77	0,94	0,80
0,85	0,35	0,35	0,35	0,36	0,42	0,55	0,72	0,85
0,90	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,32	0,49	0,90
0,95	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,25	0,95

Bemerkung. Für kleinere Werte von $a:r$ als entsprechend $z:r = 2$ und darüber liegt A im Querschnittkern.

Für folgende Werte von $a:r$ wird $z:r = 1$. d. h. die Nullinie geht durch den Mittelpunkt oder die tragende Fläche des Querschnittes ist ein Halbkreis.

$\frac{r_1}{r} =$	0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{a}{r} =$	0,589	0,631	0,654	0,682	0,713	0,743	0,786

angenähert $$\frac{a}{r} = 0{,}5 + 0{,}25\,\frac{r_1}{r} .$$

*) S. Keck, Z. d. H. A. u. I. V. 1882, S. 627. Vrgl. auch Z. d. V. d. I. 1902 S. 1321.

2. Werte $\sigma_{max} : \sigma$ (Randspannung).

$\frac{a}{r}$	$\frac{r_1}{r} =$ 0,0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	$\frac{a}{r}$
0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00
0,05	1,20	1,16	1,15	1,13	1,12	1,11	1,10	0,05
0,10	1,40	1,32	1,29	1,27	1,24	1,22	1,20	0,10
0,15	1,60	1,48	1,44	1,40	1,37	1,33	1,30	0,15
0,20	1,80	1,64	1,59	1,54	1,49	1,44	1,40	0,20
0,25	2,00	1,80	1,73	1,67	1,61	1,55	1,50	0,25
0,30	2,23	1,96	1,88	1,81	1,73	1,66	1,60	0,30
0,35	2,48	2,12	2,04	1,94	1,85	1,77	1,70	0,35
0,40	2,76	2,29	2,20	2,07	1,98	1,88	1,80	0,40
0,45	3,11	2,51	2,39	2,23	2,10	1,99	1,90	0,45
0,50	3,55	2,80	2,61	2,42	2,26	2,10	2,00	0,50
0,55	4,15	3,14	2,89	2,67	2,42	2,26	2,17	0,55
0,60	4,96	3,58	3,24	2,92	2,64	2,42	2,26	0,60
0,65	6,00	4,34	3,80	3,30	2,92	2,64	2,42	0,65
0,70	7,48	5,40	4,65	3,86	3,33	2,95	2,64	0,70
0,75	9,93	7,26	5,97	4,81	3,93	3,33	2,89	0,75
0,80	13,87	10,05	8,80	6,53	4,93	3,96	3,27	0,80
0,85	21,08	15,55	13,32	10,43	7,16	4,50	3,77	0,85
0,90	38,25	30,80	25,80	19,85	14,60	7,13	4,71	0,90
0,95	96,10	72,20	62,20	50,20	34,60	19,80	6,72	0,95
1,00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1,00

b. Beanspruchung durch Schubspannungen. (Schub und Drehung.)

Der Querschnitt des Stabes werde durch eine Schubkraft Q und durch ein Drehmoment M_d beansprucht. In einem beliebigen Teilchen des Querschnittes erzeugt Q die Schubspannung τ_s (nach S. 420 u. f. zu ermitteln) und M_d die Schubspannung τ_d (nach S. 471 u. f. zu ermitteln). Durch Zusammensetzung von τ_s und τ_d nach dem Parallelogramm erhält man die wirklich in dem Querschnitteilchen (und winkelrecht dazu) herrschende Schubspannung τ; es darf in keinem Punkte $\tau > k_d$ sein.

c. Beanspruchung durch Normal- und Schubspannungen.

Wird irgend ein Querschnitteilchen eines Stabes durch eine Normalspannung σ und eine Schubspannung τ beansprucht, so sind beide nach S. 427 zu einer idealen Hauptspannung σ_1 zusammenzusetzen, u. zw. ist insbesondere für $m = {}^{10}/_3$

$$\sigma_1 = 0{,}35\,\sigma \pm 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2};$$

der Querschnitt ist so zu bemessen, dafs für keinen Punkt

$$\sigma_1 > k_n.$$

Hierbei bedeutet $\alpha_0 = k_n : 1{,}3\,k_s$ das Beanspruchungs-Verhältnis, unter k_n (gleich k_z, k oder k_b) die zulässige Normalspannung und unter k_s (gleich k_s oder k_d) die zulässige Schubspannung verstanden, wobei die Arten der Festigkeit zu beachten sind, auf die der Stab beansprucht wird.

1. Zug (oder Druck) und Schub.

Die äufseren Kräfte ergeben für den Querschnitt F eine Achsialkraft P und eine Schubkraft Q.

P erzeugt eine überall gleiche Normalspannung $\sigma = \pm P : F$, Q dagegen Schubspannungen, deren gröfste, τ_{max}, nach den Formeln auf S. 420 und 421 zu ermitteln ist (τ_{max} tritt meist in der Schwerachse auf). Die gröfste ideale Hauptspannung im Querschnitte wird

$$\sigma \frac{max}{min} = 0{,}35\,\sigma \pm 0{,}65 \sqrt{\sigma^2 + 4\,\alpha^2_0\,\tau^2_{max}} \gtreqless k_z \text{ bzw. } k,$$

wenn $\alpha_0 = k_z : 1{,}3\,k_s$ bzw. $\alpha_0 = k : 1{,}3\,k_s$.

2. Biegung und Schub.

Der Querschnitt werde beansprucht durch ein Biegungsmoment M, das die Normalspannungen σ erzeugt, und durch eine Schubkraft Q, die in der Ebene des Biegungsmomentes liegt und die Schubspannungen τ erzeugt.

Es ist alsdann die oben unter **c.** gegebene Hauptgleichung mit $\alpha_0 = k_b : 1{,}3\,k_s$ anzuwenden, u. zw. sind für σ und τ diejenigen zugehörigen Werte zu setzen, für die die ideale Hauptspannung σ_1 am gröfsten wird.

Für den **Freiträger** von der Länge l, Fall 1. S. 446, berücksichtige man für die Spannungs-Ermittlung nach C. Bach, wenn $\alpha_0 = 1$:

1) für den Kreis-Querschnitt mit dem Durchmesser d
nur die Biegungsbeanspruchung, falls . . . $l > 0{,}25\,d$,
nur die Schubbeanspruchung, falls . . . . $l \gtreqless 0{,}25\,d$;

2) für den Rechteck-Querschnitt von der Höhe h (parallel zu Q) tritt an die Stelle von $0{,}25\,d$ der Wert $0{,}325\,h$.

Die **Durchbiegung** f eines in der Mitte mit P belasteten Stabes Fall 2, S. 446 beträgt mit Rücksicht auf den Einflufs der Schubkraft

für den kreisförmigen Querschnitt

$$f = \frac{P}{E}\,\frac{l}{\frac{1}{4}\pi d^2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{l}{d}\right)^2 + 0{,}77\right],$$

für den rechteckigen Querschnitt

$$f = \frac{P}{E}\,\frac{l}{b\,h}\left[0{,}25\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 0{,}78\right],$$

für den I-förmigen Querschnitt (nach R. Land)*)

$$f = \frac{P}{E}\,\frac{l}{h\,\delta}\left[\frac{l^2\delta}{24\,W} + 0{,}65\right],$$

worin h die Höhe, δ die Stegdicke in cm, W das Widerstandsmoment in cm^3.
(Bestimmung von E aus Biegeversuchen.)

3. Zug (oder Druck) und Drehung.

Hierfür gilt das vorstehend unter **1.** Gesagte, wenn statt der Schubkraft Q das Drehmoment M_d und statt k_s der Wert k_d gesetzt wird.

4. Biegung und Drehung.

Der Querschnitt werde durch ein Biegungsmoment M und ein Drehmoment M_d beansprucht; die Ebene von M schneide den Querschnitt winkelrecht, die Ebene von M_d die Stabachse winkelrecht. M erzeugt in jedem Querschnitteilchen eine Normalspannung σ, M_d daselbst eine Schubspannung τ, die beide wie oben angegeben zu ermitteln sind. Es ist dann die unter **c.** (S. 486) gegebene Hauptgleichung mit $\alpha_0 = k_b : 1{,}3\,k_d$ anzuwenden, und zwar sind für σ und τ diejenigen zugehörigen Werte zu setzen, für die die ideale Hauptspannung σ_1 am gröfsten wird.

*) R. Land, Einflufs der Schubkräfte usw., Z. f. B. 1894 S. 611 u. f. Vrgl. auch Z. d. V. d. I. 1888 S. 222 u. f.

1. **Kreis- und Kreisring-Querschnitt** (Abb. 63 und 64). Hier fallen die Punkte für σ_{max} und τ_{max} zusammen.

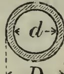
Bedeutet W das erforderliche Widerstandsmoment, also (vrgl. S. 432)

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \quad \text{bezw.} \quad W = \frac{\pi D^3}{32}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right],$$

Abb. 63.



Abb. 64.



so bestimme man

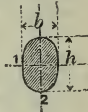
$$M_i = 0{,}35\, M + 0{,}65 \sqrt{M^2 + (\alpha_0 M_d)^2}$$

und daraus $$W = M_i : k_b.$$

2. **Elliptischer Querschnitt** (Abb. 65). Das Biegungsmoment M werde zerlegt in M_1 mit der Achse 1 und M_2 mit der Achse 2.

Die genaue Ermittlung der gröfsten Hauptspannung ist umständlich*). Zur Querschnittbestimmung genügt es indessen, h und b aus den beiden Gleichungen zu berechnen:

Abb. 65.



$$\frac{\pi}{32} b\, h^2 k_b \geqq M_i' = 0{,}35\, M_1 + 0{,}65 \sqrt{M_1^2 + (\alpha_0 M_d)^2},$$

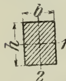
$$\frac{\pi}{32} b^2 h\, k_b \geqq M_i'' = 0{,}35\, M_2 + 0{,}65 \sqrt{M_2^2 + (\alpha_0 M_d)^2},$$

$$\text{worin } \alpha_0 = k_b : 1{,}3\, k_d.$$

Für $M_1 = 0$ tritt die gröfste Spannung in den Endpunkten der Achse b ein; in allen übrigen Fällen findet sich die gröfste Spannung in einem Umfangspunkte zwischen 1 und 2 Abb. 65.

3. **Rechteck-Querschnitt** (Abb. 66). M_1 und M_2 haben dieselbe Bedeutung wie vorstehend unter 2; es gilt hier

Abb. 66.



$$\tfrac{1}{6}\, b\, h^2 k_b \geqq M_i' = 0{,}35\, M_1 + 0{,}65 \sqrt{M_1^2 + (\tfrac{3}{2}\, \alpha_0 M_d)^2},$$

$$\tfrac{1}{6}\, b^2 h\, k_b \geqq M_i'' = 0{,}35\, M_2 + 0{,}65 \sqrt{M_2^2 + (\tfrac{3}{2}\, \alpha_0 M_d)^2}.$$

Nachzurechnen ist, ob

$$\frac{M_1}{\tfrac{1}{6}\, b\, h^2} + \frac{M_2}{\tfrac{1}{6}\, b^2 h} \leqq k_b. \quad \text{(Vrgl. S. 428.)}$$

Für die gröfste Spannung gilt das unter 2. Gesagte.

4. **I-Querschnitt.** Nach E. Häseler**) ist das erforderliche Widerstandsmoment für Biegung (in cm^3)

$$W = \frac{M}{k_b}\left[0{,}35 + 0{,}65 \sqrt{1 + \left(3\, \alpha_0 \frac{M_d}{M}\right)^2}\right].$$

Ist $3\, \alpha_0 M_d$ sehr klein gegenüber M, so ist näherungsweise das erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{M}{k_b}\left(1 + 2{,}9\, \alpha_0^2 \frac{M_d^2}{M^2}\right).$$

*) C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 5. Aufl. S. 440 u. f.; Berlin 1905.

**) Z. d. B. 1895 S. 233. Vorausgesetzt ist, dafs für I-Querschnitte die gröfste Drehungsspannung $\tau_{max} \sim 1{,}5 \frac{M_d}{W}$, wobei W das Widerstandsmoment für Biegung bedeutet. Für Rechteckquerschnitt ergibt sich statt 1,5 der Wert $6 : 4{,}5 = 1{,}33$.

III. FESTIGKEIT EINFACH GEKRÜMMTER STÄBE.

A. Normalspannungen.

Die Mittellinie des Stabes sei eine ebene Kurve; ihre Ebene der geometrische Ort der Hauptachse sämtlicher Stabquerschnitte sowie der Richtungslinien der äufseren Kräfte. Diese mögen für den betrachteten Querschnitt QQ eine Normalkraft und ein Biegungsmoment ergeben.

Es bezeichnet (Abb. 67)

P die Normalkraft im Schwerpunkte S des Querschnitts, in kg; positiv oder negativ, je nachdem sie als Zug oder Druck wirkt,
M das Biegungsmoment in cmkg; positiv oder negativ, je nachdem es die Krümmung verstärkt oder abschwächt,
F den Querschnitt des Stabes in qcm,
r den ursprünglichen Krümmungshalbmesser der Stab-Mittellinie im Schwerpunkte von QQ, in cm,
ϱ denselben unter der Wirkung von P und M, in cm,
σ die Normalspannung in kg/qcm, die durch P und M im Abstande y von der winkelrecht zur Mittelebene stehenden Hauptachse von QQ erzeugt wird; dabei ist y positiv oder negativ, je nachdem der Abstand vom Schwerpunkte S aus vom Krümmungspunkte O weg oder nach diesem hin zu messen ist,
E das Elastizitätsmafs in kg/qcm.

Dann ist die **Normalspannung**

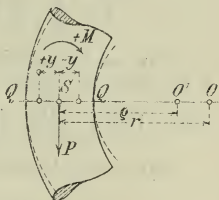
$$\sigma = \left(P + \frac{M}{r}\right)\frac{1}{F} + \frac{My}{\varkappa F r (r+y)},$$

worin

$$\varkappa = -\frac{1}{F}\int \frac{y\,dF}{r+y},$$

also ein nur von Querschnitt und Krümmung abhängiger Wert ist.*) Das Integral erstreckt sich über den ganzen Querschnitt.

Abb. 67.



Setzt man $-r^2 \int \frac{y\,dF}{r+y} = \varkappa F r^2 = J_0,$

so ergibt sich auch $\sigma = \left(P + \frac{M}{r}\right)\frac{1}{F} + \frac{Mr}{J_0}\,\frac{y}{r+y}.$

Die Spannungen wachsen also nicht wie bei dem geraden Stabe proportional dem Abstande der Fasern von der Schwerachse.

Ist der Krümmungshalbmesser r gegenüber y sehr grofs, so wird $J_0 = J$, d. i. gleich dem äquatorialen Trägheitsmomente des Querschnittes (in cm⁴), bezogen auf die Schwerachse S winkelrecht zu QQ.

*) Ueber die Bedeutung und Konstruktion von $\varkappa$ s. Bantlin, Z. d. B. d. I. 1901 S. 164. Ueber die Berechnung von σ mit Berücksichtigung der durch die Querkräfte erzeugten Normalspannungen und Formänderungen s. C. Pfleiderer, Z. d. V. d. I. 1907 S. 209.

Die Spannung σ ist null, wenn

$$y = -\left(1 + \frac{Pr}{M}\right)\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,r;$$

die **Nullinie** geht also bei krummen Stäben nur dann durch den Schwerpunkt S des Querschnittes, wenn $1 + \frac{Pr}{M} = 0$ oder $M = -Pr$, d. h., wenn der Querschnitt durch eine Einzellast beansprucht wird, die durch den Krümmungsmittelpunkt O geht und winkelrecht zum Querschnitte gerichtet ist.

Schubspannung. Durch eine aufser P und M vorhandene Schubkraft Q entstehen Schubspannungen τ, die sich nach der Formel für τ auf S. 419 ermitteln, wenn dort $\varkappa F(r \pm y)^2$ statt J gesetzt wird.

Krümmungshalbmesser ϱ. Angenähert ist $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} + \frac{M}{E\varkappa F r^2}$, worin $\varkappa F r^2 = J_0$, und, wenn r gegenüber y sehr grofs ist, statt J_0 J zu setzen ist.

Bei grofsem r berechnen sich also Spannung σ und Aenderung der Krümmung nahezu wie bei geraden Stäben.

Wert $\varkappa = \frac{J_0}{Fr^2}$ für verschiedene Querschnitte:

Für das **Rechteck** (Höhe $h = 2e$ in Richtung von y gemessen) ist

$$\varkappa = -1 + \frac{r}{h}\ln\frac{2r+h}{2r-h} = \frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \ldots$$

Für den **Kreis** (Halbmesser e) und die **Ellipse** (Halbachse in der Stabebene $= e$) ist

$$\varkappa = \frac{1}{4}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \ldots .$$

Für das symmetrische **Trapez** (Parallelseiten b_1 und b_2, wobei $b_2 < b_1$, Höhe h, Schwerpunkt-Abstände von b_1 und b_2 e_1 und e_2) ist

$$\varkappa = -1 + \frac{2r}{(b_1+b_2)\,h}\left\{\left[b_2 + \frac{b_1-b_2}{h}(e_2+r)\right]\ln\frac{r+e_2}{r-e_1} - (b_1-b_2)\right\}.$$

Für das gleichschenklige **Dreieck** (Grundlinie b, Höhe h) ist

$$\varkappa = -1 + \frac{2r}{h}\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{r}{h}\right)\ln\frac{r + {}^2/_3 h}{r - {}^1/_3 h} - 1\right].$$

Nach C. Pfleiderer*) ergeben sich näherungsweise die **Randspannungen** σ_a, σ_i des Querschnittes $Q\,Q$ (Abb. 67) aus

$$\sigma_a = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}(1 - m_a),$$

$$\sigma_i = \frac{P}{F} - \frac{M}{W}(1 + m_i),$$

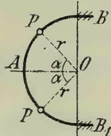
σ_a liegt vom Krümmungsmittelpunkt des Stabes am weitesten, σ_i am nächsten; W bezeichnet das Widerstandsmoment des Querschnitts für die entsprechende Querschnittsseite. m_a und m_i ergeben sich aus folgender Tabelle (Bezeichnungen wie oben):

*) Z. d. V. d. I. 1907 S. 1507.

Querschnitt	m_a	m_i
Kreis und **Ellipse**	$\dfrac{0{,}6}{\dfrac{r}{e}+0{,}2}$	$\dfrac{0{,}6}{\dfrac{r}{e}-0{,}88}$
Trapez, gleichschenkliges. $e_2:e_1=\varepsilon>1.$	$\dfrac{0{,}6\,\varepsilon-0{,}14}{\dfrac{r}{e_1}+(\varepsilon-1)(13-4\,\varepsilon)\,0{,}16}$	$\dfrac{0{,}2\,\varepsilon+0{,}3}{\dfrac{r}{e_1}-0{,}9+0{,}06\,\varepsilon}$
Rechteck. $\varepsilon=1.\,e_1=e_2=\frac{1}{2}h$	$\dfrac{0{,}23}{\dfrac{r}{h}}$	$\dfrac{0{,}25}{\dfrac{r}{h}-0{,}45}$
Dreieck, gleichschenkliges. $\varepsilon=2.\,2e_1=e_2=\frac{2}{3}h$	$\dfrac{1{,}06}{\dfrac{3r}{h}+0{,}8}$	$\dfrac{0{,}7}{\dfrac{3r}{h}-0{,}78}$

B. Normal- und Schubspannungen.*)

Abb. 68.



Die Mittellinie des Stabes sei eine Halbkreislinie BAB_1 (Abb. 68) in wagerechter Ebene, an den Endpunkten B und B_1 des Durchmessers BB_1 fest eingespannt; die lotrechte Belastung erfolgte unmittelbar auf der Mittellinie des Stabes. **(Balkonträger.)**

In jedem Stabquerschnitte tritt dann ein Biegungsmoment M_b und ein Drehmoment M_d auf.

1. Belastung durch zwei symmetrisch angreifende Einzellasten. (Abb. 68.)

Bezeichnet

P jede der beiden Einzellasten, in kg,
r den Halbmesser der Stab-Mittellinie, in cm,
α den die Lage der Einzelkräfte in bezug auf die Symmetrielinie OA bestimmenden Zentriwinkel,

so ist im Punkte A

das Biegungsmoment $M_{b\,(a)}=\dfrac{2}{\pi}Pr\left[\cos\alpha-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha\right]$,

das Drehmoment $M_{d\,(a)}=0$;

in den Punkten B und B_1

das Biegungsmoment $M_{b\,(b)}=Pr\cos\alpha$,

das Drehmoment $M_{d\,(b)}=\dfrac{2}{\pi}Pr\left[\dfrac{\pi}{2}-\cos\alpha-\alpha\sin\alpha\right]$.

Zur Berechnung des Querschnittes sind M_b und M_d (in cmkg) nach S. 487 zu einem M_i zusammenzusetzen. $M_{i\,\max}$ ergibt sich für B und B_1.

Für den I-förmigen Querschnitt ist annähernd $W_b=W_d$; das erforderliche W_b ist nahezu

$$W_b=1{,}12\,\frac{Pr\cos\alpha}{k_b}\ \text{cm}^3,$$

also um 12 vH gröfser als ohne Rücksicht auf das Drehmoment.

*) Nach M. Koenen, D. B. 1885 S. 607.

2. Gleichförmig verteilte Belastung. (Abb. 69.)

Bezeichnet

d die Belastung auf 1 cm Länge des Stabes, in kg,

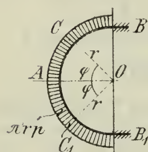
r den Halbmesser der Stab-Mittellinie in cm,

so ist für einen beliebigen Punkt C (und C_1), entsprechend dem Zentriwinkel φ,

$$\text{das Biegungsmoment } M_b = p r^2 \left(1 - \frac{4}{\pi} \cos \varphi\right) = \frac{d M_d}{d\varphi},$$

$$\text{das Drehmoment } M_d = p r^2 \left(\varphi - \frac{4}{\pi} \sin \varphi\right).$$

Abb. 69.



Für $\varphi = 0$ ist

$$M_{b\,(a)} = p r^2 \left(1 - \frac{4}{\pi}\right); \qquad M_{d\,(a)} = 0.$$

Für $\varphi = 90^0$ ist

$$M_{b\,(b)} = M_{\max} = p r^2;$$

$$M_{d\,(b)} = p r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right) = 0{,}32\, p r^2$$

(als absolutes Maximum).

Für $\varphi = 38^0\, 14'$ ergibt sich $M_{d\,(\min)} = -\,0{,}12\, p r^2$, für $\varphi = 65^0$ wiederum $M_d = 0$.

Gröfste Beanspruchung bei B und B_1. Zur Berechnung des Querschnittes sind M_b und M_d nach S. 483 zu einem M_i zusammenzusetzen.

Für den I-förmigen Querschnitt (vrgl. 1.) ist annähernd das erforderliche

$$W_b = 1{,}12 \frac{p r^2}{k_b} \text{ cm}^3.$$

3. Für **andere** Belastungsfälle können mit Hilfe von **1.** und **2.** die Werte von M_b und M_d ermittelt werden.

IV. FESTIGKEIT DER FEDERN.

Allgemeines.

Federn werden als vollkommen elastisch (innerhalb der Elastizitätsgrenze σ_e beansprucht) und dem Hookeschen Gesetze folgend (innerhalb der Proportionalitätsgrenze σ_p beansprucht) vorausgesetzt.

Es bedeutet

P die zulässige Belastung (Tragfähigkeit) der Feder in kg,

f die Durchbiegung, entsprechend der Belastung P oder der zulässigen Spannung k_b oder k_d, in cm,

l die Länge der Feder in cm,
n die Anzahl der Blätter oder der Windungen,
V den Rauminhalt der Feder in ccm,
k_b die zulässige Spannung für Biegung in kg/qcm,
k_d die zulässige Spannung für die Drehung in kg/qcm.

Die Gröfsen E und G s. S. 390 und 394; die übrigen Bezeichnungen (in cm) sind aus den Abbildungen zu entnehmen.

Die **Arbeit** in cmkg, die von einer Feder bei ihrer Durchbiegung von null bis f aufgenommen wird (die sogen. „Federungsarbeit"), ist

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{c}\,\frac{k_b^2}{E}\,V. \quad \text{(Vrgl. S. 393.)}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dafs die Kraft P, proportional der Durchbiegung der Feder, stetig von null bis P gewachsen ist. c bedeutet einen Wert, der nur von der Form der Feder abhängt; er gibt das Verhältnis der Rauminhalte (des Stoffverbrauches) bei verschiedenen Federn gleichen Stoffes an, die bei gleicher Arbeit die gleiche Beanspruchung erfahren. — Federn gleicher Grundform und gleichen Stoffes haben daher bei gleicher Beanspruchung und gleicher Federungsarbeit gleiches Gewicht.

Die **Schwingungszeit** T (in sk) einer (gewichtlos gedachten) Feder ist gleich der eines einfachen Kreispendels, dessen Länge gleich ist der durch die Belastung P erzeugten Durchbiegung f (in **m**):

$$T = \pi\sqrt{\frac{f}{g}}\cdot \quad \text{(Vrgl. S. 202.)}$$

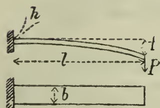
a. Biegungsfedern.

1. Gerade Biegungsfedern.

[Vrgl. Fall 1 S. 446. Tafel für $\frac{1}{6}bh^2$ und $\frac{1}{12}bh^3$ s. S. 442 u. f.]

1. **Rechteckfeder** (Abb. 70).

Abb. 70.



$$P = \frac{bh^2}{6}\,\frac{k_b}{l}; \qquad J = \frac{bh^3}{12};$$

$$f = \frac{P}{EJ}\,\frac{l^3}{3} = 4\,\frac{l^3}{bh^3}\,\frac{P}{E} = \frac{2}{3}\,\frac{l^2}{h}\,\frac{k_b}{E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{18}\,\frac{k_b^2}{E}\,V.$$

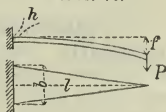
2. **Dreieckfeder** (Abb. 71). Sie bildet einen Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung (vrgl. S. 424 und 464). Die elastische Linie ist ein Kreisbogen (s. S. 433).

$$P = \frac{bh^2}{6}\,\frac{k_b}{l}; \qquad J = \frac{bh^3}{12};$$

$$f = \frac{P}{EJ}\,\frac{l^3}{2} = 6\,\frac{l^3}{bh^3}\,\frac{P}{E} = \frac{l^2}{h}\,\frac{k_b}{E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{6}\,\frac{k_b^2}{E}\,V.$$

Abb. 71.



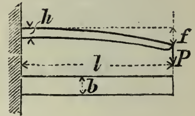
3. **Rechteckfeder, nach der kubischen Parabel zugeschärft** (Abb. 72). Die elastische Linie ist ein Kreisbogen (s. S. 433).

$$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{l}; \qquad J = \frac{b h^3}{12};$$

$$f = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{2} = 6 \frac{l^3}{b h^3} \frac{P}{E} = \frac{l^2}{h} \frac{k_b}{E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{9} \frac{k_b^2}{E} V.$$

Abb. 72.



2. Zusammengesetzte Biegungsfedern.

Legt man mehrere der unter **1.** genannten Blattfedern aufeinander, so erhält man ein Blattfederwerk. Hauptbedingungen für ein gutes Blattfederwerk sind:

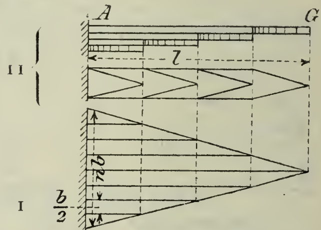
1) dafs es möglichst einen Körper von gleichem Widerstande gegen Biegung bilde,

2) dafs es bei der Biegung nicht klaffe, d. h., dafs sich die Blätter nicht voneinander entfernen; die elastische Linie mufs daher ein Kreisbogen sein.

Wie aus dem unter **1.** Gesagten hervorgeht, erfüllt nur das erste der folgenden Federwerke diese beiden Bedingungen; die anderen Federwerke erfüllen nur die Bedingung 2).

1. **Geschichtete Dreieckfeder.** Wenn man die Dreieckfeder (Abb. 73 I) in eine gerade Anzahl $2n$ gleich breiter Streifen (hier acht Streifen von der Breite $\frac{1}{2} b$) zerschnitten denkt und die Streifen so zusammenfügt, dafs sie den Körper Abb. 68 II bilden, so erhält man ein zweckmäfsiges Blattfederwerk, das dieselbe Tragfähigkeit hat, wie die Dreieckfeder von der Fufsbreite nb, wobei n die Anzahl der Blätter (der Lagen) bezeichnet. Es ist also

Abb. 73.

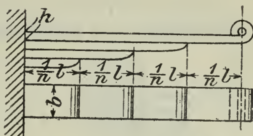


$$P = n \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{l}; \quad \text{mithin } n = \frac{Pl}{\frac{1}{6} b h^2 k_b}.$$

2. **Geschichtete Rechteckfeder, nach der kubischen Parabel zugeschärft.** Anstatt die Enden der einzelnen Federlagen dreieckig zu machen, schärft man sie nach der kubischen Parabel (vrgl. S. 465 und oben, unter 3.) zu, so dafs die Lagen überall gleiche Breite haben (Abb. 74).

3. **Trapezfeder mit Zuschärfung.** Die Enden der einzelnen Federlagen sind trapezförmig. Dabei mufs aufserdem eine Zuschärfung eintreten, die sich aus folgender Formel (Bezeichnungen s. Abb. 75) ergibt:

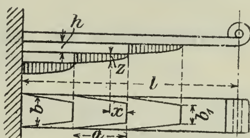
Abb. 74.



$$z = \frac{h}{\sqrt[3]{1 + \frac{b_1}{b}\left(\frac{a}{x} - 1\right)}}.$$

4. In der Regel sind zwei Federwerke von einer der betrachteten Formen durch den Federbund vereinigt; sie erhalten hierbei im unbelasteten Zustande eine **kreisförmige Krümmung** mit dem Pfeil p_0 (in cm). Durch die am Federbunde angreifende (ruhende) Belastung $2P$ (in kg) verringert sich der Pfeil p_0 auf p (in cm); die Durchbiegung des Federwerkes ist mithin (in cm):

Abb. 75.



$$f = p_0 - p.$$

Tragfedern der Eisenbahnfahrzeuge.

Die am Federbund angreifende Last $2P$ (in kg) ergibt in den geneigten Gehängen je eine Zugkraft $P : \cos\alpha$; diese zerlegt sich in die lotrechte Kraft P und die wagerechte Kraft $P \operatorname{tg}\alpha$, die zusammen ein Biegungsmoment $M = P(l + p \operatorname{tg}\alpha)$ hervorrufen (s. Abb. 76, achtlagige preufs. Normalfeder für Güterwagen). Da die unter **1.** angegebenen Gleichungen auch für gekrümmte Federn anwendbar sind, so ist mit den Bezeichnungen von S. 492

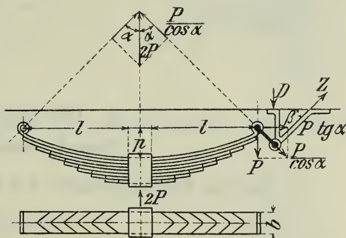
die Tragkraft $2P = 2n\frac{bh^2}{6}\frac{k_b}{l + p \operatorname{tg}\alpha}$

und die Durchbiegung

$$f = 6\frac{l^2}{nbh^3}\frac{P(l + p \operatorname{tg}\alpha)}{E} = \frac{l^2}{h}\frac{k_b}{E}.$$

Für p kann hierin angenähert p_0 gesetzt werden (genau $p = p_0 - f$).

Abb. 76.



Die oberste Federlage hat aufser der Biegungsspannung die Zugkraft $P \operatorname{tg}\alpha$, sowie die Querkraft P aufzunehmen, die dort eine zusätzliche Normalspannung $\sigma = P \operatorname{tg}\alpha : bh$ bzw. eine Schubspannung τ erzeugen, die nach S. 419 zu ermitteln ist.

Bei der Bestimmung der Anzahl n der Federlagen für ein vorhandenes Federblatt ist auf die durch die Federschwingungen während der Fahrt hervorgerufene Mehrbelastung der Feder Rücksicht zu nehmen. Es empfiehlt sich hierfür (zumal, wenn der Einflufs der Spannungen σ und τ unbeachtet bleiben soll) in der vorstehenden Formel für die Tragkraft $2P$ (ruhende Belastung) k_b niedrig, u. zw. 5800 bis 6500 kg/qcm zu wählen. (Vrgl. S. 406.)

Federbock (s. Abb. 76). Ist D die Druckkraft in der Stütze und Z die Zugkraft in der Strebe, so ergibt sich

$$D = P(1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) \text{ und } Z = \frac{P \operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}.$$

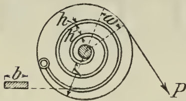
3. Gewundene Biegungsfedern.

[Tafel für $\frac{1}{6} b h^2$ und $\frac{1}{12} b h^3$ s. S. 442 u. f.; Tafel für $\frac{1}{32} \pi d^3$ und $\frac{1}{64} \pi d^4$ s. S. 438.]

l ist die Länge der gestreckt gedachten Feder.

1. **Spiralfeder mit rechteckigem Querschnitte** (Abb. 77).*)

Abb. 77.



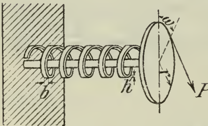
$$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{r}; \qquad J = \frac{b h^3}{12};$$

$$f = r\omega = \frac{P}{EJ} l r^2 = 12 \frac{P l r^2}{E b h^3} = 2 \frac{r l}{h} \frac{k_b}{E};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{6} \frac{k_b^2}{E} V.$$

2. **Schraubenfeder mit rechteckigem Querschnitte** (Abb. 78).

Abb. 78.



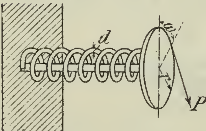
$$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{r}; \qquad J = \frac{b h^3}{12};$$

$$f = r\omega = \frac{P}{EJ} l r^2 = 12 \frac{P l r^2}{E b h^3} = 2 \frac{r l}{h} \frac{k_b}{E};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{6} \frac{k_b^2}{E} V.$$

3. **Schraubenfeder mit kreisförmigem Querschnitte** (Abb. 79).

Abb. 79.



$$P = \frac{\pi d^3}{32} \frac{k_b}{r}; \qquad J = \frac{\pi d^4}{64};$$

$$f = r\omega = \frac{P}{EJ} l r^2 = \frac{64}{\pi} \frac{P l r^2}{E d^4} = 2 \frac{r l}{d} \frac{k_b}{E};$$

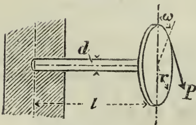
$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{8} \frac{k_b^2}{E} V.$$

b. Drehungsfedern.

1. Gerade Drehungsfedern.

1. **Gerade Drehungsfeder mit kreisförmigem Querschnitte.** (Abb. 80.)

Abb. 80.



$$P = \frac{\pi d^3}{16} \frac{k_d}{r} = 0{,}1963 \frac{d^3}{r} k_d;$$

$$f = r\omega = \frac{32 r^2 l}{\pi d^4} \frac{P}{G} = 2 \frac{r l}{d} \frac{k_d}{G};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{4} \frac{k_d^2}{G} V.$$

*) Die Feder ist am inneren Ende an der Drehachse eingespannt, am äufseren Ende an der Kraftscheibe frei drehbar befestigt gedacht, so dafs das auf den gefährlichen Querschnitt wirkende Biegungsmoment $= Pr$.

2. **Gerade Drehungsfeder mit rechteckigem Querschnitte** (Abb. 81). Es bezeichnet ξ das Verhältnis $b:h$.

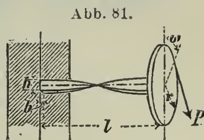


Abb. 81.

$$P = \frac{2}{9}\, b^2 h \,\frac{k_d}{r};$$

$$f = r\,\omega = 3{,}6\, r^2 l\, \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}\, \frac{P}{G}$$

$$= 0{,}8\, r\, l\, \frac{b^2 + h^2}{b\, h^2}\, \frac{k_d}{G};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{4}{45}\,(\xi^2 + 1)\,\frac{k_d^2}{G}\, V.$$

Für den quadratischen Querschnitt ($\xi = 1$) ist A am größten.

2. Gewundene Drehungsfedern.

In den Abb. 82 bis 85 bedeutet r den mittleren Halbmesser, dieses Maß reicht also bis zur Mitte des Federquerschnittes. n ist die Anzahl der Windungen.

1. **Zylindrische Schraubenfeder mit kreisförmigem Querschnitte.***) (Abb. 82.)

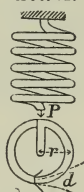


Abb. 82.

$$P = \frac{\pi\, d^3}{16}\,\frac{k_d}{r} = 0{,}1963\,\frac{d^3}{r}\, k_d;$$

$$f = \frac{64\, n\, r^3}{d^4}\,\frac{P}{G} = \frac{4\,\pi\, n\, r^2}{d}\,\frac{k_d}{G};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{4}\,\frac{k_d^2}{G}\, V.$$

2. **Zylindrische Schraubenfeder mit rechteckigem Querschnitte** (Abb. 83). ξ bezeichnet das Verhältnis $b:h$.

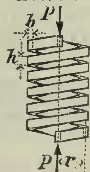


Abb. 83.

$$P = \frac{2}{9}\, b^2 h\,\frac{k_d}{r};$$

$$f = 7{,}2\,\pi\, n\, r^3\,\frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}\,\frac{P}{G}$$

$$= 1{,}6\,\pi\, n\, r^2\,\frac{b^2 + h^2}{b\, h^2}\,\frac{k_d}{G};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{4}{45}\,(\xi^2 + 1)\,\frac{k_d^2}{G}\, V.$$

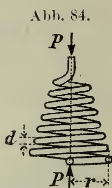
Für den quadratischen Querschnitt ($\xi = 1$) ist A am größten.

*) Eine Tafel der Tragfähigkeit und Durchbiegung dieser Feder findet sich Z. d. V. p. I. 1891 S. 1398, wobei $k_d = 4500$ kg/qcm (für guten, gehärteten Federstahl bei nicht wesentlich veränderlicher Belastung) und $G = 750\,000$ kg/qcm angenommen ist.

3. **Kegelfeder mit kreisförmigem Querschnitte** (Abb. 84.)*)

l ist die Länge der gestreckt gedachten Feder, d der Durchmesser des Federquerschnittes. r nimmt stetig bis auf null ab.

Abb. 84.



$$P = \frac{\pi d^3}{16} \frac{k_d}{r} = 0{,}1963 \frac{d^3}{r} k_d;$$

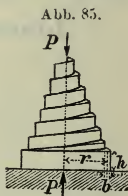
$$f = \frac{16}{\pi} \frac{r^2 l}{d^4} \frac{P}{G} = \frac{r l}{d} \frac{k_d}{G}$$

$$= 16 n \frac{r^3}{d^4} \frac{P}{G} = \pi n \frac{r^2}{d} \frac{k_d}{G};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{8} \frac{k_d^2}{G} V.$$

4. **Kegelfeder mit rechteckigem Querschnitte** (Abb. 85). $\xi = b:h$.

Abb. 85.



$$P = \frac{2}{9} \frac{b^2 h}{r} k_d;$$

$$f = 1{,}8\, r^2 l \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G}$$

$$= 0{,}4\, r\, l \frac{b^2 + h^2}{b\, h^2} \frac{k_d}{G}$$

$$= 1{,}8\, \pi n r^3 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G}$$

$$= 0{,}4\, \pi n r^2 \frac{b^2 + h^2}{b\, h^2} \frac{k_d}{G};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{2}{45} (\xi^3 + 1) \frac{k_d^2}{G} V.$$

Für den quadratischen Querschnitt ($\xi = 1$) ist A am größten.

5. **Kegelstumpf-Feder gemäß** 3 **oder** 4 mit den Halbmessern r und r_0, wobei $r > r_0$. Es gelten die unter 3 und 4 für die Tragfähigkeit P gegebenen Formeln gleichfalls; für die Ermittlung der Durchbiegung f ist (in den ersten und vierten Ausdrücken von f) statt r^2 zu setzen $r^2 + r_0^2$ und statt l zu setzen $\pi n (r + r_0)$.

Bemerkung: Die Formeln für die gewundenen Biegungsfedern (a. 3) und für die Drehungsfedern gelten mit hinreichender Annäherung nur dann, wenn die Querschnittsmaße klein sind gegenüber dem Krümmungshalbmesser der Mittellinie und bei kleiner Ganghöhe der Schraubenlinie.

---

*) Ausführliche Berechnung der Kegelfedern s. V. Meyer, Z. d. V. d. I. 1900 S. 1791.

V. FESTIGKEIT DER PLATTEN UND GEFÄSSE.

(Bei Benutzung sämtlicher Gleichungen
ist die **Schlußbemerkung** auf S. 505 zu beachten.)

a. Ebene Platten.

Es bezeichnet

s die Dicke der Platte in cm.

f ihre Durchbiegung in der Mitte in cm

σ_{max} die größte auftretende Normalspannung in der Platte in kg/qcm,

k_b die zulässige Biegungsspannung des Stoffes in kg/qcm,

E das Elastizitätsmaß in kg/qcm.

Ferner seien φ und ψ Zahlen, die von F. Grashof*) für die beiden Grenzfälle

a) die Platte liegt am Umfange frei, also unabgedichtet auf,

b) die Platte ist am Umfange fest eingespannt,

rechnerisch bestimmt worden sind nach Versuchen von C. Bach,**) aber außer von der Befestigungsweise der Platte am Umfange noch von der Größe der Kraft abhängen, mit der die Platte zum Zwecke der Abdichtung gegenüber der Druckflüssigkeit angepreßt wird, von der Art der Abdichtung, von der Beschaffenheit der Oberfläche der Platte da, wo sie die Dichtung berührt, und da, wo sie sich mit ihrer anderen Seite gegen die Auflagerstelle stützt, usw.

Die Fälle **3.** und **6.** sind nach F. Grashof, die übrigen sämtlich nach C. Bach angegeben.

1. Kreisförmige Platte, durch den Flüssigkeitsdruck p kg/qcm **gleichmäßig belastet** (Abb. 86 und 87).

Abb. 86.



Abb. 87.



$$\sigma_{max} = \varphi \frac{r^2}{s^2} p < k_b;$$

$$f = \psi \frac{r^4}{s^3} \frac{p}{E}.$$

Je nachdem die Auflagerung am Umfange sich von der in Abb. 87 dargestellten entfernt oder sich ihr nähert, ergibt sich für Gußeisen, solange σ_{max} in Plattenmitte auftritt,

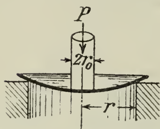
$$\varphi = 0,8 \text{ bis } 1,2; \qquad \psi = 0,17 \text{ bis } 0,60.$$

*) F. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit; Berlin 1878.
Eine genauere Theorie sowie Näherungsformeln finden sich in: Ph. Forchheimer Die Berechnung ebener und gekrümmter Behälterböden, Z. f. B. 1894 S. 450 u. f.

**) C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 5. Aufl.; Berlin 1905. Derselbe, Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten; Berlin 1891 (auch Z. d. V. d. I. 1890 S. 1041 u. f.)

Für zähes Flufseisen ist
im Falle von Abb. 86 (σ_{max} am Umfange) $\varphi = 0{,}50$, mindestens $= 0{,}45$
„ „ „ „ 87 (σ_{max} in Plattenmitte) $\varphi = 0{,}75$, „ $= 0{,}67$,
„ „ die Einspannung am Umfange soweit nachgiebig ist, dafs die Beanspruchungen in Plattenmitte und am Umfange gleich grofs ausfallen, ... $\varphi = 0{,}38$, mindestens $= 0{,}33$.

Abb. 88.



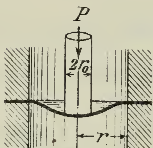
2. Kreisförmige Platte, in der Mitte durch die Kraft P kg **belastet** und **am Umfange frei aufliegend** (Abb. 88). Die Kraft P ist auf die Kreisfläche πr_0^2 gleichmäfsig verteilt.

$$\sigma_{max} = \frac{3}{\pi}\,\varphi\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{r_0}{r}\right)\frac{P}{s^2} \overline{\overline{<}}\, k_b;$$

$$f = \psi\,\frac{r^2}{s^3}\,\frac{P}{E}.$$

Dabei ist $\varphi = 1{,}5$ (Gufseisen); $\psi = 0{,}4$ bis $0{,}5$.

Abb. 89.



3. Kreisförmige Platte, wie unter **2.,** jedoch **am Umfange fest eingespannt** (Abb. 89).

$$\sigma_{max} = \frac{1{,}365}{\pi}\,\frac{P}{s^2}\ln\frac{r}{r_0} \overline{\overline{<}}\, k_b;$$

$$f = \frac{0{,}6825}{\pi}\,\frac{r^2}{s^3}\,\frac{P}{E} = 0{,}22\,\frac{r^2}{s^3}\,\frac{P}{E}.$$

4. Elliptische Platte, am Umfange aufliegend und durch den Flüssigkeitsdruck p kg/qcm **gleichmäfsig belastet** (ähnlich wie Abb. 86 u. 87). Grofse Achse $= 2\,a$, kleine Achse $= 2\,b$, Achsenverhältnis $b : a = \xi$.

$$\sigma_{max} = \varphi\,\frac{b^2}{s^2}\,\frac{2p}{1+\xi^2} \overline{\overline{<}}\, k_b,$$

worin $\varphi = 0{,}67$ bis $1{,}13$ (Gufseisen, vrgl. unter **1.**).

Für $\xi = 1$ **(Kreis)** ergibt sich hieraus $\sigma_{max} = \varphi\,\frac{b^2}{s^2}\,p$ (s. unter **1.**).

Weiteres s. unter **7**, S. 501.

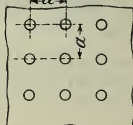
5. Elliptische Platte, am Umfange frei aufliegend und **in der Mitte** mit P kg **belastet.** Bezeichnungen wie unter **4.**

$$\sigma_{max} = \frac{8}{5\pi}\,\varphi\,\frac{8 + 4\xi^2 + 3\xi^4}{3 + 2\xi^2 + 3\xi^4}\,\xi\,\frac{P}{s^2} \overline{\overline{<}}\, k_b,$$

worin $\varphi = 1{,}50$ bis $1{,}67$ (Gufseisen).

Für $\xi = 1$ **(Kreis)** ergibt sich hieraus $\sigma_{max} = \frac{3}{\pi}\,\varphi\,\frac{P}{s^2}$ (s. unter **2.**).

Abb. 90.



6. Die (unbegrenzte) **Platte** ist durch den Druck p kg/qcm **gleichmäfsig belastet und in Punkten gehalten,** die sie in quadratische Felder von der Seite a teilen (Abb. 90).

Für jedes einzelne Feld ist

$$\sigma_{max} = 0{,}2275\,\frac{a^2}{s^2}\,p \overline{\overline{<}}\, k_b; \qquad f = 0{,}0284\,\frac{a^4}{s^3}\,\frac{p}{E}.$$

7. Rechteckige Platte, am Umfange aufliegend und durch den Flüssigkeitsdruck p kg/qcm **gleichmäfsig belastet.** *)

a und b sind die Seiten der rechteckigen Platte; $b : a = \xi$.

Bei Annahme der Einspannung der Platte nach der Diagonale wird, wie für die Ellipse:

$$\sigma_{\max} = \varphi \frac{(^1/_2\, b)^2}{s^2} \frac{2p}{1+\xi^2} \overline{\overline{<}}\, k_b;$$

mithin für $b = a$, $\xi = 1$ (quadratische Platte)

$$\sigma_{\max} = 0{,}25\, \varphi \frac{a^2}{s^2} p \overline{\overline{<}}\, k_b\,.$$

In diesen Formeln ist $\varphi = 0{,}75$ bis $1{,}13$ (Gufseisen, vrgl. unter I.).

Für $b = \infty$ (zweiseitige Auflagerung der Platte) ergibt sich nach S. 450 Fall 10 und S. 448 Fall 8 der Koeffizient von $\frac{a^2}{s^2} p$ zu 0,50 bis 0,75, die Plattenformel 7 würde dafür $0{,}5\,\varphi$, also insbesondere für Gufseisen 0,375 bis 0,565 ergeben.

Zu 4 und 7. Nach neueren Versuchen von C. Bach**) ist für **Flufseisen** die Zahl φ zu wählen

bei der elliptischen Platte (4) $\varphi = 0{,}43$ bis $0{,}55$ (max $= 0{,}86$),
„ „ rechteckigen „ (7) $\varphi = 0{,}56$ „ $0{,}75$ („ $= 1{,}13$).

Die eingeklammerten Gröfstwerte, entsprechend dem Zustande freier Auflagerung (beim Balken Fall 8 S. 448), sind nur ausnahmsweise zu verwenden; meist gilt der Mittelwert (0,55 bzw. 0,75), entsprechend vollkommener Einspannung (beim Balken Fall 10, S. 450). Der kleinste Wert von φ entspricht dem Einspannungszustande, bei dem das Biegungsmoment in Plattenmitte gleich ist dem am Plattenrande (entspr. $M_{\max} = {}^1/_{16}\, p l^2$ beim Balken, vrgl. Fall 10, S. 450, Bem. in erster Spalte).

Trapezplatten sind schätzungsweise durch rechteckige zu ersetzen.

8. Rechteckige Platte, am Umfange frei aufliegend und **in der Mitte** durch die Kraft P kg **belastet.** *)

a und b sind die Seiten der rechteckigen Platte; $b : a = \xi$.

Mit derselben Annahme wie bei **7.** wird:

$$\sigma_{\max} = 1{,}5\, \varphi \frac{\xi}{1+\xi^2} \frac{P}{s^2} \overline{\overline{<}}\, k_b,$$

worin $\varphi = 1{,}75$ bis $2{,}00$ (Gufseisen).

Für $b = a$, $\xi = 1$ (quadratische Platte) erhält man

$$\sigma_{\max} = 0{,}75\, \varphi \frac{P}{s^2} \overline{\overline{<}}\, k_b.$$

*) De Laharpe, Notes et formules de l'ingénieur, gibt für die Fälle 7 und 8 folgende Formeln:

Fall 7: $\sigma_{\max} = 0{,}92 \frac{b^2}{s^2} \frac{p}{(1+\xi^2)^2}$; $f = 0{,}19 \frac{b^4}{s^3} \frac{p}{E(1+\xi^2)^2}$.

Fall 8: $\sigma_{\max} = 2{,}28 \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2} \frac{P}{s^2}$; $f = 0{,}46 \frac{b^2}{s^3} \frac{P\xi}{E(1+\xi^2)^2}$.

**) Z. d. V. d. I. 1906 S. 1940.

Zum Vergleiche des Einflusses, den verschiedene Arten der Auflagerung der Ränder quadratischer Platten auf deren Durchbiegung ausüben, gibt Gauthier-Villars (1900) die Formel $f = \psi \frac{15}{\pi^5} \frac{b^4}{s^3} \frac{p}{E}$ mit folgenden Werten von ψ:

2 Ränder frei aufliegend,	2 eingespannt	$\psi = 0,134$,
3 „ „ „	1 „	$\psi = 0,212$,
4 „ „ „		$\psi = 0,310$,
2 „ „ „	1 „ 1 nicht aufliegend	$\psi_1 = 0,430$, $\psi_2 = 0,825$,
3 „ „ „	1 „ „	$\psi_1 = 0,602$, $\psi_2 = 0,915$,
2 „ „ „	2 „ „	$\psi_1 = 0,994$, $\psi_2 = 1,110$.

Hierin bedeutet ψ_1 den Wert für die Plattenmitte, ψ_2 den für die Mitte des vierten Randes.

b. Ebene Zylinderböden mit Krempung.*)

Die gröfste auftretende Normalspannung im Boden ist

$$\sigma_{max} = p \left\{ \varphi \frac{\varrho}{s} + \varphi_1 \left[\frac{r - 0,5\,\varrho\left(1 + \frac{\varrho}{r}\right)}{s} \right]^2 \right\},$$

worin (in cm) s die Bodendicke, ϱ den inneren Wölbungshalbmesser der Krempung und r den inneren Halbmesser des Bodens bzw. des anschliefsenden Hohlzylinders bedeutet; p ist der innere Ueberdruck in kg/qcm.

Die Werte von φ und φ_1 sind für flufseiserne, in Hohlzylinder eingenietete Böden: $\varphi = 0,5$ und $\varphi_1 = 0,33$ bis $0,38$ (je nach der Nachgiebigkeit des Zylinders und der Nietverbindung); für gufseiserne, angegossene Böden $\varphi = \varphi_1 = 0,8$.

c. Hohlzylinder.

Es bezeichnet

r_i den inneren Halbmesser in cm, r_a den äufseren Halbmesser in cm, } $s = r_a - r_i = \xi 2 r_i = \xi D_i$ die Wandstärke in cm,
k_z die zulässige Zugspannung des Stoffes in kg/qcm,
k die zulässige Druckspannung des Stoffes in kg/qcm,
$m = {}^{10}/_3$ das Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung.

1. Innerer Ueberdruck p_i in kg/qcm. Es ist

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{m k_z + (m-2) p_i}{m k_z - (m+1) p_i}} = r_i \sqrt{\frac{k_z + 0,4\,p_i}{k_z - 1,3\,p_i}}, \quad . \; . \; . \; 1.$$

wobei die gröfste Beanspruchung an der Innenfläche des Hohlzylinders in der Richtung des Umfanges auftritt. In der Richtung der Zylinderachse ist die Beanspruchung des Stoffes (durch die Kraft $\pi r_i^2 p_i$) viel kleiner; für den Fall geringer Wandstärken nur halb so grofs als winkelrecht dazu.

Es sind nur solche Verhältnisse möglich, wofür $p_i < (k_z : 1,3)$ oder $(p_i : k_z) < 0,77$.

*) C. Bach, Z. d. V. d. I. 1897 S. 1224 u. f.

Für geringe Wandstärken gilt hinreichend genau

$$s = r_i \frac{p_i}{k_z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{II.}$$

Bemerkung. Ist der Hohlzylinder durch Vernietung oder eine andere Verbindung einzelner Teile hergestellt, so hat man auch die Widerstandsfähigkeit der Verbindung in Betracht zu ziehen.

Werte $\xi = \frac{s}{D_i}$ zur Berechnung der Wandstärken von Rohren mit innerem Drucke.*)

p_i kg/qcm	k_z in kg/qcm									
	100	140	180	200	300	400	500	600	800	1000
10	0,0467	0,0324	0,0248	0,0223	0,0146	0,0109	0,0087	0,0072	0,0054	0,0039
12	0,0572	0,0394	0,0301	0,0269	0,0176	0,0131	0,0104	0,0087	0,0065	0,0052
14	0,0681	0,0467	0,0355	0,0317	0,0207	0,0154	0,0122	0,0102	0,0076	0,0060
16	0,0795	0,0541	0,0410	0,0366	0,0238	0,0176	0,0140	0,0116	0,0087	0,0069
18	0,0915	0,0618	0,0467	0,0416	0,0269	0,0199	0,0158	0,0130	0,0097	0,0077
20	0,1040	0,0697	0,0525	0,0467	0,0301	0,0223	0,0176	0,0146	0,0109	0,0087
25	0,1383	0,0906	0,0675	0,0599	0,0383	0,0281	0,0223	0,0184	0,0137	0,0109
30	0,1775	0,1134	0,0835	0,0738	0,0467	0,0342	0,0269	0,0223	0,0165	0,0131
35	0,2231	0,1383	0,1003	0,0885	0,0554	0,0403	0,0317	0,0261	0,0193	0,0154
40	0,2773	0,1657	0,1187	0,1040	0,0644	0,0467	0,0366	0,0301	0,0223	0,0176
45	0,3431	0,1962	0,1383	0,1206	0,0738	0,0532	0,0416	0,0342	0,0252	0,0199
50	0,4258	0,2303	0,1594	0,1383	0,0835	0,0599	0,0467	0,0383	0,0281	0,0223
55	0,5345	0,2686	0,1822	0,1572	0,0936	0,0667	0,0519	0,0425	0,0311	0,0246
60	0,6871	0,3132	0,2071	0,1775	0,1040	0,0738	0,0572	0,0467	0,0342	0,0269
65	0,9256	0,3647	0,2344	0,1994	0,1150	0,0810	0,0626	0,0510	0,0373	0,0293
70	1,3856	0,4258	0,2644	0,2231	0,1264	0,0885	0,0681	0,0554	0,0403	0,0317
80		0,5929	0,3351	0,2773	0,1508	0,1040	0,0795	0,0644	0,0467	0,0366
90		0,8881	0,4258	0,3431	0,1775	0,1206	0,0915	0,0738	0,0532	0,0416
100		1,6213	0,5488	0,4258	0,2071	0,1383	0,1040	0,0835	0,0599	0,0467
110			0,7303	0,5345	0,2401	0,1572	0,1172	0,0936	0,0667	0,0519
120			1,0411	0,6871	0,2773	0,1775	0,1311	0,1040	0,0738	0,0572
130			1,7962	0,9256	0,3196	0,1994	0,1457	0,1150	0,0810	0,0626
140				1,3856	0,3685	0,2231	0,1612	0,1264	0,0885	0,0681
150				3,1056	0,4258	0,2490	0,1775	0,1383	0,0961	0,0738
160					0,4946	0,2773	0,1949	0,1508	0,1040	0,0795
180					0,6871	0,3431	0,2332	0,1775	0,1206	0,0915
200					1,0411	0,4258	0,2773	0,2071	0,1383	0,1040
220					2,1322	0,5345	0,3288	0,2401	0,1572	0,1172
240						0,6871	0,3903	0,2773	0,1775	0,1311
260						0,9256	0,4656	0,3196	0,1994	0,1457
280						1,3856	0,5607	0,3685	0,2231	0,1612
300						3,1056	0,6871	0,4258	0,2490	0,1775
320							0,8672	0,4946	0,2773	0,1949
340							1,1557	0,5792	0,3085	0,2134
360							1,7430	0,6871	0,3431	0,2332

Beispiel. Ein gufseiserner **Prefszylinder** von 36 cm Kolbendurchmesser und 40 cm innerer Weite soll zur Hebung einer Brückenlast von 224 t benutzt werden. Wie grofs mufs für $k_z = 600$ kg/qcm die Wandstärke s sein?

*) Mitgeteilt von H. Fahlenkamp in Schalke i. W.

Bei 36 cm Durchmesser hat die Kolbenfläche rd. 1018 qcm Inhalt, so dafs die Wasserspannung $p_i = 224\,000 : 1018 = 220$ kg/qcm beträgt, also $p_i : k_z = 220 : 600 = 0{,}367$, d. i. $< 0{,}77$. Nach der Tafel S. 503 ist $\xi = 0{,}2401$ für $p_i = 220$ und $k_z = 600$, mithin die erforderliche Wandstärke $s = 0{,}2401 \,.\, 40 = 9{,}6$ cm.

Formel II würde den zu geringen Wert $s = 20 \,.\, 0{,}367 = 7{,}3$ cm ergeben.

Berechnung der Wandstärke zylindrischer **Dampfkessel** mit innerem Ueberdrucke s. Hamburger Normen 1905, 7. Abschn., Kraftmaschinen, unter „Teile der Dampfkessel".

2. Aeufserer Ueberdruck p_a in kg/qcm. Wenn ein Einknicken der Wandung nicht zu erwarten steht, so ist

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{mk}{mk - (2m-1)p_a}} = r_i \sqrt{\frac{k}{k - 1{,}7\,p_a}} \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

Nach Mafsgabe der Gleichung III sind nur solche Verhältnisse möglich, wofür $p_a < (k : 1{,}7)$ oder $(p_a : k) < 0{,}59$ ist.

Für geringe Wandstärken gilt hinreichend genau

$$s = r_a \frac{p_a}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV.}$$

Die Bemerkung unter 1. (s. o.) gilt auch hier.

Der günstige Einflufs der Zylinderböden und etwaiger Quernähte ist in den Formeln unter 1. und 2. nicht berücksichtigt. Schätzungsweise kann die Berücksichtigung durch Wahl einer höheren zulässigen Spannung erfolgen; dabei ist der Einflufs um so gröfser, je kürzer der Zylinder im Vergleiche zum Durchmesser ist.

Berechnung der Wandstärke von Hohlzylindern mit äufserem Ueberdrucke, bei denen ein Eindrücken der Wandung zu befürchten ist **(Dampfkessel-Flammrohre),** nach C. Bach, s. Hamburger Normen 1905, 7. Abschn., Kraftmaschinen, unter „Teile der Dampfkessel".

d. Hohlkugeln.

Bezeichnungen wie unter **c.**, S. 502.

1. Innerer Ueberdruck p_i in kg/qcm. Es ist

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{2\,mk_z + 2\,(m-2)\,p_i}{2\,mk_z - (m+1)\,p_i}} = r_i \sqrt[3]{\frac{k_z + 0{,}4\,p_i}{k_z - 0{,}65\,p_i}} \quad . \quad . \quad \text{V.}$$

Nach Mafsgabe dieser Gleichung sind nur solche Verhältnisse möglich, wofür $p_i < (k_z : 0{,}65)$ oder $(p_i : k_z) < 1{,}54$ ist.

Die gröfste Zugbeanspruchung tritt an der Innenfläche in der Richtung des Umfanges auf.

Für geringe Wandstärken gilt hinreichend genau

$$s = \frac{1}{2}\, r_i \frac{p_i}{k_z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{VI.}$$

Bemerkung. Ist die Hohlkugel durch Vernietung oder eine andere Verbindung einzelner Teile hergestellt, so hat man auch die Widerstandsfähigkeit der Verbindung in Betracht zu ziehen.

2. Aeufserer Ueberdruck p_a in kg/qcm. Wenn ein Einknicken der Wandung nicht zu erwarten steht, so ist

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{2\,mk}{2\,mk - 3\,(m-1)\,p_a}} = r_i \sqrt[3]{\frac{k}{k - 1{,}05\,p_a}} \quad \ldots \text{VII.}$$

Nach Mafsgabe dieser Gleichung sind nur solche Verhältnisse möglich, wofür $p_a < (k : 1{,}05)$ oder $(p_a : k) < 0{,}95$ ist.

Für geringe Wandstärken gilt hinreichend genau

$$s = \frac{1}{2}\, r_a \frac{p_a}{k} \quad \ldots\ldots\ldots \text{VIII.}$$

Die Bemerkung unter **1.** (s. o.) gilt auch hier.

e. Schlufsbemerkung.

Ebene, aus genügend zähem Stoffe bestehende **Platten,** die sich unter Einwirkung der Belastung durchgebogen haben, besitzen in diesem gewölbten Zustand eine gröfsere Widerstandsfähigkeit als in ihrer ursprünglichen ebenen Form.

Wird eine **Platte** oder ein **Gefäfs** abgenutzt, z. B. durch Abrosten usw., so ist die berechnete Wandstärke um einen der Abnutzung entsprechenden Betrag zu vergröfsern. Verlangen Rücksichten auf Herstellung, Fortschaffung, Aufstellung, auf Temperaturunterschiede usw. eine gröfsere Wandstärke, als die vorstehenden Gleichungen geliefert haben, so sind diese Rücksichten ebenfalls bestimmend.

VIERTER ABSCHNITT.

STOFFKUNDE.

I. ALLGEMEINES.

A. Chemische Elemente und Verbindungen.

Name	Chemische Formel	Atom- bzw. Molekular-Gewicht	100 Gewichtsteile der Verbindung enthalten:
Aluminium	Al	27,04	—
Tonerde	Al_2O_3	101,96	53,04 Al
Aluminiumchlorid	Al_2Cl_6	266,3	20,30 Al
Tonerdehydrat	$Al_2(OH)_6$	155,84	34,64 Al
Kali-Alaun	$K_2SO_4 + Al_2(SO_4)_3 + 24H_2O$	946,46	5,71 Al
Antimon	Sb	119,96	—
Antimontrisulfid	Sb_2S_3	335,14	71,38 Sb
Antimonpentasulfid	Sb_2S_5	399,10	59,93 Sb
Arsen	As	74,9	—
Arsenige Säure	As_2O_3	197,68	75,27 As
Arsentrisulfid (Auripigment)	As_2S_3	245,74	60,95 As
Baryum	Ba	136,9	—
Baryumoxyd (Baryt)	BaO	152,86	89,55 Ba
Baryumsuperoxyd	BaO_2	168,82	90,54 BaO
Schwefels. Baryt (Schwerspat)	$BaSO_4$	232,72	65,64 BaO
Kohlensaurer Baryt	$BaCO_3$	196,75	77,69 BaO
Beryllium	Be	9,08	—
Blei	Pb	206,39	—
Bleioxyd	PbO	222,36	92,82 Pb
Bleimennige	Pb_3O_4	683,04	90,65 Pb
Schwefelblei (Bleiglanz)	PbS	238,38	86,58 Pb
Schwefelsaures Bleioxyd	$PbSO_4$	302,22	73,57 PbO
Chlorblei	$PbCl_2$	277,14	74,47 Pb
Bor	B	10,9	—
Borsäure	B_2O_3	69,68	31,29 B
Brom	Br	79,76	—
Bromsilber	$AgBr$	187,42	42,56 Br

Name	Chemische Formel	Atom- bzw. Molekular-Gewicht	100 Gewichtsteile der Verbindung enthalten:
Chlor	Cl	35,37	—
Chlorsilber	$AgCl$	143,03	24,73 Cl
Chlorwasserstoff (Salzsäure)	HCl	36,37	97,25 Cl
Chrom	Cr	52,45	—
Chromoxyd	Cr_2O_3	152,78	68,66 Cr
Eisen	Fe	55,88	—
Eisenoxyd (Eisenglanz)	Fe_2O_3	159,64	70,01 Fe
Schwefelsaures Eisenoxydul (Eisenvitriol)	$FeSO_4 + 7H_2O$	277,52	25,88 FeO
Fluor	Fl	19,06	—
Fluorkalzium (Flufsspat)	$CaFl_2$	78,03	48,85 Fl
Gold	Au	196,2	—
Jod	J	126,54	—
Jodsilber	AgJ	234,20	54,03 J
Kadmium	Cd	111,7	—
Kalium	K	39,03	—
Kalihydrat (Kaliumhydroxyd)	KOH	55,99	83,96 K_2O
Chlorkalium (Sylvin)	KCl	74,40	52,46 K
Schwefelsaures Kali	K_2SO_4	173,88	54,07 K_2O
Salpetersaures Kali (Salpeter)	KNO_3	100,92	46,58 K_2O
Kohlensaures Kali (Pottasche)	K_2CO_3	137,91	68,17 K_2O
Doppelt chromsaures Kali	$K_2Cr_2O_7$	294,68	31,84 K_2O
Cyankalium	KCN	65,01	60,03 K
Kalzium	Ca	39,91	—
Kalziumcarbid	CaC_2	63,85	62,51 Ca
Kalziumoxyd (gebr. Kalk, Aetzk.)	CaO	55,87	71,43 Ca
Kalziumoxydhydrat (gel. Kalk)	$Ca(OH)_2$	73,83	75,67 CaO
Kohlensaurer Kalk (Kalkspat)	$CaCO_3$	99,76	56,00 CaO
Schwefelsaurer Kalk (Anhydrit)	$CaSO_4$	135,73	41,16 CaO
Kobalt	Co	58,6	—
Kohlenstoff	C	11,97	—
Kohlenoxyd	CO	27,93	42,86 C
Kohlensäure	CO_2	43,89	27,27 C
Azetylen	C_2H_2	25,94	92,29 C
Kupfer	Cu	63,18	—
Kupferoxyd	CuO	79,14	79,83 Cu
Schwefelkupfer	CuS	95,16	66,39 Cu
Schwefelsaures Kupferoxyd (Kupfervitriol)	$CuSO_4 + 5H_2O$	248,80	31,80 CuO
Lithium	Li	7,01	—
Magnesium	Mg	23,94	—
Magnesiumoxyd	MgO	39,90	60,00 Mg
Schwefels. Magnesia (Bittersalz)	$MgSO_4 + 7H_2O$	245,48	16,25 MgO
Mangan	Mn	54,8	—
Mangansuperoxyd (Pyrolusit)	MnO_2	86,72	63,19 Mn
Schwefelmangan (Mn-Blende)	MnS	86,78	63,14 Mn

Name	Chemische Formel	Atom- bzw. Molekular-Gewicht	100 Gewichtsteile der Verbindung enthalten:
Natrium	Na	23	—
Natronhydrat (Natron)	NaOH	39,96	77,52 Na_2O
Schwefelsaures Natron (Glaubersalz)	Na_2SO_4	141,80	43,68 Na_2O
Kohlensaures Natron (Soda)	Na_2CO_3	105,85	58,53 Na_2O
Salpetersaures Natron (Chilisalpeter)	$NaNO_3$	84,89	36,49 Na_2O
Borsaures Natron (Borax)	$Na_2B_4O_7 + 10\,H_2O$	380,92	16,26 Na_2O
Chlornatrium (Kochsalz)	NaCl	58,36	39,39 Na
Nickel	Ni	58,60	—
Nickeloxydul	NiO	74,56	78,59 Ni
Phosphor	P	30,96	—
Phosphorsaurer Kalk	$Ca_3P_2O_8$	309,33	45,82 P_2O_5
Platin	Pt	194,43	—
Kaliumplatinchlorid	K_2PtCl_6	484,71	40,11 Pt
Quecksilber	Hg	199,8	—
Quecksilberoxyd (Präzipitat)	HgO	215,76	92,60 Hg
Schwefelquecksilber (Zinnober)	HgS	231,78	86,20 Hg
Quecksilberchlorür (Kalomel)	HgCl	235,17	84,96 Hg
Quecksilberchlorid (Sublimat)	$HgCl_2$	270,54	73,85 Hg
Sauerstoff	O	15,96	—
Schwefel	S	31,98	—
Schwefelsäure	H_2SO_4	97,82	32,69 S
Schwefelwasserstoff	H_2S	33,98	94,11 S
Silber	Ag	107,66	—
Silizium	Si	28	—
Kieselsäure (Quarz)	SiO_2	59,92	46,73 Si
Stickstoff	N	14,01	—
Ammoniak	NH_3	17,01	82,36 N
Ammoniumchlorid (Salmiak)	NH_4Cl	53,38	31,86 NH_3
Salpetersäure	HNO_3	62,89	22,28 N
Strontium	Sr	87,3	—
Schwefelsaurer Strontian	$SrSO_4$	183,12	56,39 SrO
Kohlensaurer Strontian	$SrCO_3$	147,15	70,17 SrO
Wasserstoff	H	1	—
Wasser	H_2O	17,96	88,86 O; 11,14 H
Wismut	Bi	207,5	—
Wismutoxyd (Wismutocker)	Bi_2O_3	462,88	89,65 Bi
Schwefelwismut (Wismutglanz)	Bi_2S_3	510,94	81,22 Bi
Wolfram	Wo	183,6	—
Zink	Zn	64,88	—
Zinkoxyd (Zinkweiſs)	ZnO	80,84	80,26 Zn
Schwefelsaures Zinkoxyd (Zinkvitriol)	$ZnSO_4 + 7\,H_2O$	286,42	28,22 ZnO
Kohlensaures Zinkoxyd (Zinkspat)	$ZnCO_3$	124,73	64,82 ZnO
Schwefelzink (Zinkblende)	ZnS	96,86	66,98 Zn
Zinn	Sn	117,35	—
Zinnsäure (Zinnstein)	SnO_2	149,27	78,62 Sn

B. Spezifische Gewichte.

Die Verhältniszahl σ des Gewichtes eines festen oder flüssigen Körpers zu dem (an demselben Orte ermittelten) Gewichte einer dem Körper raumgleichen, chemisch reinen Wassermenge bei 4° C ist das **spezifische Gewicht des Körpers.**

Die Verhältniszahl σ' des Gewichtes eines Gases (oder Dampfes) zu dem (an demselben Orte ermittelten) Gewichte einer dem Gase raumgleichen, trockenen Luftmenge, bestehend aus etwa 78,67 R.-T. Stickstoff und 21,33 R.-T. Sauerstoff (oder 76,42 G.-T. Stickstoff und 23,58 G.-T. Sauerstoff, vrgl. S. 371 u. f.), bei 0° C und einem Drucke von 760 mm Q.-S. ist das **spezifische Gewicht des Gases** (oder Dampfes).

Da das Mischungsverhältnis der Luft (aus Stickstoff, Sauerstoff, Wasserdampf, Kohlensäure usw.) veränderlich ist, so erscheint es richtiger, das spezifische Gewicht der Gase und Dämpfe auf chemisch reinen Wasserstoff = 1 zu beziehen. . Die auf S. 514 angegebenen Zahlen sind hierzu mit 14,44 zu multiplizieren.

Ist V (oder V') der Rauminhalt eines Körpers (oder Gases) in cdm (l),
G (oder G') das Gewicht eines Körpers (oder Gases) in kg,

so ist $$G = V\sigma \quad \text{und} \quad G' = 0{,}001\,293\, V' \sigma',$$

d. h., 1 cdm des Körpers wiegt σ kg, 1 ccm des Körpers wiegt σ g,
eine Körperschicht von 1 qm Fläche und 1 mm Höhe wiegt σ kg,
1 cbm des Körpers wiegt 1000 σ kg = σ Tonnen (t),
1 l des Gases wiegt 0,001 293 σ' kg = 1,293 σ g,
1 cbm des Gases wiegt 1,293 σ' kg.

Das mittlere spez. Gewicht der **Erde** (von König, Krigar-Menzel und Richarz nach dem Jollyschen Wägungsverfahren bestimmt) ist 5,505, und hiermit das Gesamtgewicht der Erde etwa $5960 \cdot 10^{18}$ t = 5960 Trillionen Tonnen.

Die nachfolgend angegebenen Werte von σ und σ' sind Mittelwerte oder Grenzzahlen.

a. Spezifische Gewichte fester Körper.

Wasser (bei 4°) = 1.

Aetzkali, trocken	2,1	Asbest	2,1 — 2,8
Aetznatron mit 22,2 vH H_2O	2,0	Asbestpappe	1,2
Alabaster	2,3 — 2,8	Asphalt (Erdpech)	1,1 — 1,5
Alaun, Kali-	1,71	Basalt	2,7 — 3,2
Aluminium, chem. r.	2,6	Baumwolle, lufttrock.	1,47 — 1,50
,, gehämmert	2,75	Bergkristall, rein	2,6
,, gegossen	2,56	Bernstein	1,0 — 1,1
Aluminiumbronze	7,7	Beton	1,80 — 2,45
Amalgam, natürl.	13,7 — 14,1	Bimsstein, natürl.	0,37 — 0,9
Anthrazit	1,4 — 1,7	,, Wiener	2,2 — 2,5
Antimon	6,7	Bittersalz, kristall.	1,7 — 1,8
Antimonglanz	4,6 — 4,7	,, wasserfrei	2,6
Apatit	3,16 — 3,22	Blätterkohle	1,2 — 1,5
Arsen	5,7 — 5,8	Blei	11,25 — 11,37
Arsenige Säure	3,69 — 3,72	,, flüssig	10,37
		Bleiglätte, künstl.	9,3 — 9,4

Bleiglätte, natürl.	7,83—7,98
Bleiglanz	7,3—7,6
Bleiweifs	6,7
Bleizucker	2,4
Blutlaugensalz, gelb	1,83
Bolus	2,2—2,5
Bor	2,68
Borazit	2,9—3,0
Borax	1,7—1,8
Brauneisenstein	3,40—3,95
Braunkohle	1,2—1,5
Braunstein (Pyrolusit)	3,7—4,6
Bronze (bei 7,9 bis 14 vH Zinngehalt)	7,4—8,9
Butter	0,94—0,95
Chilisalpeter	2,26
Chlorbaryum, kristall.	3,7
Chlornatrium, gesott.	2,15—2,17
Chromgelb	6,0
Chroms. Kali, dopp.	2,7
Deltametall	8,6
Diamant	3,5—3,6
Dolomit	2,9
Eis	0,88—0,92
Eisen, chemisch rein	7,88
Eisenvitriol	1,80—1,98
Elfenbein	1,83—1,92
Erde, lehmig, fest gestampft, frisch	2,0
„ „ trocken	1,6—1,9
Erde, mager, trocken	1,34
Fahlerze	4,36—5,36
Feldspat (Orthoklas)	2,53—2,58
Fette	0,92—0,94
Feuerstein	2,6—2,8
Flachs, lufttrocken	1,5
Flufseisen	7,85
Flufsspat	3,1—3,2
Flufsstahl	7,86
Gabbro	2,9—3,0
Galmei	4,1—4,5
Gerste, geschüttet	0,69
Gips, gebrannt	1,81
„ gegossen, trocken	0,97
„ gesiebt	1,25
Glanzkohle	1,2—1,5
Glas, Fenster-	2,4—2,6
„ Flaschen-	2,6
„ Flint-	3,15—3,90
Glas, grünes	2,64
„ Kristall-	2,9—3,0
„ Spiegel- od. Kron-	2,45—2,72
Glaubersalz	1,4—1,5
Glimmer	2,65—3,20
Glockenmetall	8,81
Gneis	2,4—2,7
Gold, gediegen	19,33
„ gegossen	19,25
„ gehämmert	19,30—19,35
Granat	3,4—4,3
Granit	2,51—3,05
Graphit	1,9—2,3
Grauspiefsglanz	4,6—4,7
Grobkohle	1,2—1,5
Gummi, arabisches	1,31—1,45
„ (Kautschuk) roh	0,92—0,96
Gummifabrikate	1,0—2,0
Gummigutt	1,2
Gufseisen	7,25
„ flüssig	6,9—7,0
Guttapercha	0,96—0,99
Hafer, geschüttet	0,43
Hanffaser, lufttrocken	1,5
Harz	1,07

Holzarten:	lufttr.	frisch
Ahorn	0,53—0,81	0,83—1,05
Akazie	0,58—0,85	0,75—1,00
Apfelbaum	0,66—0,84	0,95—1,26
Birke	0,51—0,77	0,80—1,09
Birnbaum	0,61—0,73	0,96—1,07
Buchsbaum	0,91—1,16	1,20—1,26
Ebenholz	1,26	—
Eberesche	0,69—0,89	0,87—1,13
Eiche	0,69—1,03	0,93—1,28
Erle	0,42—0,68	0,63—1,01
Esche	0,57—0,94	0,70—1,14
Fichte (Rottanne)	0,35—0,60	0,40—1,07
Guajak (Pockholz)	1,17—1,39	—
Hickory	0,60—0,90	—
Kiefer (Föhre)	0,31—0,76	0,38—1,08
Kirschbaum	0,76—0,84	1,05—1,18
Lärche	0,47—0,56	0,81
Linde	0,32—0,59	0,58—0,87
Mahagoni	0,56—1,06	—
Nufsbaum	0,60—0,81	0,91—0,92
Pappel	0,39—0,59	0,61—1,07
Pechkiefer (Pitch-pine)	0,83—0,85	—
Pflaumenbaum	0,68—0,90	0,87—1,17
Rofskastanie	0,58	—
Rotbuche	0,66—0,83	0,85—1,12
Steineiche	0,71—1,07	—
Tanne (Weifstanne)	0,37—0,75	0,77—1,23
Teakholz	0,9	—

	lufttr.	frisch
Ulme (Rüster) . .	0,56—0,82	0,78—1,18
Weide	0,49—0,59	0,79
Weifsbuche . . .	0,62—0,82	0,92—1,25
Zeder	0,57	—

Holzkohle, lufterfüllt .	0,4	
,, luftfrei .	1,4 —	1,5
Holzpflasterung . .	0,69—	0,72
Hornblende . . .	3,0	
Isolierbims . . .	0,38	
Jod	4,95	
Kadmium	8,6	
Kalium	0,865	
Kalk, gebrannt, gesch.	0,9 —	1,3
,, gelöscht . . .	1,15—	1,25
Kalkmörtel, trocken .	1,60—	1,65
,, frisch .	1,75—	1,80
Kalksandsteine . .	1,89—	1,92
Kalkspat	2,6 —	2,8
Kalkstein	2,46—	2,84
Kalzium	1,58	
Kalziumkarbid . .	2,26	
Kanonengut . . .	8,44	
Kaolin (Porzellanerde)	2,2	
Kartoffel	1,06—	1,13
Kautschuk, roh . .	0,92—	0,96
Kies	1,8 —	2,0
Kieselerde	2,66	
Kieselsäure, kristall. .	2,6	
,, amorph.	2,2	
Knochen	1,7 —	2,0
Kobalt	8,51	
,, pulverig . .	bis 9,5	
Kobaltglanz . . .	6,0 —	6,1
Kochsalz, gesotten .	2,15—	2,17
Koks im Stück . .	1,4	
Kolophonium . .	1,07	
Kork	0,24	
Korkstein, weifser .	0,25	
,, schwarzer	0,56	
Korund	3,9 —	4,0
Kreide	1,8 —	2,6
Kunstsandstein . .	2,0 —	2,1
Kupfer, gegossen . .	8,8	
,, gewalzt . .	8,9 —	9,0
,, gehämmert .	8,9 —	9,0
,, -Draht . .	8,8 —	9,0
,, elektrolyt. .	8,9 —	8,95
,, flüssig . .	8,22	

Kupferglanz . . .	5,5 —	5,8
Kupferkies . . .	4,1 —	4,3
Kupfervitriol, krist. .	2,2 —	2,3
Lagermetall, Weifsmet.	7,1	
Lava, basaltisch . .	2,8 —	3,0
,, trachytisch . .	2,0 —	2,7
Leder, gefettet . .	1,02	
,, trocken . .	0,86	
Lehm, trocken . .	1,5 —	1,6
,, frisch gegraben	1,67—	1,85
Leim	1,27	
Linoleum in Rollen .	1,15—	1,30
Magnesia	3,2	
Magnesit	3,0	
Magnesium . . .	1,74	
Magneteisenstein .	4,9 —	5,2
Magnetkies . . .	4,54—	4,64
Malachit	3,7 —	4,1
Mangan	7,15—	8,03
Manganerz, rot . .	3,46	
,, schwarz .	3,9 —	4,1
Marmor, gewöhnlicher	2,52—	2,85
,, carrarischer	2,72	
Meerschaum . . .	0,99—	1,28
Mehl, lose	0,4 —	0,5
,, zus. geprefst .	0,7 —	0,8
Melaphyr	2,6	
Mennige, Blei- . .	8,6 —	9,1
Mergel	2,3 —	2,5
Messing, gewalzt } je nach Zinkgeh.	8,52—	8,62
,, gegossen } je nach Zinkgeh.	8,4 —	8,7
,, gezogen } je nach Zinkgeh.	8,43—	8,73
Mühlstein-Quarz .	1,25—	1,60
Naphthalin . . .	1,15	
Natrium	0,978	
Neusilber	8,4 —	8,7
Nickel	8,9 —	9,2
Ocker	3,5	
Papier	0,70—	1,15
Paraffin	0,87—	0,91
Pech	1,07—	1,10
Phenol (bei 0°) . .	1,08—	1,09
Phosphor, gelb-weifs	1,82	
,, rot . .	2,18	
,, kristall. .	2,34	
Phosphorbronze . .	8,8	
Platin, gehämmert .	21,3 —	21,5
,, gegossen . .	21,15	
Polierschiefer . .	2,1	

Porphyr	2,6 — 2,9
Porzellan	2,3 — 2,5
Pottasche	2,26
Prefskohle (Brikett) .	1,25
Quarz	2,5 — 2,8
Roggen, geschüttet .	0,68— 0,79
Roheisen, weifses . .	7,0 — 7,8
,, graues . .	6,7 — 7,6
Roteisenstein . . .	4,5 — 4,9
Salmiak	1,5 — 1,6
Salpeter, Kali- . .	1,95— 2,08
Sand, fein und trocken	1,40— 1,65
,, fein und feucht	1,90— 2,05
,, grob . . .	1,4 — 1,5
Sandstein	2,2 — 2,5
Schafwolle, lufttrock.	1,32
Schamottesteine . .	1,85
Schiefer	2,65 — 2,70
Schiefspulver, lose .	0,9
,, gestampft	1,75
Schlacke, Hochofen- .	2,5 — 3,0
Schmirgel	4,0
Schnee, lose . . .	0,125
Schwefel, amorph. .	1,93
,, kristall. .	1,96 und 2,07
,, gediegen .	2,07
Schwefelkies (Pyrit) .	4,9 — 5,2
Schweifseisen . .	7,8
,, als Draht	7,60— 7,75
Schweifsstahl . . .	7,86
Schwerspat . . .	4,5
Serpentin	2,4 — 2,7
Silber, gegossen . .	10,42—10,53
,, gehämmert .	10,5 —10,6
,, flüssig . . .	9,51
Soda, geglüht . . .	2,5
,, kristallisiert .	1,45
Spateisenstein . .	3,7 — 3,9
Speckstein . . .	2,6 — 2,8
Speifskobalt . . .	6,4 — 7,3
Stärke im Stück . .	1,53
Stahl	7,85— 7,87
Steinkohle im Stück .	1,2 — 1,5
Steinsalz	2,28— 2,41
Strontianit	3,7
Strontium	2,5
Syenit	2,6 — 2,8
Talg	0,90— 0,97
Talk	2,7
Ton	1,8 — 2,6
Tonschiefer . . .	2,76— 2,88
Topas	3,51— 3,57
Torf, Erd-	0,64
,, Pech- . . .	0,84
Torfstreu, geprefst .	0,21— 0,23
Trachyt	2,6 — 2,8
Trafs, gemahlen . .	0,95
Tuffstein im Stück .	1,3
,, als Ziegel .	0,8 — 0,9
Wachs	0,95— 0,98
Walrat	0,88— 0,94
Weifsmetall . . .	7,1
Weizen, geschüttet .	0,7 — 0,8
Wismut, gediegen .	9,78
,, gegossen .	9,82
,, flüssig . .	10,055
Wolfram	17,5
Zemente	0,82— 1,95
Ziegel, gewöhnl. . .	1,4 — 1,6
,, Klinker . .	1,7 — 2,0
Ziegelmauerwerk .	
volles, frisch .	1,57— 1,63
,, trocken .	1,42— 1,46
Zink, gegossen . . .	6,86
,, gewalzt . . .	7,13— 7,20
,, flüssig . . .	6,48
Zinkblende . . .	3,9 — 4,2
Zinkchlorid . . .	2,75
Zinkspat (Galmei) .	4,1 — 4,5
Zinkvitriol, kristall. .	2,04
Zinn, gehämm. o. gewalzt	7,3 — 7,5
,, gegossen . . .	7,2
,, flüssig . . .	7,025
Zinnstein	6,4 — 7,0
Zinnober	8,12
Zucker, weifser . .	1,61

b. Spezifische Gewichte von Flüssigkeiten.

Name der Flüssigkeit	Spez. Gew.	bei °C
Aceton	0,79	20°
Aether (Aethyläther)	0,74	0°
Aldehyd	0,80	0°
Alkohol (wasserfrei)	0,79	15°
Amylalkohol	0,81	20°
Anilin	1,04	0°
Anisöl	1,00	16°
Baldrianöl	0,97	16°
Baumwollsamenöl	0,93	15°
Benzin	0,68—0,70	15°
Benzol	0,90	0°
Bernsteinöl	0,80	15°
Bier	1,02—1,04	—
Brom	3,19	0°
Buttersäure	0,96	15°
Chlornatrium, 14 vH NaCl	1,10	15°
„ 26 „ „	1,20	15°
Chloroform	1,48	18°
Eiweifs	1,04	15°
Glyzerin (wasserfrei)	1,26	0°
„ mit 50 vH H_2O	1,13	0°
Harzöl	0,96	15°
Holzgeist	0,80	0°
Kalilauge, 12 vH KOH	1,10	15°
„ 31 „ „	1,30	15°
„ 63 „ „	1,70	15°
Kampferöl	0,91	—
Karbolsäure, roh	0,95—0,97	15°
Kienöl	0,85—0,86	15°
Klauenfett	0,92	15°
Kokosnufsöl	0,93	15°
Kreosotöl	1,04—1,10	15°
Kupfervitriol,		
mit 15 vH $CuSO_4 + 5\,H_2O$	1,10	15°
„ 28 „ „ + „	1,15	15°
Lavendelöl	0,88	16°
Leinöl, gekochtes	0,94	15°
Methylalkohol	0,81	4°
Milch*)	1,03	15°
Mineralschmieröle	0,90—0,93	20°
Mohnöl	0,92	15°
Naphtha, Petroleum-	0,76	19°

Name der Flüssigkeit	Spez. Gew.	bei °C
Natronlauge,		
mit 13 vH NaOH	1,15	15°
„ 22 „ „	1,25	15°
„ 66 „ „	1,70	15°
Oelsäure	0,90	15°
Olivenöl, (Baumöl, Provenceröl)	0,92	15°
Palmöl	0,91	15°
Petroleumäther	0,67	15°
Petroleum, Leucht-	0,79—0,82	15°
Photogen	0,78—0,85	15°
Quecksilber	13,5956	0°
Rapsöl, rohes	0,92	15°
„ raffiniertes	0,91	15°
Rizinusöl	0,97	15°
Rüböl, rohes	0,92	15°
„ raffiniertes	0,91	15°
Salpetersäure,		
mit 25 vH HNO_3	1,15	15°
„ 40 „ „	1,25	15°
„ 91 „ „	1,50	15°
Salzsäure, 10 vH HCl	1,05	15°
„ 40 „ „	1,20	15°
Schwefelkohlenstoff	1,29	15°
Schwefelsäure,		
mit 7,5 vH H_2SO_4	1,05	15°
„ 27 „ „	1,20	15°
„ 50 „ „	1,40	15°
„ 87 „ „	1,80	15°
„ rauchende	1,89	15°
Schweflige Säure (verdichtet)	1,49	-20°
Seewasser	1,02—1,03	15°
Specköl	0,92	15°
Teer, Steinkohlen-	1,20	—
Terpentinöl	0,87	16°
Tran	0,92—0,93	15°
Wasser (destilliert)	1,00	4°
Wein, Rhein-	0,99—1,00	—
Zinkvitriol,		
mit 17 vH $ZnSO_4 + 7\,H_2O$	1,10	15°
„ 55 „ „	1,40	15°
Zitronenöl	0,84	16°

*) Vollmilch 1,028, Halbmilch 1,030 und Magermilch 1,032 bei 15°.

Mit Hülfe der Tafel auf S. 298 erhält man durch Bildung von $1 : V_t$ das spez. Gewicht des Wassers bei verschiedenen Temperaturen.

Aräometer. Sind n die Aräometergrade, σ_l und σ_s die spezifischen Gewichte von Flüssigkeiten, leichter oder schwerer als Wasser, so ist bei dem Aräometer nach

Baumé (bei 12,5° C) . . . . . $\sigma_l = \frac{145,88}{145,88 + n}$ und $\sigma_s = \frac{145,88}{145,88 - n}$;

Beck („ 12,5° „) . . . . . $\sigma_l = \frac{170}{170 + n}$ und $\sigma_s = \frac{170}{170 - n}$;

Brix („ 15,6° „) . . . . . $\sigma_l = \frac{400}{400 + n}$ und $\sigma_s = \frac{400}{400 - n}$.

Spezifische Gewichte und Mischungsverhältnisse des wässerigen Alkohols (nach Brix).

Spezifisches Gewicht . . .	0,999	0,993	0,987	0,981	0,976	0,971	0,966	0,959	0,952	0,944
100 R.-T. enthalten { Alkohol-R.-T. . .	1	5	10	15	20	25	30	35	40	45
100 R.-T. enthalten { Wasser-R.-T. . .	99,06	95,31	90,71	86,19	81,71	77,23	72,71	68,11	63,41	58,59
Spezifisches Gewicht . . .	0,934	0,924	0,913	0,902	0,890	0,877	0,864	0,850	0,834	0,816
100 R.-T. enthalten { Alkohol-R.-T. . .	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
100 R.-T. enthalten { Wasser-R.-T. . .	53,70	48,72	43,66	38,56	33,38	28,14	22,82	17,42	11,88	6,15

Die vorstehenden Angaben gelten für eine Temperatur von $15^5/_9{}^0$. Dividiert man die Alkohol-R.-T. durch das zugehörige spezifische Gewicht und multipliziert mit 0,7946, so erhält man die entsprechenden Alkohol-G.-T.

c. Spezifische Gewichte von Gasen und Dämpfen

bei 0° und 760 mm Q.-S. (Vrgl. S. 509.)

Trockene atmosphärische **Luft** = 1.

Aetherdampf	2,586	Leuchtgas . . .	0,34—0,45
Aethylen	0,974	Quecksilberdampf . . .	6,94
Alkoholdampf	1,601	Salzsäuregas	1,25
Ammoniak	0,592	Sauerstoff	1,1056
Azetylen	0,91	Schwefeldampf	6,617
Chlor	2,423	Schwefelkohlenstoff . .	2,644
Chlorwasserstoff . . .	1,2612	Schwefelwasserstoff . .	1,175
Flufssäure	2,37	Schweflige Säure . . .	2,250
Grubengas (Sumpfgas) . .	0,559	Stickstoff	0,9714
Kohlenoxyd	0,9673	Wasserdampf	0,6233
Kohlensäure	1,5291	Wasserstoff	0,06927

Das spezifische Gewicht der **trockenen Luft** ist nach Regnault bei einer Temperatur von 0° und einem Drucke von 760 mm Q.-S., bezogen auf destilliertes Wasser von 4°, 0,001293187 oder ∾ 1 : 773. (Vrgl. S. 322.)

Gewichte von 1 cbm Gas oder Dampf in kg s. S. 333.

Das Gewicht von 1 cbm **Rauchgas** mittlerer Zusammensetzung beträgt etwa $1,25 - 0,0027\,t$ in kg, wenn t die Temperatur in °C ist. Da jedoch die Zusammensetzung der Rauchgase je nach dem verbrannten Brennstoffe und der mehr oder weniger reichlichen Luftzuführung sehr wechselt, so empfiehlt sich die genauere Berechnung auf Grund der Gasanalyse (vrgl. S. 375 u. f.).

C. Gewichte geschichteter Körper.

1 cbm wiegt kg:

Aepfel	300	Beton mit Granitbrocken . .	2200
Basalt	3200	Birnen und Pflaumen . .	350
Beton mit Ziegelbrocken . .	1800	Braunkohlen, luftrocken und in Stücken . . .	650—780
„ „ Kalksteinbrocken .	2000		

Buchenholz in Scheiten	400
Chilisalpeter, aufgeschüttet	1000
Eichenholz in Scheiten	420
Fettkalk, gebrannt und pulverig	500
Fichtenholz in Scheiten	320
Formsand, aufgeschüttet	1200
„ eingestampft	1650
Granit	2700
Gras und Klee	350
Holzkohlen von weichem Holze	150
„ „ hartem „	220
Kalk- und Bruchsteine	2000
Kartoffeln	650—700
Kohlen, Zwickauer	770—800
„ oberschlesische	760—800
„ niederschlesische	820—870
„ Saar-	720—800
„ Ruhr-	800—860
Koks, Gas-	360—470
„ Zechen-	380—530
Mist und Guano	750—950
Mörtel (Kalk und Sand)	1700—1800
Nadelholz in Scheiten	330
Rüben	570—650
Sand, Lehm, Erde, trocken	1600
„ „ „ nafs	2000
Schnee, frisch gefallen	80—190
„ feucht und wässerig	200—800
Schwemmsteine, rheinische	850
Siedesalz (Na Cl), grobkörnig	745
„ „ feinkörnig	785
Steinsalz (Na Cl), gemahlen	1015
Ton, Kies, trocken	1800
„ „ nafs	2000
Torf, lufttrocken	325—410
„ feucht	550—650
Trafs, gemahlen	950
Wasserkalk, gepulvert	550
Weifstannenholz in Scheiten	340
Ziegelsteine, gewöhnliche	1375—1500
„ Klinker	1600—1800

1 Ladung von 10000 kg (200 Ztr.) enthält cbm:

Brauneisenstein	3,0—3,5
Braunkohlen, lufttrocken und in Stücken	12,8—15,4
Buchenholz in Scheiten	25,0
Eichenholz in Scheiten	23,8
Fichtenholz in Scheiten	31,3
Flufskies, trocken	3,7—4,3
„ nafs	3,5—4,0
Flufssand, feucht	5,7
Formsand, aufgeschüttet	8,3
„ eingestampft	6,1
Holzkohlen von weichem Holze	66,7
„ „ hartem „	45,5
Kalk, gebrannt	7,7—8,4
Kalk- und Bruchsteine	5,0
Kartoffeln	13,7—14,3
Kohlen, Zwickauer	12,5—13,0
„ oberschlesische	12,5—13,2
„ niederschlesische	11,5—12,2
„ Saar-	12,5—13,9
„ Ruhr-	11,6—12,5
Koks, Gas-	21,3—27,8
„ Zechen-	18,9—26,3
Lehm, frisch gegraben	6,0
Mörtel (Kalk und Sand)	5,6—5,9
Nadelholz in Scheiten	30,3
Prefskohlen	9,0—10,0
Rüben	15,4—17,5
Schlacken und Koksasche	16,7
Schwefelkies	3,0
Schwemmsteine (rheinische)	11,8
Spateisenstein	3,0—3,3
Steinsalz (Na Cl), gemahlen	9,8
Teer, Steinkohlen-	8,3
Ton, trocken	5,6
„ nafs	5,0
Torf, lufttrocken	24,4—30,8
„ feucht	15,4—18,2
Trafs, gemahlen	10,5
Weifstannenholz in Scheiten	29,4
Ziegelsteine, gewöhnliche	6,7—7,3
„ Klinker	5,6—6,3

44 engl. Kub. F. geschütteter **Steinkohlen** wiegen etwa 1000 kg, also 100 engl. Kub. F. rd. 2270 kg, oder 1 cbm rd. 803 kg. Nach Stevens und Döring gehen in 1 cbm Schiffs-Laderaum 896 kg Steinkohlen.

II. METALLE.

Allgemeines.

a. Gewicht von 1000 m Draht in kg.

Spez. Gewichte: Draht aus Schmiedeisen 7,65*), Stahl 7,956*), Kupfer 9,00**), Messing 8,687**).

Dicke mm	Schmiedeisen kg	Stahl kg	Kupfer kg	Messing kg	Dicke mm	Schmiedeisen kg	Stahl kg	Kupfer kg	Messing kg
0,14	0,118	0,122	0,139	0,134	1,4	11,78	12,25	13,86	13,37
0,16	0,154	0,160	0,181	0,175	1,6	15,38	16,00	18,10	17,46
0,18	0,195	0,202	0,229	0,221	1,8	19,47	20,25	22,90	22,11
0,20	0,240	0,250	0,283	0,273	2,0	24,03	25,00	28,28	27,29
0,22	0,291	0,302	0,342	0,330	2,2	29,08	30,24	34,21	33,03
0,24	0,346	0,360	0,407	0,393	2,5	37,55	39,05	44,18	42,65
0,26	0,406	0,422	0,478	0,461	2,8	47,10	48,99	55,42	53,47
0,28	0,471	0,490	0,554	0,535	3,1	57,74	60,05	67,93	65,55
0,31	0,577	0,600	0,679	0,656	3,4	69,46	72,23	81,71	78,85
0,34	0,695	0,722	0,817	0,789	3,8	86,76	90,02	102,1	98,52
0,37	0,823	0,855	0,968	0,934	4,2	105,99	110,23	124,7	120,3
0,40	0,961	1,000	1,131	1,092	4,6	127,14	132,22	149,6	144,4
0,45	1,217	1,265	1,431	1,382	5,0	150,21	156,22	176,7	170,6
0,50	1,502	1,562	1,767	1,706	5,5	181,75	189,02	213,8	206,4
0,55	1,817	1,890	2,138	2,064	6,0	216,30	224,95	254,5	245,6
0,60	2,163	2,249	2,545	2,456	6,5	253,85	264,01	298,6	288,3
0,70	2,944	3,062	3,464	3,343	7,0	294,41	306,19	346,4	334,3
0,80	3,845	3,999	4,524	4,367	7,6	347,04	360,92	408,3	394,1
0,90	4,867	5,061	5,726	5,526	8,2	404,00	420,16	475,3	458,8
1,00	6,008	6,249	7,069	6,823	8,8	465,28	483,89	547,4	528,4
1,10	7,270	7,561	8,553	8,256	9,4	530,89	552,13	624,6	602,9
1,20	8,652	8,998	10,18	9,825	10,0	600,83	624,86	706,9	682,3
1,30	10,154	10,560	11,95	11,53					

Bleidraht s. S. 575. **Bronzedraht** s. S. 577.

*) Nach Angaben von Felten & Guilleaume, Mülheim (Rhein).

**) Nach Angaben von C. Heckmann, Duisburg-Hochfeld, für hart gezogenen ungeglühten Draht; für geglühten Draht weichen die Zahlen nur unbedeutend ab.

b. Gewichte von Metallplatten in kg/qm.

Stärke mm	Gufseisen	Schweifseisen	Flufseisen	Flufsstahl und gewalzter Stahl	Kupfer	Messing	Bronze	Zink	Blei
1	7,25	7,8	7,85	7,86	8,9	8,55	8,6	7,2	11,37
2	14,50	15,6	15,70	15,72	17,8	17,10	17,2	14,4	22,74
3	21,75	23,4	23,55	23,58	26,7	25,65	25,8	21,6	34,11
4	29,00	31,2	31,40	31,44	35,6	34,20	34,4	28,8	45,48
5	36,25	39,0	39,25	39,30	44,5	42,75	43,0	36,0	56,85
6	43,50	46,8	47,10	47,16	53,4	51,30	51,6	43,2	68,22
7	50,75	54,6	54,95	55,02	62,3	59,85	60,2	50,4	79,59
8	58,00	62,4	62,80	62,88	71,2	68,40	68,8	57,6	90,96
9	65,25	70,2	70,65	70,74	80,1	76,95	77,4	64,8	102,33
10	72,50	78,0	78,50	78,60	89,0	85,50	86,0	72,0	113,70
11	79,75	85,8	86,35	86,46	97,9	94,05	94,6	79,2	125,07
12	87,00	93,6	94,20	94,32	106,8	102,60	103,2	86,4	136,44
13	94,25	101,4	102,05	102,18	115,7	111,15	111,8	93,6	147,81
14	101,50	109,2	109,90	110,04	124,6	119,70	120,4	100,8	159,18
15	108,75	117,0	117,75	117,90	133,5	128,25	129,0	108,0	170,55
16	116,00	124,8	125,60	125,76	142,4	136,80	137,6	115,2	181,92
17	123,25	132,6	133,45	133,62	151,3	145,35	146,2	122,4	193,29
18	130,50	140,4	141,30	141,48	160,2	153,90	154,8	129,6	204,66
19	137,75	148,2	149,15	149,34	169,1	162,45	163,4	136,8	216,03
20	145,00	156,0	157,00	157,20	178,0	171,00	172,0	144,0	227,40
21	152,25	163,8	164,85	165,06	186,9	179,55	180,6	151,2	238,77
22	159,50	171,6	172,70	172,92	195,8	188,10	189,2	158,4	250,14
23	166,75	179,4	180,55	180,78	204,7	196,65	197,8	165,6	261,51
24	174,00	187,2	188,40	188,64	213,6	205,20	206,4	172,8	272,88
25	181,25	195,0	196,25	196,50	222,5	213,75	215,0	180,0	284,25
26	188,50	202,8	204,10	204,36	231,4	222,30	223,6	187,2	295,62
27	195,75	210,6	211,95	212,22	240,3	230,85	232,2	194,4	306,99
28	203,00	218,4	219,80	220,08	249,2	239,40	240,8	201,6	318,36
29	210,25	226,2	227,65	227,94	258,1	247,95	249,4	208,8	329,73
30	217,50	234,0	235,50	235,80	267,0	256,50	258,0	216,0	341,10

Spezifische Gewichte vorstehender Metalle, bezogen auf:

Gufseisen	1	1,076	1,083	1,084	1,228	1,179	1,186	0,993	1,568
Schweifseisen	0,929	1	1,006	1,008	1,141	1,096	1,103	0,923	1,458
Flufseisen	0,924	0,994	1	1,001	1,134	1,089	1,096	0,917	1,448

c. Feinblech- und Drahtlehren.

Nr. der Lehre	Deutsche Millimeter-Drahtlehre mm	Deutsche Feinblechlehre mm	Dillinger Feinblechlehre mm	Westfälische Stift-Drahtlehre mm	Engl. Feinblech- und Drahtlehre mm	Französ. Feinblech- und Drahtlehre mm
0000	.	.	.	.	11,531	.
000	.	.	.	.	10,795	.
00	.	.	.	.	9,652	.
0	.	.	.	.	8,636	.
1	.	5,50	5,50	0,6	7,620	0,6
2	0,2	5,00	5,00	0,7	7,213	0,7
2/2	0,22	.	.	.	.	.
2/4	0,24	.	.	.	.	.
2/6	0,26	.	.	.	.	.
2/8	0,28	.	.	.	.	.
3	.	4,50	4,50	.	6,579	0,8
3/1	0,31	.	.	.	.	.
3/4	0,34	.	.	.	.	.
3/7	0,37	.	.	.	.	.
4	0,40	4,25	4,25	0,8	6,045	0,9
4/5	0,45	.	.	.	.	.
5	0,50	4,00	4,00	0,9	5,588	1,0
5/5	0,55	.	.	.	.	.
6	0,60	3,75	3,50	1,0	5,154	1,1
7	0,70	3,50	3,25	1,1	4,572	1,2
8	0,80	3,25	3,00	1,2	4,191	1,3
9	0,90	3,00	2,75	1,3	3,759	1,4
10	1,0	2,75	2,50	1,4	3,404	1,5
11	1,1	2,50	2,25	1,6	3,048	1,6
12	1,2	2,25	2,00	.	2,769	1,8
13	1,3	2,00	1,85	1,8	2,413	2,0
14	1,4	1,75	1,70	2,0	2,108	2,2
15	.	1,50	1,55	2,2	1,829	2,4
16	1,6	1,375	1,40	2,5	1,651	2,7
17	.	1,250	1,25	2,8	1,473	3,0
18	1,8	1,125	1,10	3,1	1,245	3,4
19	.	1,000	1,00	3,4	1,067	3,9
20	2,0	0,875	0,90	3,8	0,889	4,4
21	.	0,750	0,80	4,2	0,813	4,9
21½	.	0,688	0,70	.	.	.

Nr. der Lehre	Deutsche Millimeter-Drahtlehre mm	Deutsche Feinblechlehre mm	Dillinger Feinblechlehre mm	Westfälische Stift-Drahtlehre mm	Engl. Feinblech- und Drahtlehre mm	Französ. Feinblech- und Drahtlehre mm
22	2,2	0,625	0,60	4,6	0,711	5,4
22½	.	.	0,50	.	.	.
23	.	0,562	0,40	5,5	0,635	5,9
24	.	0,500	0,30	6,0	0,559	6,4
25	2,5	0,438	.	7,0	0,508	7,0
26	.	0,375	.	7,6	0,457	7,6
27	.	0,300	.	8,8	0,406	8,2
28	2,8	.	.	9,4	0,356	8,8
29	.	.	.	10,0	0,330	9,4
30	.	.	.	.	0,310	10,0
31	3,1	.	.	.	0,280	.
32	.	.	.	.	0,249	.
33	.	.	.	.	0,221	.
34	3,4	.	.	.	0,196	.
35	.	.	.	.	0,175	.
36	.	.	.	.	0,155	.
37	3,7	.	.	.	.	.
38	3,8					
39	3,9					
40	4,0					
42	4,2					
44	4,4					
46	4,6					
48	4,8					
50	5,0					
55	5,5					
60	6,0					
65	6,5					
70	7,0					
75	7,5					
80	8,0					
85	8,5					
90	9,0					
95	9,5					
100	10,0					

Bergische Drahtlehre.

Nr.	mm
Ketten	7,75
Schleppen	6,79
Grobrinken	6,00
Feinrinken	5,39
Malgen	4,72
Grobmemel	4,12
Mittelmemel	3,85
Feinmemel	3,25
Klinkmemel	3,00
Natel	2,65
Mittel	2,35
3 Schillings	1,91
4 Schillings	1,75
1 Band	1,55
2 „	1,37
3 „	1,25
4 „	1,10
5 „	0,95
6 „	0,89
7 „	0,84

Französ. Feinblech- und Drahtlehre.

Nr.	mm
P. 0	0,50
P. 1	0,46
P. 2	0,42
P. 3	0,37
P. 4	0,34
P. 5	0,30
P. 6	0,28
P. 7	0,27
P. 8	0,25
P. 9	0,23
P. 10	0,22
P. 11	0,20
P. 12	0,18
P. 13	0,17
P. 14	0,16
P. 15	0,15

Englische Lehre (B. W. G. = Birmingham wire gauge) in England, meist auch in Norddeutschland für Blech, Draht und Bandeisen, in Süddeutschland für Bandeisen. **Dillinger Lehre** benutzen die Werke von Dillingen und Hayange. **Französische Drahtlehre** (Jauge de Paris, 1857) in Frankreich allgemein für Draht und Drahtstifte, in Deutschland für Drahtstifte, in Süddeutschland meist auch für Draht. **Bergische Lehre** (älteste Lehre) nur noch in der Gegend von Altena und Iserlohn üblich.

A. Eisen.

a. Einteilung und Eigenschaften.

Elastizitäts- und Festigkeitszahlen s. S. 395 u. f. Spez. Gewichte s. S. 509 u. f. Chemisch reines Eisen, sowie Eisen mit 1,6 bis 2,3 vH und solches mit mehr als 6 vH C- (Kohlenstoff-) Gehalt ist zu technischen Zwecken unbrauchbar. Alles technisch benutzte Eisen ist Legierung und kein chemisches Element. Wärme-Ausdehnungszahlen und Längenschwindmafse s. S. 297 und 298. Nach Herstellungsweise, Verwendungszweck und Kohlenstoffgehalt unterscheidet man:

1. **Roheisen,** leicht schmelzbar, nicht schmiedbar. Erzeugnis des Hochofens (Holzkohlen- oder Koksroheisen) mit 6 bis 2,3 vH C-Gehalt. Graues Roheisen für Giefsereizwecke, bei 1200 bis 1300° sehr dünnflüssig, dehnt sich beim Erstarren aus und füllt die Form gut und scharf, ist, weil weich, mit Feile und Meifsel leicht zu bearbeiten. C teils chemisch gebunden, teils als Graphit. Weifses Roheisen, zum Puddel-, Bessemer-, Thomas- und Martin-Prozefs benutzt, bei 1100 bis 1200° dickflüssig, im Bruche kristallinisch, spröde und hart; C chemisch gebunden. Spiegeleisen (strahlig) mit 10 bis 20 vH Mn (Siegener) und Ferromangan mit 25 bis 70 vH Mn. Halbiertes Roheisen, aus grauem und weifsem Roheisen gattiert.

Für gewöhnliche Roheisensorten ist $K_z = 1200$ bis 1500 kg/qcm; ausgewählte und teuere Mischungen mit $K_z = 1750$ bis 2060 kg/qcm kommen zur Anwendung, wenn besonders hohe Festigkeit der Gufsstücke verlangt wird.

2. **Gufseisen,** mit weniger als 6 vH C-Gehalt. Im Kupol-, Flamm- oder Tiegelofen aus grauem (weichem) oder halbiertem (hartem) Roheisen umgeschmolzen, als Herd- oder Kastengufs, als Massen-, Lehm- oder Sandgufs (Kern- oder Vollgufs); in eisernen Formen als Hartgufs; bei Zusatz von Stahlabfällen als Stahlgufs, bei nachträglichem längeren Glühen mit sauerstoffreichen Erzen als schmiedbarer Gufs oder Tempergufs.

Mittelweicher Stahlgufs von Fried. Krupp für Maschinenteile (Zahnstangen u. drgl.) mit $K_z = 4500$ kg/qcm und $\varphi = 20$ vH Dehnung. Für Hartgufs ist nach Versuchen des Gruson-Werkes $K_b = 3700$ bis 4400, $K_z = 2200$ bis 2800 kg/qcm.

Die nachfolgenden Eisensorten (unter 3. bis 6.) mit 1,6 vH und weniger C-Gehalt haben den gemeinsamen Namen **schmiedbares Eisen.**

3. **Schweifseisen,** schweifs- und schmiedbar, nur wenig härtbar, durch Frischen von Roheisen auf Herden (Herdfrischprozefs) oder in Flammöfen (Puddelprozefs) im teigigen Zustande gewonnen. C-Gehalt 0,5 bis 0,1 vH; Schmelzpunkt bei 1500 bis 1600°. Sehniges Schweifseisen mit geringerem C-Gehalt und mattgrauem, hakigem oder langfaserigem Bruche; im Gegensatze hierzu Feinkorneisen mit gröfserem C-Gehalt und lichtgrauem, feinkörnigem Bruche.*) Eingesetztes

*) Der Wert der Unterscheidung zwischen Sehne und Korn für die Gütebestimmung des Schweifseisens wird von J. Riemer in der Z. d. V. d. I. 1895 S. 657 in Abrede gestellt.

Schweifseisen ist durch längeres Glühen mit C-reichen Körpern (Zementieren) äufserlich verstählt.

Glühfarben des Schweifseisens s. S. 296. — Ueber den Einflufs der Temperatur auf die Zugfestigkeit des Schweifseisens s. S. 396. — Schweifseisen wird als Blech, (Walz- und Zug-) Draht, Stab- und Walzeisen verwendet.

4. **Flufseisen,** schweifs- und schmiedbar, nicht härtbar. Im flüssigen Zustande als Bessemer-, Thomas- oder Martin-Flufseisen in Form von Blöcken (Ingots) gewonnen. C-Gehalt 0,25 bis 0,05 vH; Schmelzpunkt bei 1350 bis 1450°. Bruch hellgrau, gleichmäfsig feinkörnig. Festigkeit gröfser als die des Schweifseisens. Als Flufsware (Flufseisengufsware) in fertiger Form gegossen; sonstige Verwendungen wie beim Schweifseisen, das als Baustoff vom Flufseisen fast ganz verdrängt ist. **Flufseisen und Schweifseisen haben den gemeinsamen Namen Schmiedeisen.** — Ueber den Einflufs der Temperatur auf die Festigkeit usw. des Flufseisens s. S. 396. — Unter **„Mitisgufs“** (Weichgufs) versteht man Gufsstücke von geringen Abmessungen, aus in Tiegeln eingeschmolzenen Schmiedeisenabfällen mit Zusatz von etwas Aluminium hergestellt, völlig schmied- und schweifsbar.

5. **Schweifsstahl,** härtbar, schweifs- und schmiedbar (auch mit Schweifseisen), teigig gewonnen, aus manganhaltigem Roheisen als Herdfrischstahl oder als Puddelstahl, aus Schweifseisen durch längeres Glühen mit C-reichen Körpern als Zementstahl (Blasenstahl). Aus diesen durch weitere Verarbeitung (Paketieren, Ausschweifsen) Gerb- oder Raffinierstahl. C-Gehalt 1,6 bis 0,5 vH; Schmelzpunkt bei 1300 bis 1400°. Durch plötzliches Abkühlen im Bruche feinkörniger, hart und spröde. Bei nochmaligem Erwärmen des Schweifsstahls tritt mit steigender Temperatur die vor dem Härten vorhandene Zähigkeit und Weichheit wieder ein; hierbei erscheinen nach dem Erkalten folgende

Anlafsfarben: Erwärmung auf 220° blafsgelb, 232° strohgelb, 243° goldgelb, 250° purpur, 266° violett, 278° dunkelpurpur, 293° hellblau, 316° dunkelblau.

Schweifsstahl wird zu Blech und Draht sowie zum Verstählen eiserner Werkzeuge (Stählstahl) verwendet.

6. **Flufsstahl,** schmiedbar, schlecht schweifsbar, härtbar. Im flüssigen Zustand als Tiegel-, Bessemer-, Thomas- oder Martin-Stahl in Form von Flufsstahlblöcken gewonnen. C-Gehalt 1,6 bis 0,25 vH; Schmelzpunkt bei 1300 bis 1400°. Bruch mattgrau, gleichmäfsig feinkörnig. Fester als die übrigen Eisensorten. Zu besseren Werkzeugen nur Tiegelstahl und Wolframstahl. Grenze zwischen Flufsstahl und Flufseisen bei 5000 kg/qcm Zugfestigkeit.

Schweifsstahl und Flufsstahl haben die gemeinsame Bezeichnung **Stahl.** Der frühere Name „Gufsstahl“ ist durch „Tiegelstahl“ ersetzt worden. Stahlgufswaren werden aus Flufsstahl in fertiger Form durch Gufs hergestellt („Stahlformgufs“, besser „Flufseisengufs“ genannt).

Glühfarben (Farbentemperaturen) des Stahls nach Le Chatelier: Erhitzung auf 532° dunkelrot, 565° blutrot, 636° dunkelkirschrot, 677° mittelkirschrot, 746° kirschrot (vollrot), 843° hellkirschrot, 899° orange, 941° hellorange, 966° gelb, 1079° hellgelb, 1204° weifsglühend. Bei Schweifseisen treten diese Farben erst bei höherer Temperatur auf (s. S. 296), bei grauem Roheisen noch später.

Beimischungen des Eisens:

Silizium (0,05 bis 0,4 vH) macht schmiedbares Eisen faulbrüchig (d. h. im kalten und warmen Zustande brüchig) und vermindert seine Schweifsbarkeit.

Phosphor macht Roheisen dünnflüssig und härter, dagegen schmiedbares Eisen kaltbrüchig (d. h. im kalten Zustande brüchig) und erhöht seine Schweifsbarkeit. Die Festigkeit des Eisens wird durch Phosphor verringert.

Roheisen mit 0,5 bis 1,5 vH Phosphorgehalt sollte nur in Vermischung mit besseren Sorten in der Giefserei Verwendung finden. Die Königl. Preufs. Geschofsgiefsereien in Spandau und Siegburg gestatten bei Roheisenlieferungen einen Phosphorgehalt bis zu 1 vH; diese Grenze kann für bessere Gufsstücke als angemessen gelten.

Schwefel macht Roheisen dickflüssig und vermindert seine Festigkeit. Schmiedbares Eisen wird durch Schwefel weniger schweifsbar und rotbrüchig (d. h. im warmen Zustande brüchig).

Mangan erhöht den Schmelzpunkt des Roheisens (daher zweckmäfsig beim Puddelprozefs) und vermehrt die Härte des Roh- und schmiedbaren Eisens; bildet weifses Roheisen (Spiegel- und Weifsstrahleisen).

b. Handelsfabrikate des Eisens.

1. **Säulen aus Gufseisen,** werden am besten stehend (senkrecht) gegossen. Der äufsere Durchmesser D schwankt zwischen 100 und 400 mm. Kleinste Wandstärke $\delta = 10$ mm, gröfste Wandstärke nicht über 40 mm; praktisch ist $\delta = 0{,}1\ D$. Gröfste Länge für gewöhnliche Bauzwecke nicht über 6 bis 7 m. (Vrgl. S. 416, 439 und 562.)

Bei Berechnung aufeinander stehender Säulen (sogen. **Säulenstränge**), die in Deckenhöhe der einzelnen Geschosse eines Gebäudes gestofsen sind, werden die Geschofshöhen als Knicklängen berücksichtigt. Die Stofsflächen der einzelnen Säulen sind abzudrehen und die Saulen mittels angegossener, ineinandergreifender Ringe zu zentrieren. Der Querschnitt des Säulenstranges nehme von oben nach unten hin zu; der Querschnitt einer Säule, die zwar gröfsere Auflast aber geringere Knicklänge als die darüberstehende Säule hat, soll daher nie kleiner, sondern gleich oder gröfser sein als der Querschnitt der vorigen Säule.

Säulen in Räumen, wo Menschen dauernd verkehren, mit $D > 150$ mm äufserem Durchmesser und $\delta > 15$ mm Wandstärke; in diesen Räumen sind die Säulen glutsicher zu umhüllen (auch schmiedeiserne Stützen).

Für die Auflagerung der Unterzugs- und Deckenträger ist eine Kopfplatte (oberste Säule) oder seitliche Konsolen anzugiefsen. Man vermeide die vielfach angewendete feste Schrauben-Verbindung der Träger mit der Kopfplatte und den Konsolen, damit die Säule nicht alle kleinen Bewegungen und Erschütterungen der Träger mitzumachen gezwungen ist. Am meisten empfiehlt es sich, die Kopfplatte und Konsolen mit kleinen Führungsleisten zu versehen und die Unterzugs- und Deckenträger durch schlank um die Säule geführte oder in vorgesehenen Schlitzen durch die Säule gehende Flacheisenlaschen oder n. Umst. durch nicht zu kräftige Quadranteisen miteinander zu verbinden.

Bei grofser Säulenbelastung, für die die Säulenfufssohle gröfser als etwa 7000 qcm ausfällt, ist die Säulenfufsplatte besonders zu giefsen, getrennt von der Säule.

Bei der Berechnung einer Säule auf exzentrische Druckbelastung (d. h. auf zusammengesetzte Druck- und Biegungsfestigkeit, s. S. 475 u. f.) ist der ungünstigste Belastungszustand (die eine Hälfte der Deckenträger voll belastet, die andere Hälfte nur das Eigengewicht und nicht die Nutzlast der Deckenfelder tragend) zu berücksichtigen. Näheres s. Fufsnote auf S. 416.

Ungeschützte (d. h. nicht mit feuerfesten Stoffen ummantelte), mit 500 kg/qcm belastete gufseiserne Stützen tragen nicht mehr bei einer Erwärmung von etwa 800°, ungeschützte schmiedeiserne, mit 1000 kg/qcm belastet, tragen nicht mehr bei etwa 600°.

2. **Rohre aus Gufseisen.** Vrgl. S. 562 und 6. Abschn., Maschinenteile (unter „Rohre").

3. **Auflagerplatten** für I-Träger, im Handel meist aus Gufseisen, bei rechteckigem Querschnitt 25 bis 45 mm stark, aus Flufseisen 15 bis 25 mm dick. Auch werden (besser) Platten mit ganz oder zum Teil abgerundeter oberer Fläche verwendet. Gufseiserne Platten mit zu geringer Stärke brechen unter der Belastung leicht durch und tragen dann nicht mehr richtig. Auflagerfläche rechteckig oder quadratisch, in Mauerwerkmafsen: 12, 25, 38, 51, 64 cm; auch sind Platten mit Seitenlängen von 15, 20, 25, 30, 35, 40 cm usw. erhältlich. Die erforderliche Auflagerfläche ist gleich dem Trägerauflagerdruck, geteilt durch die zulässige Druckspannung k des unterstützenden Zement-Mauerwerkes (8 Schichten); über k s. S. 407.

4. **Rohre aus Schmiedeisen.** Vrgl. S. 568 und 6. Abschn., Maschinenteile (unter „Rohre").

5. **Walzeisen** (Formeisen). Winkeleisen (gleich- und ungleichschenklig), T-, I-, Z-, [-Eisen, Quadrant- und Belageisen, Handleisten- und Wulsteisen; +-, Sechskant-, Halbrund-, Oval-, Sprossen-, Schlagleisten-, Roststabeisen usw. Für die Trägereisen wird in Deutschland ausschliefslich Flufseisen, für alle sonstigen Profile meist Flufseisen und nur auf besonderen Wunsch Schweifseisen verwalzt.

Den Eisenkonstruktionen sind tunlichst die **deutschen Normalprofile***) zugrunde zu legen, die in den Tafeln auf S. 524 bis 535 enthalten sind. Auf S. 524 bis 535 sind nur Fertigprofile aufgeführt; Vorprofile (Zwischenprofile) können u. Umst. durch veränderte Walzenstellung der Fertigprofile erhalten werden, sind jedoch nur bei L-Eisen zu empfehlen. (Vrgl. S. 524, 526, 531 und 532.)

Als Normallängen der Walzeisen gelten die, in denen ein Profil nach bestimmtem Grundpreise geliefert wird (meist 4 bis 8 m, bei I-Eisen 4 bis 10 m). Die gröfsten Längen, bis zu denen die einzelnen Profile in der Regel ausgewalzt werden (noch gröfsere Längen nur nach besonderer Uebereinkunft), beziehen sich ausschliefslich auf Lager-

*) Nach dem Deutschen Normalprofilbuche für Walzeisen zu Bau- und Schiffbauzwecken, gemeinschaftlich herausgegeben vom Vereine deutscher Ingenieure, vom Verbande deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine, vom Vereine deutscher Eisenhüttenleute und vom Vereine deutscher Schiffswerften. Erster Band: Normalprofile für Walzeisen zu Bauzwecken, 6. Aufl. 1904; zweiter Band: Normalprofile für Walzeisen zu Schiffbauzwecken, 5. Aufl. 1897 (6. Aufl. erscheint demnächst). Verlag der La Ruelleschen Akzidenzdruckerei und lith. Anstalt (Jos. Deterre) in Aachen.

profile, d. h. auf sämtliche auf S. 524 bis 535 angeführten Profile; die gröfsten Längen schwanken zwischen 12 und 16 m, bei **I**-Eisen zwischen 14 und 20 m. Längen, gröfser als die normalen Längen, bedingen einen Preiszuschlag. Angeforderte Längen werden meist nur bis auf einen Spielraum von ± 5 cm genau geliefert. „Fixe Längen" (bis auf ± 1 cm genau) und „gefräste Stäbe" (bis auf ± 0,5 cm genau) haben Ueberpreise.

Das auf S. 527 angegebene **I**-Profil Nr. 60 soll in die kommende 7. Auflage des Normalprofilbuches aufgenommen werden.

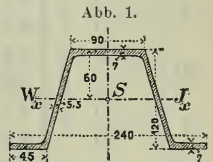
Die **breitflanschigen Differdinger I-Grey-Profile,** die sich besonders zu Stützen und gelegentlich (bei beschränkter Konstruktionshöhe) auch zu Trägern eignen, enthält die Tafel auf S. 536.

Die deutschen Normalprofile für **I**- und **[**-Eisen haben sich im allgemeinen gut bewährt; doch steht ihrer einzelnen Verwendung als Stützen das gegen J_x sehr kleine Trägheitsmoment J_y entgegen.

Ein Bedürfnis nach breitflanschigen (und hohen) Profilen machte sich zunächst in den Vereinigten Staaten von Nordamerika beim Bau sehr hoher Häuser („Wolkenkratzer") geltend, wo die Lohnverhältnisse und die meist sehr knapp bemessene Bauzeit darauf hindrängten, die aus Trägern, Platten und Winkeln zusammengenieteten Querschnitte durch in einem Stück fertiggewalzte Profile zu ersetzen. Auch bei uns wird häufig die Ersparnis an Arbeit und Zeit für Löcherbohren, Zusammenpassen und Nieten von Wert sein.

Oft ist das in Abb. 1 gegebene **Belag-Eisen** (Rinnenprofil) Nr. 12/24 (Blatt 39, Ausgabe 1900) der Burbacher Hütte bei Saarbrücken gut verwendbar; Querschnitt = 25,1 qcm, Gewicht (Flufseisen) = 19,7 kg/m, Trägheitsmoment J_x = 541 cm⁴, Widerstandsmoment W_x = 90,2 cm³.

Abb. 1.



6. **Stabeisen.** (Rund-, Quadrat-, Flacheisen usw.); aus Schmiedeisen, gewalzt oder geschmiedet, in Stäben von 3 bis 10 m Länge. Nach der Güte des Eisens wird das gewöhnliche Handelseisen und das bessere Qualitätseisen unterschieden. Flacheisen ist rechteckiges Stabeisen von 10 bis 180 mm Breite, auf kalibrierten Walzen hergestellt; gröfsere Breiten (bis zu 600 mm — darüber sind Bleche billiger) bei Stärken von 5 mm an aufwärts (am besten 10 bis 20 mm) werden als Universaleisen auf einem Universalwalzwerk gefertigt. Dünnes Flacheisen unter 5 mm Stärke und bis 250 mm Breite, das bundweise und in gröfserer Länge (nicht in Stäben) verkauft wird, heifst Bandeisen. Gewichtstafeln von Stabeisen s. S. 537 bis 541.

7. **Draht,** aus Flufseisen oder Flufsstahl gewalzt, mit kreisförmigem Querschnitte, dessen Durchmesser nach einer Drahtlehre (s. S. 518) angegeben wird. Gewichte von Drähten s. S. 516. Ist der Querschnitt des Drahtes nicht kreisförmig, sondern halbrund, oval, quadratisch, eckig, sternförmig usw., so heifst der Draht Form- (Fasson-) oder Dessin-Draht. Zugfestigkeit von Drähten s. S. 403 und 405. Weiteres s. S. 558.

(Fortsetzung auf S. 542.)

Deutsche Normalprofile für Walzeisen.*)

Bemerkung. Die auf S. 520 bis 531 angegebenen **Gewichte** g in kg/m gelten für Flufseisen (spez. Gew. = 7,85).

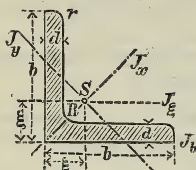


Abb. 2.

1. Gleichschenklige Winkeleisen.

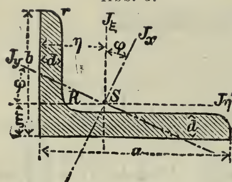
Normallängen = 4 bis 8 m.
Gröfste Längen = 12 bis 16 m.
Abrundungshalbmesser der inneren Winkelecke
$R = 1/2\,(d_{\min} + d_{\max})$.
Abrundungshalbmesser der Schenkelenden $r = 1/2\,R$ (auf halbe mm abgerundet).
Schwerpunktabstand $\xi \sim 1/4\,b + 0{,}36\,d$.
Vorprofile mit gleicher Schenkelbreite und 1 mm gröfserer Schenkelstärke werden gewalzt.

Profil-Nr.	Breite b mm	Stärke d mm	Querschnitt F qcm	Gewicht g kg/m	Schwerpunktabstand ξ mm	Trägheitsmoment J_b cm⁴	J_ξ cm⁴	J_x = max cm⁴	J_y = min cm⁴	Profil-Nr.
1½	15	3	0,82	0,65	4,8	0,33	0,15	0,24	0,06	1½
		4	1,05	0,83	5,1	0,46	0,18	0,29	0,08	
2	20	3	1,12	0,88	6,0	0,78	0,38	0,62	0,15	2
		4	1,45	1,14	6,4	1,07	0,48	0,77	0,19	
2½	25	3	1,42	1,12	7,3	1,53	0,79	1,27	0,31	2½
		4	1,85	1,45	7,6	2,08	1,00	1,61	0,40	
3	30	4	2,27	1,78	8,9	3,5	1,80	2,85	0,76	3
		6	3,27	2,57	9,6	5,5	2,48	3,91	1,06	
3½	35	4	2,67	2,09	10,0	5,6	2,96	4,68	1,24	3½
		6	3,87	3,04	10,8	8,6	4,13	6,50	1,77	
4	40	4	3,08	2,42	11,2	8,3	4,47	7,09	1,86	4
		6	4,48	3,51	12,0	12,8	6,35	9,98	2,67	
		8	5,80	4,55	12,8	17,4	7,90	12,4	3.38	
4½	45	5	4,30	3,38	12.8	14,9	7,85	12,4	3,25	4½
		7	5,86	4,60	13,6	21,2	10,4	16,4	4,39	
		9	7,34	5,76	14,4	27,8	12,6	19,8	5,40	
5	50	5	4,80	3,77	14,0	20,4	11,0	17,4	4,59	5
		7	6,56	5,15	14,9	29,0	14,5	23,1	6,02	
		9	8,24	6,47	15,6	38,0	17,9	28,1	7,67	
5½	55	6	6,31	4,95	15,6	32,8	17,3	27,4	7,24	5½
		8	8,23	6,46	16,4	44,2	22,1	34,8	9,35	
		10	10,07	7,90	17,2	56,0	26,3	41,4	11,27	
6	60	6	6,91	5,42	16,9	42,5	22,7	36,1	9,43	6
		8	9,03	7,09	17,7	57,5	29,2	46,1	12,1	
		10	11,07	8,69	18,5	72,8	34,8	55,1	14,6	

*) Nach dem Deutschen Normalprofilbuche für Walzeisen zu Bauzwecken (6. Aufl., 1904) und für Walzeisen zu Schiffbauzwecken (5. Aufl., 1897).

Profil-Nr.	Breite b mm	Stärke d mm	Querschnitt F qcm	Gewicht g kg/m	Schwerpunktabstand ξ mm	Trägheitsmoment J_b cm⁴	J_ξ cm⁴	$J_x = \max$ cm⁴	$J_y = \min$ cm⁴	Profil-Nr.
6½	65	7	8,7	6,8	18,5	63	33,4	53,0	13,8	6½
		9	11,0	8,6	19,3	82	41,3	65,4	17,2	
		11	13,2	10,3	20,0	101	48,7	76,8	20,7	
7	70	7	9,4	7,4	19,7	79	42,3	67,1	17,6	7
		9	11,9	9,3	20,5	102	52,5	83,1	22,0	
		11	14,3	11,2	21,3	126	62,0	97,6	26,0	
7½	75	8	11,5	9,0	21,3	111	59,0	93,3	24,4	7½
		10	14,1	11,1	22,1	140	71,0	113	29,8	
		12	16,7	13,1	22,9	170	82,5	130	34,7	
8	80	8	12,3	9,7	22,6	135	72,0	115	29,6	8
		10	15,1	11,9	23,4	170	87,5	139	35,9	
		12	17,9	14,1	24,1	206	102	161	43,0	
9	90	9	15,5	12,2	25,4	216	116	184	47,8	9
		11	18,7	14,7	26,2	266	138	218	57,1	
		13	21,8	17,1	27,0	317	158	250	65,9	
10	100	10	19,2	15,1	28,2	329	177	280	73,3	10
		12	22,7	17,8	29,0	398	207	328	86,2	
		14	26,2	20,6	29,8	468	235	372	98,3	
11	110	10	21,2	16,6	30,7	438	239	379	98,6	11
		12	25,1	19,7	31,5	529	280	444	116	
		14	29,0	22,8	32,1	621	319	505	133	
12	120	11	25,4	19,9	33,6	626	340	541	140	12
		13	29,7	23,3	34,4	745	393	625	162	
		15	33,9	26,6	35,1	864	445	705	186	
13	130	12	30,0	23,6	36,4	869	472	750	194	13
		14	34,7	27,2	37,2	1020	540	857	223	
		16	39,3	30,9	38,0	1171	604	959	251	
14	140	13	35,0	27,5	39,2	1175	638	1014	262	14
		15	40,0	31,4	40,0	1363	723	1148	298	
		17	45,0	35,3	40,8	1554	805	1276	334	
15	150	14	40,3	31,6	42	1559	845	1343	347	15
		16	45,7	35,9	43	1790	949	1507	391	
		18	51,0	40,0	44	2023	1052	1665	438	
16	160	15	46,1	36,2	45	2027	1099	1745	453	16
		17	51,8	40,7	46	2308	1225	1945	506	
		19	57,5	45,1	47	2590	1348	2137	558	

Abb. 3.



2. Ungleichschenklige Winkeleisen.

Normallängen = 4 bis 8 m.

Gröfste Längen = 12 bis 16 m.

Abrundungshalbmesser der inneren Winkelecke $R = {}^1/_2\,(d_{\min} + d_{\max})$.

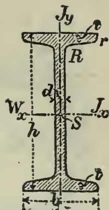
Abrundungshalbmesser der Schenkelenden $r = {}^1/_2\,R$ (auf halbe mm abgerundet).

Vorprofile mit gleichen Schenkelbreiten und 1 mm gröfserer Schenkelstärke werden gewalzt.

i (in mm) ist der lichte Abstand zweier ungleichschenkligen ⅃L, wobei die beiden Haupt-Trägheitsmomente gleich grofs (also gleich $2\,J_\xi$) sind.

Profil-Nr.	Abmessungen in mm b	a	d	Querschnitt F qcm	Gewicht g kg/m	Abstand d. Schwerp. ξ mm	η mm	tg φ	Trägheitsmoment J_ξ cm⁴	J_η cm⁴	J_x = max cm⁴	J_y = min cm⁴	Abstand i mm
Schenkelverhältnis $b : a = 1 : 1^1/_2$.													
2/3	20	30	3	1,42	1,12	4,9	9,9	0,4216	1,25	0,45	1,42	0,28	5,2
			4	1,85	1,45	5,4	10,3	0,4214	1,60	0,55	1,82	0,33	4,3
3/4½	30	45	4	2,87	2,25	7,4	14,8	0,4334	5,77	2,05	6,63	1,19	8,0
			5	3,53	2,77	7,8	15,2	0,4288	6,99	2,46	8,01	1,44	7,1
4/6	40	60	5	4,79	3,76	9,7	19,5	0,4319	17,3	6,20	19,8	3,66	11,0
			7	6,55	5,14	10,5	20,4	0,4275	22,8	8,10	26,3	4,63	9,0
5/7½	50	75	7	8,33	6,54	12,4	24,7	0,4304	46,3	16,4	53,1	9,58	13,1
			9	10,5	8,24	13,2	25,6	0,4272	57,2	20,1	65,4	11,9	11,2
6½/10	65	100	9	14,2	11,1	15,9	33,1	0,4101	140	46,6	160	26,8	19,5
			11	17,1	13,4	16,7	34,0	0,4074	167	55,3	189	32,9	17,7
8/12	80	120	10	19,1	15,0	19,5	39,2	0,4348	276	97,9	317	56,8	22,1
			12	22,7	17,8	20,2	40,0	0,4304	323	115	370	67,5	20,1
10/15	100	150	12	28,7	22,5	24,2	48,9	0,4361	649	232	747	134	27,8
			14	33,2	26,1	25,0	49,7	0,4339	744	263	854	153	26,1
Schenkelverhältnis $b : a = 1 : 2$.													
2/4	20	40	3	1,72	1,35	4,4	14,3	0,2575	2,81	0,46	2,96	0,31	14,6
			4	2,25	1,77	4,8	14,7	0,2528	3,58	0,60	3,78	0,40	13,4
3/6	30	60	5	4,29	3,37	6,8	21,5	0,2544	15,6	2,61	16,5	1,71	21,2
			7	5,85	4,59	7,6	22,4	0,2479	20,6	3,42	21,8	2,28	19,1
4/8	40	80	6	6,89	5,40	8,8	28,5	0,2568	44,9	7,66	47,6	4,99	28,9
			8	9,01	7,08	9,6	29,4	0,2518	57,5	9,70	60,8	6,41	26,9
5/10	50	100	8	11,5	9,03	11,2	35,9	0,2565	116	19,6	123	12,8	35,5
			10	14,1	11,1	12,0	36,7	0,2658	141	23,5	150	14,6	33,7
6½/13	65	130	10	18,6	14,6	14,5	46,5	0,2569	320	54,4	339	35,4	46,6
			12	22,1	17,3	15,3	47,5	0,2549	374	62,8	395	41,3	44,4
8/16	80	160	12	27,5	21,6	17,7	57,2	0,2586	719	122	762	79,4	57,8
			14	31,8	25,0	18,5	58,1	0,2679	822	139	875	86,0	55,7
10/20	100	200	14	40,3	31,6	21,8	71,2	0,2608	1654	282	1754	182	73,1
			16	45,7	35,9	22,6	72,0	0,2586	1863	315	1973	205	71,2

Abb. 4.



3. I-Eisen.

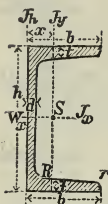
(Doppel-T-Eisen oder I-Eisen).

Normallängen = 4 bis 10 m. Gröfste Längen = 14 bis 20 m.
Neigung der inneren Flanschflächen = 14 vH (rd. 1 : 7).
Abrundungshalbmesser zwischen Steg und Flansch $R = d$.
Abrundungshalbmesser der inneren Flanschkanten $r = 0{,}6\,d$.
Die Flanschstärke t liegt im Abstande $^1/_4\,b$ beiderseits der Profilmitte, u. zw. ist $t \backsim 1{,}5\,d$.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite b mm	Stegstärke d mm	Flanschstärke t mm	Querschnitt F qcm	Gewicht g kg/m	Trägheitsmoment J_y cm⁴	Trägheitsmoment J_x cm⁴	Widerstandsmoment W_y cm³	Widerstandsmoment W_x cm³	Profil-Nr.
8	80	42	3,9	5,9	7,57	5,95	6,3	77,7	2,99	19,4	**8**
9	90	46	4,2	6,3	8,99	7,06	8,8	117	3,81	25,9	**9**
10	100	50	4,5	6,8	10,6	8,33	12,2	170	4,86	34,1	**10**
11	110	54	4,8	7,2	12,3	9,65	16,2	238	5,99	43,3	**11**
12	120	58	5,1	7,7	14,2	11,1	21,4	327	7,38	54,5	**12**
13	130	62	5,4	8,1	16,1	12,6	27,4	435	8,85	67,0	**13**
14	140	66	5,7	8,6	18,2	14,3	35,2	572	10,7	81,7	**14**
15	150	70	6,0	9,0	20,4	16,0	43,7	734	12,5	97,9	**15**
16	160	74	6,3	9,5	22,8	17,9	54,5	933	14,7	117	**16**
17	170	78	6,6	9,9	25,2	19,8	66,5	1165	17,1	137	**17**
18	180	82	6,9	10,4	27,9	21,9	81,3	1444	19,8	161	**18**
19	190	86	7,2	10,8	30,5	23,9	97,2	1759	22,6	185	**19**
20	200	90	7,5	11,3	33,4	26,2	117	2139	25,9	214	**20**
21	210	94	7,8	11,7	36,3	28,5	137	2558	29,3	244	**21**
22	220	98	8,1	12,2	39,5	31,0	163	3055	33,3	278	**22**
23	230	102	8,4	12,6	42,6	33,4	188	3605	36,9	314	**23**
24	240	106	8,7	13,1	46,1	36,2	220	4239	41,6	353	**24**
25	250	110	9,0	13,6	49,7	39,0	255	4954	46,4	396	**25**
26	260	113	9,4	14,1	53,3	41,8	287	5735	50,6	441	**26**
27	270	116	9,7	14,7	57,1	44,8	325	6623	56,0	491	**27**
28	280	119	10,1	15,2	61,0	47,9	363	7575	60,8	541	**28**
29	290	122	10,4	15,7	64,8	50,9	403	8619	66,1	594	**29**
30	300	125	10,8	16,2	69,0	54,2	449	9785	71,9	652	**30**
32	320	131	11,5	17,3	77,7	61,0	554	12493	84,6	781	**32**
34	340	137	12,2	18,3	86,7	68,1	672	15670	98,1	922	**34**
36	360	143	13,0	19,5	97,0	76,2	817	19576	114	1088	**36**
38	380	149	13,7	20,5	107	84,0	972	23978	131	1262	**38**
40	400	155	14,4	21,6	118	92,6	1160	29173	150	1459	**40**
42½	425	163	15,3	23,0	132	104	1433	36956	176	1739	**42½**
45	450	170	16,2	24,3	147	115	1722	45888	203	2040	**45**
47½	475	178	17,1	25,6	163	128	2084	56410	234	2375	**47½**
50	500	185	18,0	27,0	179	141	2470	68736	267	2750	**50**
55	550	200	19,0	30,0	212	166	3486	99054	349	3602	**55**
60*)	600	215	21,6	32,4	254	199	4668	138957	434	4632	**60*)**

*) Walzprofil der Dortmunder Union, wird demnächst normal.

Abb. 5.



4. [-Eisen.

(E- oder U-Eisen.)

Normallängen = 4 bis 8 m. Gröfste Längen = 12 bis 16 m.
Neigung der inneren Flanschflächen = 8 vH (1 : 12,5).
Abrundungshalbmesser $R = t$ und $r = \frac{1}{2}\,t$ (auf halbe mm abgerundet).
Die Flanschstärke t liegt in der Mitte der Flanschbreite b.
i (in mm) ist der lichte Abstand zweier][, wobei die beiden Haupt-Trägheitsmomente gleich grofs (also gleich $2\,J_x$) sind.

[-Eisen für allgemeine Zwecke.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite b mm	Stegstärke d mm	Flanschstärke t mm	Querschnitt F qcm	Gewicht g kg/m	Abstand d. Schwerpunktes x mm	Trägheitsmoment J_h cm⁴	Trägheitsmoment J_y cm⁴	Trägheitsmoment J_x cm⁴	Abstand i mm	Widerstandsmoment W_x cm³	Profil-Nr.
3	30	33	5	7	5,44	4,27	13,1	14,7	5,33	6,39	.	4,3	3
4	40	35	5	7	6,21	4,88	13,3	17,7	6,68	14,1	.	7,1	4
5	50	38	5	7	7,12	5,59	13,7	22,5	9,12	26,4	3,8	10,6	5
6½	65	42	5,5	7,5	9,03	7,10	14,2	32,3	14,1	57,5	15,4	17,7	6½
8	80	45	6	8	11,0	8,66	14,5	43,2	19,4	106	27,1	26,5	8
10	100	50	6	8,5	13,5	10,6	15,5	61,7	29,3	206	41,4	41,1	10
12	120	55	7	9	17,0	13,3	16,0	86,7	43,2	364	54,9	60,7	12
14	140	60	7	10	20,4	16,0	17,5	125	62,7	605	68,1	86,4	14
16	160	65	7,5	10,5	24,0	18,8	18,4	166	85,3	925	81,5	116	16
18	180	70	8	11	28,0	22,0	19,2	217	114	1354	94,7	150	18
20	200	75	8,5	11,5	32,2	25,3	20,1	278	148	1911	108	191	20
22	220	80	9	12,5	37,4	29,4	21,4	368	197	2690	120	245	22
24	240	85	9,5	13	42,3	33,2	22,3	458	248	3598	133	300	24
26	260	90	10	14	48,3	37,9	23,6	586	317	4823	146	371	26
28	280	95	10	15	53,3	41,8	25,3	740	399	6276	159	450	28
30	300	100	10	16	58,8	46,2	27,0	924	495	8026	172	535	30

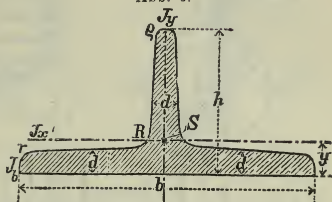
[-Eisen für den Eisenbahnwagenbau.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite b mm	Stegstärke d mm	Flanschstärke t mm	Querschnitt F qcm	Gewicht g kg/m	Abstand d. Schwerpunktes x mm	Trägheitsmoment J_h cm⁴	Trägheitsmoment J_y cm⁴	Trägheitsmoment J_x cm⁴	Abstand i mm	Widerstandsmoment W_x cm³	Profil-Nr.
10½	105	65	8	8	17,3	13,6	18,8	122	61,2	287	34,6	54,7	10½
11¾	117,5	65	10	10	22,6	17,7	19,1	160	77,1	447	42,7	76,1	11¾
14½	145	60	8	8	19,8	15,5	15,0	98,1	53,6	585	73,6	80,7	14½
23½	235	90	10	12	42,4	33,3	22,8	492	272	3429	127	292	23½
26	260	90	10	10	41,6	32,7	19,7	398	237	3900	148	300	26
30	300	75	10	10	42,8	33,6	15,0	241	145	4925	181	328	30

5. T-Eisen.

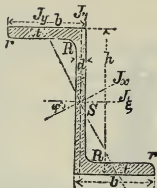
Normallängen = 4 bis 8 m.
Gröſste Längen = 12 bis 16 m.
Abrundungshalbmesser in den Winkelecken $R = d$,
Abrundungshalbmesser am Fuſse $r = \frac{1}{2} d$,
Abrundungshalbmesser am Stege $\varrho = \frac{1}{4} d$, jedoch r und ϱ auf halbe mm abgerundet.
Neigungen bei breitfüſsigen T-Eisen: Steg je 4 vH; Fuſs je 2 vH.
Neigungen bei hochstegigen T-Eisen: Steg und Fuſs je 2 vH.
Die Stärken d sind in den Abständen $\frac{1}{2} h$ bzw. $\frac{1}{4} b$ von auſsen gemessen.

Abb. 6.



Profil-Nr.	Breite b mm	Höhe h mm	Stärke d mm	Querschnitt F qcm	Gewicht g kg/m	Abstand des Schwerpunktes y mm	Trägheitsmoment J_b cm⁴	J_x cm⁴	J_y cm⁴
Breitfüſsige T-Eisen. $h : b = 1 : 2$.									
6/3	60	30	5,5	4,64	3,64	6,7	4,69	2,58	8,62
7/3½	70	35	6	5,94	4,66	7,7	8,00	4,49	15,1
8/4	80	40	7	7,91	6,21	8,8	13,9	7,81	28,5
9/4½	90	45	8	10,2	7,98	10,0	22,9	12,7	46,1
10/5	100	50	8,5	12,0	9,42	10,9	33,0	18,7	67,7
12/6	120	60	10	17,0	13,3	13,0	66,5	38,0	137
14/7	140	70	11,5	22,8	17,9	15,1	121	68,9	258
16/8	160	80	13	29,5	23,2	17,2	204	117	422
18/9	180	90	14,5	37,0	29,0	19,3	323	185	670
20/10	200	100	16	45,4	35,6	21,4	486	277	1000
Hochstegige T-Eisen. $h : b = 1 : 1$.									
2/2	20	20	3	1,12	0,88	5,8	0,76	0,38	0,20
2½/2½	25	25	3,5	1,64	1,29	7,3	1,74	0,87	0,43
3/3	30	30	4	2,26	1,77	8,5	3,35	1,72	0,87
3½/3½	35	35	4,5	2,97	2,33	9,9	6,01	3,10	1,57
4/4	40	40	5	3,77	2,96	11,2	10,0	5,28	2,58
4½/4½	45	45	5,5	4,67	3,66	12,6	15,5	8,13	4,01
5/5	50	50	6	5,66	4,45	13,9	23,0	12,1	6,06
6/6	60	60	7	7,94	6,23	16,6	45,7	23,8	12,2
7/7	70	70	8	10,6	8,32	19,4	84,4	44,5	22,1
8/8	80	80	9	13,6	10,7	22,2	141	73,7	37,0
9/9	90	90	10	17,1	13,4	24,8	224	119	58,5
10/10	100	100	11	20,9	16,4	27,4	336	179	88,3
12/12	120	120	13	29,6	23,2	32,8	684	366	178
14/14	140	140	15	39,9	31,3	38,0	1236	660	330

Abb. 7.



6. Z-Eisen.*)

Normallängen = 4 bis 8 m.

Gröfste Längen = 12 bis 16 m.

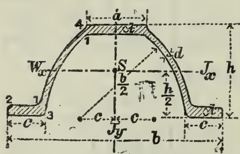
Abrundungshalbmesser am Stege $R = t$.

Abrundungshalbmesser an den Flanschen $r = \frac{1}{2} t$ (auf halbe mm abgerundet).

Die inneren Flanschflächen sind den äufseren parallel.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite b mm	Stegstärke d mm	Flansch-stärke t mm	Quer-schnitt F qcm	Gewicht g kg/m	tg φ	Trägheitsmoment J_ξ cm⁴	J_η cm⁴	$J_x = \max$ cm⁴	$J_y = \min$ cm⁴
3	30	38	4	4,5	4,32	3,39	1,655	5,94	13,7	18,1	1,54
4	40	40	4,5	5	5,43	4,26	1,181	13,4	17,6	28,0	3,05
5	50	43	5	5,5	6,77	5,31	0,939	25,7	24,4	44,9	5,23
6	60	45	5	6	7,91	6,21	0,779	44,0	30,8	67,2	7,60
8	80	50	6	7	11,1	8,73	0,588	108	48,7	142	14,7
10	100	55	6,5	8	14,5	11,4	0,492	220	74,5	270	24,6
12	120	60	7	9	18,2	14,3	0,433	400	108	470	37,7
14	140	65	8	10	22,9	18,0	0,385	671	154	768	56,4
16	160	70	8,5	11	27,5	21,6	0,357	1055	209	1184	79,5
18	180	75	9,5	12	33,3	26,1	0,329	1594	275	1759	110
20	200	80	10	13	38,7	30,4	0,313	2289	367	2509	147

Abb. 8.



7. Belag-Eisen.

Normallängen = 4 bis 8 m.

Gröfste Längen = 12 bis 16 m.

Der Schwerpunkt S liegt auf halber Höhe.

Abrundungen bei 1 mit Halbmesser = t.

Abrundungen bei 2 mit Halbmesser = d.

Abrundungen bei 3 mit Halbmesser = d — 0,5 mm.

Abrundungen bei 4 mit Halbmesser = $0{,}6\,d + 1{,}3$ mm.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite: obere a mm	untere b mm	am Fufse c mm	Steg-stärke d mm	Fufs- und Kopf-stärke t mm	Quer-schnitt F qcm	Gewicht g kg/m	Trägheits-moment J_y cm⁴	J_x cm⁴	Wider-stands-moment W_x cm³
5	50	33	120	21	3	5	6,71	5,27	86,4	23,2	9,27
6	60	38	140	24	3,5	6	9,34	7,33	164	47,2	15,8
7½	75	45,5	170	28,5	4	7	13,2	10,4	347	105	27,9
9	90	53	200	33	4,5	8	17,9	14,1	651	206	45,8
11	110	63	240	39	5	9	24,1	18,9	1272	421	76,5

*) Vrgl. A. Meyerhof, Biegungsspannungen der Z-Eisen, Z. d. V. d. I. 1891 S. 696. Hier findet sich eine ausführliche Tafel der Widerstandsmomente der Z-Eisen für verschiedene Biegungsebenen.

8. Quadranteisen.

Normallängen = 4 bis 8 m.

Gröfste Längen = 12 bis 16 m.

Abrundungshalbmesser $r = 0{,}12\,R$.

Abrundungshalbmesser $r_1 = 0{,}06\,R$.

Vorprofile mit 1 mm gröfseren Stärken werden gewalzt.

Abb. 9.

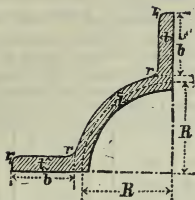
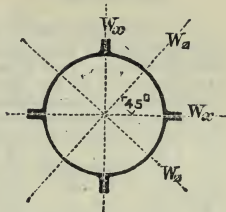


Abb. 10.



Profil-Nr.	Abmessungen in mm R	b	d	t	Querschnitt des vollen Rohres F qcm	Gewicht des vollen Rohres g kg/m	Trägheitsmoment des vollen Rohres J = konst. cm⁴	Widerstandsmoment des vollen Rohres W_z = max cm³	W_x = min cm³
5	50	35	4	6	29,8	23,4	576	89,3	66,2
5	50	35	8	8	48,0	37,7	906	135	102
$7\frac{1}{2}$	75	40	6	8	54,9	43,1	2068	237	175
$7\frac{1}{2}$	75	40	10	10	80,2	63,0	2982	331	248
10	100	45	8	10	88,1	69,2	5511	501	370
10	100	45	12	12	120	94,2	7478	663	495
$12\frac{1}{2}$	125	50	10	12	129	101	12161	917	676
$12\frac{1}{2}$	125	50	14	14	169	133	15788	1165	867
15	150	55	12	14	179	141	23637	1515	1120
15	150	55	18	17	249	195	32738	2051	1530

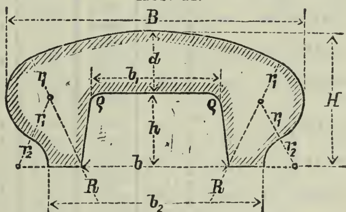
9. Handleisten-Eisen.
(Handläufer-Eisen.)

Normallängen = 4 bis 8 m.

Gröfste Längen = 12 bis 16 m.

Obere Abrundung mit dem Halbmesser $R = B$.

Abb. 11.



Profil-Nr.	B	H	b	h	R	d	r_1	r_2	ρ	b_1	b_2	Querschn. F qcm	Gewicht g kg/m
	Abmessungen in mm												
4	40	18	20	10	40	8	6	4	2	18	30	4,20	3,30
6	60	27	30	15	60	12	9	6	3	27	45	9,46	7,43
8	80	36	40	20	80	16	12	8	4	36	60	16,8	13,2
10	100	45	50	25	100	20	15	10	5	45	75	26,3	20,6
12	120	54	60	30	120	24	18	12	6	54	90	37,8	29,7

10. Ungleichschenklige Winkeleisen zu Schiffbauzwecken.

(Vrgl. Abb. 3 auf S. 526.)

d = Normalstärke der Schenkel, bei Stellung der Walzen bis 3 mm.

Die mit einem * bezeichneten Profile stimmen hinsichtlich ihrer Schenkellängen mit den Profilen der Tafel S. 522 überein. Normallängen = 4 bis 8 m. Gröfste Längen = 12 bis 16 m. R ist der Abrundungshalbmesser der inneren Winkelecke. Abrundungshalbmesser der Schenkelenden $r = {}^1/_2\,R$ (auf halbe mm abgerundet). **Vorprofile** mit gleichen Schenkelbreiten und 1 mm gröfserer Schenkelstärke werden gewalzt.

Profil-Nr.	Abmessungen in mm				Querschnitt	Gewicht	Abstand des Schwerpunktes		tg φ	Trägheitsmoment			
	b	a	d	R	F qcm	g kg/m	ξ mm	η mm		J_ξ cm⁴	J_η cm⁴	J_x = max cm⁴	J_y = min cm⁴
3/4	30	40	3	3,5	2,02	1,59	7,4	12,4	0,556	3,22	1,56	3,92	0,86
*3/4½	30	45	3	3,5	2,17	1,70	7,0	14,4	0,430	4,46	1,62	4,62	1,46
*3/6	30	60	3	4	2,63	2,06	6,1	20,9	0,261	9,93	1,73	10,51	1,15
3½/4½	35	45	3	4	2,33	1,83	8,6	13,6	0,595	4,68	2,53	5,87	1,34
4/5	40	50	3	4	2,63	2,06	9,9	14,8	0,626	6,63	3,77	8,42	1,98
*4/6	40	60	4	5	3,87	3,04	9,4	19,2	0,434	14,27	5,08	16,3	3,05
*4/8	40	80	4	5,5	4,67	3,67	8,1	27,8	0,262	31,23	5,44	33,0	3,67
4½/5½	45	55	4	5	3,87	3,04	11,4	16,4	0,651	11,63	7,02	15,0	3,65
4½/6½	45	65	4	5	4,27	3,35	10,6	20,4	0,529	18,49	7,30	21,0	4,79
5/6	50	60	5	6,5	5,29	4,15	13,0	17,9	0,670	18,58	11,71	24,1	6,19
5/6½	50	65	5	6,5	5,54	4,35	12,5	19,9	0,584	23,22	11,99	29,0	6,21
*5/7½	50	75	5	6,5	6,04	4,74	11,7	24,0	0,415	35,40	12,43	40,0	7,83
*5/10	50	100	5	7	7,28	5,71	10,1	34,8	0,261	76,31	13,42	80,9	8,83
			7		10,04	7,88	10,9	35,7	0,261	103,7	17,97	110	11,66
5½/6½	55	65	5	7	5,78	4,54	14,2	19,2	0,696	23,93	15,85	31,7	8,08
			7		7,94	6,23	15,0	19,9	0,692	32,22	21,13	42,6	10,75
5½/7½	55	75	5	7	6,28	4,93	13,3	23,2	0,514	35,72	16,39	42,6	9,51
			7		8,64	6,78	14,1	24,0	0,521	48,03	21,97	57,7	12,3
5½/8½	55	85	5	7	6,78	5,32	12,5	27,3	0,412	50,34	16,96	57,2	10,1
			7		9,34	7,33	13,3	28,2	0,410	68,37	22,73	77,4	13,7
6½/7½	65	75	6	8	8,11	6,37	17,0	21,9	0,732	44,4	31,1	59,9	15,6
			8		10,63	8,34	17,9	22,8	0,721	57,3	39,4	76,1	20,6
6½/8½	65	85	6	8	8,71	6,84	16,0	25,9	0,564	63,1	32,2	77,2	18,1
			8		11,43	8,97	16,9	26,7	0,563	81,7	40,9	99,6	23,0
*6½/10	65	100	6	8	9,61	7,54	14,8	32,1	0,410	98,7	33,5	112	20,2
			8		12,6	9,89	15,6	32,9	0,413	127,4	43,3	145	25,7
6½/11½	65	115	6	8	10,5	8,24	13,8	38,5	0,323	144,5	35,0	158	21,5
			8		13,8	10,83	14,6	39,7	0,324	186,7	44,6	204	27,3
*6½/13	65	130	6	8,5	11,4	8,95	12,9	45,0	0,264	202,2	35,5	214	23,7
			8		15,0	11,78	13,8	45,9	0,261	264,1	45,4	280	29,5
7½/9	75	90	6	8,5	9,6	7,54	18,9	26,0	0,661	78,4	48,7	101	26,1
			8		12,6	9,89	19,7	26,8	0,657	101,5	63,1	131	33,6
7½/10	75	100	7	10	11,9	9,34	18,1	30,6	0,543	119,3	58,5	144	33,8
			10		16,6	13,03	19,5	31,9	0,539	162,2	78,9	197	44,1
7½/11	75	110	7	10	12,6	9,89	17,5	34,7	0,452	154,6	59,4	179	35,0
			10		17,6	13,8	18,7	36,0	0,456	209,9	81,0	244	46,9
7½/12	75	120	8	10,5	15,1	11,85	17,1	39,3	0,382	221,6	68,3	248	41,9
			10		18,6	14,6	17,9	40,2	0,380	270,5	82,9	303	50,4
7½/13	75	130	9	10,5	17,7	13,9	16,9	44,0	0,334	310,7	76,9	338	49,6
			11		21,4	16,8	17,7	44,9	0,329	367,8	91,0	401	57,8
7½/14	75	140	9	10,5	18,6	14,6	16,3	48,4	0,293	377,7	78,1	406	49,8
			11		22,5	17,7	17,1	49,4	0,291	451,6	92,7	484	60,3

Profil-Nr.	Abmessungen in mm b	a	d	R	Querschnitt F qcm	Gewicht g kg/m	Abstand des Schwerpunktes ξ mm	η mm	tg φ	Trägheitsmoment J_ξ cm⁴	J_η cm⁴	$J_x =$ max cm⁴	$J_y =$ min cm⁴
7½/15	75	150	9	10,5	19,5	15,3	15,7	52,8	0,270	456,3	79,9	485	51,2
			11		23,6	18,5	16,5	53,8	0,257	545,7	94,8	578	62,5
7½/17	75	170	9	11,5	21,4	16,8	14,8	62,1	0,217	632,4	82,1	660	54,5
			11		25,9	20,3	15,6	62,7	0,209	767,9	102,0	803	66,9
*8/12	80	120	9	11	17,3	13,6	19,1	38,8	0,436	251,0	90,4	289	52,4
*8/16	80	160	9	13	21,0	16,5	16,5	55,8	0,262	554,3	94,8	588	61,1
9/10	90	100	9	12	16,4	12,9	24,2	29,1	0,797	145,6	119,0	219	55,6
			12		21,5	16,9	25,4	30,3	0,793	199,8	152,3	280	72,1
9/11	90	110	9	12	17,3	13,6	23,2	33,0	0,654	204,3	122,4	265	61,7
			12		22,7	17,8	24,4	34,2	0,649	262,8	156,4	339	80,2
9/12	90	120	9	12	18,2	14,3	22,2	37,0	0,524	261,0	125,8	318	68,8
			12		23,9	18,8	23,4	38,3	0,520	334,6	161,6	409	87,2
9/13	90	130	9	12	19,1	15,0	21,4	41,1	0,467	325,7	128,5	381	73,2
			12		25,1	19,7	22,6	42,4	0,465	419,7	164,8	491	93,5
9/14	90	140	9	12	20,0	15,7	20,6	45,3	0,409	399,1	131,1	454	76,2
			12		26,3	20,6	21,9	46,6	0,406	517,1	167,4	586	98,5
9/15	90	150	9	12,5	20,9	16,4	19,9	49,4	0,359	482,9	132,7	535	80,6
			11		25,3	19,9	20,7	50,3	0,358	579,4	158,6	642	96,0
			13		29,7	23,3	21,5	51,2	0,357	671,1	182,2	743	110,3
9/16	90	160	9	12,5	21,8	17,1	19,3	53,7	0,322	578,0	134,3	629	83,3
			11		26,4	20,7	20,1	54,7	0,320	693,1	160,8	754	99,9
			13		31,0	24,3	20,9	55,5	0,319	804,4	184,6	874	115,0
9/17	90	170	9	12,5	22,7	17,8	18,7	58,1	0,291	683,2	136,7	734	85,9
			11		27,5	21,6	19,5	59,0	0,288	819,6	163,4	880	103
			13		32,3	25,4	20,3	59,9	0,300	952,1	187,9	1021	119
9/20	90	200	9	12,5	25,4	19,9	17,2	71,4	0,227	1068,9	141,4	1119	91,3
			11		30,8	24,2	18,0	72,4	0,220	1285,8	169,2	1342	113
			13		36,2	28,4	18,8	73,3	0,219	1494,9	195,1	1561	129
9/22½	90	225	9	12,5	27,7	21,7	16,3	82,8	0,186	1476,4	143,4	1523	96,8
			11		33,6	26,4	17,0	83,8	0,181	1775,1	172,9	1830	118
			13		39,4	30,9	17,8	84,7	0,181	2066,8	200,2	2131	136
9/25	90	250	9	12,5	29,9	23,5	15,3	94,4	0,156	1966,0	148,0	2011	103
			11		36,3	28,5	16,1	95,4	0,154	2371,6	177,4	2424	125
			13		42,7	33,5	17,0	96,3	0,154	2759,4	203,6	2821	142
10/12	100	120	9	12	19,1	15,0	25,6	35,5	0,681	270,8	170,3	354	87,1
			12		25,1	19,7	26,8	36,7	0,678	342,3	218,7	452	109
10/13	100	130	10	13	22,1	17,3	25,0	39,7	0,577	367,0	187,9	456	98,9
			13		28,3	22,2	26,2	41,0	0,574	462,3	236,7	574	125
10/14	100	140	10	13	23,1	18,1	24,1	43,8	0,499	451,7	192,3	538	106
			13		29,6	23,2	25,3	45,1	0,495	571,0	242,0	678	135
*10/15	100	150	10	13	24,1	18,9	23,3	47,9	0,437	546,8	196,2	631	112
			13		30,9	24,3	24,5	49,2	0,435	692,0	247,0	798	141
10/16	100	160	10	13	25,1	19,7	22,6	52,2	0,390	656,2	198,8	738	117
			13		32,2	25,3	23,8	53,3	0,382	836,4	250,6	937	150
*10/20	100	200	10	15	29,2	22,9	20,1	69,3	0,263	1202,5	210,5	1279	134
			12		34,8	27,3	21,0	70,3	0,261	1443,5	246,5	1530	160
11½/17	115	170	10	13,5	27,7	21,7	26,5	53,6	0,451	817,0	305,0	948	174
			12		32,9	25,8	27,3	54,5	0,448	964,7	359,3	1117	207
			14		38,1	29,9	28,1	55,3	0,447	1106,8	410,2	1280	237

Die hierzu gehörenden Profile **2/3** (mit $d = 3$ mm), **2/4** (mit $d = 3$ mm), **8/12** (mit $d = 12$ mm), **8/16** (mit $d = 12$ mm) und **10/20** (mit $d = 14$ mm) von S. 526 ergeben im ganzen 96 ungleichschenklige Winkeleisen zu Schiffbauzwecken.

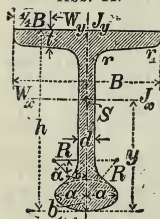
11. Z-Eisen zu Schiffbauzwecken.

(Vrgl. Abb. 7 auf S. 530.)

Normallängen = 4 bis 8 m. Gröfste Längen = 12 bis 16 m. Abrundungshalbmesser am Stege $R = d$. Abrundungshalbmesser an den Flanschen $r = \frac{1}{2} d$.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite b mm	Stegstärke d mm	Flansch-stärke t mm	Quer-schnitt F qcm	Ge-wicht g kg/m	tg φ	Trägheitsmoment J_ξ cm⁴	J_η cm⁴	J_x = max cm⁴	J_y = min cm⁴
9	90	70	8	9,5	19,2	15,1	0,827	242,6	179,6	379	43,2
10	100	70	8	9,5	20,0	15,7	0,705	311,7	179,7	442	48,9
11	110	75	9	11	24,7	19,4	0,684	461,4	253,5	645	70,2
12	120	75	9	11	25,6	20,1	0,600	567,8	253,6	745	76,6
13	130	80	10	12	30,1	23,6	0,584	777,8	332,9	1008	103,1
14	140	80	10	12	31,1	24,4	0,522	928,4	332,9	1151	110,0
15	150	85	11	13,5	36,9	29,0	0,519	1256	446,1	1555	147,3
16½	165	85	11	13,5	38,5	30,2	0,450	1578	446,3	1865	158,7
18	180	90	12	15	45,5	35,7	0,433	2204	585,0	2579	211,3
20	200	90	12	15	47,8	37,5	0,371	2837	585,3	3197	226,8

Abb. 12.



Betreffs der Abweichungen der vorstehenden Tafel 11 von S. 40 der 5. Aufl. (1897) des Deutschen Normalprofilbuches für Walzeisen s. A. Meyerhof, Biegungsspannungen der Z-Eisen zu Schiffbauzwecken, Z. d. V. d. I. 1899 S. 607.

12. T-Wulsteisen zu Schiffbauzwecken.

Normallängen = 4 bis 8 m. Gröfste Längen = 12 bis 16 m.

Wulst nach einer Ellipse (Halbachsen: $a = 2d$, $b = d$) gebildet, mit anschliefsenden Tangenten für die Winkel $\alpha = 50^0$.

Neigung der inneren Flanschflächen = 8 vH. $t = 1{,}15\, d$.

Abrundungshalbmesser: $R = 1\frac{1}{2} d$; $r = d$; $r_1 = \frac{1}{2} d$.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite B mm	Steg-stärke d mm	Flansch-stärke t mm	Quer-schnitt F qcm	Ge-wicht g kg/m	Abstand des Schwerp. y mm	Trägheits-moment J_y cm⁴	J_x cm⁴	Widerstands-moment W_y cm³	W_x cm³
15	150	120	9,5	10,92	30,8	24,2	93	146	527	24,4	56,6
16½	165	120	10	11,5	34,1	26,8	101	154	622	25,7	61,0
18	180	125	10,5	12,08	38,3	30,1	109	174	791	27,8	72,3
20	200	130	11	12,65	43,1	33,8	121	218	1091	33,5	90,4
22	220	135	11,5	13,22	48,2	37,8	132	257	1462	38,0	111
24	240	140	12	13,8	53,7	42,2	143	299	1968	42,7	137
26	260	145	13	14,95	62,0	48,7	154	361	2521	49,8	164
28	280	150	14	16,1	71,0	55,7	164	437	3203	58,2	195
30	300	160	15	17,25	81,3	63,8	176	566	4195	70,8	239
32½	325	165	16	18,4	92,3	72,5	189	671	5494	81,3	291
35	350	170	17	19,55	104	81,6	202	783	7134	92,1	353
37½	375	175	18	20,7	116	91,1	214	915	9141	105	426
40	400	180	19	21,85	129	101,3	225	1056	10258	117	456

13. I-Wulsteisen zu Schiffbauzwecken.

(Abb. 13.)

Normallängen = 4 bis 8 m. Gröfste Längen = 12 bis 16 m. — Zu den mit einem * bezeichneten Profilen sind im Normalprofilbuche S. 41 je zwei weitere Profile vorgesehen, bei denen das Mafs d um je 1 mm kleiner oder gröfser ist, als in nachstehender Tafel angegeben. Mit einigen Ausnahmen: $c = 0{,}2\,h - 1$ mm; $r = 0{,}07\,h$.

Profil-Nr.	Abmessungen in mm				Querschnitt	Gewicht	Abstand des Schwerp.	Trägheitsmoment		Widerstandsmoment	
	h	c	d	r	F qcm	g kg/m	y mm	J_y cm⁴	J_x cm⁴	W_y cm³	W_x cm³
*13	130	25	8	9,1	12,9	10,1	75,7	2,30	213	1,77	27,9
*14	140	27,5	8	9,8	14,3	11,2	82,8	2,82	271	2,05	32,7
15	150	30	9	10,5	17,2	13,5	88,6	4,02	372	2,68	41,9
16½	165	33	10	11,5	20,9	16,4	97,2	5,90	547	3,58	56,3
*18	180	35	11	12,6	24,7	19,4	105	8,43	779	4,68	73,5
*20	200	39	12	14,0	30,2	23,7	117	12,7	1174	6,35	99,4
*22	220	43	13	15,4	36,2	28,4	130	18,4	1703	8,37	131
*24	240	47,5	14	16,8	42,7	33,5	142	25,2	2384	10,6	168
*26	260	51,5	15	18,2	49,8	39,1	154	34,5	3254	13,4	211
*28	280	55	17	19,6	59,8	46,9	165	49,1	4543	17,5	275
*30	300	59	18	21,0	68,1	53,5	177	64,2	5943	21,4	336
32½	325	65,4	20	22,7	82,0	64,4	191	91,2	8336	27,9	436
35	350	71	22	24,5	96,8	76,0	206	126,3	11404	35,6	554
37½	375	75,4	23	26,2	109	85,6	221	161,1	14740	42,7	668
40	400	81	25	28,0	126	98,9	235	215,2	19368	53,1	824

Abb. 13.

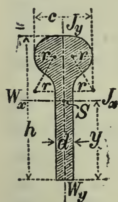
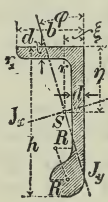


Abb. 14.



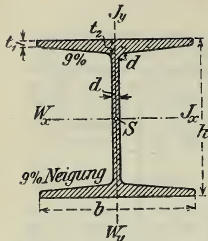
14. ⅂-Wulsteisen zu Schiffbauzwecken.

(Abb. 14.)

Normallängen = 4 bis 8 m.
Gröfste Längen = 12 bis 16 m.
Abrundungshalbmesser $r = 1{,}12\,d$.
" $r_1 = {}^1/_2\,d$.

Profil-Nr.	Abmessungen in mm						Querschnitt	Gewicht	Abstand des Schwerp.		tg φ	Trägheitsmoment	
	h	b	d	R	r	r_1	F qcm	g kg/m	ξ mm	η mm		J_x = max cm⁴	J_y = min cm⁴
13	130	65	9,25	13	10,36	4,62	20,9	16,4	14,8	58,0	0,145	451	44,0
14	140	65	10	14	11,20	5,00	23,7	18,6	14,9	63,6	0,111	586	49,1
15	150	70	10,75	15	12,04	5,37	27,4	21,5	16,0	67,9	0,122	775	65,3
16½	165	75	11,5	16	12,88	5,75	31,8	25,0	16,9	74,9	0,118	1082	86,9
18	180	80	12,25	17	13,72	6,12	36,6	28,7	17,9	81,7	0,116	1479	111
20	200	85	13	18	14,56	6,50	42,3	33,2	18,7	91,0	0,110	2104	142

Abb. 15.



Breitflanschige Differdinger I- Grey-Profile

der Deutsch-Luxemburgischen Bergwerks- und Hütten-Aktiengesellschaft.

Die **Gewichte** g gelten für Flufseisen (spez. Gewicht = 7,85). Gröfste Längen = 20 m, für die Nrn. 65, 70 u. 75 nur 17 m.

Neigung der inneren Flanschflächen = 9 vH. = rd. 1 : 11.

Abrundungshalbmesser zwischen Steg und Flansch gleich der Stegstärke d. An den Flanschkanten fehlen die Abrundungen.

Die Flanschstärke t_2 ist in der Verlängerung der Stegkante gemessen u. zw. von aufsen bis zur Verlängerung der schrägen Flanschkante.

Profil-Nr.	Höhe	Breite	Stegstärke	Flanschstärke		Querschnitt	Gewicht	Trägheitsmoment		Widerstandsmoment		Profil-Nr.
	h	b	d	t_1	t_2	F	g	J_y	J_x	W_y	W_x	
	mm	mm	mm	mm	mm	qcm	kg/m	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	
18	180	180	8,5	9	16,72	59,9	47	1073	3512	119	390	**18**
20	200	200	8,5	9,5	18,12	70,4	55,4	1568	5171	157	517	**20**
22	220	220	9	10	19,5	82,6	64,8	2216	7379	201	671	**22**
24	240	240	10	10,5	20,85	96,8	76	3043	10260	254	855	**24**
25	250	250	10,5	10,9	21,7	105,1	82,5	3575	12066	286	965	**25**
26	260	260	11	11,7	22,9	115,6	90,7	4261	14352	328	1104	**26**
27	270	270	11,25	11,95	23,6	123,2	96,7	4920	16529	365	1224	**27**
28	280	280	11,5	12,35	24,4	131,8	103,4	5671	19052	405	1361	**28**
29	290	290	12	12,7	25,2	141,1	110,8	6417	21866	443	1508	**29**
30	300	300	12,5	13,25	26,25	152,1	119,4	7494	25201	500	1680	**30**
32	320	300	13	14,1	27	160,7	126,2	7867	30119	524	1882	**32**
34	340	300	13,4	14,6	27,5	167,4	131,4	8097	35241	540	2073	**34**
36	360	300	14,2	16,15	29	181,5	142,5	8793	42479	586	2360	**36**
38	380	300	14,8	17	29,8	191,2	150,1	9175	49496	612	2605	**38**
40	400	300	15,5	18,2	31	203,6	159,8	9721	57834	648	2892	**40**
42½	425	300	16	19	31,75	213,9	167,9	10078	68249	672	3212	**42½**
45	450	300	17	20,3	33	229,3	180	10668	80887	711	3595	**45**
47½	475	300	17,6	21,35	34	242	190	11142	94811	743	3992	**47½**
50	500	300	19,4	22,6	35,2	261,7	205,5	11718	111283	781	4451	**50**
55	550	300	20,6	24,5	37	288	226,1	12582	145957	839	5308	**55**
60	600	300	20,8	24,7	37,2	300,6	236	12672	179303	845	5977	**60**
65	650	300	21,1	25	37,5	314,5	246,9	12814	217402	854	6690	**65**
70	700	300	21,1	25	37,5	325,2	255,3	12818	258106	854	7374	**70**
75	750	300	21,1	25	37,5	335,7	263,5	12823	302560	855	8068	**75**

Gewichtstafel für Quadrat-, Sechskant- und Rundeisen.

1 cbm Stabeisen (**Flußeisen**) wiegt 7850 kg.

Dicke	Gewicht in kg/m			Dicke	Gewicht in kg/m			Dicke	Gewicht in kg/m		
d mm	□	⬡	○	d mm	□	⬡	○	d mm	□	⬡	○
5	0,196	0,170	0,154	**50**	19,625	16,995	15,413	**180**	254,340	220,265	199,758
6	0,283	0,245	0,222	**52**	21,226	18,383	16,671	**185**	268,666	232,63[illegible]	211,010
7	0,385	0,333	0,302	**54**	22,891	19,824	17,978	**190**	283,3[illegible]5	245,419	222,570
8	0,502	0,435	0,395	**56**	24,618	21,320	19,335	**195**	298,496	258,506	234,438
9	0,636	0,551	0,499	**58**	26,407	22,870	20,740	**200**	314,000	271,932	246,615
10	0,785	0,680	0,617	**60**	28,260	24,474	22,195	**205**	329,896	288,927	259,100
11	0,950	0,823	0,746	**62**	30,175	26,133	23,700	**210**	346,185	299,805	271,893
12	1,130	0,979	0,888	**64**	32,154	27,846	25,253	**215**	362,866	314,251	284,994
13	1,327	1,149	1,042	**66**	34,195	29,614	26,856	**220**	379,940	329,037	298,404
14	1,539	1,332	1,208	**68**	36,298	31,436	28,509	**225**	397,406	344,164	312,122
15	1,766	1,530	1,387	**70**	38,465	33,312	30,210	**230**	415,265	359,631	326,148
16	2,010	1,740	1,578	**72**	40,694	35,243	31,961	**235**	433,516	375,437	340,483
17	2,269	1,965	1,782	**74**	42,987	37,228	33,762	**240**	452,160	391,583	355,126
18	2,543	2,203	1,998	**76**	45,342	39,267	35,611	**245**	471,196	408,068	370,077
19	2,834	2,454	2,226	**78**	47,759	41,361	37,510	**250**	490,625	424,894	385,336
20	3,140	2,719	2,466	**80**	50,240	43,509	39,458	**255**	510,446	442,060	400,904
21	3,462	2,998	2,719	**85**	56,716	49,118	44,545	**260**	530,660	459,565	416,779
22	3,799	3,290	2,984	**90**	63,585	55,067	49,940	**265**	551,266	477,411	432,963
23	4,153	3,596	3,261	**95**	70,846	61,355	55,643	**270**	572,265	495,597	449,456
24	4,522	3,916	3,551	**100**	78,500	67,983	61,654	**275**	593,656	514,022	466,257
25	4,906	4,249	3,853	**105**	86,546	74,951	67,973	**280**	615,440	532,988	483,365
26	5,307	4,596	4,168	**110**	94,985	82,[illegible]60	74,601	**285**	637,616	552,193	500,783
27	5,723	4,956	4,495	**115**	103,816	89,908	81,537	**290**	660,185	571,738	518,508
28	6,154	5,330	4,834	**120**	113,040	97,896	88,781	**295**	683,146	591,623	536,542
29	6,602	5,717	5,185	**125**	122,656	106,224	96,334	**300**	706,500	611,848	554,884
30	7,065	6,118	5,549	**130**	132,665	114,891	104,195	**305**	730,246	632,413	573,534
32	8,038	6,961	6,313	**135**	143,066	123,899	112,364	**310**	754,385	653,316	592,493
34	9,075	7,859	7,127	**140**	153,860	133,247	120,841	**315**	778,916	674,563	611,759
36	10,174	8,811	7,990	**145**	165,046	142,934	129,627	**320**	803,840	696,148	631,334
38	11,335	9,817	8,903	**150**	176,625	152,962	138,721	**325**	829,156	718,071	651,218
40	12,560	10,877	9,865	**155**	188,596	163,320	148,123	**330**	854,865	740,336	671,409
42	13,847	11,992	10,876	**160**	200,960	174,036	157,834	**335**	880,966	762,940	691,909
44	15,198	13,162	11,936	**165**	213,716	185,084	167,852	**340**	907,460	785,885	712,717
46	16,611	14,385	13,046	**170**	226,865	196,471	178,179	**345**	934,346	809,169	733,834
48	18,086	15,663	14,205	**175**	240,406	208,198	188,815	**350**	961,625	832,793	755,258

Die angegebenen Dicken des Quadrat- und Sechskanteisens entsprechen dem Durchmesser des eingeschriebenen Kreises.

Das Gewicht von Sechskanteisen beträgt das $2{,}5981 : \pi = 0{,}827$-fache (oder angenähert das $^{5}/_{6}$-fache) des Gewichtes von Rundeisen, welches den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises des Sechskanteisens hat.

Für **Schweißeisen** (spez. Gew. = 7,8) sind die Gewichtangaben der vorstehenden Tafel noch mit $7{,}8 : 7{,}85 = 0{,}99363 = (1 - \frac{1}{157})$ zu multiplizieren. -- Die entsprechenden Faktoren für andere Metalle stehen in der letzten Zeile auf S. 517.

Gewichtstafel

Gewicht von

1 cbm Stabeisen (**Flufseisen**) wiegt 7850 kg;

Dicke in mm	Breite in mm										
	10	12	14	15	16	18	20	22	24	25	26
1	0,079	0,094	0,110	0,118	0,126	0,141	0,157	0,173	0,188	0,196	0,204
2	0,157	0,188	0,220	0,236	0,251	0,283	0,314	0,345	0,377	0,393	0,408
3	0,236	0,283	0,330	0,353	0,377	0,424	0,471	0,518	0,565	0,589	0,612
4	0,314	0,377	0,440	0,471	0,502	0,565	0,628	0,691	0,754	0,785	0,816
5	0,393	0,471	0,550	0,589	0,628	0,707	0,785	0,864	0,942	0,981	1,020
6	0,471	0,565	0,659	0,707	0,754	0,848	0,942	1,036	1,130	1,178	1,225
7	0,550	0,659	0,769	0,824	0,879	0,989	1,099	1,200	1,319	1,374	1,429
8	0,628	0,754	0,879	0,942	1,005	1,130	1,256	1,382	1,507	1,570	1,633
9	0,707	0,848	0,989	1,060	1,130	1,272	1,413	1,554	1,606	1,766	1,837
10	0,785	0,942	1,099	1,178	1,256	1,413	1,570	1,727	1,884	1,963	2,041
11	0,864	1,036	1,209	1,295	1,382	1,554	1,727	1,900	2,072	2,159	2,245
12	0,942	1,130	1,319	1,413	1,507	1,696	1,884	2,072	2,261	2,355	2,449
13	1,021	1,225	1,429	1,531	1,633	1,837	2,041	2,245	2,449	2,551	2,653
14	1,099	1,319	1,539	1,649	1,758	1,978	2,198	2,418	2,638	2,748	2,857
15	1,178	1,413	1,648	1,766	1,884	2,120	2,355	2,591	2,826	2,944	3,061
16	1,256	1,507	1,758	1,884	2,010	2,261	2,512	2,763	3,014	3,140	3,266
17	1,335	1,601	1,868	2,002	2,135	2,402	2,669	2,936	3,203	3,336	3,470
18	1,413	1,696	1,978	2,120	2,261	2,543	2,826	3,109	3,391	3,533	3,674
19	1,492	1,790	2,088	2,237	2,386	2,685	2,983	3,281	3,580	3,729	3,878
20	1,570	1,884	2,198	2,355	2,512	2,826	3,140	3,454	3,768	3,925	4,082
21	1,649	1,978	2,308	2,473	2,638	2,967	3,297	3,627	3,956	4,121	4,286
22	1,727	2,072	2,418	2,591	2,763	3,109	3,454	3,799	4,145	4,318	4,490
23	1,806	2,167	2,528	2,708	2,889	3,250	3,611	3,972	4,333	4,514	4,694
24	1,884	2,261	2,638	2,826	3,014	3,391	3,768	4,145	4,522	4,710	4,898
25	1,963	2,355	2,748	2,944	3,140	3,533	3,925	4,318	4,710	4,906	5,103
26	2,041	2,449	2,857	3,061	3,266	3,674	4,082	4,490	4,898	5,103	5,307
27	2,120	2,543	2,967	3,179	3,391	3,815	4,239	4,663	5,087	5,299	5,511
28	2,198	2,638	3,077	3,297	3,517	3,956	4,396	4,836	5,275	5,495	5,715
29	2,277	2,732	3,187	3,415	3,642	4,098	4,553	5,008	5,464	5,691	5,919
30	2,355	2,826	3,297	3,533	3,768	4,239	4,710	5,181	5,652	5,888	6,123
31	2,434	2,920	3,407	3,650	3,894	4,380	4,867	5,354	5,840	6,084	6,327
32	2,512	3,014	3,517	3,768	4,019	4,522	5,024	5,526	6,029	6,280	6,531
33	2,591	3,109	3,627	3,886	4,145	4,663	5,181	5,699	6,217	6,476	6,735
34	2,669	3,203	3,737	4,003	4,270	4,804	5,338	5,872	6,406	6,673	6,939
35	2,748	3,297	3,847	4,121	4,396	4,946	5,495	6,045	6,594	6,869	7,144
36	2,826	3,391	3,956	4,239	4,522	5,087	5,652	6,217	6,782	7,065	7,348
37	2,905	3,485	4,066	4,357	4,647	5,228	5,809	6,390	6,971	7,261	7,552
38	2,983	3,580	4,176	4,474	4,773	5,369	5,966	6,563	7,159	7,458	7,756
39	3,062	3,674	4,286	4,592	4,898	5,511	6,123	6,735	7,348	7,654	7,960
40	3,140	3,768	4,396	4,710	5,024	5,652	6,280	6,908	7,536	7,850	8,164
41	3,219	3,862	4,506	4,828	5,150	5,793	6,437	7,081	7,724	8,046	8,368
42	3,297	3,956	4,616	4,945	5,275	5,935	6,594	7,253	7,913	8,243	8,572
43	3,376	4,051	4,726	5,063	5,401	6,076	6,751	7,426	8,101	8,439	8,776
44	3,454	4,145	4,836	5,181	5,526	6,217	6,908	7,599	8,290	8,635	8,980
45	3,533	4,239	4,946	5,299	5,652	6,359	7,065	7,772	8,478	8,831	9,185

für Flacheisen.

1 m in kg.

s. auch Abs. 3 der Anmerkung auf S. 537.

Breite in mm											Dicke in mm
28	30	32	34	35	36	38	40	42	44	45	
0,220	0,236	0,251	0,267	0,275	0,283	0,298	0,314	0,330	0,345	0,353	**1**
0,440	0,471	0,502	0,534	0,550	0,565	0,597	0,628	0,659	0,691	0,707	**2**
0,659	0,707	0,754	0,801	0,824	0,848	0,895	0,942	0,989	1,036	1,060	**3**
0,879	0,942	1,005	1,068	1,099	1,130	1,193	1,256	1,319	1,382	1,413	**4**
1,099	1,178	1,256	1,335	1,374	1,413	1,492	1,570	1,649	1,727	1,766	**5**
1,319	1,413	1,507	1,601	1,649	1,696	1,790	1,884	1,978	2,072	2,120	**6**
1,539	1,649	1,758	1,868	1,923	1,978	2,088	2,198	2,308	2,418	2,473	**7**
1,758	1,884	2,010	2,135	2,198	2,261	2,386	2,512	2,638	2,763	2,826	**8**
1,978	2,120	2,261	2,402	2,473	2,543	2,685	2,826	2,967	3,109	3,179	**9**
2,198	2,355	2,512	2,669	2,748	2,826	2,983	3,140	3,297	3,454	3,533	**10**
2,418	2,591	2,763	2,936	3,022	3,109	3,281	3,454	3,627	3,799	3,886	**11**
2,638	2,826	3,014	3,203	3,297	3,391	3,580	3,768	3,956	4,145	4,239	**12**
2,857	3,062	3,266	3,470	3,572	3,674	3,878	4,082	4,286	4,490	4,592	**13**
3,077	3,297	3,517	3,737	3,847	3,956	4,176	4,396	4,616	4,836	4,946	**14**
3,297	3,533	3,768	4,004	4,121	4,239	4,475	4,710	4,946	5,181	5,299	**15**
3,517	3,768	4,019	4,270	4,396	4,522	4,773	5,024	5,275	5,526	5,652	**16**
3,737	4,004	4,270	4,537	4,671	4,804	5,071	5,338	5,605	5,872	6,005	**17**
3,956	4,239	4,522	4,804	4,946	5,087	5,369	5,652	5,935	6,217	6,359	**18**
4,176	4,475	4,773	5,071	5,220	5,369	5,668	5,966	6,264	6,563	6,712	**19**
4,396	4,710	5,024	5,338	5,495	5,652	5,966	6,280	6,594	6,908	7,065	**20**
4,616	4,946	5,275	5,605	5,770	5,935	6,264	6,594	6,924	7,253	7,418	**21**
4,836	5,181	5,526	5,872	6,045	6,217	6,563	6,908	7,253	7,599	7,772	**22**
5,055	5,417	5,778	6,139	6,319	6,500	6,861	7,222	7,583	7,944	8,125	**23**
5,275	5,652	6,029	6,406	6,594	6,782	7,159	7,536	7,913	8,290	8,478	**24**
5,495	5,888	6,280	6,673	6,869	7,065	7,458	7,850	8,243	8,635	8,831	**25**
5,715	6,123	6,531	6,939	7,144	7,348	7,756	8,164	8,572	8,980	9,185	**26**
5,935	6,359	6,782	7,206	7,418	7,630	8,054	8,478	8,902	9,326	9,538	**27**
6,154	6,594	7,034	7,473	7,693	7,913	8,352	8,792	9,232	9,671	9,891	**28**
6,374	6,830	7,285	7,740	7,968	8,195	8,651	9,106	9,561	10,02	10,24	**29**
6,594	7,065	7,536	8,007	8,243	8,478	8,949	9,420	9,891	10,36	10,60	**30**
6,814	7,301	7,787	8,274	8,517	8,761	9,247	9,734	10,22	10,71	10,95	**31**
7,034	7,536	8,038	8,541	8,792	9,043	9,546	10,05	10,55	11,05	11,30	**32**
7,253	7,772	8,290	8,808	9,067	9,326	9,844	10,36	10,88	11,40	11,66	**33**
7,473	8,007	8,541	9,075	9,342	9,608	10,14	10,68	11,21	11,74	12,01	**34**
7,693	8,243	8,792	9,342	9,616	9,891	10,44	10,99	11,54	12,09	12,36	**35**
7,913	8,478	9,043	9,608	9,891	10,17	10,74	11,30	11,87	12,43	12,72	**36**
8,133	8,714	9,294	9,875	10,17	10,46	11,04	11,62	12,20	12,78	13,07	**37**
8,352	8,949	9,546	10,14	10,44	10,74	11,34	11,93	12,53	13,13	13,42	**38**
8,572	9,185	9,797	10,41	10,72	11,02	11,63	12,25	12,86	13,47	13,78	**39**
8,792	9,420	10,05	10,68	10,99	11,30	11,93	12,56	13,19	13,82	14,13	**40**
9,012	9,656	10,30	10,94	11,26	11,59	12,23	12,87	13,52	14,16	14,48	**41**
9,232	9,891	10,55	11,21	11,54	11,87	12,53	13,19	13,85	14,51	14,84	**42**
9,451	10,13	10,80	11,48	11,81	12,15	12,83	13,50	14,18	14,85	15,19	**43**
9,671	10,36	11,05	11,74	12,09	12,43	13,13	13,82	14,51	15,20	15,54	**44**
9,891	10,60	11,30	12,01	12,36	12,72	13,42	14,13	14,84	15,54	15,90	**45**

Dicke in mm	Breite in mm										
	46	48	50	55	60	65	70	75	80	85	90
1	0,361	0,377	0,393	0,432	0,471	0,510	0,550	0,589	0,628	0,667	0,707
2	0,722	0,754	0,785	0,864	0,942	1,021	1,099	1,178	1,256	1,335	1,413
3	1,083	1,130	1,178	1,295	1,413	1,531	1,648	1,766	1,884	2,002	2,120
4	1,444	1,507	1,570	1,727	1,884	2,041	2,198	2,355	2,512	2,669	2,826
5	1,806	1,884	1,963	2,159	2,355	2,551	2,748	2,944	3,140	3,336	3,533
6	2,167	2,261	2,355	2,591	2,826	3,062	3,297	3,533	3,768	4,004	4,239
7	2,528	2,638	2,748	3,022	3,297	3,572	3,847	4,121	4,396	4,671	4,946
8	2,889	3,014	3,140	3,454	3,768	4,082	4,396	4,710	5,024	5,338	5,652
9	3,250	3,391	3,533	3,886	4,239	4,592	4,946	5,299	5,652	6,005	6,359
10	3,611	3,768	3,925	4,318	4,710	5,103	5,495	5,888	6,280	6,673	7,065
11	3,972	4,145	4,318	4,749	5,181	5,613	6,045	6,476	6,908	7,340	7,772
12	4,333	4,522	4,710	5,181	5,652	6,123	6,594	7,065	7,536	8,007	8,478
13	4,694	4,898	5, 03	5,613	6,123	6,633	7,145	7,654	8,164	8,674	9,185
14	5,055	5,275	5,495	6,045	6,594	7,144	7,693	8,243	8,792	9,342	9,891
15	5,417	5,652	5,888	6,476	7,065	7,654	8,243	8,831	9,420	10,01	10,60
16	5,778	6,029	6,280	6,908	7,536	8,164	8,792	9,420	10,05	10,68	11,30
17	6,139	6,406	6,673	7,340	8,007	8,674	9,342	10,01	10,68	11,34	12,01
18	6,500	6,782	7,065	7,772	8,478	9,185	9,891	10,60	11,30	12,01	12,72
19	6,861	7,159	7,458	8,209	8,949	9,695	10,44	11,19	11,93	12,68	13,42
20	7,222	7,536	7,850	8,635	9,420	10,21	10,99	11,78	12,56	13,35	14,13
21	7,583	7,913	8,243	9,067	9,891	10,72	11,54	12,36	13,19	14,01	14,84
22	7,944	8,290	8,635	9,499	10,36	11,23	12,09	12,95	13,82	14,68	15,54
23	8,305	8,666	9,028	9,930	10,83	11,74	12,64	13,54	14,44	15,35	16,25
24	8,666	9,043	9,420	10,36	11,30	12,25	13,19	14,13	15,07	16,01	16,96
25	9,028	9,420	9,813	10,79	11,78	12,76	13,74	14,72	15,70	16,68	17,66
26	9,389	9,797	10,21	11,23	12,25	13,27	14,29	15,31	16,33	17,35	18,37
27	9,750	10,17	10,60	11,66	12,72	13,78	14,84	15,90	16,96	18,02	19,08
28	10,11	10,55	10,99	12,09	13,19	14,29	15,39	16,49	17,58	18,68	19,78
29	10,47	10,93	11,38	12,52	13,66	14,80	15,94	17,07	18,21	19,35	20,49
30	10,83	11,30	11,78	12,95	14,13	15,31	16,48	17,66	18,84	20,02	21,20
31	11,19	11,68	12,17	13,38	14,60	15,82	17,03	18,25	19,47	20,68	21,90
32	11,56	12,06	12,56	13,82	15,07	16,33	17,58	18,84	20,10	21,35	22,61
33	11,92	12,43	12,95	14,25	15,54	16,84	18,13	19,43	20,72	22,02	23,31
34	12,28	12,81	13,35	14,68	16,01	17,35	18,68	20,02	21,35	22,69	24,02
35	12,64	13,19	13,74	15,11	16,49	17,86	19,23	20,61	21,98	23,35	24,73
36	13,00	13,56	14,13	15,54	16,96	18,37	19,78	21,20	22,61	24,02	25,43
37	13,36	13,94	14,52	15,97	17,43	18,88	20,33	21,78	23,24	24,69	26,14
38	13,72	14,31	14,92	16,41	17,90	19,39	20,88	22,37	23,86	25,36	26,85
39	14,08	14,70	15,31	16,84	18,37	19,90	21,43	22,96	24,49	26,02	27,55
40	14,44	15,07	15,70	17,27	18,84	20,41	21,98	23,55	25,12	26,69	28,26
41	14,81	15,45	16,09	17,70	19,31	20,92	22,53	24,14	25,75	27,36	28,97
42	15,17	15,83	16,49	18,13	19,78	21,43	23,08	24,73	26,38	28,02	29,67
43	15,53	16,20	16,88	18,57	20,25	21,94	23,63	25,32	27,00	28,69	30,38
44	15,89	16,58	17,27	19,00	20,72	22,45	24,18	25,91	27,63	29,36	31,09
45	16,25	16,96	17,66	19,43	21,20	22,96	24,73	26,49	28,26	30,03	31,79

Breite in mm											Dicke in mm
95	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	
0,746	0,785	0,864	0,942	1,021	1,099	1,178	1,256	1,335	1,413	1,492	1
1,492	1,570	1,727	1,884	2,041	2,198	2,355	2,512	2,669	2,826	2,983	2
2,237	2,355	2,591	2,826	3,062	3,297	3,533	3,768	4,004	4,239	4,475	3
2,983	3,140	3,454	3,768	4,082	4,396	4,710	5,024	5,338	5,652	5,966	4
3,729	3,925	4,318	4,710	5,103	5,495	5,888	6,280	6,673	7,065	7,458	5
4,475	4,710	5,181	5,652	6,123	6,594	7,065	7,536	8,007	8,478	8,949	6
5,220	5,495	6,045	6,594	7,144	7,693	8,243	8,792	9,342	9,891	10,44	7
5,966	6,280	6,908	7,536	8,164	8,792	9,420	10,05	10,68	11,30	11,93	8
6,712	7,065	7,772	8,478	9,185	9,891	10,60	11,30	12,01	12,72	13,42	9
7,458	7,850	8,635	9,420	10,21	10,99	11,78	12,56	13,35	14,13	14,92	10
8,203	8,635	9,499	10,36	11,23	12,09	12,95	13,82	14,68	15,54	16,41	11
8,949	9,420	10,36	11,30	12,25	13,19	14,13	15,07	16,01	16,96	17,90	12
9,695	10,21	11,23	12,25	13,27	14,29	15,31	16,33	17,35	18,37	19,39	13
10,44	10,99	12,09	13,19	14,29	15,39	16,49	17,58	18,68	19,78	20,88	14
11,19	11,78	12,95	14,13	15,31	16,48	17,66	18,84	20,02	21,20	22,37	15
11,93	12,56	13,82	15,07	16,33	17,58	18,84	20,10	21,35	22,61	23,86	16
12,68	13,35	14,68	16,01	17,35	18,68	20,02	21,35	22,69	24,02	25,36	17
13,42	14,13	15,54	16,96	18,37	19,78	21,20	22,61	24,02	25,43	26,85	18
14,17	14,92	16,41	17,90	19,39	20,88	22,37	23,86	25,36	26,85	28,34	19
14,92	15,70	17,27	18,84	20,41	21,98	23,55	25,12	26,69	28,26	29,83	20
15,66	16,49	18,13	19,78	21,43	23,08	24,73	26,38	28,02	29,67	31,32	21
16,41	17,27	19,00	20,72	22,45	24,18	25,91	27,63	29,36	31,09	32,81	22
17,15	18,06	19,86	21,67	23,47	25,28	27,08	28,89	30,69	32,50	34,30	23
17,90	18,84	20,72	22,61	24,49	26,38	28,26	30,14	32,03	33,91	35,80	24
18,64	19,63	21,59	23,55	25,51	27,48	29,44	31,40	33,36	35,33	37,29	25
19,39	20,41	22,45	24,49	26,53	28,57	30,61	32,66	34,70	36,74	38,78	26
20,14	21,20	23,31	25,43	27,55	29,67	31,79	33,91	36,03	38,15	40,27	27
20,88	21,98	24,18	26,38	28,57	30,77	32,97	35,17	37,37	39,56	41,76	28
21,63	22,77	25,04	27,32	29,59	31,87	34,15	36,42	38,70	40,98	43,25	29
22,37	23,55	25,91	28,26	30,62	32,97	35,33	37,68	40,04	42,39	44,75	30
23,12	24,34	26,77	29,20	31,64	34,07	36,50	38,94	41,37	43,80	46,24	31
23,86	25,12	27,63	30,14	32,66	35,17	37,68	40,19	42,70	45,22	47,73	32
24,61	25,91	28,50	31,09	33,68	36,27	38,86	41,45	44,04	46,63	49,22	33
25,36	26,69	29,36	32,03	34,70	37,37	40,03	42,70	45,37	48,04	50,71	34
26,10	27,48	30,22	32,97	35,72	38,47	41,21	43,96	46,71	49,46	52,20	35
26,85	28,26	31,09	33,91	36,74	39,56	42,39	45,22	48,04	50,87	53,69	36
27,59	29,05	31,95	34,85	37,76	40,66	43,57	46,47	49,38	52,28	55,19	37
28,34	29,83	32,81	35,80	38,78	41,76	44,74	47,73	50,71	53,69	56,68	38
29,08	30,62	33,68	36,74	39,80	42,86	45,92	48,98	52,05	55,11	58,17	39
29,83	31,40	34,54	37,68	40,82	43,96	47,10	50,24	53,38	56,52	59,66	40
30,58	32,19	35,40	38,62	41,84	45,06	48,28	51,50	54,71	57,93	61,15	41
31,32	32,07	36,27	39,56	42,86	46,16	49,45	52,75	56,05	59,35	62,64	42
32,07	33,76	37,13	40,51	43,88	47,26	50,63	54,01	57,38	60,76	64,13	43
32,81	34,54	37,99	41,45	44,90	48,36	51,81	55,26	58,72	62,17	65,63	44
33,56	35,33	38,86	42,39	45,92	49,46	52,99	56,52	60,05	63,59	67,12	45

Es wiegen 1000 m **Telegraphendraht** nach Felten & Guilleaume in Mülheim [Rhein]: verzinkter Eisendraht 6 mm dick 215 kg, 5 mm dick 150 kg, 4 mm dick 100 kg, 3 mm dick 55 kg, 2 mm dick (Bindedraht) 24 kg, 1,7 mm dick (Wickeldraht) 18 kg.

8. **Glatte Bleche** (Schwarzbleche) werden aus Plattinen und Blöcken aus Schweifs- und Flufseisen sowie aus Flufsstahl gewalzt. Bis 4,5 mm Dicke heifsen sie Feinbleche (Sturzbleche), bei 5 mm und mehr Dicke Grobbleche. Dem Verwendungszweck entsprechend zerfallen die Grobbleche in Kessel- (Feuer- und Mantel-), Schiff-, Behälter-, Konstruktions- und Spezial-Bleche. — Weiteres s. S. 555 bis 558, 560, 565 und 566.

Feinbleche. Die Dicke wird nach der Nummer der Blechlehre (S. 518) angegeben. Gewichte von Feinblechen enthält nachstehende Tafel. Zulässige Abweichungen in Länge, Breite, Dicke und Gewicht, sowie Lager- und Maximalgröfsen der Feinbleche s. S. 556 und 557. Der Grundpreis richtet sich nach der Blechnummer. Bleche von gröfseren Abmessungen, oder nach Form oder rechtwinklig auf genaue Länge und Breite geschnitten, runde oder halbrunde Feinbleche, ebenso die Qualität, bedingen Ueberpreise.

Gewichtstafeln für Feinbleche

der deutschen und Dillinger Lehre. (Vrgl. S. 518.)

Gewicht in kg/qm.

Dicke mm	Schweifs-eisen	Flufseisen	Flufsstahl	Dicke mm	Schweifs-eisen	Flufseisen	Flufsstahl	Dicke mm	Schweifs-eisen	Flufseisen	Flufsstahl
0,30	2,34	2,36	2,36	0,875	6,83	6,87	6,88	1,85	14,4	14,5	14,5
0,375	2,93	2,94	2,95	0,90	7,02	7,07	7,07	2,00	15,6	15,7	15,7
0,40	3,12	3,14	3,14	1,00	**7,80**	**7,85**	**7,86**	2,25	17,6	17,7	17,7
0,438	3,42	3,44	3,44	1,10	8,58	8,64	8,65	2,50	19,5	19,6	19,7
0,50	3,90	3,93	3,93	1,125	8,78	8,83	8,84	2,75	21,5	21,6	21,6
0,562	4,38	4,41	4,42	1,25	9,75	9,81	9,83	3,00	23,4	23,6	23,6
0,60	4,68	4,71	4,72	1,375	10,7	10,8	10,8	3,25	25,4	25,5	25,5
0,625	4,88	4,91	4,91	1,40	10,9	11,0	11,0	3,50	27,3	27,5	27,5
0,68	5,30	5,34	5,34	1,50	11,7	11,8	11,8	3,75	29,3	29,4	29,5
0,70	5,46	5,50	5,50	1,55	12,1	12,2	12,2	4,00	31,2	31,4	31,4
0,75	5,85	5,89	5,90	1,70	13,3	13,3	13,4	4,25	33,2	33,4	33,4
0,80	6,24	6,28	6,29	1,75	13,7	13,7	13,8	4,50	35,1	35,3	35,4

Bund- oder Zentnerbleche sind Feinbleche, die in Gebunden von 50 kg und in Tafelgröfsen von 470 . 630, 470 . 790, 630 . 940 mm geliefert werden. Ein Gebund enthält je nach der Tafelgröfse und der Blechnummer 3 bis 75 Tafeln.

Gelochte Bleche sind Feinbleche mit kreisförmiger, quadratischer, rechteckiger, sechseckiger, dreieckiger oder geschlitzter Lochung; in allen Nummern der Feinblechlehre bis zu 2,5 m Breite und 6,0 m Länge erhältlich, dienen sie zu Siebzwecken allerart. Runde Lochung wird von 0,5 bis 100 mm Durchmesser ausgeführt. Zierbleche sind verschiedenartig gemusterte gelochte Bleche von 0,75 bis 2 mm Stärke; sie werden zur Verkleidung von Heizkörpern, Ausfüllung von Maueröffnungen usw. benutzt. Alle gelochten Bleche werden auch verzinkt oder verbleit geliefert.

Grobbleche aus Schweifs- oder Flufseisen. Gewichte s. S. 517. Uebliche Längen-, Breiten-, Dicken- und Gewichtabweichungen, Lager- und Höchstgröfsen der Grobbleche s. S. 556 und 557. Der Durchmesser runder Platten beträgt bis zu 2800 mm und mehr. Dicke der Bleche bis zu 40 mm. Weiteres s. S. 555, 560, 565 u. f. und 7. Abschnitt, Kraftmaschinen, unter „Teile der Dampfkessel". Nach Form beschnittene Platten werden wie rechteckig voll berechnet, dabei wird der Abfall mit etwa 50 ℳ/t in Abzug gebracht. Platten von mehr als 26 mm Stärke (Lokomotivrahmen und Schiffsbleche) bedürfen besonderer Preisvereinbarung.

9. **Buckelplatten** (Trogbleche) aus Flufseisen, zum Belegen von Brücken usw., nach Art der Klostergewölbe mit $^1/_{10}$ bis $^1/_{15}$ Stich geformt, mit allseitigem, ebenem Rande von 40 bis 80 mm Breite zum Annieten an die Träger, werden in allen Abmessungen (Seitenlängen von 500 bis 1800 mm) in quadratischer, rechteckiger und Trapezform bei 5 bis 10 mm Stärke geliefert. Die Tragfähigkeit der Platten wird am besten durch Versuchsbelastungen festgestellt. Ist h die Pfeilhöhe des Buckels, so ist die für das Gewicht in Rechnung zu ziehende ebene Fläche

für rechteckige Buckelplatten (Abb. 16):

$$F = LB + 2\frac{l^2 + b^2}{lb}h^2,$$

für quadratische Buckelplatten mit $L = B$ und $l = b$:

$$F = L^2 + 4h^2,$$

Abb. 16.

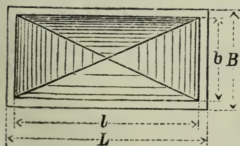
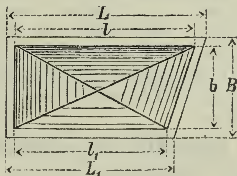


Abb. 17.



für trapezförmige Buckelplatten (Abb. 17):

$$F = \frac{L + L_1}{2}B + \frac{(l + l_1)(l^2 + l_1^2 + 2b^2)}{2ll_1b}h^2.$$

Die Union, A.-G. f. Bergbau, Eisen- und Stahlindustrie in Dortmund, liefert folgende flufseiserne quadratische und rechteckige **Buckelplatten**, wobei G in kg als das Gewicht einer 10 mm starken Buckelplatte angegeben wird:

L mm	B mm	h mm	Rand mm	G kg	L mm	B mm	h mm	Rand mm	G kg	L mm	B mm	h mm	Rand mm	G kg
500	500	27	60	19,9	1310	1000	104	50	106,4	1098	1098	75	40	96,4
700	700	45	70	39,1	1100	770	80	55	68,7	1140	1140	85	40	104,3
750	750	45	60	44,2	1630	1270	130	80	167,9	1265	1265	100	80	128,8
1000	1000	72	60	80,1	1098	1098	78	78	96,5	1490	1490	130	78	179,6

10. **Tonnenbleche** (Hängebleche) aus Flufseisen, zum Belegen von Brücken, nach Art der flachen Kappen mit $^1/_8$ bis $^1/_{12}$ Stich geformt, mit längsseitigen, ebenen Rändern von 60 bis 80 mm Breite zum Annieten, werden in allen Abmessungen (Länge = 500 bis 3000 mm, Breite = 500 bis 2000 mm) in rechteckiger Grundform bei 5 bis 10 mm Stärke geliefert. Das Gewicht ist aus dem Querschnitt und der mittleren Länge zu bestimmen. Niete (zur Befestigung an die Träger) von 16 mm Schaftdurchmesser bei 60 bis 100 mm Teilung.

11. **Riffelbleche** (gerippte Bleche) aus Flufseisen. Die Platten sind auf der einen Seite mit geradlinigen, sich rautenförmig kreuzenden (Diagonalen-Verhältnis ∼ 20 : 30 mm), 1,5 bis 3 mm hohen, 4 bis 5 mm breiten Erhöhungen (Riffeln) versehen. Sie werden bis 450 kg schwer, bis 1350 mm breit und in Stärken von 4 bis 25 mm (ausschl. Riffel) bewalzt. Benutzt zu Belagzwecken und Abdeckungen allerart, z. B. für Treppenstufen, zur Abdeckung von Kanälen, zu Brücken-Fufswegen usw. — **Waffelbleche,** in Stärken von 1,5 bis 5 mm, sind wie die Riffelbleche verwendbar. Aehnlich auch die **Warzenbleche.**

12. Für viele Zwecke wird Feinblech (Schwarzblech) mit einem schwer oxydierenden, metallischen Ueberzuge von Zinn, Zink, Blei, Kupfer und Nickel versehen, u. zw. auf warmem Wege oder galvanisch.

Der Ueberzug mufs das Eisen vollständig und gleichmäfsig bedecken und gut haften. (Vrgl. auch S. 569 u. f.)

Weifsbleche sind gute, gleichmäfsig stark **verzinnte** Schwarzbleche; sie kommen als Kreuzbleche (Tafeln 380 · 265 mm für dünnere, 430 · 330 mm für dickere Bleche, oder mit der doppelten Länge oder Breite) und als Pontonbleche (Tafeln 430 · 330 mm) in den Handel (in Kisten). Die Stärke der Weifsbleche schwankt zwischen 0,4 und 2,5 mm; die dünneren Blechsorten sind die gebräuchlichsten.

Verzinkte und verbleite Eisenbleche in allen Stärken und Gröfsen der Feinbleche; für eine 1 qm grofse Tafel und beide Seiten des Bleches zusammen ist zu rechnen 0,5 kg Zink oder 0,8 bis 1,0 kg Blei.

Verkupferte Bleche mit ein- oder beiderseitigem Kupferüberzuge (galvanisch), der 5 bis 10 vH des Eisengewichtes beträgt. Tafeln bis

1,0 m lang und bis 0,6 m breit. — Die Deutsche Wachwitzmetall-A.-G. in Hersbruck (Bayern) stellt nach einem patentierten Schweifsverfahren kupferplattierte Flufseisenbleche her; die beiderseitige Kupferdecke ist homogen, poren- und blasenfrei und so stark, dafs sie mechanischen und atmosphärischen Einflüssen widersteht. Verwendung im Hochbau (bei Dächern, Gesimsverkleidungen usw.) in Form von flachen Tafeln und Wellblechen.

Vernickelte Bleche. Auf eine oder beide Seiten des Eisenbleches werden dünne Nickelplatten geschweifst und das Ganze ausgewalzt. Der Nickelüberzug beträgt 5 bis 10 vH. des Eisengewichtes.

13. **Wellbleche.** Querschnittformen, Trägheits- und Widerstandsmomente für eine Wellenbreite s. S. 437, Nr. 27 und 28. Um J in cm^4 und W in cm^3 für 1 m Tafelbreite zu erhalten, multipliziere man die dort angegebenen Formelwerte (Abmessungen in cm vorausgesetzt) noch mit $100 : B$. Sind auf S. 437 H, B und δ in mm gegeben, so findet man auch angenähert für 1 m Breite:

$$J = 0{,}1\,[0{,}1 + 0{,}195\,(H:B)]\,H^2\delta \text{ in } cm^4,$$
$$W = [0{,}2 + 0{,}39\,(H:B)]\,H\delta \text{ in } cm^3.$$

Flache Wellbleche werden mittels kannelierter Walzen gewalzt, tiefe werden geprefst. Gewellt wird meist Feinblech aus Flufseisen in allen vorkommenden Tafelgröfsen, das dann schwarz, gestrichen oder verbleit, meist aber verzinkt in den Handel gelangt. Die beiderseitige Verzinkung ruft ein Mehrgewicht von etwa $z = 0{,}8$ kg/qm des ebenen (ungewellten) Bleches hervor; dies ergibt für Flufseisen-Wellblech, wenn w dessen Gewicht in kg/qm Grundfl. im unverzinkten Zustande bei 1 mm Stärke bedeutet, ein Zinkgewicht von $(w : 7{,}85)\,z$ kg/qm. Auch kann man rechnen, dafs das Mehrgewicht durch die Verzinkung bei $\delta = 1$ mm Eisenwellblechstärke 10 vH, bei $\delta = 1{,}5$ mm 7 vH, bei $\delta = 2$ mm 6 vH, bei $\delta = 3$ mm 4 vH, bei $\delta = 4$ mm 3 vH und bei $\delta = 5$ mm 2,5 vH des Eisengewichtes ausmacht. Drei Sorten Wellblech sind in Gebrauch:

a) Flaches Wellblech	mit $B > 2\,H$ und	$B = 50$ bis 200 mm
b) Jalousie-Wellblech	mit $B > 2\,H$ und	$B = 20$ „ 45 „
c) Träger-Wellblech	„ $B \gtreqless 2\,H$ „	$B = 30$ „ 160 „

In Berlin ist für flufseisernes *gerades* Wellblech 875 kg/qcm und für *gewölbtes* (bombiertes) 500 kg/qcm als Zug- und Druckspannung baupolizeilich zugelassen.

a) **Flaches Wellblech** in Stärken δ, entsprechend den Nrn. 17 bis 24 der deutschen Feinblechlehre (S. 518). Zu Dachdeckungen benutzt. Die Plattenbreite (0,65 bis 0,95 m) und Plattenlänge (2,0 bis 3,0 m) richten sich nach den benutzten Blechtafeln.

Eine Anzahl gebräuchlicher Profilformen gibt folgende *Tafel*. Die Widerstandsmomente, Querschnitte und Gewichte für kleinere und gröfsere Blechstärken als 1 mm erhält man hierbei (annähernd) durch Multiplikation mit der betreffenden Blechdicke δ in mm; genauer ist dagegen für die Widerstandsmomente als Faktor $H\delta : (H + \delta)$ zu wählen. Bei den Gewichtangaben der Tafel ist Flufseisen-Schwarzblech im ungestrichenen und nicht verzinkten Zustande vorausgesetzt.

Flache Wellbleche.

Wellenbreite B mm	Wellenhöhe H mm	Querschnitt f. 1 m Tafelbreite (und $\delta = 1$ mm Blechstärke) qcm	Gewicht f. 1 qm Wellblech kg	Widerstandsmoment f. 1 m Tafelbreite cm³	Wellenbreite B mm	Wellenhöhe H mm	Querschnitt f. 1 m Tafelbreite (und $\delta = 1$ mm Blechstärke) qcm	Gewicht f. 1 qm Wellblech kg	Widerstandsmoment f. 1 m Tafelbreite cm³
50	20	13,83	10,87	7,1	125	50	13,83	10,87	17,6
60	25	14,13	11,09	9,0	125	55	14,55	11,42	20,3
65	25	13,56	10,64	8,7	130	60	14,96	11,74	22,6
70	30	14,34	11,26	10,9	135	60	14,63	11,48	22,2
75	30	13,83	10,87	10,6	140	60	14,34	11,26	21,8
80	35	14,51	11,39	12,8	150	60	13,83	10,87	21,2
85	35	14,04	11,02	12,5	150	70	15,05	11,81	26,5
90	40	14,63	11,48	14,8	160	60	13,41	10,52	20,6
95	40	14,21	11,15	14,4	160	70	14,51	11,39	25,7
100	40	13,83	10,87	14,1	170	70	14,04	11,02	24,9
100	45	14,74	11,57	16,8	175	70	13,83	10,87	24,7
110	45	13,99	10,98	16,0	180	75	14,13	11,09	26,9
110	50	14,82	11,63	18,7	185	75	13,93	10,94	26,6
120	50	14,13	11,09	17,7	190	80	14,21	11,15	28,8
120	55	14,90	11,69	20,6	200	85	14,28	11,21	30,8

Beispiel. Das flache Flufseisen-Wellblech eines eisernen **Daches** liegt zwischen den L-Fetten 2,0 m frei, im Grundrisse gemessen. Die Belastung durch Eigengewicht, Schnee- und Winddruck wird zu 140 kg/qm Grundfläche angenommen; daher beträgt die Belastung für 1 m Tafelbreite 2,0 . 140 = 280 kg.

Erforderlich: $W = \frac{280 \,.\, 200}{8 \,.\, 875} = 8{,}0 \text{ cm}^3$.

Nach vorstehender Tafel genügt flaches Wellblech mit $B = 60$ mm, $H = 25$ mm und $\delta = 1$ mm, wofür das Widerstandsmoment $W = 9{,}0$ cm³ ist; auch kann gewählt werden $B : H : \delta = 65 : 25 : 1$ mm mit $W = 8{,}7$ cm³. S. auch das folgende Beispiel.

b) **Jalousie-Wellblech** in Stärken δ, entsprechend den Nrn. 19 bis 26 der deutschen Feinblechlehre (S. 518), aus Flufseisen und Flufsstahl. Hierfür gilt folgende Tafel; vrgl. hierzu die Bemerkungen unter a).

Wellenbreite B mm	Wellenhöhe H mm	Querschnitt f. 1 m Tafelbreite (und $\delta = 1$ mm Blechstärke) qcm	Gewicht f. 1 qm Wellblech kg	Widerstandsmoment f. 1 m Tafelbreite cm³
20	10	15,71	12,33	3,9
25	10	13,83	10,86	3,5
30	12,5	14,13	11,09	4,5
35	15	14,34	11,26	5,5
40	17,5	14,51	11,39	6,4
45	20	14,63	11,48	7,4

c) **Trägerwellblech** in Stärken δ, entsprechend den Nrn. 2 bis 19 der deutschen Feinblechlehre (S. 518). Für Deckenkonstruktionen gerade oder gewölbt benutzt. Gewölbtes Wellblech trägt bei gleichmäfsiger Belastung und bei $^1/_{12}$ bis $^1/_{10}$ Stich etwa das 8- bis 10-fache der zulässigen Last des geraden Wellbleches.

Gewöhnliche Tafellänge 3 bis 4 m, gröfste Länge 6 m. Die Tafelbreite (0,45 bis 0,90 m) richtet sich nach dem Profil und den verwendeten Feinblechen. Die Baubreite einer Tafel ist gleich der Tafelbreite, vermindert um eine halbe Wellenbreite B.

Bei der Gewichtsberechnung ist für Ueberdeckung im Seiten- und Längsstofs zusammen je nach dem Profil 7 bis 9 vH. und einschl. der Befestigung auf der Unterkonstruktion 12 vH. Gewichtzuschlag zu rechnen. Für die folgende Tafel vrgl. die Bemerkungen unter a).

Trägerwellbleche.

Wellenbreite	Wellenhöhe	Querschnitt f. 1 m Tafelbreite	Gewicht f. 1 qm Wellblech	Widerstandsmoment f. 1 m Tafelbreite	Wellenbreite	Wellenhöhe	Querschnitt f. 1 m Tafelbreite	Gewicht f. 1 qm Wellblech	Widerstandsmoment f. 1 m Tafelbreite
B	H	und $\delta = 1$ mm Blechstärke			B	H	und $\delta = 1$ mm Blechstärke		
mm	mm	qcm	kg	cm³	mm	mm	qcm	kg	cm³
30	20	19,04	14,95	9,2	75	50	19,04	14,95	23,0
30	25	22,38	17,57	13,1	75	60	21,71	17,04	30,8
30	30	25,71	20,17	17,6	80	50	18,21	14,29	22,2
35	30	22,85	17,94	16,0	80	60	20,71	16,26	29,6
40	30	20,71	16,26	14,8	90	60	19,04	14,95	27,6
40	35	23,21	18,22	18,9	90	70	21,27	16,70	35,3
40	40	25,71	20,17	23,4	100	70	19,71	15,47	33,2
45	30	19,04	14,95	13,8	100	80	21,71	17,04	41,0
45	40	23,49	18,44	21,8	105	70	19,04	14,95	32,3
50	30	17,71	13,90	13,0	110	80	20,26	15,90	38,8
50	40	21,71	17,04	20,5	120	100	22,38	17,57	52,4
60	40	19.04	14,95	18,4	130	110	22,63	17,76	58,3
60	50	22,38	17,57	26,2	140	120	22,85	17,94	64,0
70	40	17,14	13,45	16,9	150	130	23,04	18,09	69,8
70	50	20,00	15,70	24,0	160	150	24,46	19,20	84,5

Beispiel. Das gerade Trägerwellblech des Fufsbodens eines **Balkons** liegt 1,30 m frei; Blech, Betonausfüllung, Estrich, Stuck-Verkleidung von unten und Nutzlast wiegen zusammen 750 kg/qm Grundfläche. Die Belastung für 1 m Tafelbreite beträgt daher 1,30 . 750 = 975 kg.

Erforderlich: $$W = \frac{975 \cdot 130}{8 \cdot 875} = 18,1 \text{ cm}^3.$$

Nach vorstehender Tafel genügt Trägerwellblech mit $B = 40$ mm, $H = 35$ mm und $\delta = 1$ mm, wofür das Widerstandsmoment $W = 18,9$ cm³. In Berlin ist bei Wellblech zu Zwischendecken für das Abrosten 1 mm Mehrstärke baupolizeilich vorgeschrieben, so dafs hier eine Blechstärke $\delta = 2$ mm ausreicht. (Für Wellblech zum Dachdecken gilt diese Vorschrift nicht.)

14. **Werkzeugstahl.** Zu gewöhnlichen Werkzeugen wird Bessemer- oder Martinstahl, zu besseren Tiegelstahl, zum Verstählen Stählstahl (Schweifsstahl) angewendet. Wolframstahl (Tiegelstahl mit Wolframzusatz) ist sehr hart, aber teuer und schwierig zu bearbeiten. Werkzeugstahl mufs im Gefüge fest und vollkommen gleichmäfsig sein, mufs durch Härten glashart, darf aber nicht rissig werden. Durch langsames, vorsichtiges Erwärmen nach dem Härten bis zum Hervortreten der Anlafsfarben (s. S. 520) mufs er genügende Zähigkeit erlangen. Je nach dem Verwendungszwecke sind Härte und Zähigkeit (durch den Kohlenstoff-Gehalt bedingt) verschieden. Diesem Zwecke entsprechend ist der Stahl nur in einem bestimmten Profil von bestimmten Abmessungen zu bestellen. Näheres s. in folgender Tafel.

Beim Härten ist der Stahl in frisches, reines Brunnenwasser zu tauchen und, je nachdem das zu bearbeitende Stück mehr oder weniger hart ist, gelb bis blau anzulassen. Harter Stahl ist langsam zu erwärmen und vorsichtig zu schleifen.

Werkzeugstahl.

Nr.	Verwendungszweck	Profil	Abmessungen mm	Härtegrad und Korn	Kohlenstoffgehalt vH	Zulässiger Wärmegrad beim Härten	Farbe des aufzuklebenden Papierstreifens (Zweck u. Firma)
1	Dreh- und Hobelstähle	quadratisch	15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.	sehr hart und sehr feinkörnig	1,3	dunkelkirschrot	hellgelb
2	Gewindebohrer mit weichem Kern	rund	10, 12, 15, 18, 20, 23, 25, 28, 30, 35, 40, 45, 50.	hart und feinkörnig, innen weich	1,2	kirschrot	hellblau
3	Lochbohrer und Fräser	rund	10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.	hart und feinkörnig	1,2	kirschrot	dunkelgelb
4	Handmeifsel und Stemmer (für Schlosser)	rechteckig mit runden Kanten	13/25, 15/30.	mittelhart	1,0	stark kirschrot	karminrot
5	Kalt- und Schrotmeifsel (für Schmiede)	quadratisch mit gebrochenen Ecken	30, 35, 40, 45, 50, 55.	weich, nicht zu feinkörnig	0,9	stark kirschrot	hellviolett
6	Döpper und Hämmer	regelmäfsiges Achteck	30, 35, 40, 45, 50, 55.	weich und grobkörnig	0,8	dunkelorange	dunkelblau
7	Schweifsbarer Tiegelstahl	nach Bedarf		sehr weich und grobkörnig	0,7	schweifsbar	—

15. **Eisenbahn-Baustoffe.** Näheres s. S. 551 u. f. und Abteil. III, Abschn. Eisenbahnwesen.

16. **Niete und Schrauben.** Näheres s. S. 555, 559, 561, 567 und 6. Abschn., Maschinenteile I. — Ueberschlägige Gewichtsbestimmung von Schraubenbolzen mit Mutter (ohne Unterlagscheibe) und quadratischem Kopf: Man nehme zu der gesamten Bolzenlänge (einschl. Kopfhöhe) einen Zuschlag gleich dem vierfachen Schaftdurchmesser und bestimme mit dieser Länge in m und dem Gewicht des betreffenden Rundeisens in kg/m (s. S. 537) das gesuchte Gewicht.

Beispiel. Ein Fundament-Ankerbolzen von 1,5 m Gesamtlänge und 30 mm Schaftstärke (Rundeisengewicht nach S. 537 gleich 5,549 kg/m) wiegt mit Mutter und quadratischem Kopf (1,50 + 4 . 0,03) . 5,549 = 8,99 kg.

17. **Drahtseile und Ketten.** Näheres s. 6. Abschn., Maschinenteile II. und III.

18. **Nägel** werden aus Draht oder Blech (in Schmiedeisen und Flufsstahl) mittels Maschinen hergestellt, oder sie werden aus Stabeisen mit der Hand geschmiedet.

Drahtnägel (Drahtstifte), 5 bis 250 mm lang und 0,5 bis 10 mm stark, aus hart gezogenem, nicht ausgeglühtem, meist rundem (auch vierkantigem) Eisendraht mittels Maschinen gefertigt, die selbsttätig das Stempeln des Kopfes, das Richten, Abschneiden und Zuspitzen ausführen und stündlich 3000 bis 20 000 Stifte, je nach Gröfse, liefern.

Geschnittene Nägel werden mittels Maschine aus keilförmigem Blech kalt (ohne Abfall) geschnitten und mit kalt geprefstem Kopf versehen; Querschnitt flach rechteckig, Schneide mäfsig stumpf, keilförmig zulaufend. Brett-, Latten- und Bohlennägel, 70 bis 130 mm lang für 3 bis 8 cm starke Hölzer; Mühlen-, Schiffs- und Leistennägel werden bis 500 mm lang geliefert.

Geschmiedete Nägel werden von Hand (die stärksten mit Maschinen-Hämmern) aus vierkantigem Stabeisen auf warmem Wege hergestellt; der Kopf wird mit Hülfe des sogen. Nageleisens geschmiedet. — Die beim Einschlagen sich drehenden, sehr fest sitzenden Schraubennägel (für grofse Zimmermannsarbeiten) werden aus glühend-gewundenen Eisenstäben gefertigt. — Hierhin gehören auch die **Hakennägel** für Eisenbahn-Holzschwellen (s. Abteil. III, Eisenbahn-Oberbau).

c. Vorschriften für Lieferungen von Eisen und Stahl,

aufgestellt vom

Vereine deutscher Eisenhüttenleute,

vom 17. März 1889, abgeändert im Februar 1893 und im März 1901.*)

(Auszug.)

Mit den nachstehenden „Vorschriften für Lieferungen von Eisen und Stahl" sind, soweit angängig, in Uebereinstimmung:

I. Die **„Besonderen Vertragsbedingungen für** die Anfertigung, Lieferung und Aufstellung von gröfseren zusammengesetzten **Eisenkonstruktionen"** vom 25. November 1891, aufgestellt vom preufsischen Ministerium der öffentlichen Arbeiten.**)

II. Die **„Normalbedingungen für die Lieferung von Eisenkonstruktionen für Brücken- und Hochbau"**, 1886 aufgestellt von dem Verbande deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine, dem Vereine deutscher Ingenieure und dem Vereine deutscher Eisenhüttenleute, 1900 abgeändert und ergänzt durch die Lieferungsbedingungen für Flufseisen, 9. Aufl., 1905.***)

III. Die **„Abgeänderten Würzburger Normen"**, angenommen von dem Internationalen Verbande der Dampfkessel-Ueberwachungs-Vereine im Februar und Juni 1905 (Vrgl. S. 563.)

---

*) Zu beziehen von der Verlagsbuchhandlung August Bagel in Düsseldorf.
**) Zu beziehen von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W., Wilhelmstrafse 90.
***) Zu beziehen von Otto Meifsner in Hamburg, Hermannsstrafse 44.

I. Allgemeine Bestimmungen.

Prüfungsverfahren.

K_z = Bruchbelastung für Zug (die Zugfestigkeit) in kg/qcm, } Vrgl. S. 392.
φ = Dehnung bis zum Bruche in vH der ursprünglichen Länge. }

A. Art der Proben. Zur Erkennung der Brauchbarkeit der Eisen- und Stahl-Gebrauchstücke dienen folgende Proben:

I. Proben mit ungeteilten Gebrauchstücken.
Kaltproben: 1. Aufsenbesichtigung, 2. Schlagprobe, 3. Biegeprobe.

II. Proben mit abgetrennten Stücken.
a) Kaltproben: 1. Gewöhnliche Biegeprobe, 2. Lochprobe, 3. Bruchprobe, 4. Zerreifsprobe, 5. Verwindungsprobe.
b) Warmproben: 1. Biegeprobe, 2. Härtungs-Biegeprobe (nur für Flufseisen), 3. Lochprobe, 4. Ausbreit-(Schmiede-)probe, 5. Stauchprobe.

B. Wahl der Probestücke. Die Wahl der Stücke, von denen Probestreifen entnommen werden, bleibt dem Abnahmebeamten vorbehalten, jedoch sollen tunlichst die beim Walzen gefallenen kürzeren Stücke und Abfallenden hierzu Verwendung finden. — Mit sichtbaren Fehlern behaftete Probestücke dürfen nicht verwendet werden.

C. Herstellung der Probestreifen. Die Stäbe für **Zerreifsproben** sind von dem zu untersuchenden Eisen kalt abzutrennen und kalt zu bearbeiten. Die Wirkungen etwaigen Scherenschnittes sowie des Auslochens oder Aushauens sind zuverlässig zu beseitigen. — Wird das Gebrauchstück ausgeglüht, so sind auch die Probestreifen sorgfältig auszuglühen, im anderen Falle ist deren Ausglühen zu unterlassen.

Auf den Probestreifen ist die Walzhaut möglichst zu belassen. Die Probestäbe sollen in der Regel eine Versuchslänge von 200 mm bei 300 bis 500 qmm Querschnitt haben. Beträgt der Querschnitt F weniger als 300 qmm, so kann die Versuchslänge l bestimmt werden nach der Formel:

$$l = 11{,}3\sqrt{F}.\text{*)}$$

Bei Gebrauchsstücken von 40 mm und mehr Dicke sollen die Probestreifen nicht durch Aushobeln sondern durch Ausschmieden auf den geeigneten Querschnitt gebracht werden. — Ueber die Versuchslänge hinaus haben die Probestäbe (also Rund- und Flachstäbe) nach beiden Seiten noch auf je 10 mm Länge den gleichen Querschnitt.

Zu **Biegeproben** sind Streifen von 30 bis 50 mm Breite oder Rundstäbe von einer der Verwendung entsprechenden Dicke zu benutzen. Die Probestücke müssen auf kaltem Wege abgetrennt werden. Die Kanten der Streifen sind abzurunden.

D. Finden sich nach dem Zerreifsen, Biegen usw. anscheinend guter Probestücke Fehlerstellen, so werden die Prüfungsergebnisse aus solchen Stücken nicht berücksichtigt, wenn sie den gestellten Anforderungen nicht genügt haben.

Wenn bei der Zerreifsprobe der Bruch aufserhalb des mittleren Drittels der Versuchslänge des Stabes erfolgt, so ist die Probe zu wiederholen, falls die Dehnung ungenügend ausfällt.

Wenn eine satzweise Prüfung vorgesehen ist, mufs jedes Gebrauchstück mit der Nummer des Gufssatzes (Charge) versehen sein, aus dem es herrührt.

Für jede nicht genügende Probe müssen aus den betreffenden Gebrauchstücken oder aus demselben Gufssatze zwei neue Proben (Ersatzproben) entnommen werden. Entspricht eine von diesen Proben wiederum den Anforderungen nicht, so kann die Abnahme verweigert werden.

Die Zerreifsmaschinen müssen leicht und sicher auf ihre Richtigkeit geprüft werden können.

Die Profile werden nach den vom Besteller eingesandten Schablonen und Zeichnungen oder nach dem Profilbuche des Werkes gewalzt. Die hierbei zulässigen Abweichungen sind bei den einzelnen Fabrikaten gesondert angeführt.

Geringere äufsere Fehler, die die Haltbarkeit der Gebrauchstücke nicht beeinträchtigen, sollen kein Hindernis für die Abnahme bilden. Das Wegmeifseln von Walzsplittern und Schalen ist gestattet. — Die endgültige Prüfung und Abnahme erfolgt auf dem Hüttenwerke, falls nichts anderes ausdrücklich vereinbart ist.

---

*) Dieser Bestimmung liegt folgendes, durch vielfache Versuche bestätigtes **Gesetz von Barba und Kick** zugrunde:
Geometrisch ähnliche Körper aus gleichem Baustoff erfahren unter gleichen Umständen durch die gleichen Spannungen geometrisch ähnliche Formänderungen, d. h., bei zwei Zerreifsproben aus einem und demselben Stabe werden nur dann bei gleichen Spannungen gleiche Dehnungen erzielt, wenn alle Abmessungen innerhalb und aufserhalb der Versuchslänge und diese selber in gleichem Verhältnis stehen.

II. Flufseisen und Flufsstahl.

A. Eisenbahn-Baustoffe.

1. Schienen.*)

Profil. Von dem vorgeschriebenen Profil sind Abweichungen in der Fufsbreite bis ± 1 mm, in der Höhe und in den übrigen Abmessungen bis ± 0,5 mm gestattet.

Gewicht. Als Normalgewicht gilt das aus dem Verwiegen von 50 Stück genau gewalzter Schienen ermittelte Durchschnittsgewicht. Mehrgewicht ist bis 3 vH, Mindergewicht bis 2 vH zulässig, Mehrgewicht wird bis zu 1 vH bezahlt, in allen übrigen Fällen das ermittelte Gewicht.

Das Durchschnittsgewicht für 1 m bzw. für das Stück der Schienen wird am Schlusse der Lieferung aus den Summen wirklicher Gewichte der vorgenommenen Verwiegungen festgestellt.

Länge. Von der vorgeschriebenen Länge sind folgende Abweichungen gestattet: bei Längen bis zu 9 m ± 2 mm, bei Längen über 9 m ± 3 mm. Die Lieferung kürzerer Schienen ist bis zu 5 vH der Gesamtmenge gestattet.

Lochung. Abweichungen von der vorgeschriebenen Lage und Gröfse der Löcher sind bis zu ± 1 mm gestattet.

Richtung. Abweichungen bis zu 3 mm in der senkrechten und wagerechten Richtung auf 9 m Länge sind zulässig. Windschiefe Schienen, bei denen die Verdrehung ± 1,5 mm übersteigt, können verworfen werden.

Kennzeichnung. Jede Schiene mufs auf dem Stege das Fabrikzeichen und die Jahreszahl des für die Verwendung vorgesehenen Kalenderjahres in erhabener Form tragen.

Prüfung und Abnahme. Für die Prüfung der Schienen soll eine Menge bis zu $1/_2$ vH der gesamten Lieferung zur Verfügung stehen.

Zur Anstellung der Zerreifsproben werden Rundstäbe von 25 mm Durchmesser und 200 mm gerader Versuchslänge hergerichtet; bei den Zerreifsproben soll K_z mindestens 5500 kg/qcm betragen.

Für die Schlagproben werden Stücke von 1300 mm Länge ohne Löcher oder Klinkungen verwendet. Die Schlagproben werden auf einem geeichten Fallwerke bei 1 m Freilage des Probestückes vorgenommen. Es soll mit gleichen Arbeitleistungen geschlagen werden, u. zw. sollen diese betragen:

bei Schienen im Gewichte von 23,8 kg/m und darüber 1500 mkg,
„ „ „ „ „ 20,0 „ bis unter 23,8 kg/m 1000 mkg,
„ „ „ „ „ 16,0 „ „ „ 20,0 „ 750 „

Der letzte Schlag kann der zu erreichenden Durchbiegung angepafst werden. Die Durchbiegung soll bei Schienen von 134 mm Höhe (preufs. Normalprofil) 100 mm betragen. Für Schienen (einschl. Zungenschienen) mit anderen Profilhöhen soll die Durchbiegung im umgekehrten Verhältnis zu diesen Höhen bemessen werden. Die Schlagproben sollen an dem betreffenden Stücke nicht weiter fortgesetzt werden, wenn eine seitliche, das Ergebnis des Versuches beeinträchtigende Verbiegung der Schiene eintritt, bevor die vorgeschriebene kleinste Durchbiegung erreicht ist.

Strafsenbahn-Schienen.

Hierfür ändern sich die vorstehenden Bestimmungen wie folgt:

Profil. Von dem vorgeschriebenen Profil sind folgende Abweichungen gestattet: in der Fufsbreite bis ± 2 mm und in den übrigen Abmessungen bis ± 1 mm, wenn es sich um Schienen mit einem Fufse von mehr als 125 mm Breite handelt; in der Fufsbreite bis ± 1 mm und in den übrigen Abmessungen bis ± 0,5 mm, wenn die Fufsbreite 125 mm und weniger beträgt.

Länge und Gewicht. Schienen, die bis zu 4 mm länger oder kürzer sind als vorgeschrieben, sowie solche, die bis zu 3 vH weniger, und solche, die bis zu 4 vH mehr als das Normalgewicht haben, werden noch angenommen.

2. Schwellen.*)

Profil. Von dem vorgeschriebenen Profil sind Abweichungen in der Dicke bis zu ± 0,5 mm, in der Höhe und Breite bis zu ± 2 mm gestattet.

Gewicht. Entsprechende Bestimmungen wie bei Schienen (s. o.).

*) S. auch I. Allgemeine Bestimmungen S. 550.

Länge. Gegen die vorgeschriebene Länge sind Abweichungen bis zu ± 20 mm gestattet.

Kopfschlufs. Werden die Kopfschlüsse durch Umbiegen hergestellt, so sind Abweichungen in der Länge der Verschlufskappen bei gewöhnlichen Schwellen bis zu + 20 mm und — 5 mm, bei geprefsten Schwellen bis zu + 50 mm und — 5 mm gestattet.

Richtung. Bei Langschwellen sind Abweichungen bis zu 3 mm in der senkrechten und wagerechten Richtung auf die ganze Länge zulässig. Windschiefe Langschwellen, bei welchen die Verdrehung ± 1,5 mm übersteigt, können verworfen werden.

Lochung. Abweichungen in der Lage der Löcher sind bis zu ± 1 mm und in der Gröfse der Löcher bis zu ± 0,5 mm gestattet.

Kennzeichnung. Jede Schwelle mufs aufsenseitlich das Fabrikzeichen und die Jahreszahl des für die Verwendung vorgesehenen Kalenderjahres in erhabener Form tragen.

Prüfung und Abnahme. Für die Prüfung der Schwellen soll eine Menge bis zu $^1/_5$ vH der gesamten Lieferung zur Verfügung stehen.

Zur Anstellung der Zerreifsproben werden Flachstäbe von 200 mm gerader Versuchslänge verwendet; bei den Zerreifsproben soll $K_z = 3800$ bis 5000 kg/qcm sein.

Bei Vornahme der Biegeproben soll die Schwelle kalt unter einem Dampfhammer zunächst mit leichten Schlägen flach geschlagen und sodann derartig über den Rücken zusammengebogen werden, dafs der Durchmesser des Kreises an der umgebogenen Stelle höchstens 75 mm beträgt, ohne dafs ein Bruch erfolgt. Zu diesen Proben dürfen nur ungelochte Stücke genommen werden.

3. Radlenker.*)

Profil. Gestattete Abweichungen wie bei Schienen (s. S. 551).

Gewicht. Entsprechende Bestimmungen wie bei Schienen (s. S. 551).

Länge. Abweichungen von der vorgeschriebenen Länge sind bis zu + 5 mm und — 3 mm gestattet.

Lochung. Abweichungen in der Lage und Gröfse der nach Zeichnung durch Bohren herzustellenden Löcher sind bis ± 1 mm gestattet.

Richtung und Biegung. Nachdem die Radlenker gerade gerichtet sind, werden sie unter der Presse mittels ruhigen Druckes nach Mafsgabe der Zeichnung gebogen oder geknickt. Die einzelnen Knicke sind möglichst scharf auszubilden.

Kennzeichnung. Jeder Radlenker mufs das Fabrikzeichen und die Jahreszahl in erhabener Form tragen.

Prüfung und Abnahme. Für die Prüfung der Radlenker soll eine Menge bis zu $^1/_2$ vH der gesamten Lieferung zur Verfügung stehen. Bei den Zerreifsproben soll K_z mindestens 5500 kg/qcm und die Dehnung mindestens 12 vH der ursprünglichen Länge betragen.

4. Kleineisenzeug.*)

Zum Kleineisenzeug gehören:

Laschen . . . . . aus Flufseisen od. Flufsstahl	Schwellenschrauben aus Flufseisen
Unterlag- u. Hakenplatten aus „ „ „	Laschenschrauben . „ „
Klemmplatten . . . . aus „ „ „	Hakenschrauben . „ „
Hakennägel . . . . aus Flufseisen	Federringe . . . . „ Flufsstahl.

Abmessungen. Für Laschen sind Abweichungen in den Anlageflächen von ± 0,25 mm, in der Dicke von ± 0,5 mm und in den übrigen Abmessungen von ± 1 mm gestattet. In der Länge sind ± 3 mm gestattet.

Bei Unterlagplatten und Hakenplatten sind Abweichungen in der Dicke bis zu ± 0,5 mm und in den übrigen Abmessungen bis zu ± 1 mm gestattet.

Bei Klemmplatten mufs die obere Fläche eine glatte Auflage bieten; Verdrückungen der Klemmplattenenden, die die Brauchbarkeit beeinträchtigen, sind zu vermeiden.

Die Köpfe der Hakennägel müssen mit dem Schaft aus einem Stück ohne Schweifsung in Gesenken geschmiedet oder geprefst werden. Der Schaft mufs glatt und gerade sein. Die Spitze soll ebene glatte Flächen und eine scharfe Schneide haben. Der beim Schmieden oder Pressen etwa entstandene Grat ist sorgfältig zu entfernen.

Die Köpfe der Schwellen-, Laschen- und Hakenschrauben müssen ebenfalls mit dem Schaft aus einem Stück ohne Schweifsung in Gesenken geschmiedet oder geprefst werden. Abweichungen in dem Kerndurchmesser der Schwellen-

*) S. auch I. Allgemeine Bestimmungen S. 550.

schrauben sind nur bis ± 0,2 mm zulässig. Die Schwellenschrauben sind zu verzinken, wenn das Gewinde kalt hergestellt wird. Die Muttern der Laschen- und Hakenschrauben müssen einen festen, gleichmäfsigen Gang haben, so dafs sie sich eben noch von Hand andrehen lassen. Die Gewinde sind zum Schutz gegen Rost gut zu ölen.

Gewicht. Als Normalgewicht gilt das aus dem Verwiegen von 50 Stück genau nach Zeichnung ausgeführten Kleineisenteilen ermittelte Durchschnittsgewicht. Mehrgewicht ist bis 3 vH, Mindergewicht bis 2 vH zulässig. Mehrgewicht wird bis zu 1 vH bezahlt, in allen übrigen Fällen das ermittelte Gewicht. Das Durchschnittsgewicht der zur Abnahme gelangenden Mengen wird am Schlusse der Lieferung aus den Summen wirklicher Gewichte der vorgenommenen Verwiegungen festgestellt.

Länge. Bei Laschen, Unterlagplatten und Hakenplatten ist eine Abweichung von der vorgeschriebenen Länge bis zu ± 3 mm gestattet.

Schneiden. Die Kleineisenteile können nach Wahl der Lieferanten kalt oder warm, mit der Säge oder Schere auf Länge geschnitten sein; es dürfen dabei jedoch keine für die Verwendung nachteiligen Formveränderungen vorkommen.

Lochung. Die Löcher werden gestanzt; Abweichungen in der Lage der Löcher sind bis ± 1 mm und in der Gröfse der Löcher bis + 1 und — 0,5 mm zulässig.

Klinkung. Bei den Klinkungen sind Abweichungen in deren Lage bis zu ± 2 mm und in deren Gröfse bis zu ± 1 mm gestattet.

Kennzeichnung. Alle Kleineisenteile, die Federringe ausgenommen, sind mit einem Walzzeichen bzw. Fabrikzeichen und der Gattungsnummer, sofern eine solche angegeben, zu versehen. Die Zeichen müssen dauernd sichtbar bleiben.

Prüfung und Abnahme. Für die Prüfung soll eine Menge bis zu $^1/_5$ vH der gesamten Lieferung zur Verfügung stehen.

Für Flufseisen soll $K_z = 3800$ bis 5000 kg/qcm, für Flufsstahl $K_z = 5000$ bis 6500 kg/qcm sein.

Die fertigen Laschen müssen kalt bei 420 mm Stützweite, im Sinne eines senkrechten Schienendruckes belastet, eine bleibende Durchbiegung von mindestens 6 mm Pfeilhöhe zulassen, ohne Risse oder Brüche zu zeigen. Bei Flachlaschen soll diese Durchbiegung mindestens 10 mm betragen.

Die Unterlagplatten und Hakenplatten müssen sich kalt unter einer Presse quer zur Walzrichtung zu einer Winkelform von 135° durchbiegen lassen, ohne Risse zu zeigen. Die Haken und Ansätze sind durch Hammerschläge auf Zähigkeit zu prüfen.

Die Klemmplatten müssen ein Auftreiben der Löcher um etwa 2 mm gestatten, ohne Risse zu zeigen. Die Knaggen sind durch Hammerschläge zu prüfen.

Die Hakennägel, Schwellen-, Laschen- und Hakenschrauben sind durch Biege-, Bruch- und Stauchproben auf Zähigkeit zu prüfen.

Die Federringe dürfen sich bei wiederholter Belastung, durch die sie vollständig zusammengeprefst werden, nicht bleibend setzen und nicht brechen.

5. Weichenplatten.*)

Abmessungen. Abweichungen sind gestattet in der Breite ± 1,5 mm, in der Dicke ± 0,5 mm und in der Länge ± 5 mm.

Gewicht. Entsprechende Bestimmungen wie bei Schienen (s. S. 551).

Kennzeichnung. Die Platten sind mit dem Fabrikzeichen und der Jahreszahl kalt zu stempeln.

Prüfung und Abnahme. Für die Prüfung soll eine Menge bis zu $^1/_2$ vH der gesamten Lieferung zur Verfügung stehen. Bei der Zerreifsprobe soll $K_z = 3800$ bis 5000 kg/qcm und die Dehnung mindestens 15 vH der ursprünglichen Länge betragen.

Aufserdem sollen sich die Platten mit einem quadratischen Lochstempel von 20 mm Seitenlänge in 15 mm Abstand der Lochkante vom Plattenrande kalt lochen lassen, ohne zu reifsen.

6. Radreifen.*)

Profil. Von dem vorgeschriebenen Profil sind Abweichungen in der Breite bis + 2 und — 1,5 mm, in der Dicke bis + 3 mm gestattet.

Durchmesser. Der innere Durchmesser der Radreifen darf gegen das von dem Besteller vorgeschriebene Mafs um 2 mm geringer und um 1,5 mm gröfser ausfallen, ohne dafs dadurch die Abnahme verhindert würde.

Gewicht. Abweichungen im Gewichte, die sich aus den vorstehenden Abweichungen im Profil und Durchmesser ergeben, sind gestattet; das Gewicht innerhalb dieser Grenzen ist zu bezahlen.

---

*) S. auch I. Allgemeine Bestimmungen S. 550.

Prüfung und Abnahme. Für die Prüfung des zu den Radreifen verwendeten Flufsstahls soll eine Menge bis zu 1 vH der gesamten Lieferung zur Verfügung stehen.

Zur Anstellung der Zerreifsproben werden Rundstäbe von 25 mm Durchmesser und 200 mm gerader Versuchslänge hergerichtet.

Es soll für Lokomotiv-Radreifen . . . . $K_z \geq 6000$ kg/qcm,
„ Wagen- und Tender-Radreifen $K_z \geq 5000$ „ sein.

Für die Schlagproben werden ganze Radreifen ohne sichtbare äufsere Fehler verwendet. Die Schlagproben werden auf einem geeichten Fallwerke mit Schlägen von 3000 mkg so lange durchgeführt, bis sich die Radreifen um 12 vH ihres ursprünglichen inneren Durchmessers eingebogen haben. Das Probestück darf, solange diese Einbiegung nicht überschritten ist, keine Risse zeigen.

7. Achsen.*)

Die Schenkel der Achsen sind sauber zu schlichten und zu schmirgeln und die Körner vorschriftsmäfsig an beiden Enden der Achsen kegelförmig einzudrehen.

Prüfung und Abnahme. Für die Prüfung des zu den Achsen verwendeten Flufsstahls soll eine Menge bis zu 1 vH der gesamten Lieferung zur Verfügung stehen.

Zur Anstellung der Zerreifsproben werden Rundstäbe von 25 mm Durchmesser und 200 mm gerader Versuchslänge hergerichtet. Es soll $K_z \geq 5000$ kg/qm sein.

Für die Schlagproben werden rohgeschmiedete ganze Achsen ohne sichtbare äufsere Fehler verwendet. Die Schlagproben werden auf einem geeichten Fallwerke bei 1,5 m Freilage mit Schlägen von 3000 mkg so lange durchgeführt, bis bei Achsen von 130 mm Durchmesser eine Durchbiegung von 200 mm, zwischen den ursprünglich 1,5 m voneinander entfernten Körnern gemessen, erreicht ist.

Bei Achsen von anderen Durchmessern soll die zu erreichende Durchbiegung im umgekehrten Verhältnis zu diesen Durchmessern bemessen werden.

B. Bauwerk-Flufseisen.*)

Auswahl und Anzahl der Proben. War eine satzweise Prüfung vereinbart, so mufs jedes dem Abnahmebeamten vorgelegte Stück die betreffende Gufssatznummer tragen. Aus jedem so vorgelegten Satze dürfen 3 Stück, höchstens jedoch von je 20 oder angefangenen 20 Stück 1 Stück entnommen und zu nachstehenden Proben verwendet werden.

War eine satzweise Prüfung nicht vereinbart, so können von je 100 Stücken 5, höchstens jedoch von je 2000 oder angefangenen 2000 kg desselben Walzprofils 1 Stück zu Probezwecken entnommen werden.

A. Zerreifs- und Dehnungsproben. Es müssen betragen:

1. bei Stücken von 7 bis 28 mm Dicke und mindestens 300 qmm Querschnitt der Probe
in der Längsrichtung $K_z = 3700$ bis 4400 kg/qcm, $\varphi \geq 20$ vH,
in der Querrichtung $K_z = 3600$ „ 4500 „ $\varphi \geq 17$ „ ;

2. bei Stücken von 4 bis unter 7 mm Dicke und mindestens 200 qmm Querschnitt der Probe und einer entsprechenden Versuchslänge l (s. S. 550)
in der Längsrichtung $K_z = 3700$ bis 4600 kg/qcm, $\varphi \geq 18$ vH,
in der Querrichtung $K_z = 3600$ „ 4700 „ $\varphi \geq 15$ „ ;

3. bei Nieten und Schrauben: $K_z = 3600$ bis 4200 kg/qcm, $\varphi \geq 22$ vH.

B. Sonstige Proben.

1. Flacheisen und Formeisen (Winkel-, Rund-, Vierkant- und Trägereisen, d. h. **I-**, **[-**, **Z-**, **T-** und ähnliche Walzeisen).

a) Biegeproben. Sowohl Längs- als auch Querstreifen sind hellrotwarm zu machen, in Wasser von etwa 28° C abzuschrecken und dann so zusammenzubiegen, dafs sie eine Schleife bilden, deren Durchmesser an der Biegestelle gleich ist: bei Längsstreifen der einfachen, bei Querstreifen der doppelten Dicke des Versuchsstückes. Hierbei dürfen an Längsstreifen keine Risse entstehen; bei Querstreifen sind unwesentliche Oberflächenrisse zulässig.

b) Rotbruchproben. Ein rotwarm auf 6 mm Dicke und etwa 40 mm Breite abgeschmiedeter Probestreifen soll mit einem sich verjüngenden Lochstempel, der 80 mm

*) S. auch I. Allgemeine Bestimmungen S. 550.

lang ist und 20 mm Durchmesser am dünnen, 30 mm am dicken Ende hat, im rotwarmen Zustande gelocht werden. Das 20 mm weite Loch soll dann auf 30 mm erweitert werden, ohne dafs hierbei ein Einrifs in dem Probestreifen entstehen darf.

2. Niete und Schrauben.

a) Biegeproben. Rundeisenstäbe sind hellrotwarm zu machen, in Wasser von etwa 28° C abzuschrecken und dann so zusammenzubiegen, dafs sie eine Schleife bilden, deren Durchmesser an der Biegestelle gleich der halben Dicke des Versuchstückes ist. Hierbei dürfen keine Risse entstehen.

b) Stauchproben. Ein Stück Schrauben- und Nieteisen, dessen Länge gleich dem doppelten Durchmesser ist, soll sich im warmen, der Verwendung entsprechenden Zustande bis auf ein Drittel seiner Länge zusammenstauchen lassen, ohne Risse zu zeigen.

C. Spielraum für Mafs und Gewicht. Wird Bauwerk-Flufseisen auf genaue Länge verlangt, so sind folgende Abweichungen zulässig (geringerer Spielraum nach besonderer Vereinbarung):

bei Flach-, Winkel-, Rund-, Vierkant- und Universaleisen Mehrlängen bis zu 20 mm, bei Trägereisen Mehrlängen bis zu 50 mm.

Die Normalgewichte werden aus den Abmessungen und dem spezifischen Gewichte abgeleitet. Von diesen rechnungsmäfsigen Gewichten sind folgende Abweichungen zulässig:

1. bei Flach-, Winkel-, Rund- und Vierkanteisen im ganzen ein Mehrgewicht bis zu 3 vH und ein Mindergewicht bis zu 2 vH, für einzelne Stäbe ein Mehrgewicht bis zu 5 vH und ein Mindergewicht bis zu 2 vH;
2. bei Trägereisen ± 6 vH mit der Mafsgabe, dafs bei gröfseren Bestellungen desselben Profils eine gröfsere Genauigkeit vereinbart werden kann;
3. Universaleisen darf in der Breite ± 3 vH und in der Dicke ± 5 vH, mindestens aber ± 0,5 mm von den vorgeschriebenen Mafsen abweichen.

Werden die für einzelne Stäbe oder Platten angeführten Gewichtabweichungen überschritten, so können die betreffenden Teile zurückgewiesen werden.

C. Bleche aus Flufseisen.

Für Bleche sind, soweit anwendbar und falls nachstehend nicht andere Bestimmungen getroffen sind, die auf S. 550 angegebenen „Allgemeinen Bestimmungen" gültig.

Sind Bleche nach den „Normalbedingungen" (vrgl. S. 549 unter II.) zu liefern, so gelten dafür die dort festgesetzten Vorschriften. In allen übrigen Fällen sind nachfolgende Bestimmungen mafsgebend.

A. Arten und Qualitäten. Man unterscheidet im allgemeinen:

1. Feinbleche in Dicken von unter 5 mm, 2. Grobbleche in Dicken von 5 mm und mehr, 3. Riffel- und Warzenbleche.

Bezüglich der Qualität werden unterschieden:

1. Behälterbleche (unterliegen Qualitätsvorschriften oder einer Abnahme nur dann, wenn dieses besonders vereinbart wurde), 2. Konstruktionsbleche, 3. Schiffsbleche, 4. Kesselbleche, u. zw. a) Feuerbleche, b) Mantelbleche,*) 5. Spezialbleche, d. h. solche mit $K_z > 5000$ kg/qcm Festigkeit, oder solche, die aus Legierungen des Eisens hergestellt sind; hierfür bedarf es in allen Fällen besonderer Vereinbarung.

B. Aeufsere Beschaffenheit. Hierfür sind folgende Bestimmungen zu erfüllen:

1. Oberfläche. Die Bleche müssen eine glatte Oberfläche haben, es dürfen in diese keine Schlacken oder sonstige Verunreinigungen eingewalzt, auch dürfen keine Blasen, Risse oder sonstige unganzen Stellen vorhanden sein. Walzsplitter oder kleine Schalen dürfen durch Abmeifseln entfernt, auch dürfen geringe, durch Einwalzen von Schlacke entstandene Vertiefungen ausgeebnet werden, soweit hierdurch die Haltbarkeit der Bleche nicht beeinträchtigt wird.

2. Richtung. Bleche werden allgemein nur walzgerade, d. h. so wie sie die Walze verlassen, verkauft. Sie können gegen besondere Vergütung auch mit der Richtmaschine kalt gerichtet geliefert werden. Derartig gerichtete Bleche sind jedoch nicht absolut eben.

*) Zu allen Teilen der feststehenden Dampfkessel, zu den Kesseln der Lokomotiven und Lokomobilen, ferner zu Kochern, Dampffässern usw. sollte nur Feuerblech Verwendung finden. Das Mantelblech darf nur für die zylindrischen Mäntel der Schiffskessel verwendet werden; ratsam ist es aber, auch diese Teile aus Feuerblech herzustellen.

3. Ausglühen. Alle Bleche unter 4 mm Dicke und alle Kesselbleche werden handelsüblich nur in geglühtem Zustande geliefert. Wird für andere Bleche das Ausglühen gewünscht, so bedarf es einer besonderen Bestellung.

C. Messung. Das Messen der Dicke hat mittels Schraubenlehre zu erfolgen; die Meſspunkte müssen mindestens 40 mm vom Rande und mindestens 100 mm von den Ecken des Bleches liegen.

D. Zulässige Abweichungen in Länge, Breite, Dicke und Gewicht.

a) Längen- und Breiten-Abweichungen.

1. Bleche unter 5 mm Dicke (Feinbleche).

Die Abweichungen für Bleche in genauen („fixen") Maſsen dürfen in Länge und Breite bis zu 1/2 vH betragen. Es ist jedoch gestattet, in allen Fällen die bestellte Breite bis zu 6 mm und die bestellte Länge bis zu 10 mm zu überschreiten. Werden Bleche „unfix" verkauft, so dürfen die Abweichungen in der Länge bis ± 150 mm und in der Breite bis ± 50 mm betragen.

2. Bleche von 5 mm und gröſserer Dicke (Grobbleche).

Es sollen für Bleche die Abweichungen in Länge und Breite bis zu 1/2 vH, jedoch für Bleche unter 20 mm Dicke mindestens + 10 mm und höchsters + 25 mm, für Bleche von 20 mm und gröſserer Dicke mindestens + 15 und höchstens + 30 mm betragen dürfen.

b) Dicken-Abweichungen.

1. Bleche unter 5 mm Dicke (Feinbleche).

Diese werden im allgemeinen in folgenden Lagergröſsen geliefert (die Nummern sind die der deutschen Feinblechlehre, s. S. 518):

unter 5 mm (Nr. 2)	bis einschl. 1,5 mm (Nr. 15):	800 . 1600 mm,	1000 . 2000 mm,		
			1250 . 2500 mm,		
„ 1,5 „ (Nr. 15)	„ „ 0,5 „ (Nr. 24):	800 . 1600 „ ,	1000 . 2000 „ ,		
„ 0,5 „ (Nr. 24):	. . . .	800 . 1600 „ ,			

und sind hierfür Dicken-Abweichungen für die einzelnen Bleche bis zu ± 3/4 Nummern gestattet.

Werden Bleche in anderen als Lagergröſsen verlangt, so dürfen die Dicken-Abweichungen für einzelne Bleche bis zu ± einer ganzen Nummer betragen. Wird die Dicke solcher Bleche in mm angegeben, so dürfen die Dicken, an den Längskanten der Bleche gemessen, von der verlangten Dicke abweichen, wie folgt:

Dicken von unter 5	bis 2	mm einschl. um	0,25 mm
„ „ „ 2	„ 1	„ „ „	0,15 „
„ „ „ 1	„ 0,75	„ „ „	0,12 „
„ „ „ 0,75	„ 0,5	„ „ „	0,08 „
„ „ „ 0,5 mm	. . . .	. „	0,06 „

Höchstgröſsen. Ueberschreiten die Feinbleche bei einer Dicke von

unter 5 mm (Nr. 2)	bis einschl. 3 mm	(Nr. 9)	eine Länge v. 4000 mm	od. eine Breite v.	1500 mm
„ 3 „ (Nr. 9)	„ „ 2 „	(Nr. 13)	„ „ „ 3500 „	„ „ „ „	1400 „
„ 2 „ (Nr. 13)	„ „ 1 „	(Nr. 19)	„ „ „ 3000 „	„ „ „ „	1250 „
„ 1 „ (Nr. 19)	„ „ 0,75 „	(Nr. 21)	„ „ „ 2500 „	„ „ „ „	1100 „
„ 0,75 „ (Nr. 21)	„ „ 0,5 „	(Nr. 24)	„ „ „ 2250 „	„ „ „ „	1000 „
„ 0,5 „ (Nr. 24)	. . . .	. . . . . .	. . . . 2000 „	„ „ „ „	800 „

so sind die Bleche so zu nehmen, wie sie fallen, wenn die dünnste Stelle von der verlangten Dicke nicht mehr als ± 10 vH abweicht.

2. Bleche von 5 mm und gröſserer Dicke (Grobbleche).

Für Abweichungen in der Dicke einer Platte ist folgende Tafel maſsgebend:

Blechbreite	Unterschied der kleinsten und gröſsten Dicke in mm bei verlangten Blechdicken von			
	5 bis 6,9 mm	7 bis 9,9 mm	10 bis 19,9 mm	20 mm und mehr
bis 1500 mm	1,2	1,1	1,0	0,9
1501 „ 2000 „	2,0	1,8	1,7	1,6
2001 „ 2500 „	2,8	2,5	2,4	2,2
2501 „ 3000 „	.	.	2,9	2,8
3001 und mehr „	.	.	3,4	3,2

Höchstgröfsen. Ueberschreiten die Grobbleche von

5 bis 6,9 mm Dicke	oder eine Länge von	6 000 mm	eine Breite von	2000 mm	
7 „ 9,9 „	„ „ „ „	7 500 „	„ „ „	2500 „	
10 „ 19,9 „	„ „ „ „	9 000 „	„ „ „	3000 „	
20 mm und mehr „	„ „ „ „	10 000 „	„ „ „	3250 „ ,	

so sind die Bleche so zu nehmen, wie sie fallen, wenn die dünnste Stelle die verlangte Dicke nicht überschreitet.

c) Gewicht-Abweichungen.

1. Bleche unter 5 mm Dicke (Feinbleche).

Für die einzelnen Sorten Bleche sind die Ueber- und Untergewichte getattet, die in folgender Tafel angegeben sind:

Feinbleche (vrgl. b. 1., S. 556)	unter 5 mm (Nr. 2) bis einschl. 3 mm (Nr. 9)	unter 3 mm (Nr. 9) bis einschl. 1,5 mm (Nr. 15)	unter 1,5 mm (Nr. 15) bis einschl. 1 mm (Nr. 19)	unter 1 mm (Nr. 19) bis einschl. 0,5 mm (Nr. 24)	unter 0,5 mm (Nr. 24)
bis zu den Lagergröfsen	5 vH	6 vH	7 vH	8 vH	9 vH
darüber bis zu den Maximalgröfsen .	7 „	8 „	9 „	10 „	11 „

Bleche, die die vorstehend unter b. 1 angegebenen Höchstgröfsen überschreiten, sind bezüglich des Gewichtes so zu nehmen, wie sie fallen.

Werden Bleche in geringerer Anzahl als 10 Stück von gleicher Gröfse bestellt, so dürfen die Gewicht-Abweichungen um die Hälfte gröfser als die in vorstehender Tafel sein.

2. Bleche von 5 mm und gröfserer Dicke (Grobbleche).

Einzelne Bleche sind abzunehmen, falls ihr Gewicht ein Gewicht nicht überschreitet, das aus der wirklichen Länge und Breite und der um 70 vH der zulässigen Dicken-Abweichung vergröfserten bestellten Dicke ermittelt wird. Das Untergewicht darf nicht mehr als 3 vH betragen.

Bei Abnahme mehrerer Bleche ist eine Abweichung von ± 3 vH gestattet. Ausgenommen hiervon sind Bleche, die die vorstehend unter b. 2 angegebenen Höchstgröfsen überschreiten; diese sind auch in gröfserer Stückzahl zu nehmen, wenn ihr Gewicht ein Gewicht nicht überschreitet, das aus der wirklichen Länge und Breite und aus der bestellten Dicke + 70 vH der zulässigen Dicken-Abweichung berechnet wird. Das Untergewicht darf nicht mehr als 5 vH betragen.

Riffelbleche dürfen für alle Sorten ± 10 vH in der Dicke und im Gewicht abweichen.

E. Güte-Vorschriften. Werden Bleche nach Güte-Vorschriften bestellt, so haben sie folgenden Bedingungen zu genügen:

1. Ort und Kosten der Abnahme. Die Prüfung der Güte der Bleche hat auf dem Hüttenwerke stattzufinden, wobei letzteres alle Kosten, die durch Bearbeitung der Stäbe, durch Vornahme der Proben und die Besichtigung der Bleche entstehen, zu tragen hat. Werden mehr Proben verlangt, als nachstehend festgelegt ist, so müssen diese gegen besondere Vergütung ausgeführt werden.

2. Proben. Zur Erkennung der Brauchbarkeit der aus Flufseisen gefertigten Bleche sind auszuführen: 1. Zerreifs- und Dehnungsproben, 2. Härtungs-Biegeproben, 3. Schmiedeproben und 4. Lochproben.

3. Auswahl und Beschaffenheit der Probestücke. Die Bleche werden in der Regel in nicht fertig beschnittenem Zustande zur Auswahl der Proben vorgelegt und die Probestreifen durch Abtrennen mit der Schere aus den Abfallenden entnommen.

Grobbleche: Probestücke von 5 bis 35 mm Dicke, die krumm oder windschief sind, dürfen warm gerade gerichtet werden; nach langsamem Erkalten müssen sie aber kalt auf die vorgeschriebene Form zugerichtet werden. Probestücke von dickeren Blechen werden durch Schmieden auf 25 mm warm ausgereckt und dann wie vor weiter behandelt.

Zerreifsproben erhalten auf eine Länge von mindestens 200 mm einen rechteckigen Querschnitt; die eine Seite dieses Rechteckes ist die Blechdicke, die andere Seite ist je nach der Dicke der Bleche 20 bis 40 mm grofs. Das Festhalten der

Köpfe der Zerreifsproben in der Maschine geschieht durch Backen mit Feilhieben, die den Probestreifen in der Walzhaut angreifen.

Biege-, Schmiede- und Lochprobestreifen werden 30 bis 60 mm breit genommen; an diesen dürfen die Längsseiten gehobelt und die scharfen Kanten gebrochen werden.

Zur Prüfung der Güte von Feinblechen und Riffelblechen werden nur Biegeproben gemacht.

4. Anzahl der Probestücke. Von den zur Auswahl der Proben vorgelegten Blechtafeln werden ausgewählt für

		Zerreifsproben vH	Biegeproben vH	Schmiedeproben vH	Lochproben vH
bei Behälterblechen	bis	2	2	.	2
„ Konstruktionsblechen	„	5	5	.	5
„ Schiffsblechen	„	5	5	5	5
„ Kessel-Feuerblechen	„	100	100	50	25
„ Kessel-Mantelblechen	„	25	25	10	10

und von den Blechtafeln abwechselnd in der Längs- und Querrichtung Probestreifen für die Zerreifs-, Biege-, Schmiede- und Lochproben entnommen.

5. Festigkeit, Dehnung und Gütezahl. Es soll betragen die Zugfestigkeit K_z in kg/qmm, die Dehnung φ in vH auf 200 mm Versuchslänge sowie die Gütezahl (Qualitätsziffer) Q als die Summe von K_z in kg/qmm und φ in vH

bei Blechen von	5 bis 7,9 mm			8 bis 28 mm			über 28 mm		
in Güte der	K_z	φ	Q	K_z	φ	Q	K_z	φ	Q
Konstruktionsbleche	36—43	18	57	35—42	20	58	34—41	22	59
Schiffsbleche	36—44	18	57	35—43	20	58	34—42	22	59
Kessel-Feuerbleche	34—40	25	62	34—40	25	62	34—40	25	62
Kessel-Mantelbleche	36—42	22	61	36—42	22	61	36—42	22	61

6. Biegeproben. Bei der Härtungsbiegeprobe werden die Streifen, längs oder quer der Walzrichtung, gleichmäfsig erwärmt und bei dunkelkirschroter Färbung in Wasser von etwa 28° C abgekühlt, dann um einen Dorn gebogen, dessen Dicke bei Behälterblech der dreifachen, bei Schiffs- und Konstruktionsblechen der zweifachen und bei Kesselblech der einfachen Dicke des Bleches entspricht, wenigstens aber 25 mm sein mufs. Der Biegungswinkel ist für alle Bleche gleich 180°. — Der Biegungswinkel wird in Grad angegeben. Der Streifen gilt als gebrochen, wenn sich auf der konvexen Seite in der Mitte der Biegungsstelle ein deutlicher Bruch im metallischen Eisen zeigt.

7. Schmiedeproben. Rotwarme Blechstreifen von ungefähr 30 bis 60 mm Breite müssen mit der Hammerfinne quer zur Walzrichtung mindestens auf das 1,5-fache ihrer Breite ausgebreitet werden können, ohne an den Kanten und auf der Fläche Risse zu erhalten.

8. Lochproben. Rotwarme Blechstreifen, in einer Entfernung vom Rande gleich der halben Dicke des Streifens mit dem Lochstempel gelocht, dürfen vom Loch nach der Kante nicht aufreifsen.

Anmerkung. Probestreifen, die aus den Abfallrändern der Bleche entnommen sind, haben naturgemäfs eine Dicke, die von der des fertig beschnittenen Bleches mehr oder weniger abweicht.

D. Draht aus Flufseisen oder Flufsstahl.*)

Es ist weder möglich noch zweckdienlich, für alle Drähte aus Flufseisen oder Flufsstahl Qualitäts-Bedingungen festzustellen, weil die Verwendungszwecke der Drähte aufserordentlich verschieden sind.

*) S. auch I. Allgemeine Bestimmungen S. 550.

1. **Gezogene Stiftdrähte, Zaundrähte u. drgl.** Der Draht darf nicht langrissig oder splittrig sein. Die Weichheit oder Härte richtet sich nach der Verwendungsart. Dicke: Eine Abweichung von ± 2,5 vH ist gestattet.

2. **Verzinkter, geglühter Telegraphendraht (Flufseisen).***) (Unverzinkte Drähte werden für Telegraphenleitungen nur noch selten benutzt.) Verlangt wird $K_z \geqq 4000$ kg/qcm bei allmählicher Belastung und 15 cm freier Zerreifslänge.

Verwindungsprobe. Der Draht ist auf Drehungsfestigkeit unter Anwendung einer entsprechenden Vorrichtung bei einer freien Länge von 15 cm zu prüfen.

Draht von	6	5	4	3	2,5	2	1,7 mm Durchmesser
soll aushalten	16	19	23	28	30	32	38 Windungen.

Biegeprobe. Der Draht wird unter Anwendung einer entsprechenden Vorrichtung zwischen Klemmbacken von 10 bezw. 5 mm Halbmesser eingespannt und dann mittels eines Hebels um 180⁰ bis zum Zerbrechen hin- und hergebogen. Als einzelne Biegung um 180⁰ wird die Biegung (abwechselnd nach rechts und links) um 90⁰ und wieder in die Anfangstellung zurück angesehen.

Draht von	6	5	4	3	2 5	2	1,7	mm Durchmesser
soll aushalten	6	7	8	8	10	14	16	Biegungen
bei Klemmbacken von	10			5				mm Halbmesser.

[Die von der Deutschen Reichspost- und Telegraphen-Verwaltung vorgeschriebenen Verzinkungsproben s. S. 569, den von dieser Verwaltung zugelassenen Leitungswiderstand s. Abteil. II, Abschnitt Elektrotechnik.]

3. **Verzinkter Telephondraht (Flufsstahl).** (Für Telephonzwecke besser Bronzedraht; s. S. 577.) Es soll betragen: $K_z = 13\,000$ bis $14\,000$ kg/qcm, $\varphi = 5$ vH an einer eingespannten und bis zum Zerreifsen belasteten Drahtlänge von 500 mm.

Biegeprobe, wie vorhin unter 2., zwischen Klemmbacken von 5 mm Halbm.

Draht von	2,5	2,2	2	1,8	1,6 mm Durchmesser
soll aushalten	4	6	7	8	10 Biegungen.

III. Schweifseisen.

A. Bauwerk-Schweifseisen.**)

Aeufsere Beschaffenheit. Das Eisen soll dicht, gut stauch- und schweifsbar, weder kalt- noch rotbrüchig, noch langrissig sein und eine glatte Oberfläche; es zeigen darf weder Kantenrisse noch offene Schweifsnähte oder sonstige unganze Stellen haben.

Herrichtung und Anzahl der Proben. Von je 100 Stücken können 3 Proben (u. zw. tunlichst aus den Abfallenden) genommen werden. Wenn die Proben den gestellten Vorschriften genügen, so gelten diese 100 Stücke als angenommen. Genügt eine dieser 3 Proben nicht, so dürfen dafür der betreffenden Menge 2 neue Proben entnommen werden. Entspricht eine von diesen wiederum den Anforderungen nicht, so können die Stücke verworfen werden.

A. Zerreifs- und Dehnungsproben. Es müssen mindestens betragen

1. bei Flacheisen, Formeisen (Winkel-, Rund-, Vierkant- und Trägereisen, d. h. I-, C-, Z-, T- und ähnlichen Walzeisen) und bei solchen Blechen, die im wesentlichen nur in der Längsrichtung beansprucht werden***), die Zugfestigkeit in der Längsrichtung für Dicken von

10 mm oder weniger	$K_z = 3600$ kg/qcm,	die Dehnung bis zum Bruche $\varphi = 12$ vH.
mehr als 10 mm bis einschl. 15 mm	$K_z = 3500$ „	
„ „ 15 „ „ „ 25 „	$K_z = 3400$ „	

Mit Rücksicht auf die Herstellungsart des Trägereisens mufs bei diesem im Stege K_z um 100 kg/qcm und φ um 2 vH geringer als in den Flanschen bemessen werden.

2. bei Eisen für Niete, Schrauben u. drgl. in der Längsrichtung

bis einschl. 25 mm Durchmesser . . . . $K_z = 3800$ kg/qcm, $\varphi = 18$ vH

von mehr als 25 bis einschl. 40 mm Durchmesser . . $K_z = 3600$ „ $\varphi = 15$ „

*) Uebereinstimmend mit den Vorschriften der Deutschen Reichspost- und Telegraphen-Verwaltung.

**) S. auch I. Allgemeine Bestimmungen S. 550.

***) Im übrigen s. u. III. B., Bleche aus Schweifseisen S. 560.

3. bei Belageisen $K_z = 3300$ kg/qcm, $\varphi = 6$ vH.

B. Sonstige Proben für Flacheisen und Formeisen.

a) Biegeproben. Längsstreifen müssen über eine Rundung von 13 mm Halbmesser winkelförmig gebogen werden können, ohne dafs sich an der Biegestelle ein Bruch im Eisen zeigt. Der Biegewinkel α für den kalten, bezw. α_1 für den dunkelkirschroten Zustand beträgt

bei Dicken von 8 bis 11 mm $\alpha = 50^0$, bei Dicken von 12 bis 15 mm $\alpha = 35^0$,
„ „ „ 16 „ 20 „ $\alpha = 25^0$, „ „ „ 21 „ 25 „ $\alpha = 15^0$,
bei Dicken bis 25 mm $\alpha_1 = 120^0$, bei Dicken über 25 mm $\alpha_1 = 90^0$.

b) Ausbreitproben. Im rotwarmen Zustande mufs ein auf kaltem Wege abgetrennter, 30 bis 50 mm breiter Streifen eines Winkeleisens, Bleches oder Flacheisens mit der parallel zur Faser geführten, nach einem Halbmesser von 15 mm abgerundeten Hammerfinne bis auf das 1,5-fache seiner Breite ausgebreitet werden können, ohne Spuren von Trennung im Eisen zu zeigen.

C. Spielraum für Mafs und Gewicht. Es gelten dieselben Bestimmungen wie für Bauwerk-Flufseisen, s. S. 555.

B. Bleche aus Schweifseisen.

(S. auch I. Allgemeine Bestimmungen S. 550, und hinsichtlich der zulässigen Abweichungen in Länge, Breite, Dicke und Gewicht, C. Bleche aus Flufseisen S. 556 u. f.)

1. Behälterbleche.

Es sind Bleche von zweierlei Güte zu unterscheiden, die als Qualität I und II bezeichnet werden. Für die Zerreifsproben wird folgendes vorgeschrieben:

Qualität I	Qualität II
längs der Faser: $K_z = 3500$ kg/qcm, $\varphi = 7$ vH	längs der Faser: $K_z = 3150$ kg/qcm, $\varphi = 5$ vH
quer zur Faser: $K_z = 2850$ „ $\varphi = 5$ „	quer zur Faser: $K_z = 2750$ „ $\varphi = 3$ „

Bei der Warmbiegeprobe müssen die Probestreifen vor dem Bruche eine Biegung aushalten bis zu folgenden Winkeln:

längs der Faser $\alpha = 125^0$ bei Qualität I, $\alpha = 90^0$ bei Qualität II
quer zur „ $\alpha = 90^0$ „ „ I, $\alpha = 60^0$ „ „ II.

Bei der Kaltbiegeprobe müssen diese Winkel sein:

bei einer Blechdicke mm	Qualität I längs	Qualität I quer	Qualität II längs	Qualität II quer	bei einer Bechdicke mm	Qualität I längs	Qualität I quer	Qualität II längs	Qualität II quer
von 5 und weniger	90⁰	40⁰	75⁰	30⁰	von 17 bis 19	25⁰	10⁰	20⁰	5⁰
„ 6 bis 8	70	30	55	20	„ 20 „ 22	20	5	15	.
„ 9 „ 11	50	20	45	15	„ 23 „ 25	15	5	10	.
„ 12 „ 16	35	15	30	10					

2. Kesselbleche.

In drei Sorten: 1. Feuerblech, 2. Bördelblech, 3. Mantelblech.

Aus Feuerblech müssen die Teile der Kesselwandung gefertigt werden, die die erste strahlende Hitze des Feuerherdes aufzunehmen haben. Zu den Flammenrohrschüssen und zu den Teilen, die gebördelt oder gekrempt werden, wie z. B. Böden, Dome, Stutzen u. drgl., ist Bördelblech zu verwenden. Alle anderen Teile der Kesselwandung dürfen aus Mantelblech gefertigt werden.

Zerreifs- und Dehnungsproben. K_z darf bei allen drei Qualitäten 40 kg/qmm nicht überschreiten. Die Proben sollen folgende Mindestzahlen bei Blechen bis zu 25 mm Dicke ergeben:

Qualität:	Feuerblech		Bördelblech		Mantelblech	
Faserrichtung:	längs	quer	längs	quer	längs	quer
K_z . . . . . . in kg/qmm	36	34	35	33	33	30
φ . . . . in vH	18	12	12	8	7	5

Jede Zahl für Festigkeit oder Dehnung darf um 1 kleiner sein als die betreffende Mindestzahl, wenn die zugehörige andere Mindestzahl um ebensoviel gröfser ist.

Bei Blechen von mehr als 25 mm Dicke verringert sich die Mindestzahl der Festigkeit bei Vergröfserung der Dicke um je 2 mm stets um je 0,5 kg/qmm des ursprünglichen Querschnittes (z. B. Mantelblech, 26 bis 28 mm dick, längs: $K_z = 32{,}5$ kg/qmm; quer: $K_z = 29{,}5$ kg/qmm). Demgemäfs wird man bei Verwendung solcher Bleche den Ausfall an Festigkeit durch Wahl einer besseren Blechqualität auszugleichen haben.

Biegeproben. Die Blechstreifen müssen sich kalt oder warm bis zu folgenden Winkeln biegen lassen:

Zustand	bei einer Blechdicke von mm	bei Feuerblech		bei Bördelblech		bei Mantelblech		Zustand	bei einer Blechdicke von mm	bei Feuerblech		bei Bördelblech		bei Mantelblech	
		längs	quer	längs	quer	längs	quer			längs	quer	längs	quer	längs	quer
kalt	6 bis 8	130°	110°	110°	90°	70°	45°	kalt	18 bis 20	70°	50°	55°	30°	40°	17
„	8 „ 10	120	100	100	80	65	40	„	20 „ 22	60	40	50	25	35	15
„	10 „ 12	110	90	90	70	60	35	„	22 „ 24	55	30	45	20	30	12
„	12 „ 14	100	80	80	60	55	30	„	24 „ 26	50	20	40	15	25	10
„	14 „ 16	90	70	70	50	50	25	warm	beliebiger						
„	16 „ 18	80	60	60	40	45	20		Gröfse	180	180	180	150	150	100

Schmiedeproben. Rotwarme Blechstreifen von etwa 100 mm Breite müssen mit der Hammerfinne quer zur Walzrichtung mindestens auf das 1,5-fache ihrer Breite ausgebreitet werden können, ohne an den Kanten oder auf der Fläche Risse zu erhalten.

Lochproben wie bei flufseisernen Kesselblechen, s. unter 8. auf S. 558.

IV. Handelseisen.

Das Eisen soll dicht, gut stauch- und schweifsbar, weder kalt- noch rotbrüchig, noch langrissig sein und eine glatte Oberfläche zeigen; es darf weder Kantenrisse noch offene Schweifsnähte oder sonstige unganze Stellen haben.

Die nachstehend als mafsgebend bezeichneten Festigkeits- und Dehnungszahlen gelten für Flach- und Winkeleisen nur bis zu 16 mm Dicke, für Vierkant- und Rundeisen nur bis zu 25 mm Dicke. Werden Proben von dickeren Stücken verlangt, so sind diese durch Walzen oder Schmieden auf 16 bezw. 25 mm Dicke herabzuarbeiten.

Die Zerreifsversuche müssen mindestens die Summe der vorgeschriebenen Zahlen für Festigkeit und Dehnung ergeben.

1. **Nieteisen-Qualität** (best-best). Verlangt wird $K_z = 36$ kg/qmm, $\varphi = 18$ vH.

Ausgeschnittene Stücke aus Flach- oder Winkeleisen von 30 bis 50 mm Breite, nicht über 16 mm dick, Vierkant- und Rundeisen bis 25 mm dick, die Kanten mit der Feile abgerundet, sollen sich kalt zu einer Schleife biegen lassen mit einem lichten Durchmesser gleich der Dicke des Eisens, ohne Spuren einer Trennung zu zeigen. — Warm sollen Probestücke, wie vorstehend angegeben, sich ganz zusammenlegen lassen; ein Stück Rundeisen von der doppelten Länge seines Durchmessers

soll auf die Hälfte seiner Länge zusammengestaucht werden können, ohne Risse zu zeigen.

2. **Hufstabeisen-Qualität** (best). Verlangt wird $K_z = 35$ kg/qmm, $\varphi = 15$ vH.

Ausgeschnittene Stücke wie vorhin unter 1. sollen sich kalt zu einer Schleife biegen lassen mit einem lichten Durchmesser gleich der doppelten Dicke des Eisens, ohne Spuren einer Trennung zu zeigen. — Warm sollen Probestücke, wie vorstehend angegeben, sich zu einer Schleife biegen lassen mit einem lichten Durchmesser gleich der Dicke des Eisens, ohne Risse zu zeigen.

3. **Gewöhnliches Handelseisen.** Hierfür sind Proben mit Bürgschaftpflichten weder üblich, noch erforderlich.

V. Stahlformgufs.*)

Unter Stahlformgufs ist der in feuerfesten o. drgl. Formen gegossene Stahl, u. zw. sowohl der in Tiegel- und Martinöfen, als auch der in der Bessemerbirne (Converter) dargestellte Stahl zu verstehen. Aus dem Kupolofen und ebenso aus Tiegeln gegossene Gufsstücke von Roheisen mit einem Zusatz von Schweifseisen oder Stahl, die durch nachherige Behandlung im Temperofen eine dem Stahlformgufs ähnliche Eigenschaft erlangen sollen, sind im allgemeinen nicht als Stahlformgufs zu bezeichnen.

Behufs Vornahme von Proben zur Feststellung der Eigenschaften des Formgusses sind an den zu prüfenden Gufsstücken Probestäbe anzugiefsen. Diese Stäbe sind nach dem Ausglühen der Stücke auf kaltem Wege abzutrennen und für Vornahme der Proben herzurichten.

Sind die Gufsstücke zum Angiefsen von Proben zu klein oder zu dünnwandig, so mufs für etwaige Proben ein besonderes Probestück gegossen werden.

Es soll im allgemeinen je nach dem Verwendungszweck der Stücke $K_z = 3600$ bis 6000 kg/qcm bei $\varphi = 20$ bis 8 vH, auf 200 mm gemessen, betragen.

Die Gewichtabweichung darf je nach Konstruktion, Form und Gewicht + 10 bis 20 vH, die Zugabe für Bearbeitung 5 bis 20 mm betragen; das letztere Uebermafs ist in der Regel nicht unter 5 mm anzunehmen.

VI. Gufseisen.*)

Die Vorschriften gelten für Bau-, Maschinen- und Rohrgufs.

Die Gufsstücke sollen aus grauem, weichem Eisen sauber und fehlerfrei gegossen sein. — Es mufs möglich sein, mittels eines gegen eine rechtwinklige Kante des Gufsstückes mit dem Hammer geführten Schlages einen Eindruck zu erzielen, ohne dafs die Kante abspringt. Das Eisen der Rohre mufs feinkörnig und zäh sein und sich mit Meifsel und Feile bearbeiten lassen.

Verlangt wird $K_z \geq 1200$ kg/qcm. Ein unbearbeiteter, quadratischer Stab von 30 mm Seite, auf zwei, 1 m voneinander entfernten Stützen liegend, mufs eine allmählich bis zu 450 kg zunehmende Belastung in der Mitte aufnehmen können, bevor er bricht, d. h. $K_b \geq 2500$ kg/qcm.

1. **Säulen.** Der Unterschied der Wanddicken eines kreisringförmigen Querschnittes, dessen vorgeschriebener Flächeninhalt mindestens eingehalten sein mufs, darf bei Säulen bis zu 400 mm (mittlerem) äufserem Durchmesser und 4 m Länge die Gröfse von 5 mm nicht übersteigen. Bei Säulen von gröfserem Durchmesser und gröfserer Länge wird der zulässige Unterschied für je 100 mm Mehrdurchmesser und für je 1 m Mehrlänge um je 0,5 mm erhöht. Die Wandstärke soll jedoch in keinem Falle weniger als 10 mm betragen. — Sollen Säulen stehend (senkrecht) gegossen werden, so ist dies besonders zu vereinbaren.

2. **Rohre.** Für gufseiserne Muffen- und Flanschenrohre sind die deutschen Rohr-Normalien (Ausgabe 1882) mafsgebend (s. 6. Abschn., Maschinenteile, unter „Rohre"). Die normalen Wandstärken genügen für einen ruhigen Betriebsdruck bis zu 10 at, für einen Probedruck bis zu 20 at.

Für Dampfrohrleitungen, welche Ausdehnungen und Zusammenziehungen durch Warm- und Kaltwerden ausgesetzt sind, empfehlen sich gröfsere Wandstärken, ebenso in allen Fällen, wo Stöfse und Erschütterungen vorkommen können. Der äufsere Durchmesser des Rohres ist dabei als feststehend zu betrachten und Aenderung der Wandstärken durch Vergröfserung oder Verkleinerung der lichten Weite zu erzielen.

Abweichungen vom vorgeschriebenen Gewichte sind bei geraden Normalrohren qis ± 5 vH gestattet (nach den Rohr-Normalien nur ± 3 vH). Bei der Berechnung der

*) S. auch I. Allgemeine Bestimmungen, S. 550.

Gewichte von Formstücken ist das Gewicht, das sich aus den normalen Abmessungen bzw. Wandstärken berechnet, um 15 vH, bei Krümmern mindestens um 20 vH zu erhöhen.

Gerade Normalrohre sind stehend (senkrecht) in getrockneten Formen unter Ausschlufs von Kernnägeln und Kernstützen zu giefsen; Formstücke werden dagegen in gewöhnlicher Weise hergestellt.

d. Grundsätze für die Prüfung von Schweiß- und Flußeisen zum Bau von Dampfkesseln [Würzburger Normen 1905].*)

Gemäfs den Beschlüssen der Delegierten- und Ingenieur-Versammlungen des Internationalen Verbandes der Dampfkessel-Ueberwachungs-Vereine am 17. und 18. Februar 1905 in Amsterdam und am 23. Juni 1905 in Kassel. 9. Aufl.

[Auszug.]

1. Allgemeine Bestimmungen.

a. Prüfmaschinen.

Die Prüfmaschinen müssen so gebaut sein, dafs sie bei achtsamer Handhabung stofsfrei wirken; sie müssen auf ihre Richtigkeit leicht untersucht werden können. Sie sollen, falls sie vom abnehmenden Beamten nicht kurzerhand geprüft werden können, mindestens alle drei Monate einmal durch Sachverständige auf richtiges Arbeiten aller Teile untersucht werden. Ueber diese Untersuchung ist ein Befundbericht aufzunehmen, der bei Materialprüfungen auf Verlangen vorzulegen ist.

Die Einspannvorrichtung zu Zugversuchen mufs so beschaffen sein, dafs der Probestab bei Beginn des Zuges sich selbsttätig einstellt, damit die Zugkraft innerhalb der Mefsstrecke möglichst gleichmäfsig über den Querschnitt verteilt wird.

b. Zurichtung der Probestäbe.

Die Probestäbe müssen das Material in ausgeglühtem Zustande enthalten; die Probestreifen sind, falls erforderlich, rotwarm gerade zu richten.

Fehlerhafte Probestäbe dürfen nicht genommen werden. Dicke und Breite der Probestäbe werden mit der Mikrometerschraube gemessen.

Die Probestreifen müssen etwa 400 mm lang und im unbearbeiteten Zustande mindestens 50 mm breit sein. Sie sollen an den Kanten derart bearbeitet werden, dafs die Wirkung des Scherenschnittes, Auslochens oder Aushauens zuverlässig beseitigt wird. Die Walzhaut mufs unter allen Umständen am Probestab verbleiben.

Die Streifen zu Zugproben sind bei einer Mefslänge von 200 mm auf die Erstreckung von 220 mm an den Kanten sauber zu bearbeiten; darüber hinaus mufs der Querschnitt zunehmen. Die Stäbe sind so breit zu lassen, dafs der Querschnitt mindestens 300 qmm beträgt.**)

Streifen zu Biegeproben müssen an den Kanten etwas abgerundet sein und dürfen über den zur Biegung angewandten Dorn in der Breite nicht hervorragen.

c. Abnahme der Materialien.

Sämtliche Materialstücke sind bei der Besichtigung abzustempeln, u. zw. mit dem Stempel des abnehmenden Beamten und einer Nummer. Bei Blechen sind zwei Stempel, etwa 200 mm von den Kanten entfernt, aufzuschlagen, bei allen übrigen Materialien genügt ein Stempel, der nahe einem Ende anzubringen ist.

Bei Rohren ist die Schweifsnaht tunlichst durch einen Stern zu kennzeichnen. Einer Nummerbezeichnung bedarf es bei Rohren nicht.

Das Stempelzeichen ist in dem Prüfungsschein abzudrücken.

In der Regel sind die Materialien auf dem Walzwerke zu prüfen. Werden Bleche auf dem Walzwerke abgenommen, so müssen sie an zwei aneinanderstofsenden Seiten unbeschnitten bleiben, die beiden anderen Seiten dürfen dagegen beschnitten sein, jedoch nur so weit, dafs Probestreifen noch entnommen werden können.

---

*) Zu beziehen von Boysen & Maasch in Hamburg, Heuberg 9.

**) Das Verhältnis der ursprünglichen Länge l des mittleren Stabstückes (in mm) zum ursprünglichen Querschnitt F des Stabes (in qmm) ist von Einflufs auf die Dehnung. Als normales Verhältnis gilt (vrgl. S. 550):

$$l = 11{,}3\sqrt{F}.$$

Rücksichten auf Herstellung der Probestäbe veranlassen häufig, von der Einhaltung dieses Verhältnisses abzusehen.

Die Dicke der Bleche ist an allen vier Ecken mittels Mikrometerschraube zu messen. Die Meſspunkte sollen mindestens 40 mm vom Rande und mindestens 100 mm von den Ecken des Bleches entfernt liegen.

Bleche, welche die vorgeschriebene Dicke um mehr als 0,4 mm unterschreiten, sind von der Abnahme ausgeschlossen.

Die Probestreifen sind an den Rändern oder Enden zu entnehmen. Die Wahl der Stücke, von denen Proben genommen werden sollen, bleibt dem abnehmenden Beamten überlassen.

Finden sich nach dem Zerreiſsen, Biegen, Aufweiten oder Bördeln anscheinend guter Probestücke Fehlerstellen, so werden die Prüfungsergebnisse solcher Stücke bei der Entscheidung über die Erfüllung der Lieferungsbedingungen nicht berücksichtigt.

Entspricht das Prüfungsergebnis den vorgeschriebenen Bedingungen nicht, so ist auf Verlangen des Werkes eine zweite Prüfung vorzunehmen, deren Ergebnis maſsgebend sein soll. Auf diese zweite Prüfung ist bei der Entnahme der Proben Rücksicht zu nehmen.

Die Zugfestigkeit K_z wird für Lang- und Querfaser in kg/qmm angegeben. Die Bruchdehnung φ wird entweder an einer am Stabe angebrachten Teilung oder zwischen den Endmarken der Meſsstrecke von 200 mm in vH ermittelt. Erfolgt beim letzteren Verfahren der Bruch des Stabes in geringerer Entfernung als 30 mm von den Endmarken, so ist das Ergebnis nicht zu berücksichtigen.

Die Zugfestigkeit K_z muſs bei Schweiſseisen kleiner sein als 40 kg/qmm, bei Fluſseisen gröſser sein als 34 kg/qmm.

Bei der Warm-Biegeprobe für Schweiſs- und Fluſseisen sind die Stäbe kirschrot warm zu machen und dann um eine gebrochene Kante zu biegen, wobei das Material nicht brechen, reiſsen oder ausfransen darf.

Bei der Kalt-Biegeprobe für Schweiſseisen werden die Stäbe bis zu 25 mm Dicke um einen Dorn von 25 mm Durchmesser, im Falle gröſserer Dicke um einen Dorn von höchstens der Materialdicke gebogen.

Bei der Hart-Biegeprobe für Fluſseisen sind die Stäbe längs und quer der Faser auf niedrige Kirschrothitze zu erwärmen, in Wasser von 28° C abzukühlen und dann um einen Dorn von bestimmter Dicke zu biegen.

Der Biegewinkel α wird in Grad angegeben. Der Probestab gilt als gebrochen, wenn sich auf der Auſsenseite in der Mitte der Biegungsstelle ein deutlicher Bruch im Metall zeigt.

Bleche, Winkeleisen und Rohre müssen eine glatte Oberfläche haben; sie dürfen keine erheblichen Schlackenstellen oder andere eingewalzte Verunreinigungen, keine Blasen, Risse oder unganze Stellen enthalten. Bei Blechen, Winkel- und Stabeisen dürfen Walzsplitter oder kleine Schalen durch Abmeiſseln entfernt, auch geringe, durch Einwalzen von Schlacke entstandene Vertiefungen ausgeebnet werden, soweit hierdurch die Haltbarkeit nicht beeinträchtigt wird.

Sämtliche Bleche sind nach dem Beschneiden auszuglühen.

Die Rohre müssen gerade, innen und auſsen kalibriert, ohne Zunder, Narben, Risse und andere im Betriebe schädliche Fehler, sowie glatt und rechtwinklig abgeschnitten sein.

Die Ueberlappung der Rohrschweiſsnaht muſs mindestens 6 mm betragen.

Die Wanddicke der Wasserrohre soll mindestens betragen

bei geschweiſsten schweiſs- oder fluſseisernen Rohren:

bis 83 mm äuſser. Durchm.	3,0 mm	über 121 bis 140 mm äuſser. Durchm.	4,0 mm
über 83 „ 102 „ „ „	3,25 „	„ 140 „ 191 „ „ „	4,5 „
„ 102 „ 121 „ „ „	3,75 „	„ 191 „ 216 „ „ „	5,5 „

bei nahtlosen fluſseisernen Rohren:

bis 30 mm äuſser. Durchm.	1,8 mm	über 83 bis 102 mm äuſser. Durchm.	3,25 mm
über 30 „ 50 „ „ „	2,0 „	„ 102 „ 121 „ „ „	3,75 „
„ 50 „ 57 „ „ „	2,5 „	„ 121 „ 140 „ „ „	4,0 „
„ 57 „ 60 „ „ „	2,75 „	„ 140 „ 191 „ „ „	4,5 „
„ 60 „ 83 „ „ „	3,0 „	„ 191 „ 216 „ „ „	5.5 „

Die vorgeschriebene Wanddicke darf an keiner Stelle um mehr als 20 vH unterschritten werden.

2. Kesselbleche aus Schweiſseisen.

a. Probestücke.

Von dem Material einer Lieferung sollen in der Regel von sämtlichen Blechen, die in die Nähe des Feuerherdes zu liegen kommen, Probestücke zu Zug- und zu

Biegeproben in Längs- und Querfaser entnommen werden; von 50 vH aller übrigen Bleche genügen Probestücke zur Hälfte zu Zug- und zur Hälfte zu Biegeproben in Längs- und Querfaser.

Bleche, die durch ihre weitere Verarbeitung bereits eine Gewähr für ihre Güte bieten, z. B. gekrempte Bleche, sind von der Prüfung ausgenommen.

b. Bezeichnung der Bleche.

Es werden zwei Qualitäten unterschieden: 1. Feuerblech, 2. Bördelblech.

Alle Teile der Kesselwandung, die in die Nähe des Feuerherdes zu liegen kommen, sind aus Feuerblech zu fertigen. Zu allen anderen Kesselteilen kann Bördelblech verwendet werden.

Dementsprechend ist jedes Blech seitens des Walzwerkes aufser mit dem Stempel des Werkes mit dem Qualitätsstempel SI für Feuerblech und SII für Bördelblech zu bezeichnen. Form und Gröfse des Qualitätsstempels sollen einem (in den Würzburger Normen angegebenen) Vordrucke gleich sein (7 mm hohe fette Buchstaben in einer elliptischen Umrahmung von 16 mm Breite und 12 mm Höhe).

Die Stempel können fehlen, wenn der Nachweis erbracht wird, dafs das Material geprüft ist und den Anforderungen des folgenden Abschnittes c. entsprochen hat.

c. Anforderungen.

1. Zugprobe. Die Zugfestigkeit K_z darf bei keinem Schweifseisenbleche 40 kg/qmm überschreiten.

Feuerblech SI: Geringste Zugfestigkeit Kz für die Längsfaser 36 kg/qmm, für die Querfaser 34 kg/qmm; geringste Dehnung φ für die Längsfaser 20 vH, für die Querfaser 15 vH.

Bördelblech SII: Geringste Zugfestigkeit K_z für die Längsfaser 35 kg/qmm, für die Querfaser 33 kg/qmm; geringste Dehnung φ für die Längsfaser 15 vH, für die Querfaser 12 vH.

Bleche über 25 mm Dicke pflegen weniger Zugfestigkeit zu haben, als aus demselben Material gefertigte Bleche unter 25 mm Dicke, und zwar rechnet man, dafs auf je 2 mm Vergröfserung der Blechdicke die Festigkeit um 0,5 kg abnimmt. Demgemäfs wird man bei Verwendung von Blechen über 25 mm Dicke zu erwägen haben, ob Feuerblech an Stelle von Bördelblech zu wählen ist.

2. Biegeprobe. Probestreifen von Feuer- und Bördelblech müssen sich warm in beiden Faserrichtungen flach zusammenbiegen lassen; kalt müssen sie sich bis zu folgenden Winkeln biegen lassen:

Blechdicke in mm	Feuerblech		Bördelblech		Blechdicke in mm	Feuerblech		Bördelblech	
	längs	quer	längs	quer		längs	quer	längs	quer
6 bis 8	160°	140°	135°	120°	24 bis 26	125°	105°	105°	65°
8 „ 10	160	140	135	120	26 „ 28	120	100	100	60
10 „ 12	160	140	135	120	28 „ 30	115	95	90	55
12 „ 14	155	135	135	120	30 „ 32	110	85	80	50
14 „ 16	150	130	130	110	32 „ 34	100	75	70	45
16 „ 18	145	125	125	100	34 „ 36	90	65	60	40
18 „ 20	140	120	120	95	36 „ 38	80	55	50	30
20 „ 22	135	115	115	85	38 „ 40	70	45	40	20
22 „ 24	130	110	110	75					

3. Schmiedeprobe. Probestreifen von ungefähr 100 mm Breite müssen im rotwarmen Zustande mit der Hammerfinne quer zur Walzrichtung mindestens auf das 1,5-fache ihrer Breite ausgebreitet werden können, ohne an den Kanten und auf der Fläche Risse zu erhalten.

4. Lochprobe. Probestreifen, die im rotwarmen Zustande in einer Entfernung vom Rande gleich der halben Dicke des Streifens mit einem konischen Lochstempel gelocht werden, dürfen dabei vom Loch nach der Kante nicht aufreifsen.

Der Lochstempel soll bei etwa 50 mm Länge für alle Blechdicken einen kleinsten Durchmesser von etwa 10 mm und einen gröfsten Durchmesser von etwa 20 mm haben.

3. Kesselbleche aus Flufseisen.

a. Probestücke.

Von dem Material einer Lieferung sollen in der Regel folgende Probestücke entnommen werden

1. bei Blechen aus Birnenmaterial (Thomaseisen): von sämtlichen Blechen,
2. bei Blechen aus Flammofenmaterial für Schiffskessel: von sämtlichen Blechen.
3. bei Blechen aus Flammofenmaterial für Landkessel:
   von sämtlichen Blechen, die in die Nähe des Feuerherdes zu liegen kommen,
   von sämtlichen Blechen, deren bestellte Mindestfestigkeit 42 kg/qmm oder deren Länge 6,5 m und mehr beträgt,
   von 50 vH aller übrigen Bleche.

Es sollen den Blechen Streifen sowohl zu Zugproben als auch zu Schmiede- und Loch-, sowie zu Warm- und Hart-Biegeproben in Längs- oder Querfaser entnommen werden; bei den 50 vH aller übrigen Flammofenbleche genügt jedoch die eine Hälfte zu Zugproben und die andere Hälfte zu Schmiede- und Loch- sowie zu Warm- und Hart-Biegeproben in Längs- oder Querfaser.

Bei Blechen über 4,5 m Länge und gleichzeitig 1,5 m Breite und darüber sind, soweit sie zur Prüfung ausgewählt sind, zwei Zugproben zu machen, und zwar ist eine Längsprobe vom Fufsende des Bleches und eine Querprobe in der Mitte der entgegengesetzten schmalen Seite zu entnehmen.

Bleche, die durch ihre weitere Verarbeitung bereits eine Gewähr für ihre Güte bieten, z. B. gekrempte Bleche, Wellrohre usw., brauchen nicht geprüft zu werden.

Besteht der Mantel eines Kessels aus nur einer Platte, so ist diese stets zu prüfen.

b. Bezeichnung der Bleche.

Es werden unterschieden: 1. Feuerblech, 2. Mantelblech, u. zw. ob aus Flufseisen, das im Flammofen erzeugt worden ist, oder aus Thomasflufseisen.

Aus Mantelblech dürfen nur solche Teile des Kesselmantels gefertigt werden, welche mit den Feuergasen nicht in Berührung kommen.

Dementsprechend ist jedes Blech seitens des Walzwerkes aufser mit dem Stempel des Werkes mit dem Qualitätsstempel FI für Feuerblech aus Flammofeneisen, FII für Mantelblech aus Flammofeneisen, TI für Feuerblech aus Thomaseisen und TII für Mantelblech aus Thomaseisen zu bezeichnen. Ueber Form und Gröfse des Qualitätsstempels (Vordruck) gilt dasselbe wie bei Kesselblechen aus Schweifseisen (S. 565).

Die Stempel können fehlen, wenn der Nachweis erbracht wird, dafs das Material geprüft ist und den Anforderungen des folgenden Abschnittes c. entsprochen hat.

c. Anforderungen.

1. Zugprobe. Der Unterschied zwischen der Mindest- und Höchstfestigkeit der flufseisernen Bleche darf bei einem einzelnen Blech sowie bei Blechen gleicher Qualität innerhalb einer Lieferung bis 5 m Länge höchstens 6 kg/qmm, über 5 bis 10 m Länge höchstens 7 kg/qmm, und über 10 m Länge höchstens 8 kg/qmm betragen, jedoch nur innerhalb der für Feuerblech und Mantelblech festgesetzten Zugfestigkeitsgrenzen.

Feuerblech FI: Zugfestigkeit $K_z = 34$ bis 40 kg/qmm, Dehnung φ mindestens 25 vH, Gütezahl $Q = K_z + \varphi$ mindestens 62 (vrgl. S. 558).

Für Schiffskessel dürfen ausnahmsweise Bleche mit einer Zugfestigkeit bis 46 kg/qmm zugelassen werden, deren Mindestdehnung φ der folgenden Zahlentafel zu entsprechen hat.

Mantelblech FII: Zugfestigkeit K_z bis 50 kg/qmm.

Folgende Zahlentafel zeigt die bei den verschiedenen Zugfestigkeiten zu verlangende Dehnung φ auf 200 mm Länge.

K_z in kg/qmm . .	50—47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34
φ in vH	20	20,5	21	21,5	22	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26.5

Aus Konstruktionsrücksichten kann ausnahmsweise ein Mantelblech FII mit mehr als 50 kg/qmm Zugfestigkeit, jedoch mit mindestens 20 vH Dehnung zugelassen werden, für das aber in jedem einzelnen Falle besondere Abnahmebedingungen vorgeschrieben werden können.

2. Warm-Biegeprobe. Längs- und Querfaser: Biegewinkel $\alpha = 180^0$ für alle Dicken.

3. Hart-Biegeprobe. Bei Blechen mit einer Zugfestigkeit bis zu 42 kg/qmm einschliefslich mufs sich der Probestreifen in Längs- und Querfaser flach, von 42 bis 45 kg/qmm um einen Dorn mit einem Durchmesser von der zweifachen Blechdicke, über 45 kg/qmm um einen solchen von der dreifachen Blechdicke bis $\alpha = 180^0$ zusammenbiegen lassen.

4. Schmiede- und Lochprobe wie bei Kesselblechen aus Schweifseisen (S. 565).

4. Winkeleisen für Dampfkessel.

Aus Schweifs- oder Flufseisen. In der Regel sollen von 25 vH der abzunehmenden Winkeleisen Probestücke entnommen werden.

1. Warm-Biegeprobe für Schweifs- und Flufseisen. Die Schenkel des Winkeleisens müssen sich sowohl vollständig zusammenbiegen, als auch so weit auseinanderbreiten lassen, dafs beide Schenkel eine ebene Fläche bilden.

2. Kalt-Biegeprobe für Schweifseisen. Die Schenkel des Winkeleisens müssen sich unter der Presse um mindestens $\alpha = 18^0$ auseinanderbiegen lassen.

Für abgeschnittene Längsstreifen sei der Biegewinkel $\alpha = 50^0$ bei Dicken von 8 bis 12 mm, $\alpha = 35^0$ bei Dicken von 12 bis 16 mm, $\alpha = 25^0$ bei Dicken von 16 bis 21 mm, $\alpha = 15^0$ bei Dicken von 21 bis 25 mm.

3. Kalt-Biegeprobe für Flufseisen. Die Schenkel des Winkeleisens müssen sich unter der Presse um mindestens $\alpha = 40^0$ auseinanderbiegen lassen.

Abgeschnittene Längsstreifen müssen sich bei allen Dicken bis $\alpha = 180^0$ zusammenbiegen lassen.

4. Hart-Biegeprobe für Flufseisen. Längsstreifen müssen sich um einen Dorn, dessen Durchmesser gleich der dreifachen Schenkeldicke ist, bis $\alpha = 180^0$ biegen lassen.

Bei allen vorstehenden Biegeproben dürfen sich in der Kehle und in den Schenkeln nur Anfänge von Rissen zeigen.

5. Schmiede- und Lochprobe. Schenkelstreifen von Winkeleisen aus Schweifs- oder Flufseisen müssen dieselbe Schmiede- und Lochprobe bestehen wie Blechstreifen aus Schweifseisen (S. 565).

5. Nieteisen für Dampfkessel.

Aus Schweifs- oder Flufseisen. In der Regel sollen von 4 vH der abzunehmenden Eisenmenge Probestücke entnommen werden.

1. Zugprobe für Schweifseisen. Zugfestigkeit $K_z = 38$ kg/qmm, Dehnung φ mindestens 20 vH.

2. Zugprobe für Flufseisen. Zugfestigkeit $K_z = 34$ bis 42 kg/qmm, Dehnung φ mindestens 25 vH, Gütezahl $Q = K_z + \varphi$ mindestens 62.

Für Schiffskessel und für Nietungen, die mit den Feuergasen nicht in Berührung kommen, ist ein Material bis 45 kg/qmm Zugfestigkeit und mit Dehnung nach der vorstehenden Zahlentafel für flufseiserne Mantelbleche zulässig. Ausnahmsweise kann auch für Nietungen, die mit den Feuergasen nicht in Berührung kommen, ein Material von höherer Zugfestigkeit, jedoch mit mindestens 20 vH Dehnung zugelassen werden, für das aber in jedem einzelnen Falle besondere Abnahmebedingungen vorgeschrieben werden können.

3. Kalt-Biegeprobe für Schweifseisen. Der Probestab mufs, ohne Risse zu erhalten, kalt so gebogen und glatt aufeinandergeschlagen werden können, dafs die beiden Enden der Länge nach parallel liegen.

4. Kalt-Biegeprobe für Flufseisen. Der Probestab mufs, ohne Risse zu erhalten, kalt so gebogen werden können, dafs der Abstand der parallel gebogenen Schenkel voneinander nicht mehr als $^1/_5$ des Nietdurchmessers beträgt.

5. Hart-Biegeprobe für Flufseisen. Das Probestück mufs sich um einen Dorn, dessen Durchmesser gleich der zweifachen Dicke des Nieteisens ist, bis $\alpha = 180^0$ biegen lassen.

6. Stauchprobe für Schweifs- und Flufseisen. Ein Stück Nieteisen, dessen Länge doppelt so grofs ist wie der Durchmesser, mufs sich kalt auf die halbe Länge zusammenstauchen lassen, ohne dafs die Oberfläche reifst.

7. Lochprobe für Schweifs- und Flufseisen. Ein Stück Nieteisen, dessen Länge doppelt so grofs ist wie der Durchmesser, mufs sich warm auf $^1/_3$ bis $^1/_4$ der Länge niederstauchen und dann lochen lassen, ohne auszureifsen.

6. Niete für Dampfkessel.

Aus Schweifs- oder Flufseisen. In der Regel sollen von je 1000 abzunehmenden Nieten zwei Probestücke entnommen werden.

1. Stauch- und Lochprobe für Schweifs- und Flufseisen. Ein Nietschaft, dessen Länge doppelt so grofs ist wie der Durchmesser, mufs sich kalt auf die halbe Länge zusammenstauchen lassen, ohne dafs die Oberfläche reifst.

Ein Nietschaft, dessen Länge doppelt so grofs ist wie der Durchmesser, mufs sich warm auf $^1/_3$ bis $^1/_4$ der Länge niederstauchen und dann lochen lassen, ohne aufzureifsen.

2. Stauchprobe nach der Härtung, für Flufseisen. Ein Nietschaft, dessen Länge doppelt so grofs ist wie der Durchmesser, mufs sich auf $^3/_5$ der Länge zusammenstauchen lassen, ohne dafs die Oberfläche reifst.

7. Wasserrohre für Dampfkessel.

Aus Schweiſs- oder Fluſseisen. In der Regel sollen von etwa 2 vH der abzunehmenden Rohre, mindestens aber von zwei Rohren Probestücke entnommen werden.

Den nachfolgenden Prüfungen unterliegen Wasserrohre unter 6 mm Wanddicke. Wasserrohre von 6 mm und mehr Wanddicke werden nur der Wasserdruckprobe (s. nachst. u. 6) unterzogen. — Heizrohre für Dampfkessel bedürfen der Prüfung nicht.

1. Aufweiteprobe für Schweiſs- und Fluſseisen. Rohrenden müssen sich kalt auf eine Länge von 30 mm aufweiten lassen, u. zw.:

für Schweiſseisen bei einer Wanddicke bis zu 4 mm um 5 vH des inneren Durchmessers,

bei einer Wanddicke bis zu 6 mm um 3 vH des inneren Durchmessers;

für Fluſseisen bei einer Wanddicke bis zu 4 mm bei geschweiſsten Rohren um 7 vH, bei nahtlosen Rohren um 10 vH des inneren Durchmessers,

bei einer Wanddicke über 4 mm bis 6 mm bei geschweiſsten Rohren um 4 vH, bei nahtlosen Rohren um 6 vH des inneren Durchmessers.

Das Aufweiten der Rohrenden muſs durch Hämmern über einen Dorn erfolgen.

2. Bördelprobe für Schweiſseisen. Rohrenden müssen sich kalt nach auſsen umkrempen lassen, u. zw.:

bei Rohren bis 76 mm Weite und bis 3,5 mm Wanddicke um 75° (Bördelbreite 12 vH des inneren Rohrdurchmessers);

bei Rohren über 76 mm Weite und bis 4,5 mm Wanddicke um 45°, bei Rohren über 4,5 mm Wanddicke um 30° (Bördelbreite 8 vH des inneren Rohrdurchmessers).

3. Bördelprobe für Fluſseisen. Rohrenden müssen sich kalt nach auſsen umkrempen lassen, u. zw. bei allen Rohrdurchmessern und Wanddicken um 90°. Die Breite des Bördels muſs 12 vH des inneren Rohrdurchmessers betragen.

4. Kalt-Biegeprobe für Schweiſseisen. Rohrabschnitte von 100 mm Länge müssen sich kalt bis auf ein Drittel des Durchmessers zusammendrücken lassen, ohne daſs sich in den am stärksten gebogenen Teilen Anbrüche zeigen; doch soll die Schweiſsnaht nicht in den am stärksten gebogenen Teilen liegen.

5. Hart-Biegeprobe für Fluſseisen. Geschweiſste Rohrabschnitte von 100 mm Länge müssen sich ganz zusammendrücken lassen; doch soll die Schweiſsnaht nicht in dem am stärksten gebogenen Teile liegen.

Nahtlose Rohrabschnitte von 100 mm Länge müssen sich so zusammendrücken lassen, daſs sie in der Mitte aufeinanderliegen, während die Enden einen Bogen bilden, dessen Halbmesser gleich der doppelten Blechdicke ist.

6. Wasserdruckprobe für Schweiſs- und Fluſseisen. Sämtliche Rohre müssen einem Probedruck von dem dreifachen des genehmigten Betriebsdruckes, mindestens aber von 30 at Ueberdruck widerstehen, ohne irgend eine Formveränderung oder Undichtigkeit zu zeigen. Die Rohre sind, während sie unter dem Probedrucke stehen, abzuhämmern, namentlich auch an der Schweiſsnaht.

e. Rostschutz des Eisens.

1. Rosten ist die allmähliche Umwandlung des Eisens in Eisenoxydhydrat durch gemeinsamen Angriff von Luft (tätig hierbei Sauerstoff und Kohlensäure) und Wasser, schneller jedoch unter Mitwirkung von verdünnten Säuren oder Salzlösungen, wie auch von abirrenden elektrischen Strömen; im Seewasser befördert besonders Chlormagnesium die Rostbildung. In völlig wasserfreier Luft und sauerstofffreiem Wasser rostet Eisen nicht.

Geschmiedetes Eisen rostet weniger als gewalztes Eisen, kohlenstoffreiches (Guſseisen) weniger als kohlenstoffarmes, gehärteter Stahl weniger als ungehärteter, Schweiſseisen weniger als Fluſseisen (besonders als Thomaseisen). Der Rost (spez. Gew. rd. 4) nimmt einen gröſseren Raum ein als das dazu verbrauchte Eisen; bei Eisenbahnschienen fand man eine 1,6 mm starke Metallschicht in 7 Jahren in eine 3 mm starke Rostschicht verwandelt. Frischer Kalkmörtel greift Eisen stark an, indessen kommt die Rostbildung gewöhnlich zum Stillstand; Zementmörtel hält dagegen das Eisen blank (s. u.)

2. Rostschutzmittel. Unter ihnen ist, den jeweiligen Umständen entsprechend, sorgfältige Auswahl zu treffen. Bewährte Mittel sind:

1. Bedeckthalten mit Körpern, die Wasser und Säuren aufnehmen oder binden. So zum Schutze der Dampfkessel der Zusatz von Zinkara (Lösung von Zinkoxyd-Natron) oder von festem Karbozink (kohlens. Zinkoxyd) zum Dampfkesselwasser bei der Kaiserl. Deutschen Marine. Ferner werden aufser Betrieb befindliche Dampfkessel mit Kalkmilch oder Sodalösung gefüllt; besser wirkt in dem mittels der Feuerung gut ausgetrockneten Kessel Chlorcalcium in nufsgrofsen Stücken bei gleichzeitigem Luftabschlusse.

In Tunneln benutzt man entweder Kalksteinschlag als Bettung, oder man bestreicht die Eisenteile des Oberbaues mit Kalkmilch, wodurch ein besonders gefährlicher Rosterreger, nämlich die Schwefligsäure der Lokomotiv-Rauchgase, gebunden und unschädlich gemacht wird. Für Schraubenmuttern genügt in Tunneln ein zweimaliger Teeranstrich.

2. **Metallüberzüge,** meist dadurch hergestellt, dafs die mit Säure usw. völlig rein gebeizten und dann rasch getrockneten Gegenstände noch heifs in die geschmolzenen Metalle getaucht werden.

Zink gibt den vorzüglichsten Schutz (auch vor Salzwasser), weil sich im Zinkbade an der Oberfläche eine Eisen-Zink-Legierung bildet; s. auch S. 544. (Verzinktes Eisen wird im Handel vielfach als „galvanisiertes“ bezeichnet.) Besser ist die kalte elektrolytische Verzinkung (Walzwerk Langschede a. d. Ruhr). Verzinktes Eisendrahtseil [12-drähtig, Drahtstärke 3,5 mm] eignet sich vorzüglich bei Blitzableitern zur Luftleitung.

Die Deutsche Reichs-Post- und Telegraphen-Verwaltung verlangt für den Zinküberzug des eisernen Telegraphendrahtes folgendes:

Zusammenhängende, glatte Oberfläche; wenn Draht in eng aneinander liegenden Schraubenwindungen um einen Zylinder vom 10-fachen Draht-Durchmesser gewickelt wird, soll der Zinküberzug weder rissig werden noch abblättern. Dicke des Ueberzuges: Es soll sich auf ihm keine zusammenhängende Kupferhaut bilden, wenn der Draht von 6 und 5 mm Dicke 8-mal, von 4 und 3 mm 7-mal, von 2 und 1,7 mm 6-mal je eine Minute lang in eine Lösung von 1 G.-T. Kupfervitriol mit 5 G.-T. Wasser eingetaucht wird.

Zinn schützt wenig, u. zw. nur so lange, als das Eisen an keiner Stelle von Zinn entblöfst ist; vrgl. Weifsbleche, S. 544.

Blei bildet einen auch gegen Salz- und Schwefelsäure schützenden Ueberzug. Verbleit-verzinkte Bleche dienen zu Dachdeckungen von chemischen Fabriken, Gasanstalten usw.

Kupfer und **Nickel** (galvanisch) schützen nur bei gröfserer Dicke der Schicht; vrgl. S. 544.

3. **Emaillieren.** Die auf die gereinigten (gebeizten und getrockneten) Flächen des Gufsstückes aufgetragene pulverige Grundmasse (Feldspat, Quarz, Borax und Ton) wird bis zur Sinterung gebrannt und dann die Masse des eigentlichen Schmelzes (Silikate und Zinnoxyd) aufgebracht und bis zu ihrer völligen Schmelzung erhitzt.

4. **Fette,** fest oder flüssig, eignen sich zum vorübergehenden Ueberziehen von blanken Eisenteilen; jedoch werden im Freien die Fette von der Sonne abgeschmolzen oder vom Regen fortgespült. Talg (auch mit 50 bis 100 vH Bleiweifs) wird leicht ranzig, die entstehenden Fettsäuren greifen das Eisen an. Mineralische Fette, in Terpentin oder in leichtflüssigen Petroleumdestillaten gelöst, sind zu empfehlen.

5. **Portland-Zement** (Mörtel und Beton) schützt nicht nur, sondern nimmt sogar den vorhandenen Rost in sich auf (vrgl. Monierbauten). Vorzüglicher Schutz für gegossene Stücke und ganze Eisenkonstruktionen; der dünne, mit Wasser angerührte, reine Zement wird mit dem Pinsel 4- bis 5-mal (nach jedesmaligem völligem Erhärten) auf die metallreinen Flächen gestrichen. Für Flächen, die dem Wasser ausgesetzt sind (z. B. Schleusenbauten, Schiffsböden), wird Zement mit entrahmter Milch angemacht.

6. **Teer, Asphalt und Pech,** rein und wasserfrei, in heifsem Zustande auf das heifse Eisen aufgetragen, haben sich für gufseiserne Rohre sehr bewährt. Zu empfehlen ist auch die Mischung von 8 G.-T. Teer mit 2 G.-T. gebranntem und gepulvertem Kalk und 1 G.-T. Terpentinöl, dreimaliger Anstrich; oder auch 1 G.-T. Schwefel in 2 G.-T. schwerem Teeröl und darin 5 G.-T. Pech oder Asphalt mit ein wenig Wachs aufgelöst.

7. **Harzölanstriche.** Rostschutzmittel der deutschen Kriegsmarine: Kautschuköl, eine Lösung von Kautschuk in Terpentinöl. Aehnlich das Antioxyd, eine dünne Lösung von Guttapercha in Benzin.

8. **Hartgummi und Zelluloid** geben festhaftende Ueberzüge von Nägeln, Schrauben, Schnallen, Ringen usw., die dadurch vollkommen unangreifbar für Luft, Wasser, Säuren werden. Sehr wichtig für elektrische Isolatoren. Umkleidungen von Schiffswellen mit Hartgummi (Kaiserl. Marine). Mit Zaponlack (Lösung von Zelluloid) werden Maschinen, die über See gehen, vor dem Rosten geschützt.

9. **Oelfarbenanstriche** sind als Rostschutzmittel am gebräuchlichsten. Leinölfirnis allein blättert leicht ab; besser ist als Grundierung dünnflüssiger, rasch trocknender Leinölfirnis, gemischt mit gut deckenden Farbstoffen, wie Graphit, Ocker, Eisenmennige (mit höchstens 20 vH Ton), am besten aber mit Bleimennige ($Pb_3 O_4$) angerieben. Unter Wasser hat sich nur Bleimennige bewährt.

Nach dem Grundieren folgt der eigentliche Anstrich, wozu reiner Leinölfirnis mit Bleiweifs — nicht Zinkweifs —, Graphit und Zinkstaub, auch unter Kreidezusatz, den besten Schutz gibt. Zur Verhütung von Blasenbildung soll der möglichst dünnflüssige Anstrich erst nach dem völligen Erhärten der unteren Schichten aufgetragen werden.

Für Oelfarbenanstriche gelten folgende Erfahrungssätze*):

Säuren. Jeder Oelanstrich wird von verdünnter Salzsäure und Salpetersäure, von gasförmiger Salzsäure, Salpetersäure, schwefliger Säure und von Essigsäure zerstört, wobei gasförmige Säuren rascher wirken als die Säuren in verdünnter wässeriger Lösung. — Verdünnte Schwefelsäure greift einen Oelanstrich nicht an.

Aetzende Alkalien, alkalische Flüssigkeiten und Gase, Ammoniak, Schwefelammonium, Sodalösung zerstören jeden Oelanstrich rasch. Alte Oelanstriche lassen sich durch ätzende Alkalien sehr schnell abbeizen und beseitigen.

Reines Wasser wirkt viel stärker zerstörend als Seewasser und als die sonst als Rosterzeuger gefürchteten Lösungen von Kochsalz, Salmiak und Chlormagnesium; der Salzgehalt vermindert die Einwirkung des Wassers auf Oelfarben. Die beobachteten zerstörenden Wirkungen des Seewassers müssen der mechanischen Einwirkung des bewegten Wassers auf die Farbdecke zugeschrieben werden. — Heifses Wasser wirkt viel schneller zerstörend als kaltes.

*) Vrgl. J. Spennrath, Untersuchung der gebräuchlichen Eisenanstriche, Z. d. V. d. I. 1895 S. 1334. Z. d. B. 1900 S. 133.

Die durch Wasser ausziehbaren Bestandteile der Steinkohlenasche wirken infolge ihrer alkalischen Beschaffenheit zerstörend auf Oelanstriche; die aus den Schornsteinen mitgerissene feine Asche, die sich auf gestrichenen Flächen ansetzt, ist daher den Anstrichen sehr gefährlich.

Alle Anstriche verlieren in der Wärme an Gewicht und ziehen sich zusammen; dadurch werden sie spröde und erhalten Risse, in die der Regen eindringt. Je geringer das spez. Gew. des Farbkörpers ist, desto haltbarer gegenüber der Wärmewirkung ist der Anstrich.

Aus allem folgt, dafs es gegen schädliche Einflüsse, die das Bindemittel des Anstriches, das Leinöl angreifen, keinen wirksamen Schutz gibt.

Anstrichmittel, die sich bewährt haben sollen, sind: Bessemerfarben von Rosenzweig & Baumann (Kassel); Schuppenpanzerfarbe von Dr. Graf & Co. (Berlin); Siderosthen-Lubrose von der A.-G. für Asphaltierung und Dachbedeckung, vormals Johannes Jeserich (Hamburg); Zoncafarbe (Würzburg).

10. **Schiffsbodenfarben.** Um die eisernen Schiffsböden aufser gegen das Rosten auch gegen das Ansetzen von Tieren zu schützen, müssen die Anstriche auch giftige Stoffe (Quecksilberoxyd u. a.) enthalten, wie z. B. die Farben von Joh. Rahtjen (Hamburg).

Reinigung und Anstrich von Eisenkonstruktionen.

(Auszug aus dem § 7 der auf S. 549 unter II. erwähnten „Normalbedingungen")

Reinigung. Die einzelnen Teile sind vor dem Zusammensetzen von allen Unreinheiten sowie von Rost und Hammerschlag zu befreien. Der Unternehmer ist gehalten, die von ihm beabsichtigte Reinigungsweise in dem Angebote anzugeben, falls (in den besonderen Bedingungen) nicht ein bestimmtes Verfahren vorgeschrieben ist, oder der Unternehmer von der Vorschrift abzuweichen wünscht.

Falls die Reinigung auf chemischem Wege stattfindet, ist der Unternehmer für das etwaige Nachrosten infolge nicht genügend sorgfältiger Entfernung der Säure verantwortlich. Die auf chemischem Wege gereinigten Stücke (Platten, Stäbe usw.) sind unmittelbar nach der Reiniguug in heifsem Zustande mit einem Anstriche von Leinölfirnis zu versehen. Der Firnis mufs dünnflüssig und schnell trocknend sein. Bis der Leinölfirnis genügend angetrocknet ist, sind die gestrichenen Eisenteile in geeigneter Weise unter Schutz zu halten.

Anstrich. Bevor ein deckender Anstrich aufgebracht wird, ist dem Besteller entsprechende Mitteilung zu machen, damit er die Eisenteile vorher prüfen kann. Erst nach Erledigung der bei dieser vorläufigen Abnahme für erforderlich erachteten Nacharbeiten und nach Erneuerung des etwa beschädigten Leinölfirnis-Anstriches darf die Grundierung der Teile mit dem (in den besonderen Bedingungen) vorgeschriebenen Grundanstriche erfolgen. Die Flächen, die durch andere verdeckt werden, sind vor der Zusammensetzung zu streichen.

Nach erfolgter Aufstellung der Eisenkonstruktion sind die Köpfe der auf der Baustelle eingeschlagenen Niete von Rost zu reinigen und zu grundieren. Sämtliche Fugen sind sorgfältig zu verkitten.

In allen zwischen den Konstruktionsteilen bleibenden freien Räumen, in denen sich Wasser ansammeln kann, mufs für besonders sorgfältigen Anstrich sowie für den Abflufs des Wassers durch entsprechend gebohrte Löcher Sorge getragen werden. Ist letzteres nicht angängig, so ist der Raum, soweit tunlich, mit Asphaltkitt oder einem anderen geeigneten Stoff (z. B. Portland-Zement) auszufüllen.

B. Zink.

Meist aus Zinkspat (Galmei) gewonnen, kommt als (schlesisches oder belgisches) Zinkblech und Schmelzzink in den Handel. Bruch kristallinisch, körnig oder blätterig, bläulichweifs. Spez. Gew. s. S. 512 und 517. Zwischen 100 bis 150° geschmeidig und zu verarbeiten, sonst spröde; Schmelzpunkt (vor dem Glühen) bei 412°; füllt, weil sehr dünnflüssig, die Formen gut aus. Erfährt durch Erwärmung eine bedeutende Ausdehnung (Ausdehnungszahl $\alpha \sim 0{,}00003$ für 1°), was bei Verwendung von Zinkblechen besonders zu berücksichtigen ist. Feuchte

Luft erzeugt auf ihm eine dünne, fest haftende, schützende Schicht von halbkohlensaurem Zinkoxyd (in 25 Jahren etwa 0,02 mm stark). Verunreinigungen des Handelzinks: Blei und Cadmium. Bei hellroter Glühhitze verdampft das Zink und verbrennt bei Luftzutritt mit bläulicher Flamme zu Zinkoxyd (Zinkweifs).

1. Glattes Zinkblech, in 26 Stärken nach einer Lehre gewalzt, wird benutzt zu Dacheindeckungen, Dachrinnen und Abfallrohren (Nr. 13 bis 15), Fenster- und Gesimsabdeckungen, Kehlblechen, architektonischen Verzierungen, Badewannen usw. Für Bauzwecke meist in den Stärken Nr. 12 bis 16; leicht und billig, wetterbeständig, durch Silikat-Anstrich oder galvanische Verkupferungen zu schützen.

Bei 16° ist längs der Faser $K_z = 1900$, quer $K_z = 2500$ kg/qcm; dabei die Dehnung $\varphi = 18$ bezw. 15 vH. Bei 155° ist φ am gröfsten; längs 100 vH, quer 80 vH; die Längsdehnung fällt von 155° ab bis zu 100° bzw. 175° auf $\varphi = 40$ vH und gleichzeitig die Querdehnung auf $\varphi = 20$ bezw. 26 vH.

Zu Leisten-Dachdeckungen werden meist Blechtafeln von 1,0 . 2,0 m benutzt; jedoch sind auch Tafeln 0,65 . 2,0 m, 0,8 . 2,0 m, 1,0 . 2,25 m, 1,0 . 2,5 m zu beziehen. Gröfste Länge 3,0 m, gröfste Breite 1,65 m.

Schlesische Zinkblechlehre.

Nr. der Lehre .	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
Dicke in mm . .	0,10	0,143	0,186	0,228	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,58	0,66	0,74
1 qm wiegt kg .	0,72	1,03	1,34	1,64	1,80	2,16	2,52	2,88	3,24	3,60	4,18	4,75	5,33
Nr. der Lehre .	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
Dicke in mm . .	0,82	0,95	1,08	1,21	1,34	1,47	1,60	1,78	1,96	2,14	2,32	2,50	2,68
1 qm wiegt kg .	5,90	6,84	7,78	8,71	9,65	10,6	11,5	12,8	14,1	15,4	16,7	18,0	19,3

Bemerkung. Die **belgische Lehre** hat für die Nrn. 1 bis 4 die Dicken 0,05, 0,10, 0,15 und 0,20 mm, so dafs also 1 qm hierbei wiegt 0,36, 0,72, 1,08 und 1,44 kg; die belgische stimmt mit der schlesischen Lehre in den übrigen Nrn. überein.

2. Zinkwellblech für Dachdeckungen, von der Schlesischen A.-G. für Bergbau und Zinkhüttenbetrieb (Lipine in Oberschlesien) in den nachstehenden fünf Profilen geliefert, wovon A bis D in Dicken bis Nr. 16 und E bis Nr. 12. Profil E nur auf Schalung oder Lattung, im Längsstofse Ueberdeckung mit zwei Wellen. Bei den übrigen Profilen ist für Ueberdeckung im Seiten- und Längsstofse einschl. Befestigung auf den Fetten 15 bis 18 vH Gewichtzuschlag zu rechnen.

Vorkommende Tafelgröfsen (gewellt) für A: 0,62 . 2,0 m, 0,89 . 3,0 m, 1,12 . 3,0 m; für B: 0,84 . 2,0 m, 1,08 . 3,0 m, 1,30 . 3,0 m; für C: 0,8 . 3,0 m; für D: 1,0 . 1,78 m, 1,5 . 2,67 m; für E: 1,6 . 2,64 m. Hierbei sind A, B und C der Länge, D und E der Breite nach gewellt. Profil A auch gebogen (bombiert) nach Halbmessern von 1,5 m und darüber für gewölbte Dächer (Fettenteilung bis 2,0 m). — Weiteres über Zinkblechdächer s. Abteil. III, Abschn. Hochbau.

Schlesische Zinkwellbleche.

Profil-Nr.	Wellen- Breite B mm	Wellen- Höhe H mm	Querschnitt für 1 m Tafelbreite (und für 1 mm Blechstärke) qcm	Gewicht f. 1 qm Wellblech (und für 1 mm Blechstärke) kg	Widerstandsmoment f. 1 m Tafelbreite (und für 1 mm Blechstärke) cm³	Bemerkung
A	117	55	15,12	10,9	20,9	Die Querschnitte, Gewichte und Widerstandsmomente für kleinere und gröfsere Blechdicken als 1 mm erhält man (annähernd) durch Multiplikation mit der betreffenden Blechdicke in mm.
B	100	32	12,54	9,03	10,4	
C	110	32	12,12	8,73	10,0	
D	60	14	11,39	8,20	4,2	
E	20	6	12,25	8,82	1,9	

3. Schmelzzink, meist in kleinen 4 cm starken Platten, zum Verzinken von Eisenblech und Eisendraht, ferner für Metallegierungen (s. S. 576), Zinkgufswaren, galvanische Elemente usw. Längen-Schwindmafs = $^1/_{62}$ (s. S. 298); Gewichtsbestimmung von Gufsstücken s. 5. Abschn. Eisenhüttenkunde. Zinkgufswaren sind durch Anstrich oder galvanischen Metallüberzug (z. B. Kupfer) gegen atmosphärische Einflüsse zu schützen.

C. Kupfer.

Rösten und reduzierendes Schmelzen der meist schwefelhaltigen Kupfererze liefert das unreine, spröde Roh- (Schwarz-) Kupfer, das, einem oxydierenden Schmelzverfahren in Herden oder in Schacht- oder Flammöfen unterworfen, dann als Rosettenkupfer (dünne Scheiben) und Schmelzkupfer (Blöcke von 5 bis 6 kg) in den Handel gelangt und in den Kupferwerken durch nochmaliges Reinigen hammergar gemacht wird. Schmelzpunkt 1054°. Spez. Gew. s. S. 511 und 517. Festigkeitsangaben für Kupfer und Kupferlegierungen s. S. 397 u. f.

Je reiner, desto weicher und dehnbarer, sowohl kalt wie in Glühhitze; Verunreinigung durch Blei, Arsen, Wismut, Zink, Nickel, Silber. Geringe Mengen Wismut (schon 0,1 vH) machen das Kupfer brüchig; Arsengehalt bis 0,5 vH erhöht seine Festigkeit. Durch Walzen und Hämmern wird es hart, durch Ausglühen (Art der Abkühlung ohne Einflufs) wieder weich; nicht schweifsbar, zu Gufswaren ungeeignet, weil es blasige Güsse liefert. Grofse Leistungsfähigkeit für Wärme und Elektrizität (vrgl. Abteil. II, Abschn. Elektrotechnik).

Für reines Kupfer (elektrolytisch gewonnen, gehämmert, gewalzt und langsam erkaltet) ist die Zugfestigkeit $K_z = 2100$ kg/qcm bei 15 bis 150°. Mit steigender Temperatur nimmt die Zugfestigkeit allmählich ab, s. S. 398. Bruchdehnung $\varphi = 37$ bis 15 vH bei 15 bis 470°; Bruch: sehnig, bei zunehmender Erwärmung in kerniges Gefüge übergehend.*) Aus Kupfer werden gefertigt Draht, Blech, Stangen und Rohre, es wird benutzt zu Legierungen und Farben.

*) Vrgl. Rudeloff, Roberts-Austens Untersuchungen über die Eigenschaften von Legierungen, Z. d. V. d. I. 1894 S. 766.

1. Kupferdraht. Gewichte s. S. 516 und Abteil. II, Abschn. Elektrotechnik. Festigkeit s. S. 403. $K_z = 3300$ kg/qcm für elektrolytisch reinen Kupferdraht; bei 0,351 vH und 0,808 vH Arsengehalt $K_z = 5100$ bezw. 4700 kg/qcm, bei 0,26 vH und 0,529 vH Antimongehalt $K_z = 5200$ bezw. 5500 kg/qcm.*) Wird meist bezogen, wie er aus dem letzten Zuge hervorgegangen ist, also ungeglüht und blank, in grofsen mit Kupferdraht abgebundenen Ringen (Bunde und Adern). Verzinnter Kupferdraht für Telephonleitungen. — Kupferdraht mufs sehr biegsam und glatt sein und gleichmäfsigen, kreisförmigen Querschnitt haben.

2. Kupferbleche. Gewichte s. S. 517. Gutes Kupferblech mufs eine reine, glatte Oberfläche haben, sehr biegsam und im Bruche gleichmäfsig sein; bei mehr als 5 mm Dicke sei $K_z \geq 2000$ bis 2300 kg/qcm, $\varphi \geq 38$ vH. Benutzt zu Dachdeckungen (Tafeln hierzu in Gröfsen von 0,8 bis 2 qm bei höchstens 1 m Breite und 0,5 bis 1 mm Dicke), zu Dachrinnen, Abfallrohren, getriebenen Bildwerken, zu Schiffsbekleidungen (Tafeln 1,9 bis 2,5 m lang, 0,8 m breit), zu Geschirren, Pfannen, zu Kesselblechen usw.

Dünnere Bleche werden gewalzt, in Breiten bis 2,4 m und Längen bis zu 10 m. Lagerbleche: 1,0 . 2,0 m bei 0,75 bis 1 mm Stärke, 1,0 . 3,0 m bei 1 bis 2 mm Stärke, 1,0 . 4,0 m bei 2 mm Stärke und mehr. Dicke Platten, z. B. Feuerbüchsenbleche (1,0 bis 2,4 m breit, 2 bis 4 m lang und bis 26 mm stark) werden gehämmert.

3. Stangenkupfer wird aus kleinen Blöcken gehämmert, gewalzt oder wie Draht gezogen; es mufs sich stauchen und biegen lassen, ohne rissig zu werden. $K_z > 2300$ kg/qcm bei 60 vH Zusammenziehung des ursprünglichen Querschnitts. Man unterscheidet Quadrat- und Rundkupfer; Quadratkupfer unter 2,25 qcm Querschnitt und Rundkupfer unter 1,5 cm Durchmesser gelten noch als Kupferdraht.

4. Kupferrohre entweder nahtlos gewalzt (Patent Mannesmann, s. Tafel im 6. Abschn., Maschinenteile, unter „Rohre") oder aus einem Stück ohne Naht gezogen oder aus Blechstreifen durch Zusammenbiegen über eine Rundeisenstange, Zusammenlöten mit Schlaglot und nachherigem Ziehen hergestellt. Kupferrohre sollen sich um einen Dorn von der dreifachen Dicke des Rohrdurchmessers kreisförmig biegen lassen, ohne Brüche oder Risse zu zeigen. Kupferne Knie- und Federrohre, kupferne **T**-Stücke, sowie näheres über Kupferrohre s. im 6. Abschn., Maschinenteile, unter „Rohre".

D. Blei.

Meist aus Bleiglanz (Schwefelblei) als Werkblei gewonnen, das raffiniert das Kaufblei liefert. Spez. Gew. zwischen 11,25 und 11,37, wenn nicht allzusehr verunreinigt. Blei schmilzt bei 326°, ist giefsbar, sehr dehnbar und biegsam, wetterbeständig, läfst sich leicht schneiden und verdampft bei Rotglühhitze. Festigkeit s. S. 399 u. 403.

---

*) Vrgl. Hampe, Chemiker-Ztg. 1892 S. 726.

Zu Blechen ausgewalzt,*) dient es im Hochbau zu Dachdeckungen (aufgerollte Tafeln, 0,80 und 1,00 m breit, 10 bis 15 m lang, 1,5 bis 2,0 mm stark), zum Bekleiden feuchter Wände, als Trockenschicht usw. ferner wird es zum Dichten von Rohrmuffen, zu Bleikammern, Pfannen und Kesseln bei technisch-chemischen Arbeiten mit Säuren benutzt. Auch findet Blei zu Legierungen, zum Pressen von Rohren für Gas-, Dampf- und Wasserleitungszwecke, für elektrische Akkumulatoren, als Bleifolie (sehr dünne Platten) zum Einwickeln von Gegenständen, zu Draht, zum Befestigen von Metallen an Stein, zu Farben (Bleiweifs, Bleimennige, Bleiglätte), in der Glasfabrikation, zu Sprossen in der Kunstverglasung (Kirchenfenster usw.) Verwendung.

Hartblei ist Blei mit Antimonzusatz, zu Lagerschalen, Schriftmetall, Bleirohren, zum Untergiefsen der Auflagerplatten von Eisenkonstruktionen (Blei mit 5 bis 10 vH Antimon) usw. benutzt. Bleirohre sind zum Schutze gegen die Einwirkung von Wasser innen mit einem Ueberzuge von Schwefelblei (durch Schwefelnatrium) oder Zinn zu versehen. — Rohre aus Hart- und Weichblei s. 6. Abschn., Maschinenteile, unter „Rohre".

Bleidraht.

Handelsbureau der königl. sächsischen Hüttenwerke in Freiberg.

Dicke mm	Gewicht von 100 m kg	Dicke mm	Gewicht von 100 m kg	Dicke mm	Gewicht von 100 m kg	Dicke mm	Gewicht von 100 m kg
1,0	0,9	3,5	10,9	6	32,2	11	107,5
1,5	2,0	4,0	14,2	7	43,5	12	128,0
2,0	3,6	4,5	18,0	8	57,0	13	150,0
2,5	5,6	5,0	22,2	9	72,5	14	174,0
3,0	8,0	5,5	26,8	10	89,0	15	200,0

Bemerkung. Draht aus Weichblei ist aufser in den vorstehenden Sorten auch noch in jeder anderen gewünschten Stärke über 0,5 mm, u. zw. rund oder mit anderem Profil, erhältlich.

E. Zinn.

Meist aus Zinnstein gewonnen. Spez. Gew. s. S. 512; Schmelzpunkt bei 230°, $K_z = 350$ kg/qcm. Zinn ist weich und geschmeidig, sehr dehnbar, härter als Blei, mit kristallinischem Gefüge (Schreien des Zinns). In Stärken von 0,2 bis 0,008 mm ausgewalzt und gehämmert, heifst es Zinnfolie oder Stanniol; es werden hierbei gleichzeitig mehrere aufeinander liegende Blechlagen verwalzt, die durch Petroleumschichten getrennt erhalten werden.

*) Handelsbureau der königl. sächsischen Hüttenwerke in Freiberg: **Bleiblech** in Stärken von 0,5 bis 12 mm, Längen von 3,0 bis 10 m und Breiten von 1,5 bis 3,0 m ist käuflich; dabei das gröfste Plattengewicht 1200 kg.

Gutes Zinn mufs frei von verunreinigenden Beimengungen (Arsen, Blei, Eisen, Kupfer, Wismut) sein und an der Luft seine glänzende Oberfläche behalten. Kommt in Form von Blöcken (60 kg), Stangen, Rollen (5 bis 6 kg schwer) und Körnern, u. zw. nach Ursprungsländern bezeichnet, als Banka-, Billiton-, Malakka-, australisches und englisches (Lamm-) Zinn in den Handel; ersteres ist das beste und sehr rein. Böhmisches, sächsisches und peruanisches Zinn sind unreine Sorten. Benutzt zum Verzinnen von Eisenblech (s. S. 544 und 569), zu Legierungen und Weichloten, zu Rohren usw.

F. Metallegierungen.*)

Die Zusammensetzung der Legierungen ist im folgenden überall nach Gewichtsteilen (G.-T.) angegeben. — Festigkeitszahlen für Metallegierungen s. S. 397 u. f.

1. Messing (Gelbgufs) nennt man Legierungen aus Kupfer und Zink. Stolberger Messing: 64,8 Kupfer, 32,8 Zink, dazu 2,0 Blei und 0,4 Zinn. Englisches Messing: 66,7 Kupfer, 33,3 Zink. Messing ist härter als Kupfer und sehr dehnbar. Härte und Festigkeit nehmen mit dem Zinkgehalte zu, erstere bis zu etwa 50 vH, letztere bis zu etwa 45 vH Zinkgehalt, darüber wieder Abnahme. Für die Praxis empfiehlt sich ein Zinkgehalt von 30 bis 43 vH. Die Dehnbarkeit wächst mit dem Kupfergehalte. — Durchschnittlich ist $K_z = 1500$ kg/qcm.

Messing ist in der Rotglühhitze spröde, läfst sich kalt wie Kupfer bearbeiten und zu den dünnsten Blechen kalt auswalzen (Gewichte s. S. 517). Blech kommt schwarz, gebeizt, ein- und zweiseitig geschabt und poliert in den Handel. Tafeln meist 0,5 . 2,0 m grofs in 0,1 bis 10 mm Stärke. Messingdraht (Gewichte s. S. 516) geglüht und ungeglüht; Festigkeit s. S. 403. — Messing liefert, weil dünnflüssig, glatten, blasenfreien Gufs (oft mit 1 bis 2 vH Bleizusatz), der leicht zu bearbeiten ist. Ueber Messingrohre s. 6. Abschn., Maschinenteile, unter „Rohre".

Aehnlich dem Messing sind **Tombak** (85 Kupfer, 15 Zink) von rötlicher Farbe und **Weifsmessing** mit 50 bis 80 vH Zink, gelblich weifs.

2. Bronze (Rotgufs) heifsen Legierungen aus Kupfer und Zinn; dichter, härter, leichtflüssiger als Kupfer. Für Lagerschalen geeignet: 83 Kupfer und 17 Zinn bzw. 82 Kupfer, 16 Zinn und 2 Zink. Härte wächst bis zu 28 vH Zinn, nimmt dann wieder ab; Festigkeit am gröfsten bei 17,5 vH Zinn. Bronze mit < 5 vH Zinn läfst sich kalt strecken. Bleizusatz erhöht die Sprödigkeit, vermindert die Festigkeit und erniedrigt den Schmelzpunkt; Zinkzusatz vermindert Festigkeit und Härte. Festigkeit bei höherer Temperatur s. S. 398.

---

*) Ueber Nickel-Eisen-Legierungen s. Verhandl. d. V. z. Beförd. d. Gewerbfl. 1896 S. 65 u. f.; vrgl. auch Z. d. V. d. I. 1896 S. 331. — Ueber die zur Verminderung der Reibung dienenden Metallegierungen s. Z. d. V. d. I. 1898 S. 1300, 1330, 1350 u. f.

Bronze mit 0,5 bis 1 vH Phosphorzusatz (je nach dem Verwendungszwecke) heifst **Phosphorbronze**, ist sehr zäh, fest, feinkörnig und dünnflüssig, walz-, zieh- und schmiedbar. Zu Maschinenteilen: 90,34 Kupfer, 8,90 Zinn und 0,76 Phosphor. Phosphorbronze dient für Achslager und -büchsen, Dampfschieber, Zahnräder, Prefszylinder und Armaturen; auch wird sie zu Rundstangen, Rohren ohne Naht (weich und federhart), Blech und Telephondraht (ungeglüht $K_z = 14000$ kg/qcm bei $\varphi = 1$ vH, geglüht $K_z = 6300$ kg/qcm bei $\varphi = 72$ vH) benutzt.

Glockenmetall enthält bis 25 vH Zinn, ist rötlich-grau, sehr spröde, läfst sich schwer bearbeiten. — **Geschützbronze** enthält bis 10 vH Zinn, ist gelblich-rot, wenig dehnbar, ziemlich hart und sehr fest. Zu Geschützrohren, Dampfventilen, Dampfhähnen und zu den meisten Bronzegufswaren benutzt. Wird durch schnelles Abkühlen weich, bei langsamem Abkühlen hart und spröde.

Statuenbronze enthält noch Zusätze von Zink und Blei, füllt die Gufsformen gut aus und überzieht sich allmählich unter der Einwirkung der feuchten, kohlensäurehaltigen Luft mit sogen. Patina (halbkohlensaurem Kupferoxyd), dem grünen, blauen, braungrünen Edelrost. Statuenbronze ist in der Zusammensetzung sehr schwankend. Soll im Freien leicht Patina erzeugt werden, so mufs die Bronze zinkfrei sein (90 bis 95 vH Kupfer und 10 bis 5 vH Zinn). Statuenbronze nach Elster: 86,7 Kupfer, 6,7 Zinn, 3,3 Blei und 3,3 Zink. Künstlich erzeugte Patina ist wenig dauerhaft. — **Medaillenbronze** mit nur 2 vH Zinn.

Telegraphen- und Telephondraht aus Bronze
von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein).

Drahtstärke in mm	4,5	4,0	3,0	2,7	2,5	2,2	2,0	1,8	1,5	1,2	1,0	0,9
Gewicht v. 1000 m Draht in kg	143	113	63	51	44	34	28	23	18	10	7,0	4,5

Bronzedraht für grofse Entfernungen mit 60 bis 98 vH der Leitungsfähigkeit des Kupfers und

$K_z = 6800$ bis 4600 kg/qcm bei 3,0 mm Stärke,
$K_z = 7100$ „ 4800 „ „ 0,9 „ „

Siliziumbronzedraht für Stadtleitungen mit 30 bis 40 vH der Leitungsfähigkeit des Kupfers und

$K_z = 7800$ bis 6500 kg/qcm bei 3,0 mm Stärke,
$K_z = 8500$ „ 8000 „ „ 0,9 „ „

Siliziumbronzedraht wird als Seele für Tiefseekabel benutzt.

Doppelbronzedraht, aus einer Aluminiumbronzeseele mit Kupferumhüllung bestehend, mit $K_z = 7600$ kg/qcm und 69 vH der Leitungsfähigkeit des Kupfers.*)

Compounddraht, aus einer Stahlseele mit Bronzeumhüllung bestehend; bei einem 3 mm starken Drahte ist der Querschnitt der Seele 2,87 qmm, der der Hülle 4,20 qmm.

Bei der Zerreifsprobe (bei 10 bis 15° Temperatur) sei für den 1,5 mm starken Draht $\varphi \gtreqless 1$ vH, für die übrigen Drähte $\varphi \gtreqless 1,5$ vH. — Weiteres über die Ausführung der Proben wie auf S. 559 (oben unter 2.). Ueber den zulässigen Leitungswiderstand s. Abteil. II, Abschn. Elektrotechnik.

Die Deutsche Reichs-Post- und Telegraphen-Verwaltung verlangt für Bronzedraht zu Telephonleitungen folgendes:

*) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1892 S. 1319.

Für Draht von	4,5	4	3	2	1,5	mm Durchmesser
sei K_z mindestens . . .	5000	5100	5260	5260	7000	kg/qcm;
der Draht soll aushalten .	6	7	7	7	11	Biegungen
bei Klemmbacken von	10			5		mm Halbmesser.

3. Weifsmetall (Weifsgufs, Komposition), zinnreiche Legierungen mit Antimon, Blei oder Kupfer. (Antifriktionsmetall enthält alle vier Metalle, aufserdem Zink.) Weifsmetall für Lagerschalen: 85 Sn (Zinn), 10 Sb (Antimon) und 5 Cu (Kupfer) bzw. 90 Sn, 7 Sb und 3 Cu; für Lokomotiv- und Tender-Achslagerfutter: 78,4 Sn, 12,6 Sb und 9 Cu bzw. 15 Sn, 2 Sb und 1 Cu; für Exzenter: 83 Sn, 11 Sb und 6 Cu; für Stopfbüchsen: 45 Sn, 10 Sb und 45 Pb (Blei). Antimonblei (Bleikomposition): 75 bis 85 Pb und 25 bis 15 Sb, sehr hartes und billiges Lagermetall.

4. Deltametall, Legierungen aus Kupfer, Zink und Eisen, goldgelb, von grofser Festigkeit und Dehnung, in Rotglut schmiedbar. Gegossen, durchaus dicht und für hohen Druck sehr geeignet. Gegen Seewasser und saure Grubenwässer vollständig widerstandsfähig, daher vielseitige Verwendung im Schiffbau und Bergbau, zu Pumpenkörpern, Flügelrädern für Kreiselpumpen, zu Kolbenstangen, Spindeln, Ventilen usw. Wird geliefert in Barren, Blechen, Stangen, Gufs-, Schmiede- und Stanzstücken von der Deutschen Delta-Metall-Gesellschaft, Alexander Dick & Co. (Düsseldorf-Grafenberg).

5. Duranametall, eine vollkommen homogene Kupfer-Zink-Eisen-Legierung (Dürener Metallwerke A.-G.) von ausgezeichneter Festigkeit und Widerstandsfähigkeit, läfst sich ebensogut warm schmieden und walzen als giefsen und findet die vielseitigste Verwendung im Schiffbau, Maschinen- und Pumpenbau, Lokomotiv- und Automobilbau u. a. Ueber Festigkeit usw. siehe I, S. 399.

6. Lote. Vor dem Löten sind die zu verbindenden Stellen durch Feilen oder Aetzen metallisch rein zu machen und alsdann (zu ihrer Reinerhaltung in der Löthitze) beim Weichlöten mit Kolophonium, Stearin oder Salmiak, beim Hartlöten mit Borax zu bestreichen bzw. mit Glaspulver zu bestreuen. Zum Aetzen dient Salzsäure oder Lötwasser (Zink in Salzsäure aufgelöst) oder Lötsalz (eingedampftes Lötwasser mit Salmiak) oder fein gepulvertes Kolophonium, mit konzentriertem Ammoniak angerührt.

1. **Weichlot** (Schnellot) aus Zinn und Blei, dazu auch wohl Wismut (Wismutlote). Spez. Gew. 8,1 bis 9,7.

Wismutlote für leicht schmelzbares, bleihaltiges Zinn; in Gewichtsteilen	15,5	Zinn	32	Blei	52,5	Wismut;	der	Schmelzpunkt	liegt	bei			96°
	20	„	26	„	54	„	„	„	„	„			101°
	20,6	„	26,8	„	52,6	„	„	„	„	„			103°
	21,4	„	27,8	„	50,8	„	„	„	„	„			107°
	24,8	„	22,1	„	53,1	„	„	„	„	„			114°
	20	„	20	„	60	„	„	„	„	„			121°
	15	„	25	„	60	„	„	„	„	„			125°

Weichlote für verzinntes Eisenblech, Kupfer, Messing, Zinn, Zink, Blei usw.; in Gewichtsteilen	63,2	Zinn	36,8	Blei;	der	Schmelzpunkt	liegt	bei		183°
	60	„	40	„	„	„	„	„		189°
	70	„	30	„	„	„	„	„		194°
	85	„	15	„	„	„	„	„		212°
	50	„	50	„	„	„	„	„		213°
	40,2	„	59,8	„	„	„	„	„		232°
	30	„	70	„	„	„	„	„		257°.

2. Hartlot (Strenglot, Schlaglot)

zum Löten von Messing, Kupfer, Eisen und Stahl.

Gehalt in G.-T. an: Zinn	Zink	Messing	Kupfer	Bemerkungen
.	1	7	.	sehr strengflüssig } gelb
.	1	3—4	.	strengflüssig } gelb
.	1	2—2,5	.	bes. für Messing } gelb
1	4—7	12	.	} halbweifs
1	10	22	.	} halbweifs
4	1	20	.	} weifs
2	1	11	.	} weifs
1	.	4	.	} weifs
10	.	4	6	} weifs

7. Sonstige Metallegierungen.

Bezeichnung	Gehalt in G.-T. an: Kupfer	Zinn	Zink	Antimon	Dazu noch G.-T.:
Letternmetall . .	.	.	.	16 bis 25	84 bis 75 Blei; (auch mit 5 bis 15 vH Alum.-Zusatz).
Letternmetall von Ehrhardt . . .	4 bis 2	4 bis 3	89 bis 93	.	3 bis 2 Blei.
Hartes Typenmetall von Johnson {	.	59	33	.	
	.	75	.	25	
	.	.	.	20	80 Blei.
Britanniametall . {	1,85	81,9	.	16,25	
	.	90	.	10	
Neusilber (Packfong, Argentan) {	50 bis 65	.	30 bis 20	.	20 bis 15 Nickel.
	55	.	25	.	20 „ .
Alfénide	59	.	30	.	10 „ .
Aluminiumbronze .	85 bis 95	.	.	.	15 bis 5 Alum.
Aluminiummessing	96,7	.	.	.	3,3 „ .

Magnalium, Legierungen aus 77 bis 98 vH Aluminium (Al) und 23 bis 2 vH Magnesium (Mg). Die Legierung von 100 Al mit 10 Mg besitzt etwa die mechanischen Eigenschaften des gewalzten Zinks, die mit 15 Mg des Messings, die mit 20 Mg weicher Bronze und die mit 25 Mg gewöhnlicher Bronze. Festigkeitsangaben s. S. 399.

Spiegelamalgam: 1 Zinn, 1 Blei und 2 Wismut werden zusammengeschmolzen (Schmelzpunkt bei 110°) und hierzu 4 Quecksilber (bis auf 100° vorgewärmt) zugefügt.

Leicht schmelzbare Legierungen.

Roses Metall: 1 Zinn, 1 Blei, 2 Wismut (Schmelzpunkt bei 110°).
Clichélegierung: 2 Zinn, 2 Blei, 5 Wismut (Schmelzpunkt bei 105°).
Wood-Metall: 4 Zinn, 8 Blei, 15 Wismut, 4 Kadmium (Schmelzpunkt bei 70°). **Lipowitz-Metall:** 4 Zinn, 8 Blei, 15 Wismut, 3 Kadmium (Schmelzpunkt bei 60°).

III. NATÜRLICHE STEINE UND ERDEN.*)

Mineralogische Härteskala (nach Mohs): 1. Talk, 2. Gips (oder Steinsalz), 3. Kalkspat, 4. Flufsspat, 5. Apatit, 6. Feldspat, 7. Quarz, 8. Topas, 9. Korund (Schmirgel), 10. Diamant.

Ueber Druckfestigkeit und zulässige Druckspannung natürlicher Steine s. S. 401 und 407. — Spezifische Gewichte s. S. 509 u. f.

1. **Granit** (Feldspat, Quarz und Glimmer); kristallin-körnig. Feldspat bestimmt die Farbe: gelbgrau, grau bis schwärzlich, fleischfarben, rot bis braun, auch grün, Quarz wesentlich die Härte.

2. **Syenit** (Feldspat und Hornblende); kristallin-körnig. Schwarz und weifs gesprenkelt. Der **Augitsyenit** („Labrador") von Norwegen, besonders hart und polierbar.

3. **Diorit** (Feldspat, Hornblende und zufälliger Schwefelkies). Meist grün-weifs oder dunkelgrün: Grünstein.

4. **Diabas** (Feldspat mit Augit). Schwärzlich bis grün, daher auch Grünstein genannt.

5. **Gabbro** (Labrador oder Saufsurit mit Diallag). Dunkelgrau und grün. Geht, wie auch 3. und 4., vielfach als Granit.

6. **Serpentin** (wahrscheinlich durch Umwandlung aus Gabbro entstanden). Meist grün. Nicht haltbar im Freien. — Verwandt sind der dauerhafte nordische **Saponit** sowie der **Speckstein** und der immer mehr angewendete **Asbest.**

7. **Porphyrgesteine** (dichte und feinkörnige kristalline Grundmasse aus Feldspat und Quarz, in die deutliche Kristalle von Feldspat, zuweilen von Quarz, Hornblende, Augit usw. eingesprengt sind). Hauptsächlich: **Felsitporphyr,** rötlichbraun, gelblich, grau, grünlich oder bläulich und **Melaphyr,** meist schwärzlich von Augit.

8. **Trachytgesteine** (dichte, häufig porige Grundmasse von Feldspat mit Einsprengungen von Hornblendekristallen, schwarzem Glimmer, Magneteisen, auch Sanidin). Grau. Dazu gehörend: **Bimsstein, Obsidian, Phonolit** usw.

9. **Augitgesteine.** Darunter: **Basalt,** erstarrter Ausflufs aus Vulkanen (scheinbar gleichartiges Gestein aus Augit, Feldspat, Magneteisen u. a.), dunkelgrau bis schwarz, oft in prismatischen Säulen: **Säulenbasalt,** der dauerbarste und druckfesteste Baustein, für Strafsenbau, Ufer- und Stützmauern. **Basaltlava,** vielfach poriges Gestein, in Farbe und Härte sehr verschieden. Für Treppen, Sockel, als Pflaster- und Mühlstein. **Anamesit** und **Dolerit** sind fein- bis grobkörnige Basalte.

10. **Gneis** (schiefrige Ausbildung des Granites). Mehr als Granit der Verwitterung ausgesetzt, besonders der feldspat- und glimmerreiche.

11. **Quarzit** (reiner oder nahezu reiner Quarz). Kristallin bis glasartig. Löcherig zu Mühlsteinen. Zur Glasfabrikation. Als Stein-

---

*) Näheres s. Hugo Koch, Die natürlichen Bausteine Deutschlands; Berlin 1892, Ernst Toeche. Ferner: E. Glinzer, Lehrbuch der Baustoffkunde, 3. Aufl.; Dresden 1903, G. Kühtmann. H. Seipp, Die Wetterbeständigkeit der natürlichen Bausteine und die Wetterbeständigkeitsproben, mit besonderer Berücksichtigung der Dachschiefer; Jena 1900, H. Costenoble. H. Seipp, Die abgekürzte Wetterbeständigkeitsprobe; Frankfurt a. M. 1905, Heinrich Keller.

schlag oder als Kies zum Strafsenbau, zur Bereitung von Beton usw. Dazu gehörig: **Feuerstein, Jaspis** usw.

12. **Glimmerschiefer.** Zwischen stark glänzenden Lagen von Glimmer grauer Quarz. Zu Dachplatten sowie als Gestellstein.

13. **Urtonschiefer** oder **Phyllit.** Dunkel oder grünlich, feinkörnig mit seidenglänzender Fläche. Vielfach als Dachschiefer.

14. **Tonschiefer** (erhärteter Ton [s. S. 583] und Quarz, oft mit Glimmerblättchen). Bläulichgrau bis schwärzlich, auch rot; fein spaltbar, daher zur Dachdeckung geeignet. Schädliche Beimengungen: Schwefelkies, Kohle, kohlensaurer Kalk. Beste deutsche Dachschiefer von Lehesten (Meiningen) und von Raumland (Westphalen).

15. **Kalkstein** (kohlensaurer Kalk). Wenn polierbar, heifst er **Marmor.** Farbe nach der Reinheit oder den zufälligen Beimengungen von Eisenoxyd, Kupferoxyd usw. sehr verschieden: weifs bis grau und schwarz, gelb, rot, braun, bald einfarbig, bald gefleckt, geadert, geflammt usw. Nach Austreibung der Kohlensäure durch bedeutende Hitze bleibt Aetzkalk zurück. **Kristalliner Kalk,** durchscheinend: Edler Marmor (Griechenland, Carrara, Tirol, Schlesien, neuerdings Norwegen). **Dichter Kalk,** oft mit Sand und Ton vermengt; bildet sich noch heute als Tropfstein und Kalksinter. Darunter: **Uebergangskalk** (Grauwackenkalk). Weifs, grau, gelb, rot usw. Oft hohle oder tonige Stellen, die sich leicht austreten. **Kohlenkalk,** meist dunkelgrau bis schwarz; hierzu gehört der „belgische Granit", ein vortrefflicher Baustein. **Zechstein,** tonhaltig und bituminös, dunkelgrau. **Muschelkalk,** gelblich und bläulichgrau bis schwärzlich, auch rötlich. **Oolithkalk** oder **Rogenstein,** aus rundlichen Körnern bestehend, grau bis rotbraun, oft sehr fest, zu Uferbauten. **Jurakalk,** grau, gelblich oder rötlichweifs. **Alpenkalk,** gelblich, rötlich, braun usw.; am bekanntesten der Untersberger Marmor. **Kreide,** weifser, erdiger, schreibender Kalk aus mikroskopischen Tiergehäusen bestehend. Dazu gehörig der oft sehr feste **Plänerkalk. Grobkalk,** sandiger, im frischen Zustande weicher, an der Luft erhärtender, mit zahllosen Schaltieren angefüllter Kalkstein; weifslich bis gelb (Pariser Kalkstein). **Kieselkalk,** lichtgrau und bräunlich, mit viel Kieselerde gemengt: u. a. der vortreffliche „bayerische Granitmarmor". Zu den **Kalkbreccien** (s. 21) gehört der Brokatellmarmor mit kleineren Bruchstücken; der Lumachelmarmor, aufserdem mit Muschelversteinerungen.

16. **Mergel.** Verschieden gefärbte, dichte erdige oder schiefrige Gesteine aus kohlensaurer Kalkmasse, verbunden mit Ton und Sand. Je nach dem Vorherrschen: Kalk- oder Tonmergel; mit Kieselerde: kieseliger Mergel; mit Bitterkalk: dolomitischer Mergel usw. Manche Mergelarten sind vorzüglich zur Zementfabrikation geeignet.

17. **Dolomit** (kohlensaurer Kalk und kohlensaure Magnesia). Weifslich, gelb, grau bis braun. Kristallin, dicht, oolithisch. Aus guten Brüchen ein harter, höchst dauerhafter Baustein, vornehmlich zum Sockelbau.

18. **Gips** ist wasserhaltiger schwefelsaurer Kalk. Im allgemeinen weifs, gelblich bis rötlich, grau bis schwärzlich, oft gefleckt, geadert, wolkig usw. Darunter: **Spätiger Gips** oder **Marienglas,** wasserhell, kristallin grofsblättrig, ungemein leicht spaltbar. **Feinkörniger Gips** (oder **Alabaster**), weifsgelblich und grünlich, auch grau; geadert,

geflammt usw.; oft stark durchscheinend und polierbar. **Fasergips,** mit parallelfaserigem Gefüge, weifs, gelb, grau, rot. **Dichter Gips,** schneeweifs bis grau, zum Brennen benutzt. Der Gips kommt gewöhnlich in Begleitung von Ton, Steinsalz vor. (S. auch S. 592). — Wasserfreier schwefelsaurer Kalk bildet den weit härteren, oft wie Marmor, aber nur innen verwendbaren **Anhydrit.**

19. **Sandstein.** Quarztrümmer (Sandkörner) durch ein kieseliges oder kalkiges oder (meistens) ein toniges Bindemittel zu mehr oder weniger festem Gestein verbunden. Weifs, grau, grünlich, bräunlich, gelb bis rot. Führt oft Kalkspat, Glimmerblättchen, Brauneisenerz, Einschüsse von rotem und grünem Ton usw. mit sich. Verderblich wirkt Schwefelkies, ungünstig auch Glimmerreichtum. Darunter: **Grauwacke,** gewöhnlich dunkelgrau; besonders hart, daher zu Pflasterungen benutzt. **Kohlensandstein,** meist hellgrau mit tonigem, glimmerhaltigem Bindemittel und oft mit Kohlenadern (Ruhr-Sandstein). **Buntsandstein,** vorherrschend rot, mit tonigem, kieseligem, eisenschüssigem Bindemittel; enthält oft Tongallen (d. s. eingeschlossene Tonbrocken); sehr verbreitet. **Keupersandstein,** meist gelb, mit tonigem und mergeligem Bindemittel. **Wäldersandstein;** hier besonders die Wesersandsteine wertvoll, wozu der kieselige, für den besten gehaltene Obernkirchener Sandstein gehört; grau und gelblichgrau, feinkörnig. **Quadersandstein,** mehr oder weniger tonig, fein- und grobkörnig, meist weifs und gelblich (sächsische Sandsteine). **Hilssandstein,** weifslich oder gelblich. **Nummuliten-** oder **Molassesandstein.** Letzterer enthält ein toniges, stark kalkhaltiges Bindemittel. Grau, grünlich und gelblich: zweifelhaftes Material (schweizer Sandsteine).

20. **Konglomerate.** Bestehen aus abgerundeten Geschieben der mannigfaltigsten Mineralien, durch ein Bindemittel verkittet; z. B. **Nagelfluh,** die Gerölle und Geschiebe der in der Nähe befindlichen Gebirgsarten enthält; mergeliges Bindemittel (u. a. Rigi, Salzburg).

21. **Breccien.** Scharfkantige, eckige Bruchstücke durch Bindemittel verkittet. Besonders häufig bei Kalkstein (u. a. Höttinger Breccie bei Innsbruck).

22. **Tuff.** Ein mehr oder minder lockeres, poriges Gestein. Man unterscheidet vulkanische und Kalktuffe. Erstere sind verhärtete, lose Auswurfstoffe von Vulkanen, letztere Sinterbildungen, die sich aus kalkhaltigen Wässern bilden. Darunter: **Porphyrtuff,** rot (Rochlitz in Sachsen). **Kalktuff** (Travertin), gelblichweifs oder grau bis bräunlich. Mehr oder minder dicht, oft porig, blasig und röhrig; oft als „Grottenstein" verwendet. **Bimssteintuff,** aus Bimssteinschutt bestehend. Weifs, gelb oder grau. Enthält Brocken von Bimsstein und Trachyt, Körner von Augit und Leucit, Sanidinkristalle usw. Feinerdig und frisch weich. (Brohler Duckstein; Ettringer Tuffstein.) Dazu die **Puzzolanerde,** die **Santorinerde,** der **Trafs. Basalttuff** aus verkittetem Basalt- oder Doleritschutt. Schmutzig grau bis schwärzlich. Enthält Augit, Olivin, Hornblende, Glimmer usw. **Leucittuff,** gelblichgrau. Enthält viele meist verwitterte Leucitkörner, Augit, Glimmer, Sanidin.

23. **Erratische Blöcke** oder **Findlinge,** sind durch Gletscher oder Eisberge fortgeführt worden und Fremdlinge an ihrer Fundstätte. Am häufigsten Granit, Gneis, Syenit, Diorit, Porphyr usw.

24. **Gerölle** und **Geschiebe,** Trümmer von Gesteinen, durch Frost abgebröckelt und von stark fliefsendem Wasser aus dem Gebirge fortgeführt. Kalkgerölle zum Brennen, Kiesgerölle zum Wegebau.

25. **Kies** und **Grant,** sowie **Sand,** kleine bis allerkleinste Bruchstücke quarziger Steine, oft mit Kalk, Mergel und Ton verunreinigt, durch Waschen davon zu befreien. Flufs- und Grubensand; letzterer gewöhnlich schärfer, aber häufig unreiner als Flufssand.

26. **Kieselgur,** Infusorienerde, aus fossilen Panzern mikroskopischer Tierchen bestehend. Weifslich und grau. Zu Isoliermasse, Kitten, als Poliermittel, zur Dynamitfabrikation, zur Herstellung von Wasserglas usw. verwendet (u. a. Lüneburger Heide, Untergrund von Berlin).

27. **Ton,** im völlig reinen Zustande: wasserhaltige kieselsaure Tonerde; sonst aber ein Gemenge dieser mit Sand (grob und sehr fein), Kalkstein und Eisenoxyd, durch Verwitterung feldspathaltiger Gesteinmassen entstanden und im Wasser abgelagert. Grau, grün, blau, rot, braun oder gelb. Darunter: **Kaolin,** der reinste Ton, zur Herstellung des Porzellans benutzt. Die andern **plastischen Tone,** dazu der Pfeifenton, die feuerfesten und die Töpfertone. Die **Ziegelerde,** dazu Tonmergel, Lehm und Löfs, der sich heute noch fortwährend absetzt.

Ton saugt begierig Wasser ein (bis etwa 70 vH) und wird dann formbar. Da er das Wasser gut festhält, wird er zum Ausschlagen und Dichten von Wasserkanälen, Filtrierbehältern und zu Dämmen im Wasser verwendet. Ton ist wichtig für die Quellenbildung und für die Fruchtbarkeit des Bodens. Schwindet beim Trocknen und nachherigen Brennen, ohne die Form im ganzen zu verlieren, und wird dabei äufserst hart. Anwendung zum Porzellan und zu allen Töpferwaren, sowie zu den gebrannten Steinen (s. S. 587 u. f.). Trockener Ton, besonders Bolus, saugt auch Fett begierig ein.

28. **Dammerde** (Acker- und Gartenerde), durch Verwitterung von Gestein, unter Beimengung von verwesenden Pflanzen- und Tierstoffen, entstanden; führt stets NaCl (Kochsalz) mit sich und gibt hierdurch, sowie besonders durch Bildung von Salpetersäure, bei Berührung mit kalkhaltigem Mauerwerke zum M a u e r f r a f s Anlafs und ist daher durch trockenen Schutt, durch eine Teer-, Lehm- oder Zementschicht usw. von Holz oder Mauerwerk getrennt zu halten.

IV. KÜNSTLICHE STEINE.

a. Ungebrannte Steine.

1. **Lehmsteine** (Lehmpatzen, Luftziegel) werden aus nassem Lehm geformt und an der Luft getrocknet; zum Vermauern dient Lehmmörtel (Lehm mit Wasser). Format ist wechselnd; Festigkeit gering. Lehmsteine werden zum Ausmauern von Fachwerk und zu Innenwänden landwirtschaftlicher Gebäude benutzt und geben hierbei billige, trockene und warme Wände.

Aus Lehm, der mit geschnittenem Stroh (oder mit Flachs- oder Hanfscheben) gemengt ist, werden zwischen Holzverschalungen die sogen. L e h m p i s é - W ä n d e hergestellt.

Aufsenwände aus Lehmsteinen oder Lehm sind durch gute Isolierung (s. Abteil. III, Hochbau) und vorspringende Dächer vor Feuchtigkeit zu schützen. Lehmschlag als Füllstoff für die Zwischendecken, wenn feucht bleibend, eine Gefahr für das Holz.

2. **Kalksandziegel.** 1 R.-T. dicke Kalkmilch wird mit 6 R.-T. Sand (grob und lehmfrei) sorgfältig gemischt und aus dieser Mischung nach 8 bis 10 Tagen (am besten auf der Baustelle) Ziegel gewöhnlichen Formats (25 . 12 . 6,5 cm) geformt. Nach 24 Stunden werden die angetrockneten Ziegel mit Kalkmörtel vermauert; Erhärtung an der Luft in etwa 4 Wochen; durch Eintauchen der Steine in dünne Wasserglaslösung (nach dem ersten Antrocknen) wird schnellere und gröfsere Erhärtung erzielt. Billiger und guter Ersatz gebrannter Ziegel für landwirtschaftliche Gebäude in Gegenden, wo Ziegelerde fehlt und guter Sand zu haben ist (z. B. auf den Nordseeinseln); frostbeständig und ziemlich fest.

Die vorstehende Mischung (u. Umst. mit der 1,5- bis 2-mal gröfseren Sandmenge, auch mit Zement-Zusatz), zwischen Holzverschalungen in etwa 10 cm hohen Lagen verbandartig eingestampft, liefert die sogen. Kalksandpisé-Wände.

3. **Kunstsandstein,** wozu auch der Hydrosandstein gehört, wird nach verschiedenen Verfahren aus Sand und Kies mit Kalk u. a. hergestellt. Benutzt als billiger Ersatz des natürlichen Sandsteins, dessen Farbe und Korn gut nachgeahmt ist; auch gut zu bearbeiten, für Gebäudefronten, Treppenstufen, zu Bauornamenten usw. Man prüfe jedoch sein Wasseraufsaugungsvermögen! Festigkeitsangaben s. S. 401 und 407. — Beträchtlich fester und härter sind die wesentlich aus Hartsteingrus mittels Portlandzement hergestellten Steine, wozu auch der Granitputz gehört.

4. **Sandsteinziegel** (nach Neffgen) und **Kalksandsteine,** Hartsteine (nach Olschewsky, Schwarz u. a.). Feinstgepulverter ungelöschter Kalk wird mit viel Sand gemischt, mit wenig Wasser gelöscht, unter Einwirkung von gespanntem Dampf durchgearbeitet und unter starker Pressung geformt, dann noch stundenlang hochgespanntem Dampf ausgesetzt. Enthalten nur 6 bis 10 vH Kalk: Bildung von wasserhaltigem Kalksilikat. In Korn, Farbe und Härte sandsteinartig, von sehr regelmäfsiger Form; $K = 140$ bis 240 kg/qcm. Deshalb vorzüglicher Ersatz für gewöhnliche Ziegelsteine, auch nicht weniger widerstandsfähig gegen Feuer. Leiden indessen bisweilen an zu großer Glätte und zu geringem Wasseraufsaugungsvermögen (Vorsicht!). Die Herstellungskosten werden u. a. zu 12 ℳ/1000 Steine angegeben.

5. **Rheinische Schwemmsteine** [Bimssandsteine].*) Der vulkanische Bimssand des Neuwieder Beckens wird zu 9 R.-T. mit 1 R.-T. hydraulischer Kalkmilch gründlich durchgemengt und zu Steinen gestrichen, die 3 bis 4 Monate an der Luft getrocknet werden. Spez. Gew. 0,7 bis 0,95, Druckfestigkeit $K = 17$ bis 27 kg/qcm, zulässige Druckspannung $k = 4$ kg/qcm. Verlangen als Mörtel Kalk mit Bimssand, u. Umst. mit Zementzusatz und eignen sich zu Fachwerkbauten, zum Aufbau von Stockwerken auf bereits bestehende Gebäude, zu Zwischenwänden und Deckenkappen zwischen eisernen I-Trägern; die damit ausgeführten Bauteile sind leicht, trocken, feuer-, schwamm- und

---

*) Vrgl. Anton Hambloch, Der rheinische Schwemmstein. Stuttgart 1903.

schallsicher und schützen gegen Kälte und Wärme. Auf der porigen Oberfläche haftet jeder Verputz leicht und dauerhaft. Die Schwemmsteine sind zu Paßstücken zersägbar und ermöglichen wegen ihrer Leichtigkeit schwache Fundamente und den Versand auf weite Entfernungen. Der Versand betrug 1902 über 260 Millionen Steine. Die gangbarsten Größen sind in folgender Tafel gegeben.

Länge cm	Breite cm	Stärke cm	Gewicht/Stück kg	Lademenge für 10 000 kg je nach der Witterung Stück	Ungef. Preis für 1000 Stück ℳ
25	12	6,5	1,35 bis 1,85	7000 bis 7500	16 bis 17
25	12	7,5	1,65 „ 2,30	6000 „ 6500	17 „ 18
25	12	9,5	2,05 „ 2,85	4800 „ 5000	18 „ 20

Loser Bimssand ist sehr leicht (spez. Gew. = 0,375), luftdurchlässig und ein schlechter Wärmeleiter [der Koeffizient λ (s. Abteil. III. Lüftung und Heizung) beträgt bei ihm nur 0,066]; er dient als „Isolierbims“ zu Fufsboden-Unterlagen, zu Ausfüllungen zwischen Verschalungen und auf Deckengewölben, als Schutz gegen Frost bei Wasserleitungen, zum Ausfüllen der Isolierschichten in Eis- und Kühlkellern usw.

Die von H. Schneider in Neuwied (Rhein) aus Bimssand mittels Zement, Kieselgur und Schill hergestellten Isolierbimssteine (mit $\lambda = 0{,}084$) eignen sich zu isolierenden Bodenbelägen in Kühlhallen und Eishäusern, zu Dampfkessel-Einmauerungen usw. Spez. Gewicht i. M. 0,68; $K = 17$ kg/qcm. — Die zwischen I-Trägern hergestellten Isolierbimsdecken (D. R. P. 73494) aus Isolierbims und Bimsbeton (9 R.-T. Bimssand mit 1 R.-T. Zement) sind flach und haben vor den vorstehend angegebenen gewölbten Schwemmsteindecken noch verschiedene Vorzüge; ihr Gewicht beträgt (einschl. der eisernen Träger) bei 1 m Trägerteilung f. d. qm 6 bis 7 kg auf je 1 cm der Deckenhöhe, dabei die gleichmäfsig verteilte gesamte Bruchbelastuug etwa 3000 kg/qm.

6. **Korksteine,** von Grünzweig & Hartmann in Ludwigshafen a. Rh., Nafzger & Rau in Hamburg, A. Haacke & Co. in Celle u. a. Spez. Gew. s. S. 511; Festigkeitsangaben s. S. 401. Die gewöhnlichen bestehen aus Korkstückchen, die mit einer wesentlich tonigen Masse verkittet sind; sie haben sehr geringes Gewicht, lassen sich in beliebigen Gröfsen herstellen, zersägen, zerschneiden und mit Nägeln befestigen. Ungef. Preis des Normalziegels (25 . 12 . 6,5 cm) für 100 Stück 10 ℳ. Gute Eigenschaften und vielfache Verwendungszwecke wie vorstehend bei Schwemmsteinen; jedoch sind Nässe und Temperaturen über 350° zu vermeiden. Als Bindemittel zum Vermauern dient meistens Gips, zum Verputzen empfiehlt sich Kalkmörtel und Gips zu gleichen Teilen oder verlängerter Zementmörtel.

Schwarze Korksteine, mit Steinkohlenpech durch und durch imprägniert, fester, schwerer und etwa 40 vH. teurer als die gewöhnlichen, lassen sich auch in feuchter Umgebung verwenden; mit Zement- oder Asphaltmörtel zu vermauern. Sind auch besonders für Bekleidung kalter und feuchter Wände zu empfehlen, sowie für Kälteschutz (Kühlanlagen). Es ist für schwarzen Korkstein $\lambda = 0{,}165$, für gewöhnlichen $\lambda = 0{,}080$ (λ s. Abteil. III, Lüftung und Heizung). Nach amtlichen Brennproben sind beide als feuerschützende Ummantelung eiserner Säulen und Träger geeignet.

Von beiden Arten hat man 1 bis 12 cm starke Platten in Gröfse von 100 . 25 cm bis 100 . 50 cm. Solche mit Magnesiazementüberzug ($K = 15$ kg/qcm) dienen als vorzügliche Unterlage von Linoleum, nehmen keinen Eindruck an. Dem letzteren Zweck dient auch das **Korkment** von Maximiliansau.

Korkstein (mit Zusatz eines Kittmittels) in halbzylindrische Formen gepreſst, ist ein vorzügliches Wärmeschutzmittel für Dampfleitungen. Noch wirksamer sind hierzu die **gebrannten Kieselgurplatten** und **-formstücke,** aus einem mit Korkstücken gemengten Gur-Ton-Gemisch naſs geformt und scharf gebrannt, von auſserordentlicher Porosität und Leichtigkeit: so der **Diatomit** von Grünzweig & Hartmann, spez. Gew. 0,3.

Gepreſste Korkplatten der Delmenhorster Korkwerke in Gröſse von 50 . 50 cm und mehr, 10 bis 60 mm stark, in zwei Härten geliefert, dienen höchst wirksam zur Schall-, Wärme- und Trockenisolierung als Unterlage von Maschinen, Trägern, Säulen, Schienen, Belag von Schiffswänden, sowie zu Fuſsboden und Wand. Preise: 10 bis 30 mm stark 2,50 bis 4,50 ℳ/qm.

Linoleum aus Korkmehl und verharztem Leinöl, einseitig mittels Jute-Gewebe und Lackierung verstärkt, dient zum Belegen von Treppen und Fuſsböden und zu Wandbekleidungen.

Handelsübliche Sorten: einfarbig in verschiedenen Tönungen, bedruckt, Granit und Inlaid (letztere beiden mit durchgehender Musterung).

Handelsübliche Maſse: Länge rd. 25 m, Breite 2 m, Dicke 1,8, 2,2, 3, 3,6, 4, 4,6, 7 mm, bei Granit und Inlaid Dicke nur 2,2 und 3,3 mm.

Gewicht: durchschnittlich 1,1 kg/qm für 1 mm Dicke.

Haupteigenschaften: Wasserdicht, warm, dauerhaft, schalldämpfend, u. zw. umsomehr, je gröberes Korkmehl verwendet wird (Kork-Linoleum 4 und 7 mm stark); desto weniger geschlossen und eben ist aber auch die Oberfläche.

Zu viel Holzmehl enthaltende helle Granite und granitartige Inlaids werden im Gebrauch leicht glatt und hart.

Inlaids werden von mehreren deutschen Fabriken (Rixdorf, Hansa, Anker) geliefert, Parkett-Inlaids von der Linoleumfabrik Rixdorf nach patentierten Verfahren.

Linoleum bewährt sich auf Holzböden sowie massiven Decken; wichtig ist, daſs der Fuſsboden vor dem Verlegen des Linoleums gut geglättet und gänzlich trocken ist. Die Befestigung bei Holz hin und wieder durch Anstiften mit kopflosen Nägeln, sonst durch Aufkleben mit Harzkitt, 1 kg Kitt auf 4 qm. (Kleister ist durchaus zu verwerfen.)

7. **Asbestschiefer** von den Asbest- und Gummiwerken Alfred Calmon, A.-G., Hamburg, weiſse oder farbige, wasserundurchlässige Tafeln von der Härte mancher natürlichen Schiefer, leichter und fester als diese (spez. Gew. 2,12 und $K_b = 700$ kg/qcm), gut wärmeisolierend, als feuersicher bewährt, eignet sich u. a. zu billigen, leicht zerlegbaren, gesunden Wohnstätten, besonders in den Tropen und in kalten Gegenden. Aehnlich der **Eternitschiefer** mit spez. Gew. 2,4 und $K_b = 600$ kg/qcm.

8. **Englische Schlackensteine** (Ironbricks). In Eisenformen gegossene, noch längere Zeit glühend erhaltene Hochofenschlacke bildet nach langsamer Abkühlung äuſserst harte, schwere, wenig spröde Steine von brauner bis schwarzer Farbe; durch ein Muster rauh gemacht, eignen diese Steine sich zur Pflasterung von Bürgersteigen, Höfen, Ställen usw. Aehnlich **deutsche Schlackensteine** (Mansfeld) von grauer Farbe und Pflasterstein-Format, für Radfahrwege, auch für ganze Straſsen.

9. **Kalk-Schlackensteine** (von Osnabrück, Sophienhütte bei Wetzlar u. a. O.). Heiſse Hochofenschlacke wird in kaltes Wasser abgelassen, wodurch sie grobkörnig wird; die alsdann mit gelöschtem Kalk gemengte Schlacke wird in Ziegelform 25 . 12 . 8 cm gepreſst. Die Steine erhärten an der Luft sehr rasch (bei Bildung von kiesel- und kohlensaurem Kalk) und geben, innen verputzt, warme und dauerhafte Fachwerkwände.

10. **Zementstein** (Kunststein). Näheres s. bei Beton auf S. 599.

11. **Xylolith** (Steinholz) von O. Sening & Co. in Potschappel bei Dresden. Sägespäne (Sägemehl) mit Magnesiakitt (s. S. 610) angerührt

und unter hohem Drucke in Formen geprefst. Die Platten müssen auf völlig trockener Unterlage höchst sorgfältig (vrgl. S. 609) verlegt werden. Xylolith ist ein schlechter Wärmeleiter, leichter zu bearbeiten als Stein, wirft sich nicht, ist schwamm- und feuersicher und dauerhaft gegen Nässe (nimmt nur bis 5 vH. Wasser auf). Spez. Gew. 1,56. Platten bis 1,5 qm groß und 10 bis 26 mm stark.

12. **Torgament** von Lehmann in Leipzig, sowie **Xylopal** von Kühl & Miethe in Hamburg, aus Sägemehl und einer verkittenden Masse erst an Ort und Stelle ähnlich wie Zementestrich aufgetragen und geglättet, bildet einen fugenfreien, feuersicheren, fußwarmen und staubfreien Fußbodenbelag, an der Oberfläche ziemlich wasserundurchlässig. Hygienisch einwandfrei ist besonders der Oel-Xylopal, für den das Holzmehl vorher mit Oel getränkt wird. Ungef. Preis einschl. Verlegung bei 24 mm Stärke 7,50 ℳ/qm. Aehnlich sind der **Mineralit** von den Asbestzementwerken in Hamburg, der **Sanitas**-Fufsboden von Heinze & Kroner in Erfurt, der **Terralith**-Fufsbodenbelag von Mahla in Nürnberg u. v. a.

13. **Gipsdielen, Marmorzement** u. a. s. unter Gips, S. 581 u. 592.

14. **Glasbausteine, Keramoplatten** u. a. s. unter Glas S. 607.

b. Gebrannte Steine.

Der Rohstoff hierfür ist der feuchte Ton (Ziegelton, Ziegelerde Ziegelgut, Lehm) mit mehr oder weniger Sand (Staubsand und Grobsand), wozu noch Beimengungen von Eisenoxyd, Kalkstein, Schwefelkies, organischen Resten usw. kommen. Die Aufbereitung des Ziegelgutes durch Auswintern, Einsumpfen, Schlämmen usw. bezweckt Auflockerung und die Entfernung aller groben und schädlichen Einmengungen. Zu fettes Ziegelgut wird durch Zumischen von Sand, Ziegelmehl, Sägespänen, Lohe (für feuerfeste Steine auch Schamottegrus, Serpentin u. a.) magerer gemacht; auch wird oft durch Mengung von fettem und magerem Lehm eine brauchbare Mischung erzielt.

Nachdem die Masse möglichst gleichmäfsig gemacht ist (z. B. durch Tonschneider), erfolgt das Formen meist in nassem (auch wohl in trockenem, grubenfeuchtem) Zustande zum gröfsten Teil in Maschinen (mit mechanischem oder Hand-Antrieb), welche dichtere, festere und regelrechtere Steine liefern als der Handstrich und auch zur Herstellung von Loch- und Formsteinen, Tonrohren usw. dienen können. Die Gröfse der Form mufs jedenfalls auf das Schwinden des Ziegelgutes berechnet sein. Das Längen-Schwindmafs eines mittleren Tons ist 1 : 10 bis 1 : 7; das körperliche Schwindmafs ist annähernd dreimal so grofs und u. Umst. durch Probebrennen festzustellen. Ein Arbeiter streicht in 10 st 2000 bis 3000 Ziegel; eine Ziegelmaschine von 10 PS formt aus nassem Lehm bis zu 30000, eine solche von 16 PS aus trockenem Lehm bis zu 40000 Ziegeln in 10 st.

Auf Gerüsten lufttrocken geworden, werden die Steine gebrannt. Der Feldbrand (in Meilern) liefert bei vielem Abfall unansehnliche, aber billige und für gewöhnliche Zwecke brauchbare Steine. Von Brennöfen ist in Deutschland der Ringofen von Hoffmann und Licht der vollkommenste, da er ununterbrochenen Betrieb bei möglichster

Ausnutzung des Brennstoffes ermöglicht. Er liefert täglich, je nach Gröfse 2000 bis 20000 Steine bei einem Brennstoffverbrauch von 150 bis 200 kg Kohlen auf 1000 hartgebrannte Steine. — Spez. Gew. der Ziegelsteine s. S. 512 (auch S. 515); Festigkeitsangaben, auch für das Ziegelmauerwerk, s. S. 401 und 407. — Ueber „die Ausblühungen des Mauerwerks, ihre Entstehung und Bekämpfung" s. die Schrift von Dr. Mäckler, Berlin 1901.

1. **Gewöhnliche Mauersteine** (Hintermauerungssteine). **Normalformat** (25 . 12 . 6,5 cm) usw. s. Abteil. III, Hochbau. Aufserdem noch in den Gebieten der unteren Elbe und der unteren Weser sowie in Schleswig-Holstein zwei **Kleinformate:** 22 . 10,5 . 5 cm (Oldenburger Format) und 23 . 11 . 5,5 cm (Kieler Format).

Gut gebrannte Steine dürfen nicht abfärben, sollen höchstens bis 16 vH Wasser aufnehmen, hart sein und scharfkantigen Bruch zeigen, sowie beim Anschlagen mit dem Hammer hellen (nicht dumpfen oder klirrenden) Klang geben; nur solche Steine sind tragfähig und dauerhaft.

Porige Vollsteine (Tuffziegel) für leichte Wände, Erker usw., werden aus Lehm, der zu einem Drittel bis zur Hälfte mit Brennstoff (Sägespänen, Braunkohle, Koksstaub, Lohe) gemischt ist, hergestellt; sie sind etwa halb so fest wie gewöhnliche Ziegel, jedoch warmhaltend und leicht (1 Stein des Normalformats wiegt 2,25 bis 2,75 kg, 1 cbm hiervon wiegt 1130 bis 1380 kg).

Lochsteine, mit prismatischen oder zylindrischen Löchern, längs oder quer; Vorteile und Verwendung wie bei porigen Steinen, dabei aber gröfsere Festigkeit. Die Wandstärken des Lochsteines macht man am besten überall gleich, etwa 1,5 bis 2 cm. Dünnwandige Lochsteine wiegen etwa 1000, dickwandige etwa 1200 kg/cbm oder im Normalformat 2,0 bzw. 2,4 kg. Noch leichter und auch für manche Zwecke fest genug (z. B. für Erker, Balkone, massive Decken usw.) sind die porigen Lochsteine. So die Steine für die Förstersche Decke, Format 25 . 13 cm und für Spannweiten bis 1,7 m 10 cm hoch. Gewicht des Steins 3,2 kg. Preis für 1000 St. etwa 52 *M.*

Hohlsteine (D. R. P. 82620) von Büscher & Co. in Caternberg bei Essen (Ruhr), mit hohl gewölbter oder kappenartig vertiefter Lagerfläche, sind tragfähiger als Lochsteine ($K \backsim 500$ kg/qcm); Normalformat.

2. **Klinker,** durchweg verglaste Ziegelsteine, aus kalkhaltigem Lehm (u. Umst. mit Quarzsand-Zusatz) hergestellt. Gröfse normal oder auch 21 . 10 . 5,5 cm; Form bei den Handstrichklinkern wenig regelmäfsig; besser bei den Maschinenklinkern, die zum Verblenden dienen. Sollen gar kein Wasser aufnehmen, hellklingend und sehr hart sein; sind nur mit hydraulischem Mörtel zu vermauern. Verwendung zu Brücken- und Wasserbauten; in Gebäuden zu Träger-Auflagern und stark belasteten Pfeilern, zu Grundmauern und Trockenschichten; zu Pflasterungen usw.

3. **Verblendsteine,** aus fetterem Ton sorgfältig hergestellt und von verschiedenen Farbtönen. Normalformat usw. s. Abteil. III, Hochbau. Die Lagerflächen sind durch Rillen usw. rauh gemacht. Die Verblender sind häufig gelocht (auch in der Längsrichtung). Durch Engoben (Ueberfangfarben) oder Glasuren erhalten sie Glanz, lebhafte

Farben und Schutz vor Verwitterung, jedoch letzteres nur, wenn die Ueberzüge frei von Sprüngen und Haarrissen sind. Zu verlangen sind ein durchaus gleichmäfsiger Farbenton (ohne jede Auswitterung) und vollkommen scharfe Formen bei Abweichungen in den Abmessungen von höchstens ± 0,5 mm. Gröfsere Steine im sogenannten **Klosterformat:** 28,5 . 13,5 . 8,5 cm werden jetzt für staatliche monumentale Backsteinbauten in Preufsen hergestellt.

Hierzu sind zu rechnen die Profilsteine (zu Gesimsen, Fenster- und Türeinfassungen usw.), die keilförmigen und nach der Krümmung des Gewölbes gestalteten Gewölbesteine; ferner die immer mehr zur Fassadenverblendung angewendeten glasierten Wandplatten, oft in Form von Spaltvierteln oder Spalthalben geliefert.

Am meisten verbreitet sind die schlesischen Verblender.

4. **Terrakotten** sind künstlerisch ausgebildete Ziegelwaren, aus sehr fettem, sich mit gleichmäfsiger Farbe brennendem Ton, unter Anwendung von Gipsformen hergestellt. (Fabriken in Charlottenburg, Wienerberg bei Wien, Nymphenburg bei München, Muldenhütten i. S., Ullersdorf, Liegnitz u. a. in Schlesien, Mettlach und Merzig a. d. Saar.) — Hieran schliefsen sich die plattierten Ziegelwaren, die als Boden- und Wandbelag Verwendung finden; u. a. die farbig gemusterten, unglasierten Mettlacher Fliesen, aus fettem, leicht sinterndem Ton mit Beimengung von Quarzsand. Fliesen dürfen nicht mit Zementmörtel gefugt werden, weil die Alkalien des Zementes in die Masse der Fliesen übergehen und, besonders bei hellfarbigen Fliesen, schmutzige Ränder erzeugen, sondern mit hellfarbigem, hydraulischem Kalk oder Gips.

5. **Schamottesteine,** feuerfest und unschmelzbar, werden geformt aus feuerfestem Ton, der mit bereits gebranntem, zerstofsenem Ton gemischt wird, und in Weifsglut gebrannt. Je nach dem Verwendungszwecke werden sie sehr dicht und hart, oder auch von lockerer körniger Beschaffenheit hergestellt. Vermauerung mit feuerfestem Mörtel (fetter Ton, trocken mit Schamottegrus gemischt); vortrefflich hierzu und billig sind Feuerzement und Klebesand, beide vom Westerwald, teurer der Pyrosin. — Dinassteine aus England; Silikasteine von Dortmund; schwedische Steine aus Högenäs; Stettiner und viele andere deutsche sind jedem fremden Schamotte ebenbürtig.

6. **Dachziegel,** entweder eben wie die Biberschwänze oder gekrümmt wie die Pfannen (S-Ziegel), First-, Grat- oder Hohlziegel. Näheres hierüber s. Abteil. III, Hochbau (unter Ziegeldächer). In mannigfaltigen Farben, auch grau „gedämpft“, engobiert oder glasiert; zum Schutze gegen Säuren usw. werden sie auch in heifsen Gas-Teer getaucht. — Die neueren Falzziegel machen das Verstreichen der Fugen mit Mörtel überflüssig; sie verhindern durch ihr falzartiges Ineinandergreifen das Eindringen von Regen und Schnee. Einfacher in Form und Herstellung sind die Strangfalzziegel. — Die mannigfachsten Formen und Färbungen für die verschiedenen Zwecke (Turm-, Giebelverzierungen) bieten u. a. die Ludowici-Ziegel von Jockgrim (Pfalz).

7. **Ofenkacheln,** aus dem glasierten rechteckigen Blatt und der (inneren) im Viereck gebogenen, wulstförmigen Zarge bestehend,

werden aus Ton von Hand mittels dieser Teile oder durch Maschinenarbeit (Pressen) gleich im ganzen hergestellt und zweimal gebrannt. Nach dem ersten Brennen wird die Aufsenfläche mit einer Glasurmasse überzogen.

8. **Tonrohre** für Flüssigkeits-Leitungen, selten und dann nur innen glasierte Muffenrohre von kreisförmigem (auch wohl elliptischem oder eiförmigem) Querschnitte, sind mit den zugehörigen Formstücken (Bogen, Abzweigen, Uebergängen, Siphonen) in lichten Weiten von 5 bis 60 cm und darüber erhältlich. — Tonrohre von rechteckiger Form zu Rauchrohranlagen, Ablufttröhren und Luftheizungskanälen; in Stücken mit 1 bis 4 Oeffnungen von 70 bis 2350 qcm lichtem Querschnitt. Andere Formen zu Krippen und Trögen, Schornsteinaufsätzen, Klosettbecken u. v. a.

V. MÖRTEL, PUTZ, ZEMENT, BETON USW.

a. Luftmörtel.

Luftmörtel wird für Mauern, die nur von Luft umgeben sind, benutzt.

1. **Lehmmörtel** aus genäfstem, magerem, mit Häcksel, Spreu usw. vermischtem Lehm bestehend, erhärtet durch einfaches Austrocknen, daher wenig fest und vom Wasser leicht auszuspülen. Nur für Innenwände und ganz geschützte Aufsenmauern sowie bei Feuerungsanlagen anwendbar. Billigster, schnell trocknender, warm haltender Mörtel, auch Anstrich für Holz gegen Feuersgefahr.

Zu dem harten und zugleich elastischen **Lehmestrich** für Tennen, Kegelbahnen usw. wird mit Hammerschlag versetzter und auch mit Blut getränkter Lehm gehörig gestampft.

2. **Kalk-Sand-Mörtel** (Kalkmörtel, Speise). Der zum Löschen bestimmte gebrannte Kalk wird aus möglichst von Ton und Sand freiem Kalkstein durch starkes Glühen in den Kalköfen, jetzt meist im Ringofen (s. S. 587), hergestellt, wobei die Kohlensäure entweicht. Vor Wasser und Luft sorgfältig geschützt aufzubewahren (wozu auch die dichte Lagerung der Kalkstücke auf und unter einer rd. 15 cm starken Schicht Staubkalk dienen kann), da er sonst abstirbt. Dieser gebrannte oder Aetzkalk wird mit weichem Wasser (am besten Regenwasser) gelöscht, entweder trocken zu Pulver (Staubkalk), wozu die aufgehäuften Kalkstücke mit Sand völlig überdeckt und dann überbraust oder auch in rohgeflochtenen Körben eine Zeitlang in Wasser getaucht werden, oder aber zu Kalkbrei.

Hierzu bringt man den Kalk am besten zunächst mit dem gleichen Gewichte Wasser zum Zerfallen, wobei er gedeiht (d. h. sein Rauminhalt bedeutend vergröfsert), und setzt dann sogleich noch das doppelte Gewicht Wasser unter Umrühren zu. Bei zu wenig Wasser verbrennt der Kalk, bei zu viel ersäuft er. Totgebrannte Stücke sind durch zu hohe Glut beim Brennen von magerem Kalkstein entstanden. — Die entstehende Kalkmilch fliefst in eine (nicht ausgemauerte) Erdgrube

und gesteht hier, unter Abrieselung von Unreinheiten und völliger Löschung aller Teilchen, zu dem Speckkalk; durch aufgestreuten Sand und Abdeckung läfst sich der so eingesumpfte Kalk jahrelang gebrauchsfähig erhalten.

Der aus magerem Kalkstein regelrecht hergestellte Kalk gibt beim Löschen körnigen, wenig geschmeidigen, mageren Löschkalk. 1 R.-T. fetter Kalk gibt mit 3 R.-T. Wasser 3 R.-T Speckkalk; dagegen 1 R.-T magerer Kalk mit 2 R.-T. Wasser nur 2 R.-T Löschkalk. 140 kg fetter Kalkbrei (1 hl) enthalten etwa 63 kg trockenes Kalkhydrat. Speckkalk (in der Grube) soll vor der Verwendung eine rissige Oberfläche zeigen. Die Mörtelbereitung aus der frischen Kalkmilch im Kasten selbst ist zu verwerfen.

Zur Herstellung des Mörtels wird mittelgrober, möglichst mit $^1/_3$ Feinsand vermischter, scharfkantiger, von Lehm und organischen Resten freier Quarzsand mit so viel Kalkbrei versetzt, dafs die Lufträume zwischen den Körnern gerade ausgefüllt werden, mithin der Gesamtinhalt sich nicht vergröfsert. Bei fettem Kalk nimmt man für Mauern über der Erde 1 R.-T. Kalk : 3 R.-T. Sand, für Grundmauern 1 R.-T. Kalk : 4 R.-T. Sand. Bei magerem Kalk 1 R.-T. Kalk : 1 bis 2. R.-T. Sand. Mit dem Kalkgehalte wachsen die Erhärtungszeit und die Festigkeit, aber auch die Kosten. — Ein Zusatz von dicker Kuhmilch verleiht dem Mörtel aufserordentliche Härte. — Das Mischen geschieht mit Vorteil in Mörtelmaschinen, deren Erzeugnis aber baldige Vermauerung verlangt.

Bei Anwendung von Staubkalk zum Mörtel ist für 1 R.-T. Kalkbrei überall 1,5 R.-T. Staubkalk zu nehmen. Ein Zusatz von Wasserglas gibt dabei die gröfste Härte.

Erhärtung des Kalk-Sand-Mörtels. Sofort beginnt durch teilweises Verdunsten des Wassers das Austrocknen, wodurch die Teilchen zusammenhaften und sich auch Lücken bilden: der Mörtel zieht an. Erst nach beträchtlicher Verminderung des Wassergehaltes geht die eigentliche Erhärtung durch Aufnahme von Kohlensäure aus der Luft vor sich. Diese schlägt aus dem die ganze Masse durchsetzenden bzw. überziehenden Kalkwasser (Auflösung von Löschkalk in etwa 800 T. Wasser) kristallinischen kohlensauren Kalk nieder, der die innige Bindung aller Teile bewirkt. Austrocknung und Erhärtung gehen von den Aufsenflächen allmählich nach innen vor; erst nach vielen Jahren ist die Umwandlung in kohlensaurem Kalk gröfstenteils beendet. Mit nicht gehörig genäfsten Steinen hergestelltes Mauerwerk hat geringe Festigkeit. Durch künstliche Erhitzung rasch getrockneter Mörtel fällt auseinander. Für guten Kalk-Sand-Mörtel ist $K = 40$ kg/qcm. Durch Frost wird der Kalk-Sand-Mörtel zerrissen, solange er noch nicht angezogen hat; die für die Verarbeitung polizeilich erlaubte Frostgrenze ist vielfach auf — 2^0 festgesetzt. Bei stärkerem Frost wendet man mit Erfolg Wasser und Steine in erwärmtem Zustand an oder setzt dem Wasser Soda zu.

Durch eine geringe Beimischung von Portlandzement wird die Erhärtung wesentlich beschleunigt; zugleich werden die Festigkeit und Härte hierdurch beträchtlich vergröfsert.

Sparkalk ist mit Lehm vermischter Kalk-Sand-Mörtel; bindet nicht, gibt wenig festes Mauerwerk und ist gänzlich zu verwerfen.

Als Mörtel für Werkstücke (Sandsteine u. a.) dient ein Gemisch von Staubkalk und Ziegelmehl.

Der innere Wandputz wird aus Löschkalk, Gips und wenig Sand hergestellt. Das beschleunigte Austrocknen des Wandputzes mittels (auf gemauerter Unterlage aufzustellender) Kokskörbe, wobei die aufsteigende Kohlensäure wesentlich mitwirkt, liefert weniger feste und oft rissige Flächen; auch gefährden Kohlensäure und Kohlenoxyd die Bauarbeiter. Verbot des Arbeitens in solchen Räumen.

Stuccolustro (Glanzstuck). Mit Marmorstaub gemischter Fettkalk wird auf rauhem Grundputz aufgetragen, marmorartig bemalt und poliert.

3. **Gipsmörtel,** durch Anmachen von entwässertem und gepulvertem Mauergips hergestellt. Bis auf 200⁰ erhitzt, gibt der natürliche Gips (s. S. 581) leicht sein ganzes Kristallwasser (21 vH) ab und hat dann die Fähigkeit, mit Wasser angemacht, sich sehr rasch wieder damit zu verbinden und zu einer wenig harten Masse zu erstarren; durch Beimischung von Leim oder Dextrin wird gröfsere Härte erzielt. Erhitzung wenig über 200⁰ macht ihn totgebrannt, so dafs er gar nicht mit Wasser abbindet. Wird er aber weiter bis 400⁰ und mehr erhitzt, so wird er dichter und schwerer und erlangt hydraulische Eigenschaften, d. h. er bindet mit Wasser sehr langsam zu einer äufserst harten Masse ab.

Von den beiden, hiernach sehr verschiedenen Stoffen ist der erstere im gepulverten Zustande der **Stuck- oder Bildhauergips** (Schnellgips), welcher in der Regel, nur bis 130⁰ gebrannt, noch 5 vH Wassergehalt hat, und dessen Anmachung mit Wasser deshalb erst in etwa 30 Min. völlig erstarrt, ohne sich dabei zu stark zu erwärmen. Da sich die Masse hierbei etwas ausdehnt, füllt sie Gufsformen rasch und vollkommen aus (Herstellung der inneren Bauornamente in Leimformen). Höher (bis 200⁰) erhitzt, bindet er zu rasch ab und ist „hitzig", so dafs die Leimformen zu schmelzen beginnen; auch treibt er dann nachträglich ebenso wie der zu wenig (d. h. unter 120⁰) gebrannte Gips.

Die zweite Art, der **Estrich oder Mauergips** (Gipskalk), verhält sich, wenn er in allen Teilen zur schwachen Rotglut gekommen ist, als Pulver mit Wasser angemacht, ähnlich wie langsam bindender Zement. Der steife Gipsteig, stundenlang noch weich bleibend, erhärtet erst nach vielen Tagen vollständig, ist dann aber sehr hart, aufserordentlich fest, dicht und wetterbeständig und treibt auch nicht.

Andere Anwendungen des Stuckgipses: **Decken- und Wandputz** aus Gips und Kalk bzw. Sand. **Gipsdielen,** u. a. die Mackschen nagelbaren mit Holzleisten, die Sittigschen mit Kokosfasereinlage besonders fest und feuersicher, in verschiedenen Stärken bis 9 cm, sowie **Gipsbautafeln** zu leichten, rasch auszuführenden Innenwänden, Decken usw. (vrgl. Abteil. III, Hochbau). **Rabitz-Wände:** Mit Leimwasser verrührtes Gipspulver, mit Kalk-Sand-Mörtel gemischt, wird auf ein Drahtgeflecht oder auf Streckmetall aufgetragen. **Scagliola** aus Gipspulver und gepulvertem Gipsspat, mit Leimwasser angemacht.

Stuckmarmor aus Gipspulver, Leimwasser und den Farbstoffen auf rauhem Grundputze. Ferner Alaungips, Marmorzement von der Walkenrieder Gipsfabrik usw. — Erheblich gehärtet und widerstandsfähig gemacht werden diese Gipsarbeiten durch das Kesslersche Gipsfluat (Hans Hauenschild, G. m. b. H., Berlin NW. 21, Dreysestr.).

Anwendungen des Estrichgipses: **Gipsmörtel,** u. a. in Paris zu allen Mauern über dem Erdgeschosse, wie auch zum äufseren Verputze benutzt, wird als steifer Brei ohne alle Beimengungen aufgetragen. Zu rascherem Trocknen und der Ersparnis halber setzt man oft $^1/_3$ bis $^1/_2$ Sand oder Ziegelmehl zu. Haftet vorzüglich an den Steinen und ist schliefslich härter als diese (Pyramiden; Ruinen bei Osterode, Südharz). **Gipsestrich,** aus grobgemahlenem, mit wenig Wasser zu gleichmäfsigem Brei verarbeiteter Gips auf eine vorher nafs gemachte Unterlage (Grobsand, geschlagener Lehm, Kohlenasche), ausgebreitet, nach 24 st geschlagen und geglättet, auch mit angewärmtem Leinöl getränkt, in 1 bis 2 Wochen beschreitbar, ist ein billiger, dauerhafter, für die Nagetiere unangreifbarer, feuer- und wassersicherer Fufsboden für Vorratskammern, Kornspeicher, Flure, Trockenböden usw. Gipsestrich, nach vollkommener Austrocknung mit Linoleum (s. S. 586) belegt, gibt einen vortrefflichen Fufsboden, aber nur auf massiven Decken. **Gipsbeton** zu Kunststeinen und Gufsmauerwerk, wie Zementbeton hergestellt, gibt sehr feste und harte Quadern und, die Fernhaltung der Erdfeuchtigkeit vorausgesetzt, höchst trockene Wände, deren Widerstandsfähigkeit längjährig erprobt ist.

b. Wassermörtel (hydraulischer oder Zementmörtel).

Die Stoffe, die zur Herstellung solcher Mörtel dienen, sind mannigfaltiger Art, jedoch sind bei allen Ton und Kalk die Grundbestandteile.

1. **Puzzolane,** natürliche oder künstliche, durch Glühen aufgeschlossene Tonerdesilikate, die dem Löschkalke zugemischt, diesem die Eigenschaft verleihen, im Wasser zu erhärten, also **hydraulische Zuschläge.**

α. Natürliche Puzzolane: **Puzzolanerde** (Italien, Frankreich), **Santorinerde** (Griechenland). Der **Trafs***) (vulkanischer Tuffstein von Andernach a. Rh.), altberühmtes vortreffliches Material, wird in Stücken und in Mehlform gehandelt. Am besten in Stücken zu beziehen, die dann kurz vor dem Gebrauch gemahlen und dem Kalke zugemischt werden. Preis (1903) gemahlen ℳ 110 bis 140/10 000 kg (= 10 cbm).

Trafsmörtel ist vorzugsweise hydraulisch (Wasserbauten in Holland), wird jedoch, wo Trafs billig ist, auch mit Vorteil als Luftmörtel benutzt (Cölner Dom). 1 R.-T. Trafs mit 1 R.-T. nassem Kalkbrei und 1 bis 2 R.-T. Sand ohne Wasser gibt vollen Trafsmörtel für wasserdichte Bauten; zu Talsperren $1^1/_2$ Tr. : 1 K. : $1^3/_4$ S. Die Mischungen: 1 R.-T. Trafs, 1 R.-T. Kalkbrei, 2 R.-T. Sand bis $1^1/_2$ R.-T. Trafs, 2 R.-T. Kalkbrei, 3 bis 5 R.-T. Sand geben verlängerten Trafs-

*) Vrgl. Anton Hambloch, Der rheinische Trafs. Andernach 1903.

mörtel für Bauten über Wasser.*) Ueber Trafsbeton siehe unten bei Beton. — Durch Raumbeständigkeit und Wasserdichtigkeit (deshalb zu Talsperren) besonders ausgezeichnet.

β. Künstliche Puzzolane: **gebrannter Ton** jeder Art, in Mehlform, also u. a. Ziegelmehl. Gebraucht wird z. B. ein Mörtel aus 3 R.-T. Kalkbrei, 2 R.-T. Ziegelmehl und 3 R.-T. Sand. — Wassergekörnte Hochofenschlacke von geeigneter Zusammensetzung (50 bis 60 vH SiO_2 und 15 bis 20 vH Al_2O_3) mit Kalkbrei gemengt, bindet langsam, aber äufserst hart. Daraus hergestellte Schlackensteine (s. unter 9. auf S. 586) sind stark hydraulisch. — Günstig zusammengesetzte Stein- oder Braunkohlenasche gibt mit Staubkalk und ein wenig verdünntem Wasserglas (u. Umst. mit Sandzusatz) brauchbaren Wassermörtel.

Passow-Zement: Hochofenschlacke, deren Zusammensetzung gewissen Bedingungen entsprechen mufs, wird nur durch Luft, unter Ausschlufs von Wasser granuliert und dann zu Mehl zerkleinert. Erfüllt ohne weiteres alle wesentlichen Anforderungen an einen langsam bindenden Portlandzement. Für rasches Abbinden ein Zusatz von Portlandzement. Wird u. a. von der P. Z.-Fabrik Hansa in Haiger hergestellt.

2. **Hydraulische Kalke** sind Kalksteine mit einem günstigen Gehalt an Tonerdesilikaten und Sand (20 bis 25 vH), u. a. Septarienkalke und gewisse Mergelarten, Jura- und Muschelkalke. Auf Faustgröfse gebracht, werden sie in Schachtöfen mit Kohlen geschichtet, vorsichtig (nur bis zur Sinterglut, sonst erfolgt Verglasen) gebrannt und zu Pulver gelöscht. In frischem Zustande zu gebrauchen. Ohne oder mit Sand und mit Wasser angemacht, erhärtet die Masse unter Wasser und erhält mehr oder weniger Festigkeit. Bei manchen tritt nachträglich Raumvergröfserung (Treiben) ein, was selbst durch reichlichen Sandzusatz nicht ganz zu verhindern ist. Hydraulischer Kalk (ohne Sand) mit wenig Wasser zu Mauern in bewegtem Wasser; mit Sand (3 R.-T. Zement, 2 R.-T. Sand) zu Mauerwerk im Nassen; 1 R.-T. Zement und 6 bis 8 R.-T. Sand zum Mauerputz.

Hierher gehören ferner die **Romanzemente,** von denen der älteste der englische ist. Aehnlich sind der Bielefelder, Mindener, Culmbacher, Perlmooser usw., sämtlich billiger als Portlandzement. Spez. Gew.: gepulvert, lose eingelaufen i. M. 0,82, eingerüttelt i. M. 1,27.

Vielfach bewährt hat sich der Natur-Zementkalk von Schenk & Vogel, Förderstedt, durch scharfes Glühen eines Dolomits erhalten. Besteht aus rd. 60 vH Kalk, 15 vH Magnesia, 8 vH Eisenoxyd und 14 vH löslicher Kieselsäure. Mit Sand (1 : 6) trocken gemischt und dann mit Wasser zum Brei angemacht, bleibt die Masse 24 Stunden liegen, bevor sie gebraucht wird. Eignet sich zu Mauerwerk in nassem Boden, Brücken, Gewölben, Tunneln u. drgl. sowie zum Putzen von Wetterwänden. Aehnlich der sehr ausgiebige Zementkalk von Steudnitz i. Thür., der hydraulische Kalk von Rüdersdorf, der

---

*) Ueber Trafsprüfung s. Z. d. B. 1897 S. 179 u. f.; ferner M. Gary, Mitteilungen a. d. Kgl. techn. Versuchsanstalten zu Berlin 1901 Heft 1 S. 8.

westfälische Wasserkalk von Recklinghausen (Wicking) und der vielgerühmte Viktoria-Puzzolan-Zement von Thale a. H.

Ein Gehalt solcher Zemente an Phosphaten mufs bei Grundbauten ausgeschlossen sein, da diese ausgelaugt werden (Marcusturm).

3. **Portlandzement** ist durch Brennen einer bestimmten Mischung aus Ton und Kalk künstlich erzeugter hydraulischer Kalk, daher von gleichmäfsigerer Beschaffenheit als die natürlichen hydraulischen Kalke. Seine Güte hängt ab von der Beschaffenheit der Rohstoffe, besonders von der des Tons, von ihrer innigen und gleichmäfsigen Mischung, der richtigen Temperatur beim Brennen und von der Feinheit der Mahlung.

Portlandzement ist ein bläulich- oder grünlich-graues, sehr feines Pulver; spez. Gew.: als Klinker 3,1 bis 3,2; gepulvert, lose eingelaufen 1,4, eingerüttelt 1,95; erhärtet 2,7 bis 3,2. Die Vorgänge bei der Erhärtung des Portlandzementes (und der anderen hydraulischen Bindemittel) sind noch nicht völlig aufgeklärt. Chemische Zusammensetzung ziemlich gleichmäfsig, i. M. 60 vH Kalk, 23 vH Kieselsäure, 7,5 vH Tonerde, 3,5 vH Eisenoxyd usw. Betreffs fremder Beimischungen gilt allgemein folgendes:

Jedes Erzeugnis, dem während oder nach dem Brennen fremde Körper beigemischt wurden, ist nicht als Portlandzement und sein Verkauf unter dieser Bezeichnung als Täuschung zu betrachten. Ein Zusatz von 2 vH Gips ist jedoch gestattet. Guter Portlandzement wird durch Zumischen von Kalksilikat (Hochofenschlackenmehl usw.), Trafs usw. nicht verbessert. Aber selbst wenn nachweislich dadurch Verbesserung einträte, sind solche Zusätze nicht zu gestatten, weil deren Menge und Art zu erkennen, dem Käufer nicht möglich ist.

Normen für einheitliche Lieferung und Prüfung von Portlandzement.

Rund-Erlafs des preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten vom 28. Juli 1887 *), 23. April 1897 und 19. Februar 1902.**)

(Auszug.)

1. **Verpackung und Gewicht.** In der Regel soll Portlandzement in Normalfässern von 180 kg brutto (rd. 400 engl. Pfund) und etwa 170 kg netto und in halben Normalfässern von 90 kg brutto und etwa 83 kg netto verpackt werden. Das Brutto-Gewicht soll auf den Fässern verzeichnet sein. — Wird der Zement in Fässern von anderem Gewichte oder in Säcken verlangt, so mufs das Brutto-Gewicht auf diesen Verpackungen ebenfalls durch deutliche Aufschrift kenntlich gemacht werden. — Streuverlust, sowie etwaige Schwankungen im Einzelgewichte können bis zu 2 vH nicht beanstandet werden. — Die Fässer und Säcke sollen aufser der Gewichtangabe auch die Firma oder die Fabrikmarke der betreffenden Fabrik mit deutlicher Schrift tragen.

[Die Bestimmungen unter 1. sind zum Teil durch den Minist.-Erl. vom 23. April 1897 (s. nächste Seite) ersetzt bzw. erweitert worden.]

2. **Bindezeit.** Je nach der Art der Verwendung kann Portlandzement langsam oder rasch bindend verlangt werden.

Als langsam bindend sind solche Zemente zu bezeichnen, welche erst in 2 st oder in längerer Zeit abbinden, eine mittlere Temperatur des Wassers und der Luft von 15 bis 18° vorausgesetzt.

Während des Abbindens darf rasch bindender Zement sich merklich erwärmen, dagegen langsam bindender nur unwesentlich. Portlandzement wird durch längeres Lagern langsamer bindend und gewinnt bei trockener, zugfreier Aufbewahrung an

*) S. Z. d. B. 1887 S. 309; als Sonderdruck zu beziehen von Wilh. Ernst & Sohn, Berlin W. — S. auch Z. d. B. 1890 S. 539.

**) S. auch Z. d. B. 1902 S. 113.

Bindekraft. Vertragsbestimmungen, welche nur frische Ware vorschreiben, sollten daher in Wegfall kommen.

3. **Raumbeständigkeit.** Portlandzement soll nicht treiben, d. h. raumbeständig sein. Als entscheidende Probe soll gelten, dafs ein auf einer Glasplatte hergestellter und vor Austrocknung geschützter Kuchen aus reinem Zement, nach 24 st unter Wasser gelegt, auch nach längerer Beobachtungszeit (bis zu 28 Tagen) durchaus keine Verkrümmungen oder Kantenrisse zeigen darf.

4. **Feinheit der Mahlung.** Portlandzement soll so fein gemahlen sein, dafs eine Probe von 100 g auf einem Siebe von 900 Maschen/qcm höchstens 5 vH. Rückstand hinterläfst. Die Drahtstärke des Siebes soll die Hälfte der Maschenweite betragen.

5. **Festigkeitsproben.** Die Bindekraft von Portlandzement soll durch Prüfung einer Mischung von Zement und Sand ermittelt werden. Die Prüfung soll auf Zug- und Druckfestigkeit nach einheitlichem Verfahren geschehen, u. zw. mittels Probekörper von gleicher Gestalt und gleichem Querschnitt und mit gleichen Apparaten. Daneben empfiehlt es sich, auch die Festigkeit des reinen Zementes zu bestimmen.

Die Zerreifsproben sind an Probekörpern von 5 qcm Querschnitt der Bruchfläche, die Druckproben an Würfeln von 50 qcm Fläche vorzunehmen. Für die Zerreifsungsdauer wird bestimmt, dafs die Zunahme der Belastung während des Zerreifsens 100 g/sk betragen soll. Bei den Druckproben soll der Druck stets auf zwei Seitenflächen der Würfel, nicht aber auf die Bodenfläche und die bearbeitete obere Fläche ausgeübt werden. Zur Erzielung richtiger Durchschnittszahlen sind für jede Prüfung mindestens 10 Probekörper anzufertigen. Das Mittel aus den zehn Proben soll mafsgebend sein.

Langsam bindender Portlandzement soll bei der Probe mit 3 G.-T. Normalsand (s. unten) auf 1 G.-T. Zement nach 28 Tagen Erhärtung (1 Tag an der Luft und 27 Tage unter Wasser) eine Zugfestigkeit von mindestens $K_z = 16$ kg/qcm haben. Die Druckfestigkeit soll mindestens $K = 160$ kg/qcm betragen.

Bei schnell bindenden Portlandzementen ist die Festigkeit nach 28 Tagen im allgemeinen geringer, als vorstehend angegeben. Es soll deshalb bei Nennung von Festigkeitszahlen stets auch die Bindezeit angeführt werden.

Zement, der eine höhere Zug- oder Druckfestigkeit zeigt, gestattet in vielen Fällen einen gröfseren Sandzusatz und hat Anrecht auf einen entsprechend höheren Preis.

Um zu übereinstimmenden Ergebnissen zu gelangen, mufs überall Sand von gleicher Korngröfse und gleicher Beschaffenheit benutzt werden. Diesen **Normalsand** für Deutschland erhält man aus dem gewaschenen und getrockneten Quarzsand von Freienwalde a. d. O., den man zuerst durch ein Sieb von 60 Maschen/qcm (Drahtstärke 0,38 mm) siebt, wodurch ihm die gröbsten Teile entzogen werden, alsdann werden noch mittels eines Siebes von 120 Maschen/qcm (Drahtstärke 0,32 mm) die feinsten Teile aus ihm entfernt. (Spez. Gew. des Normalsandes 1,41.)

[Folgen im Minist.-Erl. von 1887 genaue Regeln über die Anfertigung der Proben und deren Behandlung bei der Prüfung, ergänzt durch den Erlafs von 1902.]

Anweisung für die Ermittlung des Nettogewichtes bei der Abnahme von Portlandzement.

Rund-Erlafs des preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten vom 23. April 1897.*)

Bei der Veranschlagung, Verdingung und Abnahme von Portlandzement ist fortan das Nettogewicht (in kg oder t) zugrunde zu legen.

Die Verpackung kann in Fässern oder Säcken erfolgen. Auf den Verpackungen müssen Brutto- und Nettogewicht sowie Firma oder Marke der betreffenden Fabrik deutlich angegeben sein.

Fässer sollen in der Regel die Normalgröfse von

180 kg brutto = etwa 170 kg netto für ganze Fässer
90 „ „ = „ 83 „ „ „ halbe „
45 „ „ = „ 40 „ „ „ viertel „ haben.

Doch ist auch die Packung in gröfseren Fässern von 200 kg brutto zuzulassen.

Zur Feststellung des Nettogewichtes einer Lieferung soll wenigstens ein Zehntel der gelieferten Fässer oder Säcke nach beliebiger Auswahl des abnehmenden Beamten genau verwogen werden. Hierbei ist zunächst das Bruttogewicht zu ermitteln und alsdann durch Abzug des Gewichtes der Verpackungen das Nettogewicht festzustellen.

*) S. Z. d. B. 1897 S. 205.

Weicht dieses um weniger als 2 vH von dem Gewichte ab, das die Fabrik angegeben hat, so ist das letztere der Abrechnung zugrunde zu legen. Beträgt die Abweichung nach unten mehr als 2 vH, so ist der überschiefsende Teil für die ganze Lieferung in Abzug zu bringen. Uebergewicht wird dagegen nicht bezahlt.

Für die Ermittlung des Gewichtes der Verpackung ist anzunehmen, dafs alle Verpackungen einer Lieferung bzw. (bei gröfseren Lieferungen) einer Sendung von gleichem Gewichte sind; doch ist das Einheitsgewicht aus dem Durchschnitte wenigstens des zehnten Teiles der Lieferung oder der Einzelsendung festzustellen.

Die Hauptversammlung deutscher Portlandzement-Fabrikanten vom 19. Mai 1894 fafste folgenden Beschlufs:

Vom 1. Januar 1895 ab darf für das Gebiet des Deutschen Reiches (mit Ausschlufs der deutschen Kolonien) Portlandzement — abgesehen von Säcken — nur noch in Normalpackung, d. h. in ganzen Fässern zu 180 kg brutto, halben Fässern zu 90 kg brutto und viertel Fässern zu 45 kg brutto geliefert werden. Zulässig ist jedoch noch die in einzelnen Gegenden Deutschlands übliche gröfsere Packung in Fässern zu 200 kg brutto.

Auf jedem Fasse mufs die Gewichtsangabe auf dem die Bezeichnung der Fabrik enthaltenden Zettel gedruckt sein.

---

4. **Andere künstliche Zemente** sind u. a.: **Eisen-Portlandzement** aus etwa 70 vH kalkreichem Portlandzement und 30 vH zu Mehl vermahlenem Hochofenschlackenkies zeigt sich sowohl für Luftbauten als für Bauten unter Wasser vorzüglich geeignet. Hierzu gehört der Kraftzement von Kraft-Kratzwieck.

Schlackenzemente (Permzement, Puzzolanzement) bestehen aus 2 R.-T. geeigneter körniger, staubfein gemahlener Hochofenschlacke und 1 R.-T. zu Pulver gelöschtem Kalk; dieser Mischung werden je nach Beschaffenheit der Schlacke oder des Kalkes 5 bis 10 vH Zuschläge von Puzzolanerde oder anderen Silikaten zugesetzt.*) Nähern sich in ihrer Wirkung unter Wasser dem Portlandzement, bleiben aber bei Lufterhärtung u. a. hinter ihm zurück.

Weifser Zement: von Ransome aus Ton, Kaolin und Kreide, marmorartig; von Berkefeld aus Kieselgur und Kreide; von Heintzel, aus Kreide und Quarz, deren Gemisch heftig geglüht ist und dann mit Wasserglas zu einem dünnen Brei angemacht wird; neuerdings durch Brennen eines Gemenges von Kalkstein und Kaolin unter Zusatz von Feldspat.

5. **Anwendung der hydraulischen Bindemittel** zu Wassermörtel, der auch als Luftmörtel die vorzüglichsten Dienste leistet, zu Beton (Grobmörtel), zu Kunststeinen (Rohrleitungen, Wasserbehältern, Verzierungen) usw.

a) Wassermörtel für Mauern usw.

Zement ganz ohne Sandzusatz, nur selten anzuwenden, dient zum Ausfüllen von Sprüngen, Verstopfen von Quellen, Einspritzen in Hohlräume; ferner zum Rostschutz des Eisens und als bestes Mittel zum Vergiefsen von Eisen in Stein. Sonst (schon aus Rücksicht auf die Kosten) stets Sandzusatz. Feiner scharfkantiger (am besten Gruben-) Quarzsand ist vorzuziehen; aber frei von Lehmteilchen usw. sollen sowohl Sand wie Wasser sein. Schnellbindender Zement mufs

*) Näheres s. Pinkenburg, Ueber Schlackenzement, Z. d. B. 1890 S. 510.

zunächst mit dem trockenen Sande gut vermischt, und dann erst darf das Wasser hinzugerührt werden; langsam bindender Zement kann auch zuerst mit Wasser angerührt und hierauf erst mit trockenem Sande gemischt werden. Sorgfältigstes Durcharbeiten ist erforderlich. Die Menge des Wassers ist so zu bemessen, dafs die Masse tunlichst dickflüssig ist.

Mehr, als vor dem Abbinden verarbeitet werden kann, darf nicht angemacht werden. Da Zement zu seiner Erhärtung viel Wasser bedarf, sind die Steine vor dem Vermauern mit Wasser völlig zu sättigen, die zu verputzenden Mauerflächen nach sorgfältiger Reinigung wiederholt gehörig zu nässen und die Verputzarbeiten (Gesimse, Verzierungen usw.) noch längere Zeit (2 Wochen) nach der Herstellung stets feucht zu halten, um Reifsen und Abblättern zu verhindern.

Durch Mischung von magerem Portlandzementmörtel mit einem geringen Zusatz von fettem Kalkbrei (oder noch besser zu Pulver gelöschtem hydraulischen Kalk) wird seine Dichtigkeit, Druckfestigkeit und Adhäsion am Steine erhöht und seine Erhärtung beschleunigt, u. zw. sowohl unter Wasser als an der Luft. Solcher viel wohlfeilerer verlängerter Zementmörtel eignet sich überall, wo nicht die Festigkeit des fetten Zementmörtels verlangt wird, z. B. für Wölbungen und zum Verputz; er ist gut zu verarbeiten und verleiht dem Mauerwerk beträchtlich gröfsere Festigkeit als Kalk-Sand-Mörtel.

Zementmörtel widersteht hohen Hitzegraden besser und schwindet erheblich weniger als Kalk-Sand-Mörtel.

Mischungsverhältnisse von Zementmörtel (in R.-T.): 1 Zement mit 1 Sand (höchst fett); 1 Zement mit 3 bis 4 Sand (gewöhnlich); 1 Zement mit 5 bis 6 Sand (mager). Eine Mischung von 1 Zement auf 1 Sand gibt etwa 1,5, eine Mischung von 1 : 2 etwa 2,3, von 1 : 3 etwa 3,1, von 1 : 4 etwa 3,8, von 1 : 5 etwa 4,9 vollen Zementmörtel. — Mischungsverhältnis des verlängerten Zementmörtels (in R.-T.): 1 Zement, 5 bis 7 Sand, 1 Kalkbrei oder 1 Zement, 8 Sand, $1^1/_2$ Kalkbrei oder 1 Zement, 10 Sand, 2 Kalkbrei. — Für die 15 bis 20 cm starke Bettung der Asphaltstrafsen genügt eine Mischung von 1 Zement mit 8 bis 10 Grobsand (nebst Wasserzusatz), also i. M. 1 Fafs Zement (von 170 kg netto) auf 1 cbm Grobsand. — Festigkeitsangaben für Zement und Zementmörtel s. S. 401.

Reiner Zement wird eher rissig als mit Sand gemischter und ist daher zum Abdichten nicht so geeignet als Zementmörtel, der bei Mischungen von 1 Zement mit 1 feinem, reinem Sand, oder 1 Zement mit 2 Sand und $^1/_4$ bis $^1/_6$ Kalkbrei, oder 1 Zement mit 3 Sand und 1 Kalkbrei gut wasserdicht bleibt. Schichtstärke 1,5 bis 2,5 cm. Vorzügliche Dichtung und die Fähigkeit, den Oelfarbenanstrich festzuhalten, erlangt die Oberfläche durch Anstrich mit Kefslerschem Zementfluat (s. Gipsfluat S. 593). Da kohlensäurehaltiges Wasser stark einwirkt, müssen die Behälter mancher Wasserwerke, die Staubecken von Talsperren u. a. gut geschützt werden, wozu sich ein Anstrich des Zementputzes mit Siderosthen (s. Rostschutz S. 568), noch besser mit Inertol (P. Lechler in Stuttgart) eignet.

Durch Frost tritt so lange Zerstörung ein, bis der Mörtel abgebunden hat; weshalb möglichst schnell bindender Zement vorzuziehen ist. Anwärmung von Wasser und Sand sowie Anwendung von möglichst wenig Wasser beschleunigen aufserdem das Abbinden.

Puzzolanmörtel, für Bruchstein 1 R.-T. Kalk auf 6 R.-T. Puzzolanerde; für Ziegel 3 : 7, für Putzarbeiten 2 : 3.

b) Beton.

Beton, Grobmörtel zu Gründungsarbeiten unter Wasser oder in nassem Boden, also bei allen Wasserbauten, ferner zu Estrichen (s. Abteil. III, Hochbau), zu den Kunststeinen, zu Decken (zwischen I-Trägern und auf Trägerwellblech), zu ganzen Gebäuden, zu Bogenbrücken*) usw. Zement, am besten Portlandzement, aber auch Trafs u. a., wird mit Sand und mit grobem Kies oder mit Steinschlag, ohne oder mit Kalkzusatz, gemengt und die Masse mit Wasser eben angefeuchtet. Sowohl der Sand (am besten reiner Quarzsand) als auch der Steinschlag (am besten rauhe, scharfkantige Bruchstücke von harten, dichten Steinen) und ebenso der Kies müssen gereinigt und vor dem Mischen leicht angenäfst werden. Gröfse der Kiesel oder Steinschlagstücke nicht über 6 cm, jedoch müssen bis dahin möglichst alle Gröfsen vertreten sein. Mörtel aus Zement und grobem Kies ohne Sand erreicht kaum die Hälfte der Festigkeit, die man bei richtigem Sandzusatz erzielt, und wird nicht undurchlässig.

Wird Zementmörtel sofort nach dem Anmachen unter Wasser gebracht, so fällt seine Festigkeit viel geringer aus, als wenn er an feuchter Luft erhärtet. Sehr verschieden verhalten sich ferner hierbei der schnell und der langsam bindende Zement. Mörtel mit dem ersteren, unmittelbar nach dem Anmachen unter Wasser gebracht, hat nach 24 st bedeutend höhere Festigkeit als solcher mit langsam bindendem Zement. Nach 7 Tagen hat letzterer die Festigkeit des ersteren überholt, nach 4 Wochen sind sie jedoch fast gleich. Beim Erhärten an der Luft zeigt Mörtel mit schnell bindendem Zement nach 24 st ebenfalls höhere Festigkeit, wird dagegen nach 4 Wochen vom Mörtel mit langsam bindendem Zement bedeutend übertroffen. Hiernach vermeide man womöglich, unmittelbar ins Wasser zu betonieren, halte vielmehr vor dem Abbinden des Mörtels das Wasser fern. Zu Arbeiten, die unter Wasser oder bei Wasserandrang ausgeführt werden müssen, nehme man schnell bindenden Zement, andernfalls besser langsam bindenden Zement.

Sehr wichtig ist der Einflufs des Einstampfens. Derselbe Beton, einfach in Wasser mittels Trichter eingefüllt, zeigt nach 4 Wochen nur den dritten Teil der Festigkeit, die er im eingestampften Zustande hat. Gufs- oder Schüttbeton gegen Stampfbeton. Zu Betonierungen unter Wasser versenkt man den (besonders fetten) Beton in Kästen, Säcken oder mittels Rohre und schützt ihn vor strömendem Wasser bis zur Erhärtung durch Spundwände (vrgl. Abteil. III, Hochbau).

Mischungsverhältnisse (in R.-T.) für Betonmauerwerk und Betondecken aus Portlandzement, Sand und Kies: 1 : 2 : 4 = 4,4 Beton; 1 : 3 : 6 = 6,6 Beton; 1 : 4 : 8 = 8,8 Beton; 1 : 5 : 10 = 11,3 Beton; wird Steinschlag statt Kies genommen, so darf der Zusatz nur $^3/_4$ von der Kiesmenge betragen. Ferner für Grundmauern aus verlängertem Zementbeton: 1 Zement, 1 Kalkbrei, 5 Sand, 9 Kies (Strafs-

*) S. Z. f. B. 1896 S. 279. Ferner C. Bach, Versuche über die Elastizität von Beton Z. d. V. d. I. 1895 S. 489.

burger Universität); 1 Zement, 1 hydraul. Kalk, 6 Sand, 10 Kies (Pfeiler der Mainbrücke zu Frankfurt); aus reinem Beton, bei sehr nassem Boden (Hamburg): 2 Zement 5 Sand, 7 Steinschlag.

Für Trafsbeton haben sich folgende Mischungen in R.-T. bebewährt: 1 Trafs, 1 Wasserkalk, 1 Sand, 4 Kies (Rheinschleuse Strafsburg 1900); 1 Trafs, 1 Wasserkalk, $1^1/_2$ Sand, 5 Kies (Hafenneubau Cöln); 1 Trafs, 1 Kalk, 1 Sand und auf je 1 cbm dieses Mörtels 2 cbm Steinschlag (Kriegshafenbau Kiel).

Schlackenbeton, ein magerer Beton aus Kohlenschlacken und Fettkalk, nur zu Ausfüllungen bei Wellblech-Zwischendecken (bis mindestens 5 cm über den Wellen), zu Zwickelausfüllungen (bis über Trägergleiche) bei den Decken aus gewölbten, gestampften Betonkappen usw. Gewicht 750 kg/cbm.

Das Mischen des Betons geschieht, indem Sand und Zement trocken mit Schaufeln durchgearbeitet und die Masse dann mit wenig Wasser gleichmäfsig feucht gemacht wird, worauf man sie mit dem leicht angenäfsten Kies tüchtig durchschaufelt. Beton-Mischmaschinen (z. B. von Bünger & Leyrer in Düsseldorf) arbeiten um etwa ein Drittel billiger als Handmischung und geben ein gleichmäfsigeres Gemenge.*)

Das Gemisch wird, wo nötig in Holzverschalung, schichtenweise aufgefüllt und jede Schicht so lange gestampft, bis sich an der Oberfläche Wasser zeigt. Vor dem Aufbringen einer neuen auf eine bereits abgebundene Schicht ist letztere aufzurauhen und mit einer dünnen Schicht von reinem Zement zu übergiefsen.

Zur Herstellung des **Zementsteins (Kunststeins)** verwendet man besten langsam bindenden Portlandzement, gemengt mit feinstem Sande bis grobem Kiessande, je nach den anzufertigenden Gegenständen. Das Verfahren ist etwa wie beim Stampfbeton und liefert ein dem Kunstsandstein (s. S. 584) ähnliches Erzeugnis. Für besonders glatte Oberflächen bringt man zunächst in die hölzerne, oft mit Zinkblech verkleidete Form als Vorgufs einen etwas flüssigen Brei aus sehr fettem Zementmörtel (1 : 1), der dann an die eingeschlagene trocknere Zusatzmasse seinen Wasserüberschufs abgibt. Erst nach 1 bis 2 Tagen aus den Formen genommen, müssen die Gegenstände noch 1 bis 2 Monate täglich angefeuchtet werden.

Stampfbeton**) findet immer gröfsere Anwendung im Hoch- und Tiefbau [zu Decken, Gewölben, Wänden, Fufsböden, Brunnenringen, zu Rohren für Durchlässe, Kanalisationen und Wasserleitungen, zu Kanal-Einsteigschächten und Regeneinlässen (Gullys), zu Futtermauern, Ufer-, Wehr- und Schleusenbauten, zur Herstellung von Grundmauern, von Bauwerken und Maschinen, zu Behälterbauten allerart usw.]. Aus **Kunststein** werden hergestellt Treppenstufen,

---

*) S. Z. d. B. 1896 S. 15.

) S. **Leitsätze für die Vorbereitung, Ausführung und Prüfung von Bauten aus Stampfbeton, aufgestellt vom Deutschen Beton-Verein 1905. — Vorschriften über die Ausführung von Wänden und Pfeilern in Stampfbeton, Berliner Baupolizei 1905.

Treppenabsätze, Fliesen, Bürgersteigplatten, Pflastersteine, Mauerabdeckplatten, Krippen, Rinnen, Bau-Zierformen, Dachziegel, Zementverblender usw.

Die **Stampfbeton-Rohre** für Kanalisation, Durchlässe und offene Wasserleitungen mit rundem oder eiförmigem Querschnitte (Spitze nach unten, Achsenverhältnis 2 : 3) erhalten innen durch Imprägnierung (z. B. mit Keſslerschem Zementfluat) eine etwa 8 mm starke, wasserdichte öl- und säurefeste Schicht. Sie werden frühestens 3 Monate nach Fertigstellung verlegt, wobei in starken Gefällen die Sohle besonders vor Abnutzung geschützt wird. Dichtung der Verbindungsfalze mittels Teerstrickes und Ton von auſsen, mit Zement von innen. Die fertig verlegten Rohre werden mit lehmigem Kiessande (bei starker Auflast Kiessand mit $^1/_{15}$ bis $^1/_{20}$ Zementsusatz) fest eingestampft. Die Beton-Fabriken verbürgen gewöhnlich eine ruhende Scheitelbelastung von 5000 bis 6000 kg/qm des wagerechten Rohrquerschnittes; jedoch verlegt man bisweilen derartige Rohr-Durchlässe unter 10 m hohen Eisenbahndämmen ebenso sicher wie bei nur 1 m Abstand vom Rohrscheitel bis Unterbau-Oberkante. — (S. die folg. Tafel.)

Stampfbetonrohre (Zementrohre).*)

Lichte Weite cm	Durchfluſs-Querschnitt qcm	Mittlere Wandstärke cm	Nutzlänge m	Gewicht kg/m	Lichte Weite cm	Durchfluſs-Querschnitt qcm	Mittlere Wandstärke cm	Nutzlänge m	Gewicht kg/m
Runde Form (Abb. 18).									
7,5	44,2	2,25	0,8	17,2	35	962,1	4	1,0	143
10,0	78,5	2,25	1,0	21,6	40	1256,6	4,5	1,0	183
12,0	113,1	2,5	1,0	28,5	45	1590,4	5	1,0	229
15,0	176,7	2,5	1,0	34,4	50	1963,5	5	1,0	252
17,5	240,5	3,0	1,0	48,3	60	2827,4	6	1,0	363
20,0	314,2	3,0	1,0	54,2	70	3848,4	6,5	1,0	456
22,5	397,6	3,5	1,0	71,5	80	5026,6	7	0,8	558
25,0	490,9	3,5	1,0	78,3	90	6361,7	7,5	0,8	670
30,0	706,9	3,5	1,0	92,1	100	7854,0	8	0,8	792
Ei-Form (Abb. 19).									
20/30	459	3,5	1,0	90	60/90	4135	9	1,0	684
25/37,5	718	4,0	1,0	127	66,7/100	5105	10	1,0	844
30/45	1034	4,5	1,0	171	70/105	5628	10,5	0,8	931
35/52,5	1407	5,5	1,0	244	80/120	7351	12	0,8	1216
40/60	1838	6,0	1,0	304	93,3/140	10005	14	0,7	1655
45/67,5	2326	7,0	1,0	400	100/150	11485	15	0,5	1900
50/75	2871	7,5	1,0	475	110/165	13897	16,5	0,5	2300

*) Ueber Prüfung von Ton- und Zementrohren vrgl. die vom Internat. Kongreſs f. d. Mater.-Prfg. d. Technik Brüssel 1906 angenommenen Vorschläge von M. Gary, Bericht 17 d.

Ist das eiförmige Profil (Abb. 19) nur bis zur Kämpferhöhe mit Wasser angefüllt, so ist der Wasserquerschnitt $= 3{,}02333\, r^2$, der benetzte Umfang $= 4{,}7883\, r$ und der hydraulische Radius $= 0{,}631\,4\, r$.

Die kreisförmigen Stampfbetonrohre von 35 bis 100 cm Lichtweite erhalten den in Abb. 18 gegebenen Querschnitt; die kleineren Rohre sind im Querschnitte einfach kreisringförmig. — Für die eiförmigen Rohre gilt Abb. 19; hierbei ist für das vollaufende Profil der Wasserquerschnitt

$$F = 4{,}594\,13\, r^2,$$

Abb. 18.

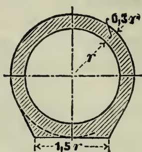
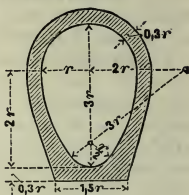


Abb. 19.



der benetzte Umfang $u = 7{,}929\,89\, r$ (also der hydraulische Radius $F : u = 0{,}5793\, r$, der Betonquerschnitt $= 3{,}0392\, r^2$ und das Rohrgewicht $= 0{,}76\, r^2$ kg/m (spez. Gew. $= 2{,}5$).

Bei **Berechnung des lichten Rohrquerschnittes** nehme man für mittlere Niederschlagverhältnisse bei mäfsigem Leitungsgefälle (1 : 300) 300 qcm auf 1 ha zu entwässernde Fläche, so dafs z. B. ein rundes 50 cm-Rohr von 1963,5 qcm lichtem Querschnitte für 1963,5 : 300 = 6,54 ha Fläche ausreicht.

Eisen-Beton.*) Der vielfach angewendete **Monierbau** aus fettem Zementmörtel (1 Zement : 3 Sand bis 1 : 1) mit Einlage von Eisenstäben oder Drahtgeflechten oder neuerdings mit Vorteil von **Streckmetall** (Schüchtermann & Kremer, Dortmund), vereinigt die Druckfestigkeit des Zementmörtels ($k = 20$ bis 40 kg/qcm) mit der Zugfestigkeit des Eisens ($k_z = 1200$ kg/qcm). Zu ebenen und gewölbten Decken, zu Wänden, Treppen, Behältern, Brücken usw. angewendet, liefert er tragfähige, vorzüglich feuersichere Bauten bei grofser Raumersparnis; (vrgl. Abteil. III). Die Adhäsion des Zementes an Eisen beträgt 40 bis 47 kg/qcm, so dafs selbst bei 10-facher Sicherheit 4 bis 5 kg/qcm Haftspannung mit Sicherheit gerechnet werden können; die Schubspannung soll 4,5 kg/qcm nicht überschreiten. Beim **Hennebiquebau** und vielen verwandten Konstruktionen werden auch die Unterzüge und die Stützen in gleicher Weise hergestellt und mit den Decken verbunden. — Ferner Eisenbeton-Pfähle nach Hennebique u. a. mit vielen Vorzügen vor Holzpfählen.

Die Akt.-Ges. für Beton- und Monierbau, Berlin W., liefert ferner runde und eiförmige Monier-Rohre mit Eisenringen (für grofse Belastungen) oder mit Eisengeflechteinlagen (dünnwandige, für mittlere Lasten); diese Rohre übertreffen die vorstehend aufgeführten Stampfbetonrohre durch geringere Wandstärken und Gewichte, bei ungefähr gleichen Tragfähigkeiten und Preisen.

---

*) Näheres über **Monierbau** s. im Z. d. B. 1886, S. 88, 144, 462; 1887, S. 252; 1888, S. 83; 1889, S. 49, 114; 1890, S. 164, 267; 1891, S. 51, 208, 523; 1892, S. 149, 489; 1893, S. 252, 444; 1895, S. 9, 32, 428, 481; 1896, S. 45, 227, 288, 542; 1897, S. 150, 172, 430; 1898, S. 368, 380. — **Koenensche Voutenplatten-Decke** s. ebendas. 1897, S. 50, 579; 1898, S. 591.

Die vielen schweren Unglücksfälle im Eisenbetonbau weisen auf die Notwendigkeit der gewissenhaftesten Berechnung*) und Ausführung durch geschulte Kräfte hin, wie solche nur gröfseren Firmen zu Gebote stehen.

VI. GLAS.**)

Wichtigste Eigenschaften: Durchsichtigkeit, Undurchlässigkeit für Luft und Wasser (daher zu Trockenschichten geeignet), Härte und Glanz, Unveränderlichkeit, schlechte Leitungsfähigkeit für Wärme und Elektrizität (Isolierglocken); aufserdem Leichtigkeit und Mannigfaltigkeit der Formgebung, Färbung.

Glas ist ein durch Zusammenschmelzen von Kieselsäure mit Kalk (oder Bleioxyd) und Natron oder Kali hergestelltes Gemenge von mehreren Silikaten, meist kieselsaurem Kalk und kieselsaurem Natron; spez. Gewicht i. M. 2,6 (vrgl. S. 510). Glas ist bei Weifsglut ganz dünnflüssig, bei Rotglut teigartig und zähe, so dafs es im ersteren Zustande gegossen, im letzteren geblasen werden kann. Nur wenn es nach der Formgebung gut „gekühlt" wurde (die noch rotglühenden oder wieder bis dahin erhitzten Gegenstände werden in einen heifsen Raum gebracht, mit dem sie ganz allmählich abkühlen), ist seine grofse Sprödigkeit und Zerbrechlichkeit im erforderlichen Grade herabgemindert. Härte und Glanz werden durch den Kalkgehalt vergröfsert, durch Bleioxyd verringert. — Das Blasen des Glases geschieht immer mehr auf mechanischem Wege mit Luft oder mit Wasserdampf, letzteres nach Sievert (Dresden).

Festigkeitsangaben für Glas s. S. 400 und 407. Durch verschieden starke Zusammenziehung bei der Abkühlung erhält das Glas aufsen Druck- und im Inneren Zugspannung. Sein Widerstand gegen Druck ist bedeutend gröfser als der gegen Zug; die Oberflächenhaut dient ihm zum Schutze, die natürliche (nicht die geschliffene) Oberfläche soll daher außen liegen. Noch widerstandsfähiger ist die Oberfläche bei dem (zwischen Metallplatten) gekühlten „Prefshartglas" von Siemens, bei dem allerdings (wie auch noch mehr bei dem de la Bastieschen „Hartglas") jeder Eingriff in das Innere leicht die gänzliche Zerstörung hervorruft.

Glas von geringer Güte leidet durch Regen und Luft, besonders in der Wärme, indem es erblindet (Treibhäuser u. a.) oder in Farben schillert und abblättert. Aber auch gutes Glas leidet schon, wenn es verpackt an feuchten Orten länger steht, oder gar die Verpackung von Seewasser durchfeuchtet ist; daher ist Glas stets luftig und trocken aufzubewahren. Gutes Glas soll weder von scharfen Säuren noch Basen angegriffen werden; nur Flufssäure zerstört jedes Glas vollkommen.

---

*) S. die Bestimmungen für die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten. Rund-Erlafs des preufs. Ministers der öffentlichen Arbeiten vom 14. April 1904. — S. auch Z. d. B. 1904 S. 253.

**) S. Baukunde des Architekten I. Bd., 2. Teil; Berlin 1891. — Th. Landsberg. Glas- und Wellblechdeckung; Darmstadt 1887.

Zu baulichen Zwecken sind die wichtigsten Sorten folgende:

1. **Deutsches Glas** [auch vielfach als rheinisches bezeichnet], **Fensterglas,***) in den rheinischen Hütten, aber ebenso in Westfalen, Schlesien, Sachsen usw. durch Blasen hergestellt, beherrscht jetzt fast ausschliefslich den Markt in Deutschland. Die gangbarsten Sorten werden als sogen. $^4/_4$-, $^6/_4$- und $^8/_4$-Glas gehandelt, welche Bezeichnungen den Stärken 2, 3 und 4 mm oder den Gewichten 5, 7,5 und 10 kg/qm entsprechen. Der Einheitspreis wächst mit der Gröfse der Scheiben, jedoch nicht nach dem Flächeninhalte, sondern nach der Summe aus Längen- und Breitenabmessung, sogen. „addierte Zentimeter". Die Gröfse geht bis zu 300 add. cm und mehr, bei den stärksten Sorten von 4,5 bis 5 mm Stärke nur bis 164 add. cm, so dafs hierfür das gröfste Tafelmafs etwa 100 . 64 oder 66 . 98 usw. wäre.

(Bei den Bahnhoftshallen der Berliner Stadtbahn ist geblasenes Glas, 5 mm stark, in Tafeln von 50 . 85 cm verwendet worden.)

Von den vier Güteklassen oder „Wahlen" werden gewöhnlich bei besseren Bauten die 2. und 3. Wahl benutzt. Die 1. Wahl ist ganz rein und auch sonst tadellos. Die 4. Wahl dient nur zu untergeordneten Zwecken, wie bei Kellern, Speisekammern, Bodenräumen, Treibhäusern, Oberlichtern usw.; ihr Preis ist für $^4/_4$-Glas 1,70 bis 2 *M*/qm. Die Bau-Preise für die 2. und 3. Wahl sind $^4/_4$-Glas bis 150 add. cm rd. 2,40 *M*/qm, bis 210 add. cm rd. 2,80 *M*/qm, bis 260 add. cm rd. 3,40 *M*/qm; $^6/_4$-Glas kostet 40 vH, $^8/_4$ 80 vH mehr als $^4/_4$-Glas. Die Reparatur-Preise betragen das Doppelte der Baupreise und mehr. Unter „Doppelglas" wird öfter auch $^6/_4$-Glas verstanden. — Weiteres s. Abt. III, Hochbau.

2. **Rohglas,** gegossen, wird meist in Stärken von 3 bis 13 mm verwendet. Noch stärkere Sorten von 20 bis 30 mm und mehr (bis 60 mm) werden zu Fufsboden-Einlagen benutzt; wegen der bei der Kühlung entstandenen, unregelmäfsigen Spannungen springen die sehr starken Platten öfters bei plötzlicher Temperaturänderung (z. B. Regen auf die sonnenbeschienene Scheibe). Die Tragfähigkeit des Rohglases ist hoch (vrgl. S. 400 und 407), schon eine 20 mm starke Platte kann, auf 1 m freiliegend, mit leichtem Schritte begangen werden; es ist jedoch gegen Stöfse u. drgl. sehr empfindlich, weshalb man die Platten in Abständen von 40 bis 55 cm durch Sprosseneisen unterstützt (s. Abteil. III, Hochbau). Die gewöhnliche Stärke für Be-

---

*) Der Runderlafs des preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten, betreffend die Bedingungen für die **Lieferung von Fensterglas,** vom 28. Juni 1894, bestimmt folgendes:

1. Für die allgemeine Bezeichnung des für gewöhnliche Zwecke zu verdingenden Glases ist der in der Technik übliche Ausdruck „rheinisches Glas" zu gebrauchen, ohne damit das Verlangen eines Ursprungsnachweises zu verbinden.

Hierzu wird bemerkt, dafs die Bezeichnung „rheinisches Glas" nur als ein Ausdruck für die Herstellungsweise, wie solche in den verschiedenen deutschen Landesteilen üblich, anzusehen ist, nicht aber eine besondere Kennzeichnung des aus rheinisch-westfälischen Glashütten hervorgehenden Fabrikates, so dafs eine unberechtigte Monopolisierung dieser Glashütten ausgeschlossen ist.

2. Die allgemein in der Praxis gebräuchliche, der geringeren oder besseren Güte entsprechende Gruppierung als Glas I., II. oder III. Sorte bzw. als weifses, halbweifses oder grünes Glas ist zur allgemeinen Kennzeichnung der auszuschreibenden Lieferung beizubehalten, dsgl. auch die Abstufung nach den Stärkegraden $^4/_4$, $^6/_4$ oder $^8/_4$, entsprechend den Durchschnittstärken von 2, 3 und 4 mm.

dachungen, die wesentlichste Anwendung des Rohglases, ist 5 mm; Stärken über 7 mm sind selten. Es kommt glatt, gerautet oder geriffelt (was auch das Ausgleiten verhindert) und neuerdings auch mit eingebrannten Emailfarben verziert vor.

Preise für weifses Rohglas (eingesetzt): 4 bis 6 mm stark 5 bis 6 M/qm, 13 mm 10 bis 15 M/qm, 20 mm 25 bis 30 M/qm, 26 mm 35 bis 40 M/qm.

3. **Drahtglas** der Akt.-Ges. für Glasindustrie, vorm. Fried. Siemens, Dresden, ist Glas mit einer darin völlig versenkten, also nicht rostenden Netz-Einlage aus Eisendraht, besitzt etwa die 1,5-fache Biegungsfestigkeit des Rohglases*) und gestattet geringe Stärken [kann schon bei 12 mm völlig sicher begangen werden]; behält, selbst wenn es durch Stöfse oder Gluthitze Sprünge erhalten hat, noch völlig sicheren Zusammenhalt, ist also feuersicher (1904 in Baltimore bewährt) und diebessicher. Der Lichtdurchgang wird bei 1 mm Drahtstärke und 7,5 mm Maschenweite um 27 vH vermindert. Empfiehlt sich zu Bedachungen und Fufsböden (Oberlichtern), macht Schutzgitter überflüssig. Zu Schutzgläsern für Wasserstände, zum Abschlufs von Lichtöffnungen in Treppenhäusern, Lichthöfen, feuersicheren Türen, Brandmauern u. drgl. Stärken 8 bis 10, 15, 20, 25 bis 60 mm. Die Tafeln (bis 100 . 60 cm grofs) lassen sich nicht schneiden, müssen daher genau nach Mafs bestellt werden. Preis bei 8 bis 25 mm Stärke 6 bis 40 M/qm.

Drahtglas der Manufakturen: Schalke (Westfalen), Stolberg (Rheinland), Waldhof b. Mannheim, Gerresheim (Rheinland) und Altwasser (Schlesien) sowie Siemens (Dresden) hat dem vorigen gegenüber den Vorzug schneidbar und wegen des dünneren Drahtes mehr lichtgebend zu sein, ist aber wegen des seitlich offenen Drahtes dem Rosten ausgesetzt. Wird geliefert in Stärken von rd. 4 bis 9 mm glatt und gerippt, von 10 bis 15 mm nur glatt, u. zw. als Tafeln von 300 . 100 cm und als Fufsbodenplatten von geringeren Gröfsen in Stärken von 20 bis 50 mm. Preis bis 9 mm Stärke 4 bis 5 M/qm, für gröfsere Stärken rd. 1 M/mm, also für 15 mm 15 M/qm.

4. **Spiegelglas** wird wie Rohglas durch Giefsen, aber aus einem feineren und bleihaltigen Glassatze hergestellt und dann auf beiden Seiten geschliffen und poliert; wegen des Verlustes der natürlichen Oberfläche und auch wegen des Bleigehaltes von rd. 2 vH ist es weicher und schwieriger zu behandeln. Von den drei „Wahlen“ dienen die 1. und 2. zu Spiegeln (jetzt meist mit Silberbelegung), die 2. zu Schaufensterscheiben u. drgl. Stärke 4 bis 8 mm; wenn verlangt, auch stärker, Tafelgröfsen bis 4 . 5 m und darüber.

Die Preise der Spiegelglasscheiben, mit der Gröfse sehr erheblich wachsend, nach dem Vereins-Preiskurant von 1907, z. B. für Gröfsen von 0,5 qm 22 M/qm, von 2 qm 28 M/qm, von 4 qm 29 M/qm, von 6 qm 31 M/qm, von 13 qm 38 M/qm.

Gegen die Ansätze dieser Preistafel wird je nach der Geschäftslage nach Prozenten abgeboten; i. J. 1904 stand der Nettopreis 25 bis 30 vH unter jenen Preisen. — Für das Einsetzen usw. ist hierzu ein Betrag von 30 bis 40 vH der Netto-Sätze zu rechnen.

---

*) S. E. Hartig, Civil-Ingenieur Bd. 38 Heft 3 ferner C. Mühlke Drahtglas Z. d. B. 1892 S. 246.

5. **Prefshartglas** der Akt.-Ges. für Glasindustrie, vorm. Fried. Siemens, Dresden, besitzt grofse Biegungsfestigkeit, so dafs z. B. Oberlichter aus sehr dünnen (2 bis 4 mm starken) Platten hergestellt werden können. Dieses Glas kann aber nicht mit dem Diamant usw. geschnitten werden und ist daher genau nach Mafs zu bestellen. Wegen der kleinen Abmessungen der Platten (0,2 bis 0,5 qm) gibt es viele Fugen und Sprossen.

6. **Kathedralglas,** gegossenes, 2 bis 3 mm starkes, oft farbiges, auch geflammtfarbiges Rohglas mit unregelmäfsiger Oberfläche; in mehreren Hütten (Wiesau in Schlesien, Zwiesel in Niederbayern) für Kirchenfenster und Profanzwecke hergestellt. Dämpft das Licht und ist wenig durchsichtig, ohne matt zu sein. In Tafeln von rd. 0,7 . 1,5 m; Preis weifs 2,5 ℳ/qm, getönt 3 ℳ/qm, farbig 4 ℳ/qm.

Aehnlich, aber besonders schön und auch kostspieliger ist das amerikanische **Opalescentglas** (K. Engelbrecht in Hamburg), das in Bleieinfassung trefflichen Ersatz für Glasmalerei abgibt. Preise 1,50 bis 4 ℳ/kg. Wird jetzt auch in Schlesien hergestellt.

Alle diese Gläser können ganz oder in Mustern mattiert werden, u. zw. durch Aetzen mit Flufssäure oder durch Schleifen oder (minderwertig, da leicht schmutzend) durch das Sandstrahlgebläse. Das erste Verfahren ist am teuersten (in einem oder mehreren Tönen 10 bis 50 ℳ/qm ohne Glas), gibt aber eine glatte, wenig schmutzende Oberfläche; das dritte ist schon für 0,75 ℳ/qm ausführbar. — Die Färbung des Glases geschieht mittels verschiedener Metalloxyde in allen möglichen Tönen, u. zw. entweder in der ganzen Masse oder oberflächlich durch Ueberziehen ungefärbten Glases mit farbigem (sogen. Ueberfangglas).

Die Verbindung mit Holz und Eisen durch Glaserkitt s. S. 610. Zu Bleiverglasungen werden verwendet: Kathedralglas, Ornamentglas (gemustert, auch farbig), Antikglas, Butzenglas (geblasen), farbiges Flachglas, Ueberfangglas, Opalescentglas, Glassteine. Preise 15 bis 80 ℳ/qm und höher, mit Glasmalerei bis 500 ℳ/qm. — Viel fester gefafst ist das Glas bei der neuen Elektroverglasung, die deshalb u. a. in Warenhäusern grofse Brandsicherheit bietet.

Die **Luxfer-Prismen** (Deutsches Luxfer-Prismen-Syndikat G. m. b. H. Berlin S.) dienen zur Erhellung dunkler Räume mit aufserordentlichem Erfolg. Diese weifsen Glasfliesen von 10 cm im Geviert, deren innere Seite mit parallelen prismatischen Querleisten versehen ist, werden auf elektrolytischem Wege durch sehr feine Kupferleisten fest verbunden: Elektroverglasung. Auswahl des Prismenwinkels je nach der Richtung des verfügbaren Lichtes. Die Tafeln werden lotrecht vor die Fenster oder an deren Stelle gesetzt oder als Schirmdächer mehr oder weniger schräg je nach dem Zenithwinkel aufsen angebracht. Für Räume unter der Erde sind die Multiprismen und besondere Glasfliesen geeignet. Von grofser Festigkeit und bedeutendem Widerstand gegen Feuer. Preis einschl. Aufstellung rd. 85 bis 90 ℳ/qm. Zu Oberlicht und Dach dienen die Luxfer-Scheiben bis zu 2,5 . 1,1 m, welche auf eigens konstruierten eisernen Sprossen kittfrei und beweglich, dabei völlig wasserdicht verlegt werden. Preis der Tafeln

15 ℳ/qm, der Sprossen 3 bis 4 ℳ/m. — Wichtige Ausführungen u. a. Berlin: Zeughaus, Untergrund-Bahnhof, Warenhäuser.

Glasbausteine „Falconnier" (Adlerhütten A.-G. Penzig, Schlesien) sind flaschenartige, geschlossene Glaskörper von solchen Formen, dafs sie sich ohne Zwischenräume zum Schliefsen von Maueröffnungen, Decken von Dächern usw. zusammenfügen lassen. Auch in Farben, sowie in halben und dreiviertel Steinen erhältlich. Mörtel: 3 T. Sand, 1 T. Zement mit etwas Kalkbrei. Etwa gebrochene Steine leicht auswechselbar. Ventilatoren aus Blech, an Stelle eines Steines zu setzen. Von den gangbarsten Sorten gehen rd. 55 Stück auf 1 qm; Preis des Steins weifs 30 bis 35 ₰. Für Brandmauern u. a. Zwecke werden sie mit Drahtmantel geliefert (10 cm und 16 cm im Geviert).

Zu lichtgebenden, aber undurchsichtigen Scheidewänden in Verkaufs-, Wirts- usw. Räumen, zu blinden Fenstern, für Räume, die auf gleicher Temperatur zu halten sind (Gärtnerei, Kühlhaus).

Hartglasbausteine „Faust" (Sächsische Glaswerke A.-G., Deuben), rechteckig, hohl und unten offen, von solchen Abmessungen, dafs sie mit Normalsteinen in Verband gehen, übereinander und seitlich ineinander greifend; auch zu halb- und viertelsteinigen Wänden. Weifs und farbig. $K = 32,6$ kg/qcm. Verwendung zu den gleichen Zwecken wie vorige. Preis für 59 Stück, die auf 1 qm gehen, weifs 17,70 ℳ. Auch Dach-, Fufsboden- und Wandplatten aus demselben Glas.

Aehnlich zu verwenden sind die **Vitral-Glasbausteine** (von Streit in Berlin).

Keramoplatten Patent Garchey (Adlerhütten A.-G. Penzig, Schlesien), aus glasiger Masse, auch Glasabfällen, aber undurchsichtig und zähe hergestellte Platten von der Härte des Korunds (9), empfehlen sich zu Fufsbodenbelag (Trottoir und Pflasterung), Wandverkleidung (auch poliert), als Fassadenverzierungen in verschiedener Färbung und Oberflächenbehandlung. Stärke 2 und 3 cm. Druckfestigkeit > 2000 kg/qcm. Preise 8 ℳ, 10 ℳ, poliert 18 ℳ/qm.

Prüfung des Glases: 1. auf Farblosigkeit: Eine oder mehrere Scheiben werden auf einen weifsen Papierbogen, diesen teilweise bedeckend, gelegt und der Abstich geprüft; 2. auf Blasen, Schlieren, Wellen u. drgl.: Bei einem Lieferungsvertrage ist eine Probescheibe von der ungefähren Gröfse der zu liefernden Scheiben zugrunde zu legen; 3. auf Haltbarkeit: Die Probe wird, von einer Glocke dicht überdeckt, den Dämpfen stark rauchender Salzsäure 24 st ausgesetzt und dann in völlig reiner, staubloser Luft 24 st getrocknet. Sie darf nicht den geringsten weifslichen abwischbaren Anflug aufweisen.

Da bisweilen farbloses Glas durch längere Einwirkung der Sonne bläulichrot wird, ist es für Gemäldegalerien, photographische Ateliers usw. auf seinen Mangangehalt zu untersuchen, wovon schon 0,1 vH jene Wirkung ausübt. — Windschiefe, verbogene oder mit Haarrissen behaftete Tafeln sind auszuscheiden.

VII. KAUTSCHUK UND GUTTAPERCHA.*)

1. **Kautschuk.** Gereinigtes und getrocknetes Gummi findet unvulkanisiert Verwendung als sogen. Paragummiband zur Isolation von metallischen elektrischen Leitern. Vulkanisiert, d. h. nach vorheriger Reinigung und Trocknung mit 2 bis 35 vH Schwefel vermischt und dann unter Druck einer Temperatur von 120 bis 150° C ausgesetzt, bildet es, je nach Vulkanisationszeit und Schwefelmenge, Weich- oder Hartkautschuk. Diese besitzen grofse Elastizität und Festigkeit, Luft- und Wasserbeständigkeit, gröfste Isolation gegen Elektrizität und Beständigkeit gegen eine grofse Anzahl von Säuren und Laugen.

Die Elektrotechnik verlangt für Schwachstrom hohe Isolation, für Starkstrom aufser vollkommener Isolation hohe Wärmebeständigkeit, Festigkeit und Unveränderlichkeit bei allen Lufttemperaturen, neuerdings auch eine gewisse Unverbrennbarkeit, so dafs das Isoliermaterial, wenn angebrannt, von selbst wieder verlischt (entsprechend § 3c der vom „Verb. dtsch. Elektrot." herausgegebenen „Sicherheitsvorschriften f. elektr. Starkstromanlagen"). Hierfür kommen vorwiegend harte und lederharte Kautschukfabrikate in Betracht. Reines Hartkautschuk (Hartkautschuk von Dr. Heinr. Traun & Söhne) vom spez. Gew. 1,15 besitzt nach Feststellung der physik.-techn. Reichsanstalt einen spezifischen Leitungswiderstand $W = 565667 \cdot 10^6$ Megohm-cm, d. i. 1257-mal**) soviel als Guttapercha und 28-mal soviel als Flintglas. Für dasselbe Produkt war nach Ausweis der mechan.-techn. Versuchsanstalt zu Charlottenburg $K_z = 6$ kg/qmm, $\varphi = 1{,}5$ vH, $\psi = 11$ vH; bei Druckfestigkeit waren die Spannungen an der Quetschgrenze $\sigma_f = 5{,}8$ kg/qmm, an der Bruchgrenze $K = 40{,}6$ kg/qmm. Letztere ging aber in der Wärme (bei 140 bis 150° C) auf 5 kg/qmm zurück. Dagegen hat das Dr. Traunsche sogen. Eisengummi vom spez. Gew. 1,5, welches nach Ausweis der oben genannten Anstalt mindestens $158387 \cdot 10^6$ Megohm-cm spez. Leitungswiderstand, d. i. das 352-fache der Guttapercha besitzt, folgende Festigkeitszahlen: für Zug $K_z = 3{,}6$ kg/qmm, $\varphi = 0{,}1$ vH, $\psi = 0{,}5$ vH; für Druck $\sigma_f = 8{,}7$ kg/qmm, $K = 22{,}5$ kg/qmm; letztere nimmt aber bei Erwärmung bis 160° nur minimal ab. Damit entpricht dieses Gummi allen Anforderungen für elektrische Leitungen von hoher Spannung (Voll- und Strafsenbahnen).

Verwendung finden Weichkautschukfabrikate aufser für Luftballons und in der Fahrrad- und Automobil-Industrie im Maschinen-, Kessel- und Röhrenbau als Dichtungsmittel, z. B. als Ventilklappen, Membranen, Manschetten. Lederhartes Kautschuk auch zum Aus- und Umkleiden von Rohrleitungen. Hartkautschuk zu Ventilscheiben, Stopf-

*) S. Dr. Chr. Heinzerling u. Wilh. Pahl in den Verhandlungen des Ver. z. Bef. d. Gewerbfl. 1891; Dr. Eugen Obach, Die Guttapercha, Dresden 1899; Ed. Debes, Vortrag vor der Schiffbautechn. Gesellschaft Nov. 1900 und Z. d. V. d. I. 1901.

**) S. Uppenborn, Elektrot. Kal. 1904 S. 146.

büchsen, Kolbenringen, Wassermessern, Jenkinsventilen, Zeigerrädern usw. bei Dampfheizungen. Lederhartes und hartes Kautschuk zu ober- und unterirdischen Isolatoren (Weitspann-, Wirbel- und Schnallenisolatoren), zu Schaltergriffen, zum Ueberziehen von Werkzeugen für die Elektrotechnik, auch von Nägeln und Schrauben, zu einfachen und gepanzerten Isolierröhren für sichere Verlegung elektrischer Leitungen, zu Akkumulatorenkästen, zu den sogen. Ferronitnägeln (ohne Eisen, nicht unter 6 kg/qmm Druckfestigkeit). Zu Rohrverbindungen, Krümmern, Hähnen und Pumpen für chemische Fabriken. — Im Schiffbau dient weiches, lederhartes und hartes Kautschuk zum Bekleiden von Schiffswellen, Reelings, zum Auskleiden von Rohrleitungen, zum Schutz elektrischer Leitungen, zu gepanzerten Saug- und Druckschläuchen, Fufsmatten, Lukendichtungen usw.

2. **Guttapercha** wird wie Gummi aus dem erstarrten Milchsaft gewisser Tropenbäume gewonnen und die rohe Masse dann vielfach gereinigt. Spez. Gew. rd. 1,0. Bei 55 bis 60^0 wird sie weich und so plastisch, dafs sie zu Röhren, Fäden, Bändern ausgezogen werden kann, worauf sie beim Erkalten die feinsten Details der Form beibehält. Elektrisch ragt sie durch Isolierfähigkeit hervor. Sie ist unempfindlich gegen konzentrierte Laugen und verdünnte Säuren. Unverwüstlich unter Wasser.

Verwendung weitaus am meisten in der Schwachstromtechnik zur Isolation von Untersee- und unterirdischen Kabeln, zu Schläuchen, Pumpen, Spritzen, Flaschen für chemische, medizinische und andere Zwecke, zu Abdrücken, Klischees, zu Zahnplomben, zur Anfertigung wasserdichter Gewebe.

VIII. WASSERGLAS, KITTE, ASPHALT, DACHPAPPE.

1. Wasserglas.*) Kieselsaures Kali oder Natron, u. a. durch Schmelzen von Quarzsand und Pottasche oder Soda hergestellt, ist in Wasser löslich. Dicke, ölige, ätzende Flüssigkeit mit 33 oder mit 66 vH Wasserglas; wohlverschlossen aufzubewahren, da sonst die Kohlensäure der Luft zersetzend wirkt. Aufser dem Kali- und dem Natronwasserglas hat man ein Doppelwasserglas, ferner das neue, gut empfohlene Artussche Kalikalkwasserglas.

Anwendungen: Schutz für Holz, Pappe, Zeug gegen Feuer, auch Schwamm und Wurmfrafs. Kalk- und Zementputz, noch feucht mit verdünntem Kaliwasserglase (1 : 2) überstrichen, erhält eine sehr harte, gegen Feuchtigkeit widerstandsfähige Oberfläche (Waschküchen, Wetterwände). Aehnlich wird der Untergrund hergestellt für das stereochromische Malverfahren. Zum Silikatisieren der weichen Pariser Kalksteine. Ein wichtiges Mittel zur Herstellung von Kitten.

*) Näheres s. H. Zwick, Das Wasserglas, seine Bedeutung für die Industrie: Zürich 1877.

Zum Verlegen der Xylolithplatten (s. S. 586) dient ein aus Kaliwasserglas von 34⁰ Baumé (11 *l*), Schlämmkreide (7 kg), scharfem Sande und wenig Portlandzement hergestellter, schnell erstarrender Brei.

2. Kitte.*) Die betreffenden Flächen sind völlig zu reinigen, der Kitt ist in dünner, gleichmäfsiger Schicht aufzutragen und vor der Erhärtung jede Erschütterung fernzuhalten.

1. Käsekitt. Zu Pulver gelöschter Kalk mit feinem Sande oder Ziegelmehl (1 : 1) vermischt und mit Wasser zu steifem Mörtel angemacht, dann mit dreifacher Menge Käsequark (durch Abpressen von der Molke erhalten, jetzt auch als trockenes Pulver im Handel) verrührt; guter Steinkitt. Aehnlich für Steinfugen der Zementkitt aus Zementpulver mit $^1/_4$ Ziegelmehl, mit saurer Milch zu zähem Teige verarbeitet. Holzkitt: Gepulverter Aetzkalk mit zerriebenem, trockenem Quark (1 : 1) gemengt und mit 1 G.-T. Eiweifs verrührt.

2. Oelkitt. Leinölfirnis mit Bleimennige oder Bleiglätte, zusätzlich Kreide, Ton usw., gemischt. Glaserkitt besteht aus Leinölfirnis und Schlämmkreide, für besondere Zwecke hierzu noch Bleimennige. Verhärteter Glaserkitt wird aufgeweicht mit Kalilauge und Schmierseife. — Zur Beseitigung nasser Stellen in Mauern dient Mastixzement, d. i. Kalksteinpulver, feiner Sand, Bleiglätte mit Leinölfirnis durchgearbeitet. — Zum Belegen von Terrassen, Treppen usw. wird Oelzement verwendet, d. i. Schamottemehl, feinste Bleiglätte und heifses gekochtes Leinöl.

3. Harzkitt, wasserbeständig, verträgt aber keine Hitze. Zusammensetzung (in G.-T.) für Holzfugen: Kolophonium (2) und Ziegelmehl (1). — Steinkitt: Pech (2), Kolophonium (1) mit Mennige (1) und Ziegelmehl ($^2/_5$). — Brunnenmacherkitt: Ziegelmehl (2) in siedend heifsem Teer (1) eingerührt.

4. Glyzerinkitt aus Bleiglätte und wenig verdünntem Glyzerin, vorzüglich gegen Laugen, Säuren, Petroleum usw.

5. Wasserglaskitt. Wasserglas mit Kreide gibt eine wasserfeste, harte Masse. Für Steine: Wasserglas mit Roman- oder Portlandzement, sehr schnell erhärtend. Für Metalle, Stein und Holz: Wasserglas, Kreide und Zinkstaub.

6. Rostkitt (für Eisen auf Eisen oder Stein auf Eisen): Schwefelblumen (1) und Salmiak (2) unter stetem Rühren mit Wasser (oder Essig) bei Zusatz von Eisenfeilspänen zu einem steifen Brei gemengt.

7. Kitt für Holz (oder Glas) auf Eisen: Gepulverter Bimsstein (oder Kreide) mit gleichem Gewichte Schellack zusammen geschmolzen und heifs aufgetragen.

8. Magnesiakitt. Gebrannte Magnesia in 30-prozentiger Magnesiumchloridlösung verrührt, erhärtet zu steinharter Masse (Sorels Zement). Dient zum Xylolith u. a. sowie zum Inkrustatmarmor, auch zu gewissen Mühlsteinen.

9. Kitte für Eisen in Stein, zum Dichten von Rohren usw.: Reiner Portlandzement; ferner Spenzemetall, ein Gemisch von Schwefel mit Schwefelmetallen, Schmelzpunkt 160⁰, und der Patent-Metall-Zement, Schmelzpunkt 119⁰, sehr dünnflüssig werdend,

*) Näheres s. Leonhardt, Kittfabrikation; Halle a. S., 1883.

Druckfestigkeit $K \sim 1000$ kg/qcm. Die beiden letzteren sind widerstandsfähig gegen Wasser, Säuren und Oele.

3. Asphalt wird sowohl das harzige Erzeugnis (Erdpech) als auch der davon durchdrungene natürliche Asphaltstein (d. i. ein Kalkstein mit etwa 10 vH Asphaltgehalt) genannt, aus dem das Erdpech ausgeschmolzen wird. Goudron besteht aus Trinidad-Asphalt mit 25 vH Rückständen aus der Destillation des Petroleums; wird in Fässern geliefert. Asphaltmastik (in schwarzen Broten von 25 kg Gewicht) wird hergestellt, indem man gepulverten Asphaltstein (10 G.-T.) in das geschmolzene Goudron (1 G.-T.) verrührt. — Oft geht auch Steinkohlenpech unter dem Namen Asphalt.

Gufsasphalt [für wasserundurchlässige Flächen in Kellern, Höfen, Ställen usw. (s. Abteil. III, Hochbau), für Bürgersteige, Trockenschichten usw.] ist Asphaltmastix in faustgrofsen Stücken mit 4 bis 7 vH Goudron bei 160° geschmolzen und dann mit 50 vH reinem (nicht lehmigem), trockenem, grobem Sande oder feinem Kies zu Brei verarbeitet. In 1,5 bis 1,0 cm starker Schicht auszubreiten, sofort mit Sand zu bestreuen und abzuklopfen oder abzuwalzen.

Stampfasphalt (für Strafsen): Zerschlagener Asphaltstein wird bei 120° zum Zerfallen gebracht; das warme Pulver wird auf die 15 bis 20 cm starke trockene Beton-Unterlage (s. S. 599) 7 bis 8 cm hoch ausgebreitet und mittels heifser Eisenrammen, Plätteisen und Walzen befestigt und auf Steinhärte gebracht.

Asphalt-Filzplatten, einfache 0,7 cm, doppelte 1 cm stark, aus verfilzter Pflanzenfasermasse hergestellt, die völlig mit sogen. Asphalt durchtränkt und dann mit grobem Sande bestreut wird. Liefern wegen der Zähigkeit der Masse bessere Trockenschichten als Glas, Schiefer und auch als Dachpappe. Weiteres s. Abteil. III, Hochbau. Zu Unterlage und Schallschutz werden die Isolierfilze von Adlershof bei Berlin (darunter der Eisenfilz für Maschinen usw.) empfohlen.

4. Dachpappe. Die gewöhnliche Dachpappe wird hergestellt, indem man gute Pappe minutenlang mit kochendem Steinkohlenteer tränkt und nach dem Abtropfen mit grobem Sande bestreut; Gewicht bis 3 kg/qm. Vorteilhaft ist die „endlose" (etwa 1 m breite und bis 20 m lange) Rollenpappe. Gute Dachpappe mufs vom Teer völlig durchdrungen sein, so dafs das innere keine trockenen Stellen aufweist. Die aufgenagelte Pappe wird zur gröfseren Widerstandsfähigkeit gegen das Wetter mit Steinkohlenteer überstrichen, dem vorher in heifsem Zustande zu Pulver gelöschter Kalk ($^1/_4$) zugemischt ist. Hierauf wird Sand aufgesiebt. Näheres s. Abteil. III, Hochbau.

Vorzüglicher, aber wesentlich teurer ist die Asphaltpappe oder der Asphaltdachfilz, aus besonders verfilztem Material und Asphalt hergestellt.

Asphalt-Steinpappe mit Drahtgeflechteinlage (L. Lindenberg, Stettin) ist besonders geeignet für Stall- und Fabrikgebäude. — Aeufserst wetterbeständig, elastisch und unempfindlich gegen Säuren scheint die Ruberoid-Dachpappe (Allut Noodt & Meyer, Hamburg) zu sein. In Rollen zu 20 qm und 1 bis 2 mm Stärke 15 bis 19 ℳ für 1 Rolle.

IX. NUTZHÖLZER.

Holz ist die von Bast und Rinde umschlossene Hauptmasse des Stammes und der Aeste der Bäume.

Beim **Wachsen des Holzes** setzt sich neue Holzmasse in Form eines dünnen Mantels auf dem vorjährigen Holze unter der Rinde an. Die Holzbildung eines Jahres, aus dem weicheren und lockerern Frühjahrs- und dem meist dunkler gefärbten Herbstholz bestehend, stellt sich im Hirnschnitt als Jahresring dar. Innen (in der Achse des Stammes) liegt bei jungen Bäumen das Mark; dann folgt das härtere und trocknere Kernholz, das umgeben ist von dem weicheren helleren und saftreicheren Splintholze. Markstrahlen, von der Achse zum Umfange reichend, sind nur bei manchen Laubhölzern deutlich erkennbar (z. B. bei der Eiche und Esche werden sie bis 1 mm breit).

Das **Gefüge des Holzes** zeigt sich in den drei Schnitten: Der Hirnschnitt (Querschnitt), winkelrecht zur Stammachse, zeigt den Kern und Splint, die Jahresringe und Markstrahlen; der Radialschnitt, durch die Achse gelegt, zeigt u. a. das Mark in Form der Spiegel; der Sehnenschnitt, durch eine Sehne parallel zur Achse gelegt, zeigt die Jahresringe wie auch der Radialschnitt in Längsstreifen. Nach diesen drei Schnittarten unterscheidet man die Flächen eines Holzstückes in „Hirnholz“, „Spiegelholz“, „Langholz“.

Physikalische Eigenschaften des Holzes.

1. Spezifisches Gewicht ist bei demselben Holze verschieden, je nach dem Grade der Trockenheit. Allgemein enthält grünes Holz bis 37 vH Wasser und ist 33 bis über 50 vH schwerer als ausgetrocknetes Holz. — Spezifische Gewichte verschiedener Holzarten s. S. 510.

Schwerste Holzarten sind: Quebracho, Eiche; schwere: Weifsbuche, Rotbuche, Pitchpine, Esche; ziemlich leichte: Ulme, Tanne, Kiefer, Erle, Lärche; leichte: Fichte, Pappel, Weide.

2. Nach der Härte ordnen sich die Hölzer wie folgt. Hart sind: Weifsbuche, Eiche, Rotbuche, Esche und Ulme; halbhart: Erle, Lärche und Kiefer; weich: Tanne, Fichte, Birke, Linde, Pappel und Weide. Die Härte der einzelnen Hölzer wechselt mit dem Standorte, Klima usw.

Widerstand der Holzarten gegen einen rechtwinklig zur Stammachse geführten Sägeschnitt: Rotbuche = 1, Kiefer = 0,53, Tanne = 0,56, Fichte = 0,60, Eiche = 1,03, Birke und Espe = 1,35, Weifsbuche, Linde, Weide und Silberpappel = 1,87.

3. Die Spaltbarkeit ist am geringsten in der Fläche der Spiegel; im Sehnenschnitte meist $1^1/_3$- bis $1^1/_2$-mal so stark. Schwerspaltig sind: Weifsbuche, Ulme und Esche; ziemlich leichtspaltig: Lärche, Erle Kiefer und Eiche; sehr leichtspaltig: Pappel.

4. Biegsamkeit. Junges Holz, frisch gefällt, ist am biegsamsten. Holz wird durch Wasserdampf ganz erweicht; es läfst sich dann in

jede Form bringen, behält diese nach dem Trocknen bei und wird sehr hart (gebogene Möbel).

5. Ueber die Festigkeit*) und Elastizität einiger Holzarten s. S. 400.

6. Die Wärmeausdehnung des völlig trockenen Holzes ist fast verschwindend, zumal in der Richtung der Stammachse (vrgl. S. 297), worin ein Vorzug der Holzbalken und -stützen gegenüber eisernen Trägern und Stützen in Brandfällen liegt. (Neue Staatsspeicher in Hamburg durchweg mit Holzkonstruktion.)

Fällen des Holzes durch Einkerben (Stämmen), durch Sägen (Abtrummen), Abgraben der Wurzeln (Ausroden), auch durch Durchschneiden mit elektrisch glühend gemachtem Platindraht (in Amerika) oder durch Anbohren mittels elektrisch betriebenen Bohrers (Galizien). Als beste Fällzeit gilt der Winter, da angeblich das Sommerholz die Schwammbildung begünstigt.**) Nach anderer Ansicht ist sorgfältig getrocknetes Sommerholz ebensogut und brauchbar wie Winterholz.

Durch die Jodprobe wird die Fällungszeit eines Holzes festgestellt, indem das Winterholz wegen der Reservestärke dabei eine blaue Färbung annimmt.

Nach dem Fällen wird der Baum gezopft, d. h. alle nicht als Bauholz geeigneten Teile werden abgehauen und die gröfseren Aeste abgesägt. Zopfende (Wipfelende) und Wurzelende (Stammende).

Trocknen des Holzes: An der Luft gibt frisches Holz sein Wasser allmählich ab bis zur Lufttrockenheit, wobei es noch 10 vH (Nadelholz) bis 17 vH (Laubholz) Wasser enthält. Das natürliche Austrocknen in luftigen, vor Sonnenschein und Nässe (auch vom Boden her) geschützten Schuppen (Zimmerholz) oder in gewärmten Lagerräumen (Tischlerholz) dauert je nach Art und Verwendung des Holzes, 1 bis 4 Jahre, bei Eichenholz wenigstens 1 Jahr länger.

Das künstliche Austrocknen geschieht in einem Ofen oder einer Kammer durch einen heifsen Luftstrom, der bei Eichenholz 40°, bei anderen Laubhölzern 30 bis 40°, bei Nadelhölzern 80 bis 95° für dünnere, 50° für dickere Stücke haben soll. Wirkt der Luftstrom täglich 12 Stunden, so rechnet man

bei einer Dicke von	2,5	5	7,5	10	15	20 cm
die Trockenzeit	1	2	3	4	7	10 Wochen.

Schwinden und Quellen des Holzes.

Das bei dem Trocknen eintretende Schwinden ist verschieden, je nach der Art des Holzes und nach der Geschwindigkeit des Trocknens, stets aber beim Splint viel stärker als beim Kern. Es ist in der Richtung der Stammachse äufserst gering, in der Richtung des Hirnschnitt-Halbmessers gröfser und am gröfsten in der Richtung der Sehne eines Hirnschnittes; s. Tafel S. 614.

Die **Lavesschen Versuche** zur Ermittlung der in nachstehender Tafel enthaltenen Schwindmafse wurden mit sehr dünnen Holzstäbchen angestellt, deren Länge erst in

*) Ueber Prüfung von Holz betreffs Festigkeit und anderer Eigenschaften vrgl. die vom Internat. Kongrefs f. d. Mat.-Prfg. d. Technik Brüssel 1906 angenommenen Vorschläge von M. Rudeloff. Bericht 23 d.

**) Vrgl. Fällzeit des Holzes, Z. d. B. 1885 S. 93.

grünem und vollkommen mit Wasser durchzogenem Zustande, dann nach längerem Trocknen (bei 14 bis 16^0) gemessen wurde. Aus dem Unterschiede ergibt sich das spezifische Schwindmafs des Holzes in vH der ursprünglichen Abmessungen.

Schwindmafse der wichtigsten Holzarten.

Holzarten	Gröfse des Schwindens in der Richtung		
	der Achse vH	des Halbmessers vH	der Sehne vH
Ahorn	0,072	3,35	6,59
Apfelbaum	0,109	3,00	7,39
Birke	0,222	3,86	9,30
„ , russische	0,065	7,19	8,17
Birnbaum	0,228	3,94	12,70
Buchsbaum	0,026	6,02	10,20
Ebenholz	0,010	2,13	4,07
Eiche, jung	0,400	3,90	7.55
„ , 300 Jahre altes Bauholz	0,130	3,13	7,78
Erle	0,369	2,91	5,07
Esche, jung	0,821	4,05	6,56
„ , 300 Jahre altes Bauholz	0,187	3,84	7,02
Fichte (Rottanne)	0,076	2,41	6,18
Guajak (Pockholz)	0,625	5,18	7,50
Kiefer (Föhre)	0,120	3,04	5,72
Kirschbaum	0,112	2,85	6,95
Lärche	0,075	2,17	6,32
Linde	0,208	7,79	11,50
Mahagoni	0,110	1,09	1,79
Nufsbaum	0,223	3,53	6,25
Pappel	0,125	2.59	6,40
Pflaumbaum	0,025	2,02	5,22
Rofskastanie	0,088	1,84	5,82
Rotbuche	0,200	5,03	8,06
Tanne (Weifstanne), jung	0,122	2,91	6,72
„ , 300 Jahre altes Bauholz	0,086	4,82	8,13
Ulme (Rüster)	0,124	2,94	6,22
Weide	0,697	2,48	7,31
Weimutskiefer (Strobe)	0,160	1,80	5,00
Weifsbuche	0,400	6,66	10,30
Zeder	0,017	1,30	3,38

Getrocknetes Holz nimmt leicht Wasser wieder auf und dehnt sich dadurch bis zum früheren Volumen aus: das **Quellen**. Dabei, wie auch beim Schwinden, entwickelt das Holz aufserordentliche Energie. Daher das **Werfen** (Arbeiten, Verziehen, Reifsen) des Holzes. Der ganzgelassene Stamm reifst im Splintring, da dieser sich stärker zusammenzieht, wogegen nur das Ausbohren des Kerns hilft. Die aus dem Stamme geschnittenen Bohlen und Bretter wölben sich beim

Trocknen, u. zw. wird die nach der Stammachse gekehrte „rechte" (oder Bund-) Seite konvex. Bei einseitigem Drucke ist diese rechte Seite womöglich dem Drucke entgegen (z. B. bei Fufsböden nach oben) zu legen. Wasser oder Feuchtigkeit einseitig läfst man am besten auf die ‚linke" (oder Unbund-) Seite wirken. Absprengen von Steinen mittels getrockneter Weidenkeile.

Arten der Zerstörung des Holzes.

1. Alles Faulen geht von der Zersetzung der Saftbestandteile aus. Das Ersticken oder Anlaufen (Blauwerden) des grünen Holzes ist unschädlich, falls das Holz rasch geschnitten und gut getrocknet wird. Das gewöhnliche Verfaulen oder die nasse Fäule, die eine braune Masse liefert, tritt ein, wenn das Holz mit nasser Erde usw. in Berührung steht oder abwechselnd nafs und trocken wird. Seltener ist die Trockenfäule, wobei eine trockene mürbe helle Masse entsteht, sowie die Humifizierung (beginnende Kohlebildung, Braunkohle, Torf), durch Berührung mit Mörtel gefördert.

2. Die Schwammbildung, am gefährlichsten vom echten oder tränenden Hausschwamm, meist nur in Häusern vorkommend, neuerdings auch an Kiefernstämmen im Wald (Grunewald bei Berlin) beobachtet, aber auch u. a. vom Lohbeet-Löcherpilz herrührend, wird vor allem durch Feuchtigkeit, stillstehende Luft und Lichtmangel begünstigt. Ein schwammverdächtiges Haus ist unverkäuflich (Reichsgericht).

3. Der Wurmfrafs ist die zerstörende Einwirkung verschiedener Insekten und ihrer Larven: des Bohr- oder Klopfkäfers in Bauholz und Möbeln (Totenuhr); des Borkenkäfers in Nadelholzbäumen; des Spiefsbockes in Eichen; des Weidenbohrers (Schmetterling, dessen Raupe Weiden, Ulmen, Erlen, Eichen, Kiefern anbohrt); der Holzwespe und ihrer Larve u. a.

Schutzmittel gegen die Zerstörung des Holzes.

Die Balkenköpfe sind vor der unmittelbaren Berührung mit dem Mauerwerke zu schützen; näheres hierzu s. Abteil. III, Hochbau. Einen mittelbaren Schutz bietet eine gute Trockenschicht, welche die Erdfeuchtigkeit abhält. Das Unterlassen einer solchen Isolierung wird u. U. als grober Verstofs anerkannt (Reichsgericht 1905).

Gegen das Reifsen durch Einwirkung der Sonnenwärme schützt man Holz durch einen Anstrich aus 2 R.-T. Steinkohlenteer, 1 R.-T. Holzteer, mit etwas Harz aufgekocht und mit 4 R.-T. trocken gelöschtem Kalk verrührt. Die gewöhnliche Einwirkung von Nafs und Trocken wird durch Einreiben von Wachs, durch Anstriche mit Leinölfirnis, guten Oelfarben, Holzteer, Avenarius-Carbolineum usw. ferngehalten; letzteres wohlfeile Mittel ist besonders zu empfehlen (bei dreimaligem Anstriche 1 kg für 3 bis 6 qm). Vor dem Anstreichen soll das Holz mindestens lufttrocken oder künstlich ausgetrocknet (gedörrt) sein. — Das Ankohlen von Pfählen usw. ist als zweifelhaft zu verwerfen.

Ein bewährtes Mittel ist die Entfernung des Saftes durch Auswachsen (die weiter grünende Krone des im Frühjahr gefällten

Baumes entzieht dem Stamme den Saft) oder durch Auslaugen (indem man die Stämme in fliefsendes Wasser mit dem Stammende zuberg legt; günstige, auslaugende Wirkung des Wassers beim Flöfsen), ferner durch Dämpfen des frischen Holzes in geschlossenen Behältern mittels überhitzten Wasserdampfes (60 bis 80 st) und nachheriges Austrocknen.

Sehr erprobt ist ferner das **Durchtränken** (Imprägnieren) des frischen Holzes mit fäulniswidrigen Metallsalzen oder mit Kreosotöl (Teeröl). Das Durchtränken lohnt sich am meisten bei Buchenholz (Holzpflaster).

Durchtränken mit Kreosotöl (karbolsäurehaltigem **Teeröl**). Die Hölzer werden in einem Kessel bei einer Temperatur von 100 bis 140° 3 bis 4 st lang ausgedörrt, dann in einem anderen Kessel 1 st lang in einem Vakuum von $^1/_{10}$ bis $^1/_5$ at belassen, worauf schliefslich das auf etwa 50° vorgewärmte Kreosotöl eingepumpt und etwa 60 bis 70 min unter einem Drucke von 6 bis 8 at eingeprefst wird. — Der Siedepunkt des Oels soll zwischen 180 und 400° liegen, sein spez. Gewicht 1,0 bis 1,1 und sein Gehalt an sauren Bestandteilen 6 bis 10 vH betragen; Gewichtzunahme der Hölzer 5 bis 6 kg/cbm. Oelverbrauch bei Kiefernholz 140 bis 200 kg/cbm, bei Eichenholz 80 bis 90 kg/cbm, bei Buchenholz 270 bis 300 kg/cbm. — In Anwendung bei etwa $^1/_3$ der deutschen Bahnverwaltungen. Kosten für 1 Schwelle 1 bis 2 *M*.

Viel geringer sind Oelverbrauch und Kosten bei dem Verfahren der **Hohlimprägnierung** von **Rüping** in Zernsdorf.

Durchtränken mit Zinkchlorid. In einem Walzenkessel werden die Hölzer zunächst unter 2 bis 3 at Druck 1 bis $1^1/_2$ st durchgedämpft, sodann wird die Feuchtigkeit bei einem Vakuum von $^1/_5$ bis $^1/_4$ at 40 bis 90 min lang ausgepumpt und endlich die Zinkchloridlösung unter 6 bis 8 at Druck 60 bis 70 min lang eingeprefst. Diese Lösung (von 3° Baumé) besteht aus 2 G.-T. Chlorzink ($Zn\,Cl_2$) von 1,8 spez. Gew. mit 30 G.-T. Wasser; von ihr werden verbraucht bei Buchen- und Kiefernholz 160 bis 200 kg/cbm, bei Eichenholz 90 bis 110 kg/cbm. — Diese Tränkungsart, die indessen das Holz sehr hygroskopisch macht, ist bei vielen deutschen Bahnverwaltungen für Holzschwellen (s. Abteil. II Eisenbahnbau) in Gebrauch. Kosten für 1 Schwelle (von rd. 100 *l* Inhalt) 0,35 bis 0,50 *M*.

Durchtränken mit Kupfe vitriol. Eine Lösung von 1,5 G.-T. Kupfervitriol auf 100 G.-T. Wasser wird durch den Druck einer Flüssigkeitsäule aus einem 10 bis 12 m höher stehenden Gefäfs von der Hirnfläche des Wurzelendes aus durch den (vor höchstens 10 Tagen gefällten) Stamm getrieben; der Zellsaft fliefst am Zopfende ab, und schliefslich erscheint die blaue Vitriollösung. Dauer der Tränkung einer 10 m langen Telegraphenstange (Nadelholz) etwa 13 Tage. 1 cbm Holz nimmt 9,5 kg Kupfervitriol auf. Kosten 9 bis 10 *M*/cbm. Für 1 Eisenbahnschwelle rechnet man 0,55 kg Vitriol und 0,40 bis 0,60 *M* Kosten. Der Kupfervitriol darf keinen Eisenvitriol enthalten, das verwendete Wasser mufs kalkfrei sein, alle Eisenteile sind fern zu halten — Dieses Verfahren wird für Telegraphenstangen meistens, für Eisenbahnschwellen wenig angewendet.

Aufnahme von Quecksilberchlorid (Sublimat). In hölzernen Bottichen (keine Eisenteile!) wird eine Sublimat-Lösung (1 $Hg\,Cl_2$: 150 Wasser) hergestellt, in die z. B. Nadelholzschwellen 8 bis 10 Tage, Eichenholzschwellen 12 bis 14 Tage gelegt werden, wobei jede Schwelle an der Oberfläche etwa 0,125 kg Sublimat aufnimmt. Die Arbeiter sind vor der Einwirkung des höchst giftigen Sublimats zu schützen. Kosten für 1 Eisenbahnschwelle 0,75 bis 1,00 *M*. — Weniger angewendet.

Die Anwendung aller Metallsalze bringt eine gewisse Brüchigkeit hervor und setzt ein langes Austrocknen vor dem Gebrauch voraus.

Bei dem **Hasselmannschen Verfahren** werden die Hölzer in einem Kessel nach der Luftentleerung mit einer Lösung von schwefelsaurer Tonerde und Eisenvitriol durchtränkt, worauf durch eingeleiteten Dampf das Ganze schliefslich (in 3 st) auf 125° erhitzt wird; dieser ersten Kochung folgt nach einiger Zeit eine zweite mit einer Lösung von Chlorkalzium und Kalkmilch. Das bei nasser Lagerung (Schwellen) sehr wirksame Verfahren eignet sich besonders für Nadelhölzer und Buche, u. zw. auch im grünen Zustande. Die Kosten sind etwas höher als beim Zinkchlorid-, geringer als beim Teeröl-Verfahren. (Imprägnierungs-Gesellschaft, Berlin.)

Schwamm in Bauwerken wird verhütet durch sorgfältiges Fernhalten aller Keime (verdächtiger Bauschutt) und Trockenhalten alles Holzwerkes. — Wird der Schwamm bei seinem Auftreten frühzeitig erkannt, so kann er durch Entziehen von Feuchtigkeit (Heizung und Lüftung), besser durch Anstreichen mit Sublimatlösung oder mit Avenarius-Carbolineum oder mit dem wasserlöslichen Antinonnin-Carbolineum der Farbenfabriken vorm. Friedr. Bayer & Co. in Elberfeld zerstört werden. Das letztere Mittel, als 2-prozentige wässerige Lösung aufgestrichen, was nach 3 Tagen wiederholt wird, eignet sich wegen seiner Geruchlosigkeit besonders im Inneren, zumal dabei die Farbe des Holzes unverändert bleibt. Kochsalzlösung, die immer noch empfohlen wird, sowie manche teuren Geheimmittel sind als unwirksam zu verwerfen.

Wurmfrafs wird durch Tränken der Oberfläche mit fettigen und harzigen Stoffen (wie Petroleum, Holzteer u. drgl.) verhindert. Nach alter Erfahrung geht der Wurm nicht in Hölzer, die lotrecht entgegen ihrer Wachstumsrichtung gesetzt sind. — Vom Wurm ergriffenes Holz versieht man mit mehrmaligem Anstrich von Seifensiederlauge (Aetznatron mit Fett eingekocht) und Kochsalz [26 R.-T. Lauge : 3 R.-T. Salz] oder von Karbolsäure oder von einem der Schwammvernichtungsmittel. Auch tötet man die Larven durch Benzindämpfe (Vorsicht!), ferner durch Eintröpfeln von roher Salzsäure oder Sublimatlösung in die Wurmlöcher.

Schutz gegen Feuer ist insoweit möglich, als das Brennen mit Flamme verhindert wird. Hierzu 5- bis 6-mal wiederholter Anstrich mit sehr dünner Wasserglaslösung, die mit etwas Ton oder Kreide oder Schwerspat versetzt ist; oder mit einer Chlorkalziumlösung, in der man gebrannten Kalk gelöscht hat; oder mit der Feuerschutzmasse von Hülsberg & Co., Charlottenburg (bei Brandproben 1901 gut bewährt). Neuer und sehr gut empfohlen ist das Verfahren der Deutschen Gautschin-Gesellschaft Charlottenburg. — Mit einer gesättigten Lösung von schwefel- und phosphorsaurem Ammoniak unter Druck getränktes Holz (englischer Kriegsschiffbau) ist selbst durch Stichflamme nur zum Verkohlen zu bringen.

Das Feuerfangen von Holzverkleidungen und das Durchschlagen des Feuers durch Balkendecken (Speicher) wird verhindert durch Aufnageln oder Einlegen von Asbestpappe, 5 mm bis mehrere cm stark. (Brennproben Stettin 1901.)

Dauer des Holzes. In fortwährender Trockenheit sowie immer unter Wasser ist die Dauer des Kiefern-, Lärchen- und auch Fichtenholzes sehr bedeutend, die des Eichenholzes unbegrenzt. Die Grundpfähle werden 30 cm unter dem niedrigsten Grundwasserstand gekappt. Im Wechsel von Nafs und Trocken hält sich Eichenholz 50 Jahre, Kiefernholz höchstens 20 Jahre. In Ton-, Lehm- oder nassem Sandboden hält sich Holz am besten, weniger gut in trockenem Sandboden, am schlechtesten in Kalkboden.

Holz als Ware.

1 Festmeter (fm) = 1 cbm fester Holzmasse; 1 Raummeter (rm) = 1 cbm geschichteter Holzmasse. Im Walde heifst Derbholz

alles Holz von 7 bis 14 cm Dmr., Reiserholz alles Holz unter 7 cm Dmr.

Zunahme der Stärke eines Baumstammes vom Zopfende an für 1 m Länge: bei Nadelhölzern 1,0 bis 1,5 cm; bei Laubhölzern 1,5 bis 2,5 cm.

Wald-Nutzholz wird gehandelt und eingeteilt in

a. Langholz.

1. Stämme über 14 cm Zopfstärke (Wahlhölzer), ferner Schneidehölzer und gewöhnliche Rundhölzer (in fm);
2. Derbstangen von 7 bis 14 cm Dmr. (in fm) und Lattstämme, Gerüststangen, Leiterbäume, Hopfenstangen usw. 1 bis 3. Klasse (Stückzahl);
3. Reiserstangen (Hopfen- und Bohnenstangen, Baumpfähle, Zaunstöcke usw.) (Stückzahl);

b. Schichtholz (in rm).

1. Derbholz; 2. Derb-Grubenholz; 3. Reiserholz.

Handels-Nutzholz wird gehandelt und eingeteilt in

a. Rundholz (in fm): 1. Mühlwellen, Hammerachsen, Sägeblöcke usw.; 2. gewöhnliches Rundholz;

b. Kantholz (in fm): 1. splintfreie Balken; 2. scharfkantige Balken; 3. vollkantige Balken; 4. baukantige Balken; 5. Pfosten;

c. Breitschnittholz: 1. Planken; 10 bis 15 cm stark (in fm); 2. Bohlen, 5 bis 10 cm stark (in Blöcken nach fm oder kantig nach qm); 3. Bretter, Borde, Dielen (wie Bohlen);

d. Latten (in m): 1. Dachlatten, 2,5 . 5 cm bis 3 . 6 cm stark; 2. Doppellatten, 5 . 8 cm stark; 3. Spalierlatten, 1,5 . 2,5 cm bis 2 . 4 cm stark;

e. Brennholz: 1. Scheitholz, gespalten, über 14 cm Dmr. (in rm); 2. Knüppelholz, 7 bis 14 cm Dmr. (in rm); 3. Reiserwellen, Hölzer unter 7 cm Dmr. (Stückzahl).

Das Bau-Rundholz (Langholz, unbeschlagenes Ganzholz) zerfällt nach der Stärke und Länge in folgende Arten:

Art	Zopfdurchmesser cm	Länge m
Aufsergewöhnlich starkes Holz . .	35 und mehr	14 und mehr
Gewöhnliches starkes Holz . . .	25 bis 35	12 bis 14
Mittelbauholz (Riegelholz) . . .	20 „ 25	9 „ 12
Kleinbauholz (Sparrholz). . . .	15 „ 20	9 „ 11
Bohlstämme	13 „ 15	7 „ 9
Lattstämme	8 „ 13	7 „ 9

Sägeblöcke haben eine mittlere Länge von 8 m bei 35 bis 50 cm Zopfstärke. — Das Ganzholz (beschlagen und unbeschlagen) liefert gehälftet das Halbholz und geviertelt das Kreuzholz. Roh mit der Axt beschlagenes Ganzholz (austrocknungs- und versandfähiger als unbeschlagenes) ohne scharfe Kanten wird wahnkantig (waldkantig,

baukantig) genannt. — Spaltholz wird durch Längsteilung der mehrfach quer durchschnittenen Stämme mittels Keile oder Axt erhalten, ist fester und weniger dem Werfen ausgesetzt als Schnittholz; wird als Stakholz für Windelböden (s. Abteil. III, Hochbau) benutzt.

Das Bau-Kantholz (Verbandholz ist im Handel in allen Abmessungen von 8 . 8 cm bis 28 . 30 cm erhältlich.

Im Jahre 1898 hat der Innungsverband deutscher Baugewerksmeister (unter Zustimmung der deutschen staatlichen und städtischen Behörden sowie der deutschen Architekten- und Ingenieur-Vereine folgende Normalien aufgestellt:*)

1. Normalprofile für Bauhölzer in cm.

8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
8/8	8/10	10/12	10/14	12/16	14/18	14/20	16/22	18/24	20/26	22/28	24/30
.	10/10	12/12	12/14	14/16	16/18	16/20	18/22	20/24	24/26	26/28	28/30
.	.	.	14/14	16/16	18/18	18/20	20/22	24/24	26/26	28/28	.
.	.	.	.	.	.	20/20	.	.	.	.	.

2. **Normalien für Schnittholz** (Bretter, Bohlen, Pfosten, Latten). In Längen von 3,5, 4, 4,5, 5, 5,5, 6, 7 und 8 m. In Stärken von 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 und 15 cm. Besäumte Bretter in Breiten von cm zu cm steigend.

Eisenbahnschwellen. Näheres s. Abteil. III, Eisenbahnbau; über Durchtränkung s. S. 616.**) — Lieferungs-Bedingungen:

Vollständig gesundes, kerniges Holz, frei von Rinde (bei Eichenholz auch frei von Splint), frei von jeder Fäulnis; keine lockere und schwammige Beschaffenheit, kein Drehwuchs, keine Risse und losen Jahresringe. Zulässig sind nur gesunde Aeste, die nicht mehr als $1/_6$ des Querschnittes einnehmen. Dürre Aeste müssen ausgehauen werden, doch darf dabei höchstens $1/_{12}$ des Querschnittes verloren gehen; die Schienen-Auflager müssen hiervon frei und vollständig sein.

Zulässige Längenabweichungen $\pm$ 5 cm; die Mitte des Schienenauflagers höchstens um 3 cm aus der Mittellinie. Schwellen, welche kleine Abweichungen von den verlangten Abmessungen haben, sonst aber gut sind, werden um 20 vH billiger übernommen, jedoch soll die Zahl dieser sogen. Klassenschwellen $1/_{10}$ der Lieferung nicht überschreiten.

Weichenschwellen müssen im Querschnitt vollständig rechteckig (30 . 18 cm) sein und dürfen keine Wahnkantung haben.

Die mittlere Dauer der Eisenbahnschwellen in geeigneter Bettung (und ferner bei guter Durchtränkung, vrgl. Abteil. III, Eisenbahnbau) sowie die Kosten einer ungetränkten Hauptbahnschwelle sind folgende:

Holzart	natürlich	getränkt	Schwellenpreis
Kiefern- und Lärchenholz . .	7 bis 9 Jahre	14 bis 18 Jahre	1,8 bis 3,0 ℳ
Fichten- und Tannenholz . .	4 „ 5 „	9 „ 22 „	1,6 „ 2,8 „
Buchenholz	2½ „ 3 „	15 „ 30 „	1,4 „ 3,0 „
Eichenholz	15 „ 20 „	20 „ 30 „	3,8 „ 5,0 „

Schwellen aus **Garaboto-Quebrachoholz** sollen ungleich längere Dauer haben.

*) S. Erlafs des preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten vom 5. Juli 1898, Z. d. B. 1898 S. 373.

) Ueber die Verwendung von **Buchenschwellen auf preufs. Staats-Eisenbahnen s. Z. d. B. 1898 S. 127 u. f., auf der französ. Ostbahn ebendas. 1898 S. 263.

Telegraphenstangen und Masten für elektrische Leitungen aus Kiefern-, Fichten-, Tannen- und Lärchenholz (Eichenholz selten). Stangenlängen 7, 8,5 und 10 m. Zopfdurchmesser der geschälten Stange 15 cm; Verjüngung vom Stammende zum Zopfende auf 1 m Länge etwa 1 cm. Mindest-Durchmesser am Stammende bei 7 m Stangenlänge 22 cm, bei 8,5 m 23,5 cm und bei 10 m 25 cm.

Für Nebenlinien werden auch 7 m lange Stangen mit 12 cm Zopfstärke benutzt. — Sonstige wesentliche Bedingungen: Gerader Wuchs, gesunder Stamm, keine Astlöcher oder Spaltstellen, wirkliches Stammende eines Baumes. Es empfiehlt sich, die frischen, noch ungeschälten Stangen mit Kupfervitriol zu durchtränken (s. S. 616). Gut durchtränkte Stangen haben eine Dauer von 12 bis 15 Jahren.

Holzpflaster. Näheres s. Abteil. III, Hochbau.

Holzstiele für Handwerkszeuge: Hammer-, Hacken-, Picken- und Axtstiele aus Eschen-, Weifsbuchen und amerikanischem Hickoryholz; Beilstiele auch aus Rotbuchenholz. Spaten-, Schaufel- und Gabelstiele sowie Turngeräte und Ruder aus Eschenholz.

Brennholz. 1 cbm Scheitholz (Klobenholz) enthält etwa 0,7 fm Holz, 1 cbm Knüppelholz enthält 0,60 bis 0,65 fm Holz. — Weiteres s. S. 618.

Bauholz-Arten.

Da Deutschland seinen Bedarf mit eigenem Holz nicht decken kann, ist es in steigendem Mafse auf andere Länder angewiesen, besonders Skandinavien und Nordamerika. Neuerdings werden auch aus Südamerika, Australien und Ostasien Bauhölzer eingeführt.

Die zu Bauzwecken verwendeten wichtigsten Holzarten sind:

Eiche (Sommer- oder Stieleiche und Winter- oder Steineiche), wertvollstes Holz überhaupt, in jeder Hinsicht das beste, sowohl für Hoch-, Tief-, wie Schiff- und Wasserbau.

Kiefer (Föhre) vorzüglich im Trockenen (bestes Dachholz), sowie unter Wasser (Grundpfähle), auch verhältnismäfsig dauerhaft im Wechsel von nafs und trocken.

Pitchpine (Pechkiefer) von Kanada, in jeder Hinsicht vorzügliches Holz, zu manchen Zwecken dem Eichenholz gleichgeschätzt, dabei viel billiger als dieses. Für Deutschland nicht mehr zu entbehren.

Lärche, wertvollstes einheimisches Nadelholz; Verwendung wie Eiche oder Kiefer.

Fichte (Rottanne), im Trockenen oder aber ganz unter Wasser haltbar, dagegen nicht im Wechsel von nafs und trocken.

Tanne (Weifstanne) verhält sich wie Fichte. Seltener.

Ulme (Rüster) überall trefflich zu verwenden, besonders im Mühlen-, Wasser- und Schiffbau.

Rotbuche hält sich, wenn ganz im Wasser befindlich, sehr gut, aber nicht im Wechsel von nafs und trocken; zu Grundbauten.

Erle vorzüglich zum Grund-, Wasser- und Mühlenbau.

Andere einheimische Hölzer wie Esche, Weifsbuche, Pappel usw. werden nur stellenweise als Bauhölzer verwendet. Von ausländischen sind noch zu nennen das indische Teakholz höchst geschätzt für den Schiffbau, das Quebrachoholz vom Laplata (s. oben), das Tallowholz von Australien zu Holzpflaster. Die westaustralischen Harthölzer Karri und Jarrah von den ausgezeichnetsten Eigenschaften für alle Bauzwecke u. a. Pflaster, Parkett, Dübel.

X. SCHMIERMITTEL.*)

Zweck des Schmierens ist, die unmittelbare Berührung von aneinander bewegten starren Flächen und damit die Reibung möglichst zu verhindern und deren Folgen, nämlich den Arbeitsverlust und die Erwärmung und Abnutzung der Gleitflächen,**) möglichst einzuschränken. Bei genügender Schmierung tritt die Reibung nicht zwischen den Gleitflächen selbst, sondern innerhalb des Schmiermittels (innere Reibung) auf.

Eigenschaften eines guten Schmiermittels sind:

1. Möglichst grofse Schlüpfrigkeit (Adhäsion, Klebrigkeit).

Das Mittel mufs fest an den Gleitflächen haften, damit es sie möglichst vollständig und nachhaltig voneinander trennt und nur allmählich ihrem Drucke weicht.

2. Hinreichend flüssige Beschaffenheit (geringe Kohäsion).

Die Teilchen müssen äufserst leicht gegeneinander verschiebbar sein, um auch die kleinsten Unebenheiten der Gleitflächen jederzeit auszufüllen, und um nicht ihrerseits durch zu grofse innere Reibung ein Hindernis für die Bewegung abzugeben. Je leichtflüssiger aber, um so eher wird das Mittel herausgeprefst, desto gröfser ist also der Verbrauch sowie auch die Gefahr des Warmlaufens.

3. Möglichste Unveränderlichkeit a) gegenüber der Einwirkung der Luft, b) gegenüber den Druck- und Temperaturänderungen.

a) Verharzung und dadurch Krustenbildung — durch Wärme und Staub begünstigt — besonders bei Harzölen gefährlich, von denen die dünnflüssigen überhaupt die schlechtesten Schmiermittel sind. b) Verdampfung (z. B. Mineralöle bei etwa 150° im Dampfzylinden und Schieberkasten) und Zersetzung (besonders durch den Wasserdampf). Entwicklung brennbarer Gase aus dem Oel durch Erwärmung, weshalb u. a. Petroleum und Beimischungen desselben ganz unzulässig sind. Wichtigkeit des Entflammungspunktes. — Kältebeständigkeit bei Wintertemperaturen (Eismaschinen).

4. Völlige Säurefreiheit.***)

Die Gleitflächen (wie auch zufällig von dem Schmiermittel berührte Maschinenteile) leiden sehr durch die geringsten Spuren freier unorganischer Säure (Schwefelsäure), die fast nie bei Mineralölen, dagegen sehr oft in den pflanzlichen und tierischen (Fett-) Oelen, u. zw. von unvollkommener Reinigung herrührend, vorkommt; organische Säuren, in den Fetten enthalten und daraus bei der Zersetzung sich bildend, sind nicht so gefährlich.

---

*) Näheres s. J. Grofsmann, Die Schmiermittel und Lagermetalle; Wiesbaden 1894, C. W. Kreidels Verlag. — Anleitung zur Einrichtung und Instandhaltung von Triebwerken, herausgegeben von der Berlin-Anhaltischen Maschinenbau-Akt.-Ges. in Berlin NW. und Dessau. — A. Künkler, Die Maschinenschmierung (die Schmiermittel und ihre Untersuchung); Mannheim 1893. — L. F. Andés, Vegetabilische u. Mineral-Maschinenöle, Wien 1893. — S. Kapff, Wertbestimmung von Schmierölen, Z. d. V. d. I. 1898 S. 553 u. f.

**) S. J. Riemer, Z. d. V. d. I. 1895 S. 654.

***) S. Keller, Z. d. V. d. I. 1888 S. 676.

5. Reinheit von festen Beimengungen, ungelösten wie auch gelösten.

Solche Beimengungen (Gewebeteile, Schleim bei Pflanzenölen, Hautteile bei Talg, Koksteile bei Mineralölen, beschwerende Verfälschungen bei allen) erzeugen selbst Reibung und veranlassen Krustenbildung, Verstopfung der Zuflufskanäle usw. Die von den Gleitflächen unvermeidlich abgeriebenen feinen Metallteilchen machen die Schmiere selbst nach einiger Zeit für die Flächen gefährlich; deshalb ist die Erneuerung der Schmiere notwendig.

6. Wasserfreiheit.

Die bei der Dochtschmierung verwendeten Oele dürfen höchstens Spuren (0,5 vH) Wasser enthalten, da dieses die Saugfähigkeit der Dochte vermindert. Fette, die erheblich mehr Wasser aufnehmen können, sind oft damit verfälscht.

Ein wirtschaftlich vorteilhaftes Schmiermittel mufs mit möglichst grofser Schlüpfrigkeit eine gewisse Zähflüssigkeit verbinden, u. zw. bis zu solchem Grade, dafs die dadurch bewirkte Erhöhung der inneren Reibung (Arbeitsverlust und Erwärmung) nicht den Vorteil des geringeren Verbrauches aufhebt.

Bei der **Wahl des Schmiermittels** sind (abgesehen vom Preise) zu berücksichtigen; 1. der spezifische Druck der Flächen, 2. deren Gleitgeschwindigkeit, 3. die Temperatur bei der Schmierwirkung.

Bei einem Zapfen z. B., dessen Belastung mäfsig und dessen Umdrehungsgeschwindigkeit klein ist, wird dem äufserst schlüpfrigen und dünnflüssigen Rüböl ein noch genügend schlüpfriges, noch (bei 50°) zähflüssiges Mineralöl vorzuziehen sein, weil der Verbrauch an Rüböl zu grofs sein würde. Handelt es sich um einen höheren spezifischen Druck (z. B. bei Kurbelzapfen grofser Dampfmaschinen), so ist das Rüböl am Platze, weil das entsprechende Mineralöl wegen der geringeren Schlüpfrigkeit dem Drucke nicht widersteht.

Bei geringerem Drucke und grofser Geschwindigkeit, z. B. bei den Spindeln der Spinnmaschinen, ist die Dünnflüssigkeit erstes Erfordernis, weil mit der Geschwindigkeit die innere Reibung wächst; daher dünnflüssiges Mineralöl allein oder mit 25 vH Baumöl. — Für die in Dampf gehenden Teile (Kolben, Schieber usw.) ist die höchste Schlüpfrigkeit wesentlich, weil für höhere Temperaturen der Grad der Flüssigkeit bei den verschiedenen Mitteln sehr wenig abweicht.

Da sich bei niedrigen Temperaturen der Flüssigkeitsgrad der Mineralöle mit dem Wärmegrade stark verändert, so ist bei diesen auch die Beachtung der Temperatur wichtig. Mineralöle, die bei 20° noch sehr dickflüssig sind, erweisen sich bei 35° bis 40° oft halb so dickflüssig und bei 50° bis 60° ganz dünnflüssig.

Die Starrschmiere,*) ein dickflüssiges Fett, empfiehlt sich nur selten als Schmiermittel. Ihre Vorteile (sie tropft nicht ab und bleibt auch beim Stillstande an ihrer Stelle, verhindert den Zutritt von Staub, daher sparsamer Verbrauch, bequeme Bedienung) werden durch die folgenden Nachteile vielfach aufgewogen: Bei geringer Schlüpfrigkeit und äufserst hoher innerer Reibung ist die Abnutzung der Flächen und ebenso der Arbeitsverlust sehr beträchtlich**): aufserdem Ungleichmäfsigkeit und Unsicherheit der Schmierung, Notwendigkeit, die Schmiere durch besonderen Druck den Flächen zuzuführen, völlige Undurchsichtigkeit, welche mechanische Beimengungen nicht erkennen läfst, grofser Verbrauch an Putzlappen, die nur mit Benzin wieder zu reinigen sind. Dagegen ist bei langsam laufenden schwerbelasteten Zapfen, bei ausgedehnten Triebwerkanlagen mit geringen Umlaufzahlen, bei Leerscheiben, bei schwer zugänglichen Lagern die Verwendung der Starrschmiere u. Umst. zweckmäfsig.

Das in den Abtropfbehältern der Lager aufgefangene Schmieröl ist mit Metallteilchen, Staub usw. so stark verunreinigt, dafs es in diesem Zustande nur zu anderen Zwecken (Schmirgeln, Löcherbohren usw.) zu gebrauchen ist. Bei der sehr reichlichen Schmierung rasch

---

*) Vrgl. Heusinger von Waldegg, Schmiermittel der Eisenbahnen; Wiesbaden 1871.

**) Vrgl. Woodbury, Measurements of the friction of lubricating oils; New York 1885.

umlaufender Maschinen (Gasmaschinen, Dynamomaschinen usw.) empfiehlt es sich, das Tropföl durch völlige Reinigung wieder gebrauchsfähig zu machen.

Aus den zur Reinigung verwendeten Putzstoffen läfst sich das Schmieröl durch eine Schleuder zum Teil wiedergewinnen. Eine vollständige Befreiung des Putzstoffes von Oel und Fett geschieht durch Waschen mit Benzin (Rührwerk in geschlossenem Behälter).

1. Fette Oele und Fette.

Die Pflanzen- und Tierfette, namentlich die ersteren, zersetzen sich unter dem Einflusse des Sauerstoffes der Luft, enthalten dann freie Fettsäuren und werden ranzig. Bei längerer Wirkung trocknen sie in dünnen Schichten mehr oder weniger schnell ein (harzende und nichtharzende Oele). Durch Kochen mit Kali- oder Natronlauge werden sie verseift, d. h. in Schmierseifen (Kaliseifen) oder in harte Seifen (Natronseifen) umgewandelt. Alle fetten Oele und Fette zersetzen sich mehr oder weniger leicht bei der Verdampfung.

Die rohen **Pflanzenöle,** meist durch Auspressen aus den zerkleinerten Pflanzen, seltener durch Ausziehen mittels Schwefelkohlenstoffes gewonnen, sind trübe von Eiweifs- und Schleimstoffen und werden von diesen durch Behandlung mit Säuren (meist Schwefelsäure), dann Entsäuren mit Sodalösung und Auswaschen mit Wasser gereinigt. Die Farbe der raffinierten Oele ist hellgelb bis wasserhell.

Rüböl (Rapsöl) mit 1,5 vH Schleim- und ähnlichen Stoffen, ist im rohen Zustande nur gut abgelagert (d. h. von den dabei abgesetzten Stoffen getrennt) zu verwenden; besser wird es mit Schwefelsäure gereinigt. Helles (gereinigtes) Rüböl vorteilhafter als weniger helles (rohes). — Rüböl wird leicht ranzig und ist schwach harzend, was aber, falls Wärme und Staub ferngehalten sind, seine Verwendung nicht beeinträchtigt; es ist infolge seiner Schmierfähigkeit und des verhältnismäfsig geringen Preises von allen Fetten das häufigst gebrauchte Schmiermittel. Je nach der Preislage wird es mit anderen Pflanzenölen, mit Mineralölen und auch mit Harzöl verschnitten. Spez. Gew. i. M. 0,914; Erstarrungspunkt -1^0 bis -10^0.

Oliven- oder Baumöl, meist grünlich, besitzt noch gröfsere Schmierfähigkeit als das Rüböl, trocknet nicht und bildet keine Krusten, hat aber einen grofsen Gehalt an freien Fettsäuren. Am meisten zum Schmieren der Spinnmaschinen verwendet, raffiniert auch für feinere Maschinen. Wegen des hohen Preises selten unvermischt. Verfälschungen mit Hanföl, Leinöl, Mohnöl, die sämtlich stark trocknen. Spez. Gew. i. M. 0,918; Erstarrungspunkt: scheidet schon über 0^0 Stearin aus.

Rizinusöl, sehr zähflüssig und ziemlich stark trocknend, aber u. Umst. ein gutes Schmiermittel. Spez. Gew. i. M. 0,965.

Baumwollsamenöl, als schwach trocknendes Oel nur zum Verschneiden anderer Oele, besonders des Olivenöls, gebraucht; dient auch zur Herstellung des oft sauren Blown oil (oxidized oil), auch mischbares Rizinusöl genannt. Spez. Gew. i. M. 0,926. Erstarrungspunkt: scheidet schon bei $+12^0$ Palmitin aus.

Süfsmandelöl, wenn raffiniert, vorzüglich für feine mechanische Instrumente, Uhrwerke usw.

Die **Tierfette** werden aus dem Rohstoff (Rohtalg, Speck, Klauen) durch Auskochen (Ausschmelzen) über freiem Feuer (häufig mit Schwefelsäure) oder mittels überhitzten Wasserdampfes, oder aber durch Ausziehen mit Benzin u. drgl. gewonnen.

Talg, Rinder- und Hammeltalg, ist nur verwendbar, wenn völlig schwefelsäurefrei. Guter Talg ist hart, enthält wenig Fettsäure, wird nicht leicht ranzig (Hammeltalg leichter als Rindertalg). Vielfach verfälscht mit anderen Fetten oder fremden Stoffen. Spez. Gew. i. M. 0,948, Schmelzpunkt für Rindertalg 45^0, für Hammeltalg 47^0.

Anwendung des Rindertalges zum Einfetten der Leder-Treibriemen s. Maschinenteile. Friktionsschmiere, Adhäsionsfett usw. sind zu diesem Zwecke nur viel kostspieliger als reiner Rindertalg, oder, wie in Amerika, ein Gemisch von 3 T. Tran und 1 T. heifsem Talg.

Tran, Wal- und Fischtran, wird ebenfalls als Schmiermittel benutzt.

Klauen-(Knochen) Oel, das beste aus Rinds- und Schafsfüfsen, weniger gutes aus Pferdehufen gewonnen, wird nicht ranzig und trocknet nicht, ist höchst schlüpfrig. Sehr hoch im Preise, nur für feinere Maschinen, liefert raffiniert das feine Uhrenöl. Sehr häufig verfälscht.

Spermacetiöl, aus dem Walrat, das dünnflüssigste Fett, wird nicht ranzig und trocknet nicht; ausgezeichnetes Schmiermittel für feinere Maschinen.

Schmalzöl, aus dem Schweineschmalz abgeprefst, dient zum Verfälschen anderer Oele.

Wollschweifsfett besitzt im rohen Zustande grofse Zähflüssigkeit und ist dann nur mit anderen Fetten vermischt zu verwenden; „destilliertes" Wollschweifsfett ist säurehaltig und unbrauchbar.

2. Mineralöle. Die rohen Mineralöle, aus Kohle, Torf usw. durch Abschwelen hergestellt (Teeröle) oder aber unmittelbar aus der Erde gewonnen (Erdöle, Steinöle), werden durch Destillation in leichte, dünne Oele (Brenn-, Gas-, Putzöl) und in schwere zähflüssige (Schmieröle) geschieden. Letztere reinigt man durch Filtrieren (Zylinderschmieröle) oder durch Destillieren, Behandeln mit Schwefelsäure und nachher mit Natronlauge.

Die Mineralöle bleiben an der Luft (bis auf die Farbe) unverändert, d. h., sie bilden keine Säure, verdicken nicht und trocknen nicht ein. In der Wärme verdunsten sie aber mehr oder weniger, namentlich die niedrigsiedenden. Farbe sehr verschieden: hellgelb, gelbrot bis schwarzbraun. Von den Fettölen durch einen andersfarbigen Schimmer, bläulich und grünlich, bei auffallendem Lichte unterscheidbar. Einige (die amerikanischen) scheiden schon bei + 10^0 Paraffin aus und sind salbenartig erstarrt bei 0^0; andere (die russischen) sind noch bei den niedrigsten Temperaturen flüssig. In höheren Temperaturen werden die Mineralöle sehr dünnflüssig. Spez. Gew. 0,885 bis 0,932.

Während manche Mineralöle nur für untergeordnete Zwecke taugen, kommen einige den besten Fettölen als Schmiermittel mindestens gleich. Da auch ihr Preis niedriger ist, haben die russischen und

amerikanischen Mineralöle, sämtlich aus Erdölen hergestellt, in Deutschland die Fettöle gröfstenteils verdrängt.

Aus der Zähflüssigkeit eines Mineralöls läfst sich, wenigstens beim Vergleiche von Oelen gleicher Farbe (von gleichem Reinigungsgrade), auf seine Schlüpfrigkeit schliefsen, so dafs ein zäherflüssiges Mineralöl auch zugleich eine gröfsere Schlüpfrigkeit besitzt als ein dünneres von etwa gleicher Farbe. Da die Schlüpfrigkeit am wichtigsten, so ist das zäherflüssige Mineralöl in der Regel auch das wirtschaftlich vorteilhafteste, solange der Nachteil der gröfseren inneren Reibung durch den Vorteil des geringeren Verbrauches aufgewogen wird.

Die Verdampfbarkeit (um so geringer, je höher der Flamm- und der Brennpunkt) ist sehr zu berücksichtigen bei den Mineralölen, die zum Schmieren der unter Dampf gehenden Maschinenteile dienen. Die Temperatur, bei der die leichteren Bestandteile verdampfen und sich brennbare Gase entwickeln (Flammpunkt), mufs wesentlich höher liegen als die Temperatur im Dampfzylinder und Schieberkasten. Vom Zylinderöl ist aufserdem gröfste Schlüpfrigkeit zu fordern. Als Heifsdampföle (12 bis 16 at) haben sich neuerdings*) reine Mineralöle weniger geeignet erwiesen als solche, die bis zu 5 vH tierische Fette enthalten.

In den letzten Jahren finden die von der Deutschen Vacuum Oil Co. in Hamburg (Niederlassungen in Berlin, Breslau, Dresden, Duisburg, Cöln und Nürnberg) mit der Schutzmarke „Gargoyle“ in den Handel gebrachten Schmieröle in Deutschland wachsenden Eingang. Sie werden aus dem rohen Mineralöl durch Destillation nach einem besonderen Verfahren vollständig rein und säurefrei hergestellt und eignen sich wegen ihrer guten Eigenschaften und durch ihre grofse Mannigfaltigkeit für die verschiedensten Schmierzwecke. In der neu eröffneten Raffinerie bei Hamburg werden grofse Mengen des in Wietze gewonnenen deutschen Rohöles verarbeitet.

Die mit diesen Oelen betriebene Zentralschmierung, bei der das Zylinderöl in der Nähe des Kessels dem Dampfrohr zugeführt wird und der so geschmierte Dampf nach mehreren Dampfmaschinen gelangt, so dafs die Schmierpumpen bei den einzelnen Zylindern wegfallen, bewährt sich in geeigneten Fällen gut und arbeitet sehr sparsam.

Beispiele von Mineralölen zeigt folgende Tafel (nach A. Künkler).

Herkunft und Bezeichnung	Spez. Gew. bei 15°	Erstarrt bei °C	Farbe im durchfallenden Lichte	Farbe im auffallenden Lichte	Flammpunkt °C	Brennpunkt °C	Zähflüssigkeit [1]) bei 50°	Zähflüssigkeit [1]) bei 150°
Amerikanisches Spindelöl . .	0,885	— 2	hellgelb	grün und wenig blau	174	202	1,8	.
Russisches helles Maschinenöl .	0,909	unter — 10	gelb	grün und blau	197	234	6,6	.
Russisches dunkles Zylinderöl .	0,920	— 8	schwarzbraun	grünlich	210	235	.	1,53

[1]) Wasser hat bei 20° die Zähflüssigkeit = 1.

*) Vrgl. Vortrag von Dr. Eger (Bayerische Staatsbahnen) vor dem Deutschen Verband f. d. Mat.-Prfg. d. Technik. Nürnberg 1906.

3. Harzöle, aus dem Harze der Nadelbäume durch Destillation gewonnen und dann von Säuren befreit, trocknen leicht zu harten Krusten ein und besitzen geringe Schlüpfrigkeit, sind daher nur mit Mineral- oder mit Pflanzenölen vermischt zu verwenden.

4. Gemischte Oele und Fette. Die dickflüssigen Maschinenfette sind meistens Mischungen oder Lösungen von Kalkseife mit Mineralöl. Wegen der grofsen inneren Reibung als Schmiermittel nur unter Umständen zu empfehlen. Die Zahnradschmiere ist aus Talg und Oelen, gewöhnlich mit Zusatz von Graphit oder Talk, zusammengemischt.

5. Die Beimengung von **Graphit** zu Starrschmiere bietet gegenüber der reinen Fettschmierung Vorteile, aber nur wenn der Graphit rein und sehr fein gemahlen ist. Ein 10-prozentiger Zusatz von Graphit für Lager von Schiffswellen und schweren Transmissionen hat sich bewährt. Für gewisse Zwecke (z. B. bei Kompressoren) wird auch Graphit allein verwendet. Neu ist eine Emulsion von Graphit und Glyzerin.

6. Unter dem Namen: wasserlösliche Oele finden milchähnliche Emulsionen von Oelen an Stelle von Seifenwasser beim Bohren zum Kühlen und Schmieren vorteilhafte Verwendung.

Die **Prüfung der Schmiermittel** erfolgt nach verschiedenen mechanischen und chemischen Untersuchungsverfahren (Oelprobiermaschinen für die Schlüpfrigkeit, Viskosimeter für den Flüssigkeitsgrad (die Viskosität), Flammpunktprüfer usw.).*) Da die richtige Wahl des im einzelnen Falle geeignetsten Schmiermittels wirtschaftlich von erheblicher Bedeutung ist, so sollte man bei gröfseren Bezügen stets die sorgfältigste Untersuchung und Prüfung vorhergehen lassen. — „Grundsätze für die Prüfung von Mineralschmierölen" hat der Deutsche Verband f. d. Materialprüfungen der Technik 1900 aufgestellt; dieselben sind 1905 ergänzt worden.

Besondere Bedingungen für die Lieferung von Mineralschmieröl (Rund-Erlafs des preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten vom 4. Februar 1892) bestimmen folgendes:**)

Das Mineralschmieröl soll zum Schmieren von Eisenbahnfahrzeugen, Dampfmaschinen und Werkzeugmaschinen Verwendung finden, als Sommer- und Winteröl geliefert werden und folgenden Bestimmungen genügen: Das spez. Gewicht soll bei 20° nicht unter 0,900 und nicht über 0,925 sein. Der Flüssigkeitsgrad (Zähflüssigkeit), bezogen auf Wasser bei 20° = 1, festgestellt mit geeichtem Englerschen Viskosimeter, soll bei den nachstehenden Wärmegraden zwischen den angegebenen Grenzen liegen:

Wärmegrade	20°	30°	40°	50°	
obere Grenze	45	20	12	9	Flüssigkeitsgrade
untere „	25	12	8	6	„

Flammpunkt: Auf 160° erhitzt, soll das Mineralöl entflammbare Dämpfe nicht entweichen lassen (Feststellung mittels eines genau beschriebenen Apparats). Kältepunkt: Das Winteröl soll bei —15°, das Sommeröl bei —5° noch fliefsend sein, d. h., es soll, einem gleichbleibenden Drucke von 50 mm Wassersäule ausgesetzt, in

*) Näheres hierüber, sowie auch über die gangbarsten Verfälschungen der Schmiermittel s. A. Künkler, Die Maschinenschmierung usw. Mannheim 1893. — D. Holde, Vergleichende Schmieröl-Untersuchungen 1889/94. Berlin 1895. — D. Holde, Die Untersuchung der Schmiermittel. Berlin 1897.

**) S. Z. d. B. 1892 S. 87; als Sonderdruck zu beziehen von Wilh. Ernst & Sohn, Berlin W 66.

einem Glasröhrchen von 6 mm innerer Weite noch mindestens 10 mm/min steigen (auch hierfür genau vorgeschriebener Apparat). Ferner soll das Oel wasserfrei und säurefrei sein, nur schwachen Geruch besitzen und sich in Petroleumbenzin von 0,67 bis 0,70 spez. Gewicht vollkommen lösen lassen. Das Oel darf keine fremdartigen Beimengungen enthalten und selbst nach längerem Lagern keinen Bodensatz bilden; auch darf es, in dünnen Lagen längere Zeit der Luft ausgesetzt, weder verharzen noch zu einer firnisartigen Schicht eintrocknen.

Sonder-Bestimmungen der **K. E. D. Altona:**

Rüböl. Das Oel, welches als Schmiermittel für Lokomotiven und Tender Verwendung findet, mufs ein durchaus klares und gut abgelagertes Raps- oder Rüböl ohne freie Säure und Schleim sein. Es darf keine Beimischungen von Harz-, Teer- oder Mineralölen oder Destillationsprodukten dieser Oele, noch andere fremdartige Zusätze enthalten und auch bei längerem Lagern keinen Bodensatz bilden.

Rindertalg mufs frei von Mineralsäuren und fremdartigen Beimengungen jederart sein, darf Zellstoffe, Haut- oder Fleischteile nicht enthalten, soll eine weifse, wenig ins gelbliche spielende Farbe und einen frischen, nicht ranzigen Geruch besitzen. Talg, dessen Gehalt an freier Fettsäure 1 vH (auf Schwefelsäure berechnet) übersteigt, und Talg, dessen Erstarrungspunkt unter 33° oder über 38° liegt, wird von der Abnahme ausgeschlossen.

XI. LEDERTREIBRIEMEN.

Die fafsähnlich gewachsene Haut wird, nachdem Bauch und Klauen, Kopf, Hals und ein Teil der Schulter (zusammen rund das halbe Gewicht der Haut) abgetrennt ist, durch Zurichten zur flachen Kerntafel ausgestreckt, deren zu Treibriemen benutzbarer Teil 1,2 bis 1,5 m lang und nahezu ebenso breit ist.

Der Wert einer Haut richtet sich nach Rasse, Geschlecht, Alter, Pflege, Futter und Fütterung sowie nach der Beschaffenheit des einzelnen Tieres. Für Treibriemen gilt die Haut eines 4jährigen Ochsen, auf Grasland gezogen, als der beste Rohstoff. Junge Kühe werden selten geschlachtet, und die Häute alter Kühe sind minderwertig. Die Stierhaut, rd. 40 vH billiger als die Ochsenhaut, fällt in der Schulter sehr ab, steigt aber in Dicke nach dem Halse zu. Walrofsleder, rd. 20 mm stark, wird nicht mehr zu Treibriemen, sondern nur noch zu Schleif- und Polierledern verwendet.

Als Gerbung gilt auch heute noch die Eichenloh-Grubengerbung als das beste Verfahren.

Riemen aus Mittelrücken (Wirbelsäule des Tieres, Längsachse) haben rechts und links fast gleiche Streckungsverhältnisse, laufen deshalb am geradesten und ruhigsten und sind somit für grofse Geschwindigkeiten ($\geq$ 10 m/sk) zu empfehlen. Bis 200 mm breit sind solche Riemen nur 5 mm (bei besonders schweren Häuten bis rd. 6 mm) stark zu beschaffen, weil die Haut im Mittelrücken nur dünn ist.

Einfache Riemen kann man von Mittelstücken schwerster Häute bis rd. 1 m breit schneiden; breitere Riemen müssen als Doppelriemen auch der Breite nach aus zwei oder mehreren Häuten zusammengesetzt werden.

Bei langsamerem Lauf und nicht zu kleinen Scheiben sind die Riemen aus Seitenleder zu benutzen, da unter diesen Bedingungen die verschiedenen Faserspannungen mehr Zeit haben, sich auszugleichen; diese Riemen dürfen aber in der Breite 200 mm nicht viel überschreiten, da sonst die Spannungen der beiden Seiten zu ungleich werden.

Bei Los- und Festscheiben benutzt man die schärfere Spannung der einen Seite, indem man sie beim Laufe auf der Losscheibe zunächst der Festscheibe legt, weil ein Riemen leicht auf die Festscheibe, aber schwer zurück auf die Losscheibe zu führen ist. Die sich einseitig streckenden Teile (Seiten und Flanken) finden vortreffliche Verwendung zu Halbkreuzriemen. Riemen aus quergeschnittener Bullenschulter, für landwirtschaftliche Maschinen wohl geeignet, stellen sich sehr billig im Preise.

Aus der Dicke oder aus dem Gewicht eines Riemens läfst sich nicht auf seine Güte als Uebertragungsmittel schliefsen; letztere leidet sogar bei kleinen Scheibendurchmessern unter der Dicke. Die Dicke läfst sich durch übertriebene Schwellung, das Gewicht durch Vollstopfen der Poren mit Gerbmaterial vergröfsern, was ebenso verwerflich ist wie das Hineinbringen von Beschwerungsmitteln wie Traubenzucker, Schwerspat u. a.

Nach C. Bach*) ist die Zugfestigkeit des Leders für die Beurteilung der Uebertragungsfähigkeit und des Wertes eines Riemens nicht entscheidend, sondern seine Elastizität. Die Verwendung und Behandlung des Riemens mufs derart sein, dafs seine Elastizität möglichst erhalten bleibt.

Die Länge der einzelnen Bahnen eines Riemens beträgt 1200 bis 1500 mm; faltiges Leder darf höchstens in die Verbindungsstelle kommen. Die Verbindungsstellen breiter Riemen werden (je nach der Beschaffenheit der zu verbindenden Enden) 200 bis 400 mm lang, so dafs jede Haut eine Baulänge von 1000 bis 1300 mm liefert.

Die Verbindung erfolgt der Breite (bei Doppelriemen auch der Länge) nach am besten durch Leimen (Leim aus Flechsen mit Zusatz von Hausenblase), Abschrägen der Enden mittels Lederhobels. Zugfestigkeit der Verbindungsstellen 200 bis 300 kg/qcm. Das Nähen (meistens mit fettgaren Nähriemen) schwächt den Riemen bedeutend, ist aber bei feuchten Räumen nicht ganz zu vermeiden, weil der Leim seine Bindekraft und Elastizität durch Feuchtigkeit einbüfst; man verbindet in diesem Falle auch wohl die einzelnen Bahnen metallisch durch Krallen, Knebel u. drgl.

Eine Reinigung der Riemen nach Jahresfrist ist zu empfehlen: Abbürsten und Abwaschen mit warmem Wasser (Leimstellen schonen!). Auch gebe man dem Leder dann und wann etwas warmes Riemenfett, beachte aber, dafs es keine harzigen Teile enthalte. Solche erschweren die Bewegung der Fasern, statt sie wie Schmiermittel zu erleichtern, indem dadurch die Fasern zusammenkleben und sich gegenseitig zerreiben.

Der festeste Teil des Leders liegt etwa auf $^1/_3$ der Dicke von der Fleischseite aus. Auf der inneren Hälfte der Dicke ist der Angriff aber am gröfsten. Aus diesem Grunde, und weil auch die Haut so ihre natürlichen Biegungsverhältnisse beibehält, soll bei einfachen Riemen im allgemeinen die Fleischseite (und nicht die Haarseite) die Scheibenoberflächen berühren.

Um die wichtigsten Eigenschaften der ganzen Kerntafel in ihren einzelnen Teilen zu ermitteln, wurde von C. O. Gehrckens (Hamburg)

*) S. C. Bach, Die Maschinenelemente, 9. Aufl. (unter Riemenbetrieb); Stuttgart 1903. Ferner C. Bach, Elastizität von Treibriemen und Treibseilen, Z. d. V. d. I. 1887 S. 221 und 245.

eine halbe Kernhaut in 48 Streifen, je 30 cm lang und 5 cm breit, zerschnitten und für jeden Streifen die Dehnung bis zum Zerreifsen, die Zugfestigkeit, sowie sein Gewicht festgestellt. Die Dehnung erwies sich als aufserordentlich verschieden und selbst bei benachbarten Streifen an mehreren Stellen des Flankenstücks als ungleich, was teilweise auch daher rührt, dafs beim Zurichten zur flachen Kerntafel einzelne Teile gestreckt, andere ungestreckt gelassen werden. Die Herstellung gerader Treibriemen bedingt deshalb eine genaue Kenntnis der Haut und ihrer Streckungsverhältnisse in der Kerntafel; durch willkürliche Zerlegung in Streifen würde man sich krumm ziehende Riemen erhalten.

XII. BRENNSTOFFE.

1. Natürliche Brennstoffe.

Die nachfolgenden Angaben beziehen sich auf Gewicht-Prozente.

1. **Holz.** Aschengehalt 1,2 bis 2,3 vH, im Durchschnitte 1,5 vH. Frisch gefälltes Holz enthält 40 vH, lufttrockenes 20 vH hygroskopisches Wasser. Lufttrockenes Holz ist zusammengesetzt aus 40 vH C, 40 vH chemisch gebundenem und 20 vH hygroskopischem Wasser.

Der organische wasserfreie Teil enthält im Durchschnitt in

Holz . . .	50 C	50 H_2O	0 H	Braunkohle .	70 C	28 H_2O	2 H
Torf . . .	54 C	45 H_2O	1 H	Steinkohle .	83 C	13 H_2O	4 H

Die folgenden „fossilen" Brennstoffe (Nr. 2 bis 4) sind entstanden durch Vermoderung der Pflanzenfaser oder Zellulose, d. h. durch langsame Zersetzung bei beschränktem Luftzutritt.

2. **Torf** enthält 1 bis 30 vH Asche, frisch 80 vH, lufttrocken 15 bis 35 vH hygroskopisches Wasser; Pechtorf 60 vH Kohlenstoff. Spez. Gew. 1,1; Entzündungswärme 230°.

3. **Braunkohle** enthält 5 bis 10 vH Asche, 7 bis 30 vH hygroskopisches Wasser, faserige Braunkohle 60, erdige 70, Pech-Braunkohle 75 vH Kohlenstoff. Spez. Gew. 1,2 bis 1,25.

4. **Steinkohle** enthält im Durchschnitte 5 bis 7 vH (doch auch über 12 vH) Asche, 5 vH hygroskopisches Wasser. Steinkohlen werden nach dem Gehalte an vergasbaren Bestandteilen (zugleich dem geologischen Alter entsprechend) wie folgt eingeteilt:

Gasreiche (junge) Sandkohle, 44,4 bis 50 vH flüchtige Bestandteile; für Flammenfeuerung.

Gasreiche (junge) Sinterkohle, 40 bis 44,4 vH flüchtige Bestandteile; für Flammenfeuerung, Grus für Dampfkesselfeuerung.

Gasreiche (junge) Backkohle, 33,3 bis 40 vH flüchtige Bestandteile; Gaskohle, backend.

Gasarme (alte) Backkohle, 15,5 bis 33,3 vH flüchtige Bestandteile; mit einem Gehalte bis 20 vH als Schmiede- und Kokskohle, über 20 vH für Flammenfeuerung (Rufsbildung).

Gasarme (alte) Sinterkohle, 10 bis 15,5 vH flüchtige Bestandteile; für Dampfkesselfeuerung; mit gasreichen Sorten gemischt zum Verkoken.

Anthrazit oder **gasarme (alte) Sandkohle,** 5 bis 10 vH flüchtige Bestandteile; bedarf lebhaften Zuges, gibt wenig Flamme, keinen Rufs; als Hausbrand und zur Schachtofenfeuerung (z. B. Hochofenbetrieb).

Spez. Gew. durchschnittlich 1,25 bis 1,5.

5. **Erdöl** (Petroleum) und **Erdgas.** Erdöl enthält 83 vH C, 13 vH H, 4 vH O. Erdgas enthält 80 vH leichte, 10,6 vH schwere Kohlenwasserstoffe, 8 vH Wasserstoff, 1,4 vH Stickstoff.

2. Verkohlte Brennstoffe.

1. Holzkohle.

Holzkohle nimmt 5 bis 16 Gew.-Proz. hygroskopisches Wasser auf.

Meiler mit 80 bis 150, selten bis 300 cbm Holzinhalt. Ausbringen an Kohle dem Gewichte nach 20 bis 25 vH, dem Raume nach 50 bis 75 vH (durchschnittlich 55 bis 56 vH). Meiler von 8 bis 10 m Durchmesser garen in 2 bis $2^1/_2$ Wochen, Meiler von 14 bis 16 m Durchmesser in 4 bis 5 Wochen.

Oefen sind rechtkantig oder kegelförmig; erstere 12×14 m bei 5,5 m Höhe; letztere haben 6 bis 8 m Durchmesser bei 4 m Höhe, fassen 21 t.

Retorten, gufseiserne, von kreisrundem oder elliptischem Querschnitte, zu zwei bis sechs in einem gemauerten Raume wagerecht nebeneinander liegend, 2 bis 3 m lang, 0,8 bis 1,2 m weit, Fassungsraum 4,5 cbm; Verkohlungszeit 24 Stunden. Die Menge der ausgebrachten Holzkohle wächst bei langsamer Erhitzung und niedriger Temperatur und beträgt bei lufttrockenem Holze 24 bis 28 vH.

Nebenprodukte auf 1 cbm Holz 45 kg Essigsäure, 6 kg Holzgeist, 3 kg Teeröl.

2. Torfkohle und Braunkohlenkoks (Grude)

sind bröcklich und zerreiblich, werden nur zur Gewinnung der Nebenprodukte (Paraffin, Solaröl) hergestellt.

3. Steinkohlenkoks

werden meist aus aufbereiteten Kleinkohlen hergestellt, nehmen 3 bis 5 Gew.-Proz. hygroskopisches Wasser wieder auf; Aschengehalt 8 bis 14 Gew.-Proz. (bis 12 at für den Hochofen zulässig).

1 cbm Sandkoks wiegt 530 kg, 1 cbm Sinterkoks 495 kg, 1 cbm Backkoks (Meiler) 380 bis 420 kg, 1 cbm Backkoks (Oefen) 330 bis 470 kg.

Backkohlen nehmen bis zu 20 vH an Raum zu, Sandkohlen und Anthrazite schwinden dagegen um 10 vH, Sinterkohlen behalten ihren Raum bei.

Die Verkokung der Steinkohle findet selten in Haufen (20 bis 50 m lang, 2 bis 4 breit, 1 bis 2 m hoch) oder Meilern (3 bis 4 m Drm., 2 bis 3 m hoch), zuweilen in Stadelöfen (10 bis 15 m lang, 3 m breit, 1,5 m hoch), der Regel nach in geschlossenen Oefen statt. Das Backen beruht auf Ausscheidung von Kohlenstoff ($C_2H_4 = C + CH_4$).

Koksöfen.

Stehende oder **Appolt-Oefen** (Abb. 20 und 21). 18 Verkokungsschächte in zwei Reihen nebeneinander. Jeder Schacht fafst 1,3 bis

Abb. 20.

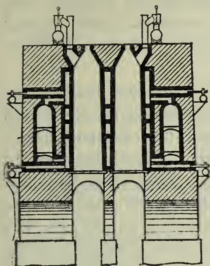


Abb. 21.

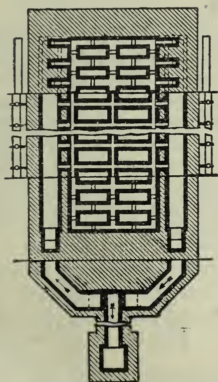


Abb. 22.

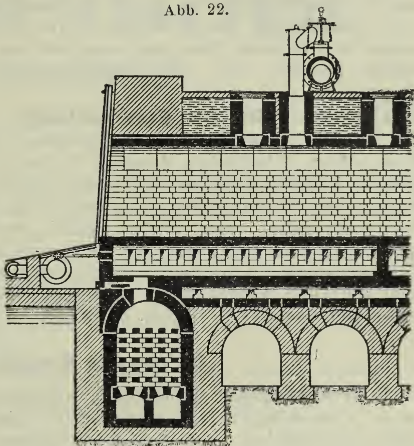
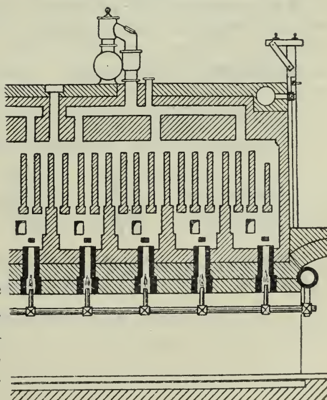


Abb. 23.



1,4 t Kohlen. Weite der Schächte unten 1,25 · 0,5 m, oben 1,12 · 0,37 m. Wandstärke 0,15 m. Raum zwischen den Verkokungsschächten unten 0,15, oben 0,29 m. Gasschlitze 0,145 · 0,026 m. Verkokungsdauer 24 st.

Neuere Oefen stehen auf eisernen Säulen.

Liegende Oefen ohne Kondensation. 20 bis 30 wagerechte Verkokungskammern von 9 bis 10 m Länge, 0,5 bis 0,6 m Breite, 1,0 bis 1,6 m Höhe bis zum Gewölbe mit 0,08 m Pfeilhöhe, in einem Rauhgemäuer. Kleinere Oefen: 9 m lang, Inhalt 4,5 cbm, Innenfläche 27 qm, feuerbespülte Heizfläche 16 qm, Beschickung 3 t Kohle, Verkokungsdauer 24 st. Gröfsere Oefen: 10 m lang, Inhalt 9,6 cbm, Innenfläche 44 qm, Heizfläche 28 qm, Beschickung 6 t, Verkokungsdauer 48 st. Herausdrücken der Koks durch vor den Oefen laufende Dampfmaschine mit Prefsstempel. Die Gase werden in lotrechten oder wagerechten Kanälen in den Zwischenwänden und in Sohlkanälen durch Zuführung von Luft verbrannt. Die Sohlkanäle werden entweder vom eigenen Ofen oder vom Nachbarofen, zuweilen von je zwei Oefen gespeist und die Verbrennungsluft durch diese erwärmt. (Coppée).

Liegende Oefen mit Gasverdichtung. Die Gase werden durch das Gewölbe abgeführt und in besonderen Verdichtungsanstalten von Teer (durch Abkühlung), Ammoniak (durch Wasser) und Benzol (durch Teeröl) befreit, dann zu den Oefen zurückgeleitet, entzündet und in Sohlen- und Wandkanälen verbrannt (Otto-Oefen). Die Gase und die Verbrennungsluft oder letztere allein werden entweder in Wärmespeichern (Abb. 22), oder die Luft wird in Sohlkanälen, die zu den Verbrennungskanälen parallel laufen, vorgewärmt (Semet-Solvay-Oefen), oder die Gase werden durch Flammen, welche in die Sohlkanäle aus Gewölben eingeführt werden, entzündet (Abb. 23).

3. Vergaste Brennstoffe.

1. **Verkokungsgas** (Leuchtgas), s. vorstehend. 2. **Luftgas** (Kohlenoxyd-, Generatorgas), $CO_2 + C = 2\,CO$ (mit Stickstoff der Luft) wird durch Durchleiten der Verbrennungsgase von Kohle oder Koks durch eine hohe Brennstoffsäule in Vergasern (Generatoren) erhalten. 3. **Wassergas**, $H_2O + C = CO + 2\,H$; entsteht durch Einblasen von Wasserdampf in erhitzte Koks (50 R.-T. H, 40 R.-T. CO). Die Erhitzung der Koks geschieht durch Luft unter Erzeugung von Luftgas. 4. **Mischgas** (Dowson-Gas), Gemisch von Luft- und Wassergas, entsteht entweder durch Vermischung von Luft- und Wassergas oder durch gleichzeitiges Blasen mit Luft und Wasserdampf.

Durchschnittliche Zusammensetzung:

	CO_2	CO	CH_4	H	N
Luftgas . .	4,2	28,0	0,3	2,8	60,0
Wassergas .	3,4	43,6	0,5	48,5	4,0
Mischgas .	0,0	18,4	0,0	12,9	59,7

Abgase: 1. Verbrannte Abgabe (blofse Wärmeausnutzung). 2. Unverbrannte Abgase (Schachtofen- oder Gichtgase) mit CO-Gehalt.

FÜNFTER ABSCHNITT.

EISENHÜTTENKUNDE.

I. EISENERZE.

Magneteisenerz; Eisenoxyduloxyd (Fe_3O_4). Eisengehalt in G.-T. durchschnittlich 50 bis 60 vH, rein 72,4 vH; Strich schwarz. (Schweden, Ural, New-Jersey.)

Roteisenerz, Eisenglanz, roter Glaskopf, Hämatit, Eisenoxyd (Fe_2O_3). Eisengehalt durchschnittlich 30 bis 40 vH in G.-T.; rein 70 vH; Strich rot. (Lahn, Cumberland, Oberer See.)

Brauneisenstein, brauner Glaskopf, gemeines mulmiges Brauneisenerz, Schaleneisenstein, Nierenerz, Bohnerz, Rogenerz, Rasen-, Wiesen-, Seeerz, Eisenhydroxyd ($H_6Fe_4O_9$). Eisengehalt 20 bis 40 vH in G.-T., rein 60 vH; Strich gelbbraun bis braun. (Oberschlesien, Ilsede, Luxemburg-Lothringen [Minette], Vizcaya.)

Spateisenstein; Ferrokarbonat ($FeCO_3$) mit einem Gehalte an Manganoxydul bis 11 vH in G.-T. Eisengehalt durchschnittlich 30 bis 42 vH, rein 48,2 vH. (Siegerland, Steiermark, Oberungarn.)

Toneisenstein, Sphärosiderit; Ferrokarbonat, gemengt mit Ton. Eisengehalt 28 bis 35 vH in G.-T. (Steinkohlenformation Englands, Körnig in Cleveland) Tritt Steinkohle zum Toneisenstein, so nennt man ihn Kohleneisenstein (Blackband). Eisengehalt 24 bis 30 vH (Schottland).

Schwefelkiesabbrände mit 92 bis 96 vH. Eisenoxyd in G.-T. (Riotinto, mit Kupfer; Meggen, mit Zink).

Puddel- und Schweifsschlacken sind Eisenoxydulsilikate mit eingeschlossenem Eisenoxyduloxyd, erstere enthalten meist Phosphor.

Bergarten der Eisenerze sind Quarz, Ton, Kalkspat, Dolomit, Mergel; gern gesehene Begleiter Manganerze (namentlich Braunstein), für Thomaseisen Apatit. Schädliche Beimengungen: Schwefelmetalle, Schwerspat.

Einteilung aller Erze in solche mit saurer und solche mit basischer Bergart, ferner in phosphorreiche und phosphorarme.

Mindest-Eisengehalt eines schmelzwürdigen Erzes etwa 25 vH in G.-T.; Erze mit weniger Gehalt können als Zuschlag verhüttet werden, wenn Kalkspat die Gangart bildet.

II. DARSTELLUNG DES ROHEISENS.

A. Behandlung der Erze.

1. Rösten der Erze.

Zweck: Entfernung von Kohlensäure oder Schwefel, Mürbemachen oder Magnetisieren.

1. In **Haufen,** nur noch für Kohleneisenstein.
2. In **Stadeln,** für mulmige schwefelhaltige Erze.
3. In **Schachtöfen.** Höhe 2 bis 15 m, meist 3 bis 6 m; Weite an der Gicht 2 bis 5 m. Brennstoff: 1 kg Holzkohlen- oder Kokslösche auf 20 bis 30 kg Erz. 1 kg Steinkohlenklein auf 5 bis 10 kg Erz. Geröstete Erze nehmen 2 bis 6 vH in G.-T. Feuchtigkeit aus der Luft auf.

Siegerländer Trichter-Röstöfen, Dmr. oben 3,2 m, unten 1,5 m, 3,2 m Schacht- und 4 m Gesamt-Höhe. Inhalt 17 cbm. Leistung für 1 Tag 50 t Spateisenstein. Brennstoff Steinkohlenklein.

Clevelander Rostöfen für körnige Toneisensteine. Dmr. 7 m, Höhe 9 bis 15 m; Fassungsraum 450 cbm, oben zylindrisch, unten verengt. Brennstoff: Steinkohle.

Westmannscher Gebläse-Gasröstofen, Höhe 6,6 m, Dmr. 1,8 m an der Gicht, 2,82 m unter der Windzuführung; Windpressung 6,5 bis 9 mm W.-S.; Leistung 45 bis 60 t in 24 st. Brennstoff: Gichtgase.

2. Zerkleinern der Erze und Kalksteine.

Druckfestigkeit des Spateisensteines $K = 70$, des Magneteisensteines und Roteisensteines $K = 200$ bis 300 kg/qcm.

1. **Handfäustel.** Ein Mann schlägt in 12-stündiger Schicht je nach der Härte der Erze 2 bis 5 t in nufsgrofse Stücke.
2. **Pochwerke.** Stempelgewicht 125 kg, 70 Schläge i. d. Min., Kraftverbrauch 2 bis 5 PS.
3. **Walzwerke.** Durchmesser der Walzen 260 bis 950 mm, Länge bis zu 300 mm. Umdrehungen i. d. Min. 45 bis 100. Man rechnet an Walzgut stündlich 1 bis 8 t bei 1 bis 12 PS.
4. **Steinbrecher.** Brechbacken aus Hartgufs, uneben oder gezahnt. S. S. 635 oben.

3. Aufbereitung der Eisenerze.

1. **Waschtrommeln.** Dmr. 1,5 m, 30 cbm in 1 Tage mit 0,93 cbm Wasser i. d. Min., Kraftbedarf 15 PS.
2. **Magnetische Aufbereitung** nach Wetherill (gleitende Bänder) oder nach System Mechernich (umlaufende Trommeln).

Abmessungen verschiedener Steinbrecher.

	Riemenbetrieb			Dampfbetrieb	
Breite des Brechmaules . . . . mm	200	400	650	400	650
Weite des Brechmaules . . . . „	120	250	400	250	400
Zahl der minutlichen Umdrehungen	250	250	250	250	250
Durchmesser der Riemenscheibe . . . . . . mm	400	630	840	.	.
Breite der Riemenscheibe . . . . „	90	150	200	.	.
Erforderliche Leistung . . . . PS	1	6	12	6	12
Leistung an gebrochenem Gut bei etwa 50 mm Spaltweite . . . . in 1 st	0,6	5 bis 6	10 bis 12,5	5 bis 6	10 bis 12,5
Gewicht der vollständigen Maschine . . . . kg	1150	4650	11300	4950	12100

Ziegelung (Brikettierung) kleinkörniger Eisenerze.

1. Leicht schmelzende Erze (Magneteisenerze) werden gesintert.

2. Kieselige Erze werden mit Kalk in überhitztem Wasserdampf behandelt (Wollastonitbildung).

3. Tonige Erze werden geprefst und gebrannt.

4. Andere Erze werden mit Ton gemischt und gebrannt, oder mit Teer oder Masut verkokt oder in geschmolzene Schlacke gebettet.

B. Hochöfen.

a. Beschickung.

1. Erze. Eisengehalt der Erzgattierungen zwischen 25 und 60 vH (in Deutschland meist 30 bis 45, in Amerika 50 bis 60), in G.-T.

2. Zuschläge. Der in der Regel fehlende Kalkgehalt oder der seltener fehlende Tonerde- oder Kieselsäuregehalt wird beim Koks-Hochofen auf ein Singulosilikat und beim Holzkohlen-Hochofen auf ein Bisilikat ergänzt. $CaO : Al_2O_3 : SiO_2 = 30 : 14 : 56$ oder $47 : 15 : 38$.*)

1. Kalkstein, Kalziumkarbonat mit 56 vH in G.-T., Kalkerde, spez. Gewicht 2,6 bis 2,7: Dolomit, Kalzium-Magnesiumkarbonat (45,8 vH), spez. Gewicht 2,8 bis 2,9, für tonige Erze geeignet (stets ungebrannt).

2. Bauxit (35 bis 70 vH Tonerde), für kieselige und kalkige Erze verwendbar.

3. Tonschiefer oder Schieferton (10 bis 20 vH Tonerde, 40 bis 70 vH Kieselsäure), für kalkige Erze geeignet.

4. Schlacken: Frisch-, Fein-, Schweifs- und Puddelschlacken, 8 bis 36 vH Kieselsäure, 50 bis 60 vH Eisenoxydul.

Schlackenmenge zum Roheisen 0,7 bis 2,1 : 1 (äufserster Fall 5 : 1). Spez. Gewicht der Schlacke 2,5 bis 3. Bei garem Gange ist die Schlacke eisenfrei.

3. Brennstoff. Für 100 kg weifses Roheisen braucht man je nach der Reduzierbarkeit der Erze und dem Eisengehalt des Möllers 90 bis 130 kg Koks, unter besonders günstigen Verhältnissen 75 kg; für 100 kg graues

*) Ueber die Berechnung der Gattierung, Möllerung und Beschickung vrgl. Wedding, Handbuch der Eisenhüttenkunde 2. Aufl. Bd. III und Grundrifs der Eisenhüttenkunde 5. Aufl.

Roheisen bei Verhüttung leicht reduzierbarer Erze und Anwendung hoch erhitzten Windes 100 bis 120 kg Koks, für eine weniger leicht reduzierbare und ärmere Beschickung 120 bis 130 kg Koks. Im Durchschnitte braucht man 95 kg Kohlenstoff auf 100 kg Roheisen.

Steinkohlen- und Anthrazit-Bedarf $1^1/_2$-mal so grofs.

Bei gesteigerter Winderhitzung nimmt der Koksverbrauch ab.

b. Bau der Hochöfen.

Das Gewicht des Hochofens (einschl. Inhalt) für 1 m Ofenhöhe ist bei Säulenhochöfen zu 1600 bis 1800 kg/qm, bei Oefen mit freistehendem Schachtmauerwerke zu 1200 bis 1600 kg/qm Grundfläche anzunehmen. Unterste Lage des Fundamentes eine 1 m starke Betonschicht. Ganze Dicke des Fundamentes bei lockerem Untergrunde mindestens 1,5 m bei Pfeilerhochöfen, 1,5 bis 2,5 m bei Säulenhochöfen. Bei Pfeilerhochöfen soll die Breite des Fundaments den Ofenstock noch um 0,2 bis 0,3 m, bei Säulenhochöfen die Aufsenkante der Säulenplatte um 1 bis 1,5 m, überragen. Bei schlechtem Baugrund wird Pfahlrost angewendet.

Gufseiserner oder flufseiserner Tragring ruht auf Säulen von 3 bis 4 m Höhe, 350 bis 450 mm Durchmesser und 25 mm Wandstärke, oder auf I-Trägern, oft auf Rollen. Dicke des Blechmantels bei Ringstücken (mit Winkeleisen 70 · 70 · 9 mm eingerahmt) 6 mm; vernietet man Ringstücke und Ringe untereinander, so macht man das Blech unten 10 bis 12, oben 8 bis 9 mm stark, bei Hochnähten mit doppelter, bei Rundnähten mit einfacher Vernietung. Zwischen Mantel und Schacht 10 bis 20 cm Zwischenraum. Freistehende Schächte (Bauart Büttgenbach) werden nur durch wagerechte Ringe (am Schachte 100 · 20, an der Rast 130 · 20 mm) verankert, die in Abständen von 0,75 m durch lotrechte Bänder (80 · 20 mm) verbunden sind. Jeder Ring umfafst 2 Steinreihen. — Schutzmantel der Gicht 2 m hoch, Blechdicke 5 mm. Die Gichtplattform samt Beschickungsvorrichtung darf niemals auf dem Kernschachte ruhen. — Gestell und Rast werden gekühlt; stündlicher Wasserverbrauch 0,1 cbm für 1 Kasten. Gufseiserne (Gelsenkirchen) oder schmiedeiserne (Rheinhausen) Mäntel erhalten bei starker Kühlung nur ein 5 bis 10 cm dickes feuerfestes Futter.

Grofse Schachtsteine haben die ganze Wandstärke des Ofens zur Länge. Freistehende Schächte haben oben 60, am Kohlensacke 75 cm Wandstärke bei 15 bis 20 cm Steindicke. Bei Oefen, die aus kleinen Steinen aufgebaut sind, wird das Gestell $3^1/_2$ bis 4, die Rast $2^1/_2$ bis 3, der Schacht 2 Stein stark, bei mittlerer Steinbreite von 12 cm. — Gewöhnlich ist der Bodenstein 0,8 bis 0,9 m hoch und liegt bis 5 m über Hüttensohle.

Windformen aus Bronze oder Kupfer. Bei kleinen Hochöfen häufig unmittelbar in die Ofenwandung eingesetzt, bei gröfseren in gufseiserne Kühlkästen mit eingegossenen schweifseisernen Rohren. Wasserverbrauch für eine Form 60 bis 75 *l*/min, für den Kühlkasten aufserdem 75 bis 100 *l*/min. Der Kühlkasten schliefst mit dem Gestell ab, während die Form 200 bis 500 mm in dieses hineinragt. Zahl der Formen bei Koksöfen 4 bis 9. Man nimmt bei 1,3 m Gestelldurchmesser drei Formen, bei 1,3 bis 2 m Dmr. vier, höchstens fünf, bei 2 m Dmr. sechs oder sieben, höchstens zwölf Formen. Höhe der Formen über dem Boden-

steine bei Koksöfen 1 bis 1,10 m, bei Holzkohlenöfen 0,7 bis 0,8 m, stets an der Unterkante der Rast.

Lürmannsche Schlackenform aus Bronze oder Kupfer. Wasserverbrauch 60 *l*/min. Die etwa 150 mm lange Form ragt etwa 80 mm in den Ofen hinein. Für sehr dünnflüssige Schlacke genügt eine Form mit zylindrischer Oeffnung von 25 mm Weite, für dickflüssige Schlacke empfiehlt sich eine nach aufsen kegelförmig erweiterte Form von 40 bis 52 mm engstem Durchgange. Die Höhe über dem Bodensteine richtet sich nach dem Raume des im Ofen zu haltenden Eisens + 0,25 bis 0,33 cbm Schlacke. Der Höhenunterschied zwischen Wind- und Schlackenformmitte mufs mindestens 26 cm betragen.

Ein grofser Hochofen braucht 2 cbm Kühlwasser in 1 Minute. Die Gichtebene ist mit dem Schachtgemäuer durch eine Stopfbüchse aus Eisenblech verbunden.

Abmessungen der Hochöfen. Höhe bei Holzkohlen 8 bis 10 m, bei Koks 18 bis 32, durchschnittlich 22 bis 25 m. Kohlensack 1,3 bis 1,4 der Ofenhöhe über den Formen; die Durchmesser vor den Formen, im Kohlensack und an der Gicht verhalten sich im Mittel bei Holzkohlen wie 1 : 3 : 1,5, bei Koks wie 1 : 2,9 : 1,5 oder wie 1 : 1,6 : 1,14 bis 1 : 2 : 1,43 und 1 : 2,9 : 2. Durchmesser in der Ebene der Formen bei Holzkohlen-Hochöfen = 1 bis 1,9 m, bei Koks-Hochöfen = 1,2 bis 3,5, gewöhnlich 2 m, höchstens 4,3 m, bei Anthrazit 3 bis 3,3 m. Gestellhöhe $^1/_6$ bis $^1/_7$ der Gesamtofenhöhe. Formebene liegt an der Grenze von Rast und Gestell. Rastwinkel 70 bis 78, meist 75°, bei schwer reduzierbaren Erzen 68°. Höhe des Kohlensackes über dem Bodensteine 6 bis 7 m. Kohlensackdurchmesser D = 5 bis 8 m, höchstens 9,5 m. Das beste Verhältnis der Höhe H des ganzen Ofens zu D ist 4 bis 4,25. Inhalt der Holzkohlen-Hochöfen 30 bis 70 cbm, bei Kokshochöfen 250 bis 550, selten 700, ausnahmsweise 1165 cbm.

Leistung der Hochöfen. Man kann rechnen, dafs für je 1 t tägliche Roheisenerzeugung im Mittel erforderlich sind

3 cbm Ofeninhalt für Darstellung gewöhnlichen Weifseisens aus leicht reduzierbaren Erzen,
4 cbm Ofeninhalt bei weniger leicht reduzierbaren Erzen,
5 cbm Ofeninhalt für Darstellung von Spiegeleisen,
7,5 cbm Ofeninhalt für Darstellung von Graueisen.

400 cbm Inhalt scheint die günstigste Gröfse zu sein.

Die Beschickung macht in 1 st 0,6 bis 0,8 m Weg.

c. Winddruckregler (Regulatoren, Windkessel).

Geschwindigkeit des Windes in der Leitung 12 bis 19 m/sk. Ein Hochofen mit 300 t Roheisenerzeugung braucht durchschnittlich 960 000 cbm, d. h. 1240 t Luft in 24 Stunden.

Der Rauminhalt der Regler mufs, wenn der Wind von einem Gebläsezylinder geliefert wird, mindestens gleich dem 20-fachen Inhalte des Gebläsezylinders sein. Bei zwei Gebläsezylindern mit um 90° versetzten Kurbeln genügt der 10-fache Inhalt eines Gebläsezylinders. Bei drei Gebläsezylindern mit um 120° versetzten Kurbeln ist ein Winddruckregler überhaupt entbehrlich.

Lange und entsprechend (d. h. etwa 2 m) weite Leitungen sowie grofse, namentlich steinerne Cowper-Winderhitzer können den Regler ersetzen.

Gewöhnlich haben 3 bis 4 Hochöfen einen gemeinsamen Winddruckregler. Das Verhältnis der gröfsten Veränderung der Windpressung zum mittleren Manometerstande (Regelungsgrad) schwankt zwischen 0,04 bis 0,06. Durchmesser zylindrischer Regler 0,8 bis 2,5 m, Blechdicke 5 bis 10 mm.

d. Winderhitzer.

Zweckmäfsige Windtemperatur für silizium- und manganreiches Eisen in grofsen Oefen 900°, für dasselbe Eisen in kleinen Oefen 700°. Nur für silizium- und manganarmes Roheisen benutzt man 300° warmen oder kalten Wind.

1. Eiserne Winderhitzer.

Sie sind anwendbar bis etwa 500°, haben aber stets den Nachteil grofsen Windverlustes, sind daher auch bei geringen Temperaturen aufser Gebrauch gekommen. — Am besten ist der **Fufskasten-Erhitzer** (Gjers) und der **Hängerohr-Erhitzer** (Wedding). — Der Hängerohr-Erhitzer hat zwei Reihen von je 16 bis 20 Rohren. Die Verbindungsstellen liegen über dem Erhitzer, daher aufserhalb des Feuers. Brennstoff: Hochofen-Gichtgase.

Man rechnet für 1 cbm/min hindurchströmenden Wind etwa 1,5 bis 3 qm Heizfläche je nach der zu erreichenden Temperatur. Die Geschwindigkeit v des Windes bei der mittleren Temperatur

$$t_m = 1/2\,(t_1 + t_2) \text{ sei } v \gtreqless 15 \text{ m/sk.}$$

2. Steinerne Winderhitzer.

Man braucht für einen Hochofen mindestens 3, gewöhnlich 4; für 2 Hochöfen mindestens 5 Winderhitzer. Anwendbar für Hitzen über 500° bis zu 1000°, der Regel nach 700° bis 800°. Erfordernis: gute Reinigung der Heizgase (Gichtgase).

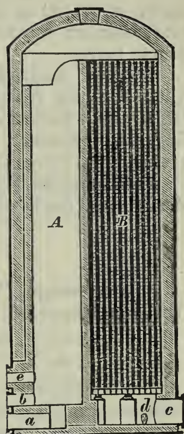
Whitwell-Erhitzer haben bei 6 bis 7 m Dmr. und rd. 18 m Höhe eine Heizfläche von 2000 bis 3000 qm. Durch parallele lotrechte Wände ist der Innenraum in gröfsere und kleinere Abteilungen geteilt. Gewöhnlich ziehen die Feuergase durch die erste grofse Abteilung aufwärts, dann in fünf Abteilungen abwärts, dann wieder in einer weiteren Abteilung aufwärts und endlich in fünf bis sieben Abteilungen abwärts zur Esse. Beim Umschalten nimmt der kalte Wind den entgegengesetzten Weg

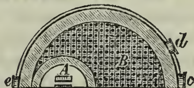
1 cbm/min Wind erfordert 7 bis 25 qm Heizfläche (der Regel nach 20 qm).

Cowper-Erhitzer, Abb. 1, haben bei 5 bis 8 m Dmr. und 20 bis 35 m Höhe 2500 bis 6000 qm Heizfläche. In dem 1 bis 1,5 m weiten, exzentrischen, zylindrischen Verbrennungsschacht A ziehen die Feuergase (mit freier Flammenentwicklung) aufwärts und, in der Kuppel umwendend, durch 300 bis 500 Kanäle B von 15 cm Weite mit 6 cm dazwischen bleibender Wandstärke abwärts zur Esse.

Die Geschwindigkeit des kalten Windes betrage bei steinernen Winderhitzern 1,5 bis 2, die des erhitzten Windes 5 bis 8 m/sk. Rauminhalt von 1 kg trockener Luft bei der Temperatur t^0 und einem ab soluten Drucke p' mm Q.-S.:

Abb. 1.





$$v = \frac{273 + t}{0,4645\, p'} \text{ cbm};$$

Wärme des Windes der Regel nach 700 bis 900°. Trocknung des Windes durch Kälte (Gayley) nützlich, aber zu kostspielig.

Näheres vrgl. Abteil. I, S. 318 u. f.

Abkühlungsdauer zur Reinigung vier bis sechs Tage bei steinernem, zwei Tage bei eisernem Unterbau. Dauer der Reinigung zwei Tage, des Anheizens 20 st.

e. Gasfänge.

Auf 1 t Roheisen fallen durchschnittlich 4500 cbm Gichtgas von 800 WE für 1 cbm.

Die Hälfte der Gichtgase wird für die Winderhitzung verbraucht. Der Rest, zur Krafterzeugung gebraucht, liefert 30 PS, davon für Gebläse, Pumpen, Aufzug 7 PS.

Spannung der Gase an der Gicht 11 bis 17 mm W.-S. (Ueberdruck).

Gasfang unterhalb der Beschickung. Der in der Gicht hängende, luftdicht auf dem Gichtrande ruhende Blechzylinder ist 1,6 bis 2,2 m lang und 6 bis 9 mm dick. Abstand des Zylinders vom Schachte 210 bis 260 mm. Der Gesamtquerschnitt der Ableitungsöffnungen nach Truran $^1/_6$ (bei 3 bis 4 m weiter Gicht $^1/_7$ bis $^1/_8$) des Gichtquerschnittes. Ein schmiedeiserner Gaskanal führt die Gase einer 0,5 bis 0,9 m weiten, gleichfalls schmiedeisernen, mit Sicherheitsventilen versehenen Gasleitung zu. Geschwindigkeit der Gase in den Ableitungsrohren 6 bis 8 m/sk. Diese Anordnung hat den Nachteil, dafs die Geschwindigkeit der Gase im Hochofen geändert wird.

Gasfang oberhalb der Beschickung. Parryscher Kegel: Grundfläche des inneren Kegels etwa $^2/_3$ der Gichtweite und $^4/_3$ der kleinen Oeffnung des abgestumpften Kegels. Rutschwinkel $\varrho = 35$ bis 37°. — **Langensche Glocke** gestattet, die Beschickungsoberfläche freizulegen. — **Doppel-Gasfang:** Mittelrohr 0,28 w weit, dessen unterer Kegel oben 0,28 w, unten 0,7 w, bei 0,25 w bis 0,27 w Höhe, wenn w die Gichtweite bedeutet. Blechdicke 13 bis 15 mm. Die Kegel sind aus Blech oder Gufseisen; im ersteren Falle verstärkt man sie am Verschlusse mit gufseisernen Ringen.

Reinigung der Gichtgase. Die Gase werden vom Hochofen aus zuerst in einem aufsteigenden Kanal fortgeleitet, wobei der mitgerissene Gichtstaub (5 bis 15 g in 1 cbm) zum grofsen Teile wieder in den Hochofen zurückfällt; in der weiteren meist schmiedeisernen (selten

gufseisernen) Gasleitung werden die lotrechten Rohrstränge nach unten zu Staubsäcken verlängert (durch Klappventile verschlossen), oder der Gasstrom wird durch weite, zum Teil mit Wasser gefüllte und so von der Aufsenluft abgesperrte S-Apparate (Lothringer Apparate, 1,2 bis 1,7 m hoch, 8 bis 10 m lang, 1,0 bis 1,5 m Dmr.) geleitet. Durch diese Einrichtungen werden die Gase weiter von Gichtstaub, Teer und Wasserdampf befreit.

Bessere Reinigung durch drehende Vorrichtungen mit Wasser (Flügelrad mit Wassereinströmung an der Nabe, dann durch Sägespäne, Holzwolle, Schlackenwolle usw.); ferner Theisensche Zentrifugal-Gegenstromwascher. Abkühlung der Gase. Reinigung bis auf 0,02 g in 1 cbm.

Vollkommene Reinigung ist nötig für den Gebrauch der Gase in Maschinen (Zwei- oder Viertaktmaschinen).

f. Windbedarf.

1. **Windmenge.** (Vrgl. **c.** S. 637) Zusammensetzung der atmosphärischen Luft (aus Sauerstoff, Stickstoff, Wasserdampf, Kohlensäure) s. S. 375 u. f.

1 G.-T. Sauerstoff ist in 4,24 G.-T. Luft enthalten,
1 R.-T. „ „ „ 4,69 R.-T. „ „ .

Die erforderliche Windmenge ergibt sich aus dem der täglichen Roheisenerzeugung entsprechenden Brennstoffaufwande (vrgl. S. 635).

Die der **Gebläseberechnung** (vrgl. Abteil. II, Gebläse und Kompressoren) zugrunde zu legende Windmenge ist entsprechend den Verlusten in der Leitung und in den Winderhitzern höher anzunehmen; bei mäfsig gutem Zustande im Mittel 1,25-mal so grofs.

2. **Winddruck.** Der Windüberdruck schwankt am Ofen zwischen 0,1 und 1 kg/qcm, er beträgt in der Regel 0,4 bis 0,6 kg/qcm. Der von dem Gebläse zu erzeugende Druck hängt ab von der in den Düsen anzunehmenden Geschwindigkeit (Berechnung des zur Erzeugung einer gewissen Geschwindigkeit erforderlichen Druckes s. S. 356 u. f.), ferner von dem Widerstande, den die Beschickung dem aufsteigenden Gasstrome entgegensetzt, endlich von den Widerständen in der Leitung und in den Winderhitzern. Je gröfser der Durchmesser der Formenebene ist, um so gröfser mufs die Windgeschwindigkeit sein.

Austrittgeschwindigkeit des Windes aus den Düsen bei Holzkohlen-Hochöfen 80 bis 200 m/sk, bei Koks-Hochöfen und heifsem Winde 150 bis 300 m/sk, bei Anthrazitöfen 400 m/sk.

Die aus den Düsen strömende Luftmenge kann mit Hilfe der Formeln S. 360 ermittelt werden. Für den vorliegenden Fall ergibt sich das durch die Düsen strömende Luftgewicht G in kg/min bei mittlerer Feuchtigkeit näherungsweise zu

$$G = \frac{13{,}596 \cdot 60}{10\,000} \sqrt{\frac{2\,g}{R}}\,\mu F \sqrt{\frac{(b + h_2)\,(h_1 - h_2)}{273 + t}}$$

$$= 0{,}06664\,\mu F \sqrt{\frac{(b + h_2)\,(h_1 - h_2)}{273 + t}},$$

worin bedeutet:

b den jeweiligen Barometerstand in mm Q.-S.,
h_1 den am Manometer abgelesenen Wind-Ueberdruck in der Leitung nahe den Düsen in mm Q.-S.,
h_2 den im Gestelle herrschenden Wind-Ueberdruck in mm Q.-S.,
t die Temperatur des Gebläsewindes in Grad,
F den Querschnitt sämtlicher Düsen in qcm,
g die Beschleunigung durch die Schwere $= 9{,}81$ m/sk²,
μ die Ausflufszahl der Luft (s. S. 361); man setze nach G. Schmidt $\mu = 0{,}86$.

Der Festwert $R = 29{,}4$ mkg/kg s. S. 319.

Für erhebliche Druckunterschiede $(h_1 - h_2)$ empfiehlt es sich, der rechten Seite vorstehender Gleichung für G einen Berichtigungsfaktor λ beizufügen, dessen Gröfse folgender Tafel zu entnehmen ist.

Werte des Faktors λ.

$b + h_2$ in mm Q.-S.	$h_1 - h_2$ in mm Q.-S.				
	100	500	1000	1500	2000
600	0,99	0,97	0,95	0,92	0,90
800	1,00	0,98	0,96	0,94	0,92
1000	1,00	0,98	0,97	0,95	0,94
1300	1,00	0,99	0,98	0,96	0,95
1600	1,00	0,99	0,98	0,97	0,96

Die Luftmenge V in cbm/min, bezogen auf 0° und 760 mm Q.-S. ist bei mittlerer Feuchtigkeit $V = 0{,}777\ G$.

Der Gegendruck h_2 im Hochofengestelle beträgt bei Koks-Hochöfen in der Regel 30 bis 70 mm Q.-S. (oder das 0,2- bis 0,4-fache des Winddruckes in den Düsen).

Soll für einen Hochofen von bestimmter Leistung und gegebenen Düsenabmessungen die erforderliche Windpressung h_1 ermittelt werden, so bestimmt man das erforderliche Luftgewicht G (in kg/min) nach dem Verbrauche an Brennstoff i. d. Min. (vrgl. S. 635), schätzt h_2 gemäfs vorstehender Angabe und findet

$$h_1 = h_2 + \frac{225{,}2\,(273 + t)}{b + h_2}\left(\frac{G}{\lambda\,\mu\,F}\right)^2.$$

Der vom Gebläse zu erzeugende Druck h_0 mufs um den Druckverlust in der Leitung und den Winderhitzern gröfser sein; nach G. Schmidt setze man $h_0 = 1{,}25\ h_1 + 20$ mm Q.-S. (Vrgl. auch Druckverlust in Rohrleitungen, S. 363 u. f.)

Der absolute Druck p in kg/qcm, welcher der Formel zur Berechnung des Arbeitsbedarfes des Gebläses

$$N_i = \varepsilon\,\alpha\,\frac{V}{\beta}\,\frac{10\,000\,(p - 1)}{75}$$

zugrunde zu legen ist, beträgt somit

$$p = 1 + \frac{h_0}{735{,}5}.$$

Bei Holzkohlen-Hochöfen ist $p - 1 = 0{,}07$ bis $0{,}2$ kg/qcm,
bei Koks-Hochöfen $p - 1 = 0{,}2$ bis 0,5, meist 0,3, selten bis 1,5 kg/qcm,
bei Anthrazit-Hochöfen $p - 1 = 0{,}4$ bis 1,5 kg/qcm.

Im letzteren Falle baut man für grofse Oefen das Gebläse derart, dafs vorübergehend ein Ueberdruck von 1,5 kg/qcm erreichbar ist.

Für die Berechnung des erforderlichen **Düsendurchmessers** bei gegebenen Pressungen gilt

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{F}{n} = \frac{G}{0{,}06664\,\lambda n \mu} \sqrt{\frac{273 + t}{(b + h_2)(h_1 - h_2)}},$$

worin d der lichte Durchmesser der Düsenöffnung in cm, n die Anzahl der Düsen, je nach Gröfse des Hochofens 3 bis 8.

Man gibt den Düsen meist eine Seitenneigung von 6^0.

3. **Windkühlung.** Der Wind kann vor der Erhitzung durch Eismaschinen gekühlt werden, um ihn vom Wassergehalt zu befreien. Wassergehalt der Luft bei $+30^0$ 30 g im cbm, bei -6^0 3 g. Der Vorteil liegt in der Gleichmäfsigkeit des Betriebes, aber die Einrichtung ist zu teuer.

4. **Windleitung.** Die Windgeschwindigkeit nehme man für kalten Wind 12 bis 14 m/sk.

Lichter Durchmesser der Formen, welche aus Bronze oder Kupfer bestehen und stets gekühlt sind, 7,5 bis 21, in der Regel 9 bis 12 cm. Zahl der Formen 3 bis 12, in der Regel 6 bis 7.

Die Formen liegen in einer wagerechten Ebene, mit ihrer Achse gegen die senkrechte Hochofenachse gerichtet. Sie ragen 5 bis 10 cm ins Innere vor.

Höhe der Formen über dem Bodenstein 0,5 bis 1,5, in der Regel 1 m. Lage an der Kante zwischen Rast und Gestell.

C. Zusammensetzung des Roheisens.

Lfd. Nr.	Roheisensorte	Silizium	Phosphor	Schwefel	Mangan	Kupfer	Graphit	Gesamter Kohlenstoff
	Holzkohlen-Roheisen:	G.-T. in vH						
1	Graues Holzkohlenroheisen von Müsen	2,00	0,20	Spur	0,41	Spur	2,97	3,50
2	Halbiertes, schwedisches von Finspong	0,63	Spur	0,15	0,32	Spur	2,26	2,70
	Graues Koks-Roheisen:							
3	Siliziumeisen von Hörde	16,31	0,18	n. best.	1,22	n. best.	0,80	0,80
4	Siliziumeisen der Königshütte	11,29	0,08	0,02	2,08	n. best.	1,59	1,59
5	Bessemer-Roheisen der Georgs-Marien-Hütte Nr. I (tiefgrau)	3,31	0,07	0,05	3,41	n. best.	4,00	4,76
6	Bessemer-Roheisen der Georgs-Marien-Hütte Nr. II (grau)	2,52	0,07	0,03	3,90	n. best.	3,10	3,76
7	Bessemer-Roheisen der Georgs-Marien-Hütte Nr. III (lichtgr.)	1,73	0,08	0,04	3,78	n. best.	2,97	3,14
8	Friedrich-Wilhelms-Hütte Nr. I	2,81	0,68	0,02	1,05	0,02	3,50	3,86
9	dsgl. Nr. III	2,37	0,77	0,02	0,82	n. best.	3,37	3,87
10	dsgl. Hämatit-Roheisen Nr. I	2,99	0,07	0,02	1,18	0,02	3,29	3,80
11	Schottisches Roheisen Coltness Nr. I (tiefgrau)	2,77	0,80	0,02	1,31	0,09	3,33	3,78
12	Schottisches Roheisen Coltness Nr. III (grau)	2,16	0,51	n. best.	0,67	0,08	2,54	2,82
13	Schottisches Roheisen Langloan	2,93	0,75	0,04	1,62	0,07	3,40	3,86
14	Englisches Roheisen Clarence Nr. III	2,52	1,49	0,06	0,68	0,04	3,39	3,52
	Luxemb.-lothring. Minette-Roheisen Nr. III	2,71	1,78	.	.	.	3,30	3,82
	Luxemb.-lothring. Minette-Roheisen Nr. IV	2,71	1,93	.	.	.	3,30	3,82
15	Luxemb.-lothring. Minette-Roheisen Nr. V	2,86	1,89	.	.	.	3,40	3,71
	Luxemb.-lothring. Minette-Roheisen Nr. VI	1,87	1,85	.	.	.	3,10	3,76
16	Graues Bessemer-Roheisen	2,52	0,07	0,03	.		3,10	3,76

Lfd. Nr.	Roheisensorte	Silizium	Phosphor	Schwefel	Mangan	Kupfer	Graphit	Gesamter Kohlenstoff
	Weifses Koks-Roheisen:	G.-T. in vH						
16a	Spiegeleisen, Siegerland	0,4	0,07	0,10	6 bis 20	0,25	.	4,9
17	Spiegeleisen von Fried. Krupp . . .	0,30	0,16	0,01	11,3	n. best.	.	5,30
18	Weifsstrahleisen von Ilsede	0,11	3,29	0,04	3,84	n. best.	.	2,68
19	Eisenmangan von Hörde	2,52	0,38	Spur	55,1	0,17	.	5,31
20	Kleinspiegeleisen der Georgs-Marien-Hütte	0,37	0,08	Spur	4,28	n. best.	.	3,83
21	Kerneisen der Georgs-Marien-Hütte .	1,03	0,09	0,05	2,74	n. best.	2,46	3,67
22	Gewöhnliches Weifseisen von Gleiwitz	0,53	0,96	0,07	0,78	n. best.	.	3,18
23	Thomas-Roheisen Ilsede	0,03	3,12	0,14	.	.	.	1,64
24	dsgl. aus Oberschlesien	0,29	2,36	0,12	0,30	.	.	2,52
25	Ferromangan	1,0	0,28	Spur	20 bis 33	0,15	.	6,2
26	Ferrosilizium	8,5 bis 15,0	0,10	0,02	2,5	.	.	1,2

D. Hochofenschlacken.

Glasig oder steinig, fliefsen in Wagen oder werden durch Wasser gekörnt.

Verwendung zu Schüttungen (fest oder flüssig) oder zu Eisenportlandzement (nach Zumischung von Kalk, Sinterung zu Klinkern mit oder ohne Zusatz von Hochofenschlacke, Mahlung).

Zusammensetzung.

Lfd. Nr.	Schlackenherkunft von	Kieselsäure	Tonerde	Kalkerde	Magnesia	Manganoxydul	Eisenoxydul
	Holzkohlen-Roheisen:	G.-T. in vH					
1	Durchschnitt	47,0	7,0	46,0		.	.
2	Graues R. von Siegen	49,6	9,0	.	15,0	25,8	0,04
3	Spiegeleisen von Siegen	48,4	6,7	.	10,2	34,0	0,06
	Koks-Roheisen:						
4	Durchschnitt	35,0	7,0	58,0		.	.
	Graues:						
5	Graues Giefserei-R. von Mülheim . .	31,7	13,1	46,5	2,0	.	1,1
6	dsgl. der Georgs-Marien-Hütte . . .	29,0	7,0	39,4	18,3	.	1,6
7	Hämatit-Roheisen von Mülheim . . .	31,7	13,0	51,2	2,1	.	1,0
	Weifses:						
8	Ferromangan von Siegen	25,0	12,0	42,0	6,5	14,5	.
9	Spiegeleis. v. Siegen (m. 10 bis 12 vH Mn)	29,0	8,5	39,0	3,0	15,0	0,5
10	Thomas-Roheisen aus Lothringen . .	31,5	18,5	43,0	2,0	1,9	.
11	dsgl. von Ilsede	30,0	11,0	37,0	4,0	14,0	.
	Schlacke für Eisenportlandzement:						
12	Schlacke von Giefsereiroheisen . . .	27,5—36,8	9,5—20	46,5—50,5	1,9—6	.	

aufserdem 1,1—2,7 Schwefel.

E. Giefsereibetrieb.

a. Umschmelzen des Roheisens.

1. In feuerfesten Ton- oder Graphit-Tiegeln im Tiegelofen.

Einsatz höchstens 1000 kg. 100 kg Gufseisen brauchen durchschnittlich 140 kg Koks; Abbrand 20 bis 25 vH. Der Ofenschacht hat 60 bis 75 cm Höhe und 35 cm Weite.

2. In Kuppelöfen (Kupolöfen).

Höhe des Schachtes für Koks mindestens 2 m, gewöhnlich 3,5 bis 4 m, für Holzkohlen am zweckmäfsigsten 6,5 m. **Weite** in der Formhöhe mit Rücksicht auf Ausbesserungen $\geq$ 0,5 m. Für 1 kg/st zu schmelzenden Eisens ist ein Schachtquerschnitt an der engsten Stelle von 0,8 bis 1,25 qcm erforderlich. Porige Koks erfordern gröfseren Schachtquerschnitt als dichte. Abstichöffnung 0,5 bis 0,9 m über der Hüttensohle gelegen. Mantel in der Regel aus 10 mm dickem Eisenblech. Schachtfutter mindestens 0,15 m, für Giefsereiöfen meist 0,2 bis 0,25 m, für Bessemereiöfen bis 0,4 m dick. Der Boden wird 0,15 bis 0,20 m hoch aus einem Gemenge von feuerfestem Ton und Quarzsand gestampft.

Die **Formen** liegen bei starkem Gebläse und festen Koks 0,5 bis 0,75 m, bei schwachem Gebläse und leichten Holzkohlen etwa 0,35 m über dem Boden. Die Zahl der Formen wächst mit der Weite des Schachtes auf sechs bis acht; oft zwei Formenreihen übereinander; der gesamte, zweckmäfsig reichlich zu bemessende Querschnitt der Windeinströmöffnungen beträgt das $^1/_8$- bis $^1/_2$-fache des engsten Schachtquerschnittes.

Brennstoffaufwand. Auf 100 kg Roheisen 7 bis 10 kg Koks (ohne Anheizen).

Zum Anblasen der Oefen durchschnittlich 30 kg Koks oder ebensoviel Holzkohlen.

Wind. Auf 100 kg Roheisen durchschnittlich 60 bis 70 cbm Wind mit einer Pressung von meist 200 bis 400, selten bis 1500 mm W.-S. Winderhitzung bietet bei Kuppelöfen keinen Vorteil. Zur Vermeidung von Funken wird Dampfstrahlgebläse in abwärts steigendem Abzugrohre verwendet.

Gröfse der Gichten. Für 1 qm Fläche der Gichtöffnung etwa 80 kg Koks auf eine Gicht.

Zu jeder Gicht setzt man an Kalkstein ungefähr 15 bis 20 vH von dem Gewichte der Koks.

Eisenabgang 3 bis 10 vH, gewöhnlich 5 bis 7 vH.

Ireland-Ofen: Unten drei bis vier, oben sechs bis acht Formen; Querschnitt der Windformen $^1/_4$ bis $^1/_2$ des engsten Schachtquerschnittes, wobei die unteren doppelt so grofsen Querschnitt haben wie die oberen. Die beiden Formenreihen haben 0,45 bis 0,75 m lotrechten Abstand.

Krigar-Ofen: Der Wind tritt aus einem rings um den Ofenschacht laufenden Kanal durch zwei einander gegenüberliegende, lotrecht ab-

steigende Kanäle, deren Querschnitt zusammen $^1/_5$ bis $^1/_8$ des wagerechten Schachtquerschnittes beträgt, in zwei überwölbte Oeffnungen und durch diese in den Ofen. Jede der Oeffnungen ist $^1/_5$ bis $^1/_6$ des ganzen Ofenschachtes im lichten breit, die Höhe schwankt zwischen 400 bis 700 mm. Ein Krigar-Ofen für 3000 bis 4000 kg/st Erzeugung hat folgende Abmessungen: Von Hüttensohle bis Oberkante Schacht 4,4 m, bis Oberkante Vorherd 2,0 m; Vorherd rund mit 1,25 m Dmr. im lichten 0,8 m; Schacht im lichten oben 0,85 m Dmr., unten 0,6 m.

3. Einschmelzen in Flammöfen.

Nur da angewendet, wo Brennstoff sehr billig ist, oder zum Einschmelzen grofser, schwer zu zerkleinernder Stücke, oder wenn das Roheisen beim Umschmelzen verändert werden soll (z. B. für Hartgufs).

Für je 1000 kg Einsatz 0,5 bis 1 qm Herdfläche (für kleine Oefen mehr, für grofse weniger). Die gesamte Rostfläche $R = {}^1/_3$ der Herdfläche, Flammloch $= {}^1/_2$ bis $^2/_3\ R$; Fuchsquerschnitt $= {}^1/_9$ bis $^1/_{10}\ R$; Essenquerschnitt $= {}^1/_5\ R$; Essenhöhe rd. 25 m; Zeitdauer des Einschmelzens mit Anheizen 6 bis 7 st, ohne Anheizen 4 bis 5 st.

Brennstoffverbrauch für 100 kg Roheisen je nach dem Aschengehalte des Brennstoffes und der Strengflüssigkeit des Roheisens 50 bis 80 kg Steinkohle oder 100 bis 130 kg Holz.

Eisenabgang 6 bis 9 vH, richtet sich nach der Menge des oxydierten Siliziums und Mangans. **Einsatz** 3 bis 15 t, in der Regel 5 bis 10 t.

4. Stahlgufserzeugung.

Stahlgufsstücke werden der Regel nach aus dem Martineisen, auch mit Zuhilfenahme der Kleinbessemerbirne (s. S. 650) mit oder ohne Mischung mit Kuppelofeneisen oder aus Kuppelofeneisen unter Zumischung von Schmiedeisenabfällen hergestellt.

b. Berechnung des Gewichtes von Gufsstücken.

Werte des Längen-Schwindmafses für Metalle s. S. 298. Das körperliche Schwindmafs ist annähernd dreimal so grofs, wie das Längen-Schwindmafs.

Ist σ_g das spezifische Gewicht des Gufsstückes,
σ_m das spezifische Gewicht des Modelles,
M das Gewicht des Modelles in kg,
G das Gewicht des Gufsstückes in kg,
a der reziproke Wert des körperlichen Schwindmafses des Gufsstoffes, so ist

$$G = \left(\frac{a-1}{a}\,\frac{\sigma_g}{\sigma_m}\right) M = x M.$$

Für Gufseisen ist z. B. das körperliche Schwindmafs rd. $3 \cdot {}^1/_{96} = {}^1/_{32}$; mithin ist $a = 32$ zu setzen.

Für die vorstehende Formel dienen folgende

Werte von x.

(Nach K. Karmarsch.)

Baustoff des **Modelles**	Stoff des **Gufsstückes**						
	Gufseisen		Messing	Rotgufs	Bronze	Zink	Glocken- oder Kanonenmetall
	im Mittel	bis					
Fichtenholz	14,0	17,5	15,8	16,7	16,3	13,5	17,1
Tannenholz	14,0	17,5	15,8	16,7	16,3	13,5	17,1
Eichenholz	9,0	10,9	10,1	10,4	10,3	8,6	10,9
Buchenholz	9,7	11,1	10,9	11,4	11,3	9,4	11,9
Lindenholz	13,4	·	15,1	15,7	15,5	12,9	16,3
Birnbaumholz	10,2	13,0	11,5	11,9	11,8	9,8	12,4
Birkenholz	10,6	13,5	11,9	12,3	12,2	10,2	12,9
Erlenholz	12,8	13,5	14,3	14,9	14,7	12,2	15,5
Mahagoniholz	11,7	·	13,2	13,7	13,5	11,2	14,2
Messing	0,84	0,95	0,95	0,99	0,98	0,81	1,00
Zink	1,00	·	1,13	1,17	1,16	0,96	1,22
Zinn (mit 1/3 bis 1/4 Blei)	0,89	1,11	1,00	1,03	1,03	0,85	1,12
Blei	0,64	0,79	0,72	0,74	0,74	0,61	0,78
Gufseisen	0,97	·	1,09	1,13	1,12	0,93	1,18

III. DARSTELLUNG VON SCHMIEDBAREM EISEN.

a. Puddelofenbetrieb.

Ofenabmessungen einfacher Handöfen. Gerüst aus Gufseisenplatten etwa 3,8 bis 4 m lang, 1,75 bis 2 m breit (äufsere Länge und Breite des Ofens) und 1,88 m hoch. Der Zwischenraum zwischen zwei Oefen mufs mindestens 3,75 m, besser 5 bis 6 m betragen. Die Entfernung der Puddelofentür bis zum Zängehammer oder Rohschienenwalzwerke mufs möglichst gering sein. Gufseiserne Herdplatten 50 bis 80 mm dick. Länge des Herdes 1,2 bis 2,0 m; Tiefe durchschnittlich 0,15 bis 0,25 m; Breite zur Länge etwa 0,8, Breite bei Doppelöfen 1,5 bis 2,0 m. Der Herd liegt 0,25 bis 0,30 m unter Oberkante Herdeisen und 0,20 bis 0,26 m unter der Arbeitsplatte.

Arbeitstür 0,14 bis 0,21 qm Querschnitt. Dicke des Gewölbes 16 bis 21 cm, Gewölbemitte über Herdsohle 0,6 bis 0,7 m. Rostfläche für je 100 kg Einsatz 0,3 qm. Gröfse des Flammenloches gleich dem 0,5-fachen der Rostfläche; Gröfse des Fuchses gleich dem 0,1- bis 0,2-fachen der Rostfläche. Querschnitt der Esse gleich dem 0,25-fachen

der Rostfläche. Höhe der Esse 12 bis 18 m. Gemeinsame Esse für mehrere Puddelöfen 40 m und darüber hoch.

Doppelöfen mit zwei freiliegenden Herden nach Springer mit Gasfeuerung, Wärmespeicher und umkehrbarer Flammenrichtung; mit zwei beweglichen Herden auf einer Eisenplatte, die von einem hydraulischen Kolben getragen wird, nach Pietzka mit einfacher Flammenrichtung.

Einsatz 200 bis 300 kg, bei Doppelöfen 400 bis 600 kg, Zahl der Hitzen in 12 st für weiches Eisen bei 300 kg Einsatz 10, für Feinkorneisen 6 bis 7, für Stahl 5 bis 6. Für Feinkorn und Stahl nimmt man in der Regel auch kleinere Einsätze, z. B. 225 kg. 12 bis 20 Sätze für Sehneneisen, 10 Sätze für Korneisen, in Doppelöfen 24 Sätze in 24 st.

Abbrand bei schnellgehendem weichen Eisen 6 bis 7 vH, bei Feinkorneisen und Stahl 9 bis 15 vH.

Brennstoffverbrauch. Auf je 100 kg Luppeneisen rechnet man 80 bis 100 kg Steinkohlen (oder 120 bis 150 kg Braunkohlen). Puddelstahl verlangt bis 150 kg Steinkohlen für 100 kg Luppeneisen.

Brennstoffersparnis durch Vorwärmherde 15 bis 25 vH.

Kessel. Zur Ausnutzung der Abhitze der Puddelöfen sind, wenn genügend Platz vorhanden ist, liegende Walzenkessel anzuwenden. Stehende Kessel sind zu vermeiden. — Fuchsdeckel und Schieber oder Sandeinwurf zur Verhütung von Explosionen.

Heizfläche etwa gleich dem 22-fachen der Rostfläche, wobei dann die stündliche Dampfentwicklung etwa zu 15 kg/qm der Heizfläche anzunehmen ist. 1 kg Kohle entwickelt hierbei etwa noch 1,5 bis 2 kg Dampf; dementsprechend beträgt die Heizfläche eines Kessels für einen Puddelofen für mittlere Verhältnisse rd. 20 qm. Ueberdruck der Kessel in der Regel 5 at.

Wasserverbrauch. Der stündliche Wasserverbrauch eines Puddelofens beträgt

mit offenem Kanal	0,50 bis 0,65 cbm,
mit geschlossenem Kanal	0,80 „ 1,00 „ ,
für Kühlung des Gezähes	0,10 „ .

Luppenhämmer s. Abteil. II, 8. Abschn., Arbeitsmaschinen, I. Werkzeugmaschinen (unter Hämmer). Man rechnet einen Hammer auf sieben bis acht Puddelöfen. Handsteuerung mit Ventilen oder entlasteten Schiebern. Mit gutem Erfolge werden Wasserdruckpressen benutzt (Huldschinsky, Gleiwitz).

b. Bessemer- und Thomas-Werke (Birnenflufseisenerzeugung).

1. Pfannen, Mischer und Umschmelzöfen.

a) Pfannen für 10 bis 20 t Roheisen auf Rädern, meist mit Lokomotivbetrieb, bringen das flüssige Roheisen vom Hochofen zum Mischer oder unmittelbar zur Birne (schiefe Ebenen oder hydraulische Aufzüge).

b) Mischer für 80 bis 300, durchschnittlich 150 bis 200 t Roheisen, zum Ausgleichen verschiedener Roheisenarten und zur Abscheidung von Schwefel (MnS), der Regel nach mit saurem, nur an der Schlackenlinie basischem Futter, bei 300 bis 600 t oft Gasheizung.

c) Als Umschmelzöfen dienen (Ireland- oder Krigar-) Kuppelöfen (vrgl. S. 644) mit 1,5 bis 2 m Dmr., meist elliptischem Querschnitte und einem für die Aufnahme von 5 bis 12 t ausreichenden Herde.

2. Birnen.

Abmessungen	Saures Verfahren		Basisches Verfahren
	5 bis 6 t Einsatz	8 bis 10 t Einsatz	8 bis 10 t Einsatz
Gesamthöhe . . . . . m	3,5 bis 3,8	4,0 bis 4,8	4,0 bis 4,8
Lichte Weite im Bauche . m	1,6 bis 1,8	1,8 bis 2,0	2,0 bis 2,5
Lichte Weite am Boden . m	1,0	1,0 bis 1,3	1,2 bis 2,4
Halsmündungsweite . . m	0,5 bis 0,6	0,6 bis 0,7	0,6 bis 0,8
Stärke d. Futters i. Bauche m	0,2 bis 0,3	0,3 bis 0,4	0,30 bis 0,45
Bodenstärke . . . . . m	0,4 bis 0,5	0,4 bis 0,5	0,55 bis 0,65

Durchmesser der Windeinströmöffnungen 1 bis 3, der Regel nach 1,0 cm. Düsenquerschnitt für 1 t Einsatz 15 bis 20 qcm, bei Verarbeitung siliziumarmer Roheisensorten in der basischen Birne bis 25 qcm, Zahl der Düsen 50 bis 200.

Höhe des Eisenbades 0,4 bis 0,65 m.

Futter. Das Futter für das saure Verfahren besteht aus Quarz mit etwas Ton (Ganister), wird entweder aufgestampft oder aus Steinen aufgemauert. Ein Futter hält ohne gröfsere Ausbesserungen 80 bis 100 Hitzen aus; nach 200 bis 400 Hitzen wird in der Regel eine vollständige Erneuerung notwendig.

Das basische Futter (gebrannter magnesiareicher Kalkstein [Dolomit], mit 8 bis 10 vH wasserfreiem Gasteer heifs vermischt), gestampft oder aus geglühten Steinen aufgemauert. Dauer wie vorstehend.

Zur Herstellung des basischen Futters sind erforderlich ein basisch ausgekleideter Kuppelofen zum Brennen des Dolomites, eine Mühle zum Zerkleinern, eine Mischmaschine, eine Presse, wenn die Steine geprefst werden sollen.

Böden meist gestampft (oft mit Maschinen), mit Rücksicht auf den häufigen Wechsel (ein Boden hält nur 12 bis 50 Hitzen ohne Ausbesserung aus) leicht auswechselbar anzuordnen. (Druckwasser-Hebevorrichtung zum Einsetzen der Böden.) Ein aus Ziegeln hergestellter Boden braucht 12 bis 15 st, ein gestampfter oder gegossener Boden 96 bis 120 st zum Trocknen. Saure Böden meist mit Fernen (d. s. schwach kegelige Formen aus einem Gemische von feuerfestem Ton und Schamotte hergestellt und in den Boden eingesetzt), basische Böden mit gleichmäfsig verteilten Oeffnungen (Liliensternsche Böden). Man unterscheidet unter den Losböden Abnehm- und Durchziehböden, erstere mit dem Windkasten, letztere durch den Windkasten zu entfernen.

3. Hülfsmaschinen.

Gebläse. Berechnung s. Abteil. I, 8. Abschn., Arbeitsmaschinen (unter Zylindergebläse und Kompressoren). Man rechnet für 1 t Einsatz 33 cbm (= 42,7 kg) Wind. Die erforderliche Windpressung sowie

die in der Zeiteinheit durch die Düsen strömende Windmenge ergeben sich nach den Formeln auf S. 640 u. f.; für h_2 ist der Gegendruck an der Düsenmündung einzuführen [= Höhe des Eisenbades in mm mal dem Verhältnis des spezifischen Gewichtes von heifsem Eisen zu dem des Quecksilbers (= 0,54), mit Rücksicht auf Gasspannungen an der Birnenmündung schätzungsweise zu vergröfsern]. Für μ ist hier nur 0,76 zu setzen. Die Temperatur der Luft kann gleich 100° geschätzt werden. Angaben über Düsenabmessungen s. S. 642.

In der Regel werden die Gebläse für 1,5 bis 2 at, neuerdings bis 4 at Ueberdruck gebaut, u. zw. ist der Ueberdruck beim basischen Verfahren im allgemeinen höher zu wählen als beim sauren. Gebläse und Kessel müssen so bemessen sein, dafs sich vorübergehend der Druck über das berechnete Mafs steigern läfst. Der Betrieb macht Kessel mit grofsem Wasserraum empfehlenswert.

Die Gebläse müssen für gleichförmige Windlieferung gebaut sein; gewöhnlich zwei Zylinder mit um 90° versetzten Kurbeln, um den Winddruckregler entbehren zu können, oder Verbundmaschinen.

Krane. Zentralgiefskrane (s. Abteil. II, 8. Abschn., Arbeitsmaschinen) mit 3 bis 7 m Ausladung, 1,5 bis 3 m Hub oder fahrbare Giefskrane.

Die Blockkrane erhalten je nach Gewicht der Blöcke und Schalen (Coquillen) eine Tragfähigkeit von 1 bis 6 t bei 1,5 bis 2,5 m Hub. Betrieb der Hebevorrichtungen durch Druckwasser. Näheres über Kraftsammler (Akkumulatoren) vrgl. Abteil. II, 8. Abschn., Arbeitsmaschinen. Man gibt dem Kraftsammler für Bessemer-Werke gewöhnlich 20 bis 30 at Druck und 0,4 bis 0,5 cbm nutzbaren Inhalt. Neuerdings oft elektrisch angetriebene Krane.

Die Gufsformen stehen am besten in eigener Halle, dann wird die Giefspfanne von einer Lokomotive getragen.

Wendevorrichtung, durch Druckwasser oder Elektrizität betrieben, senkrecht stehend. Arbeitsvermögen der Kippvorrichtung 20 bis 80 mt. Kippwinkel 270°. Teilkreisdurchmesser 0,8 bis 1,2 m. Der Schwerpunkt mufs bei jeder Stellung der gefüllten oder in der Entleerung begriffenen Birne unterhalb der Drehachse liegen.

4. Anordnung.

Aufgabesohle für die Kuppelöfen . .	10 bis 12 m	über Hüttensohle,
Abstichsohle „ „ „ . .	6 „ 8 „	„ „ ,
Höhe der Kippachsen	3 „ 5 „	„ „ ,
versenkte Giefsgrube	1,2 m	unter Hüttensohle.

Saure Birnen paarweise, basische zu dreien. Birnenachsen meist in einer Geraden liegend. Abstand der Birnenmitten 6,5 m. Durchmesser der Giefsgrube rd. 15 m, besser in besonderem Gebäude kanalartig.

5. Betrieb und Leistung.

Brennstoffverbrauch der Kuppelöfen ist höher als im Giefsereibetriebe (vrgl. S. 644); für 1 t fertiges Eisen rechnet man 150 bis 170 kg Koks. Die Dampfkessel erfordern für je 1 t fertiges Eisen 200 bis

400 kg Steinkohle. Eisenabgang beim sauren Verfahren 10 bis 12 vH, beim basischen infolge des Nachblasens meist 15 vH.

Die **Leistung** eines Bessemer-Werkes ist bei ausreichender Menge flüssigen Roheisens lediglich abhängig von der Geschwindigkeit, mit der ein schadhaft gewordenes Futter ausgebessert und die Böden ausgewechselt werden können.

In einer Anlage von zwei sauren oder drei basischen Birnen kann man mit einer Betriebsbirne in 24 st bis 50 Hitzen erreichen.

Dauer des Blasens 10 bis 25 Minuten.

Das zum sauren Verfahren benutzte Roheisen enthält in der Regel 4 vH Kohlenstoff, 2 bis 3 vH Si, 3 bis 4 vH Mn und darf nicht über 0,1 vH P und nicht über 0,05 vH S enthalten.

Zum basischen Verfahren eignet sich ein Roheisen mit 1,5 bis 3 vH P (am besten 2,5 bis 3 vH P) und 1,0 bis 2,5 vH Mn (am besten 2 vH Mn); dagegen dürfen darin höchstens 0,5 vH Si und 0,1 vH S enthalten sein.

Kalkzuschlag beim basischen Betriebe 15 bis 17 vH.

Zur Rückkohlung benutzt man einen Zusatz von Spiegeleisen mit 10 bis 20 vH Mn oder, für weiche Erzeugnisse, Ferromangan von 25 bis 80 vH Mn-Gehalt.

Zusatzeisen 5 bis 8 vH vom Einsatze. Spiegeleisen wird meist geschmolzen, Ferromangan kalt oder angewärmt in die Birne eingesetzt. Beim basischen Verfahren ist die Schlacke vor der Rückkohlung in einen 1 bis 2 cbm fassenden Schlackenwagen abzugiefsen.

Rückkohlung durch Koks (Phönix-Verfahren), durch Kalkhydrat-Koksziegel (Düdelinger Verfahren) oder durch Kohle in Säcken (Peiner Verfahren) zur Vermeidung hohen Mangangehaltes.

Thomasschlacke, fein gemahlen und von metallischen Eisenteilen befreit, ein wertvolles Düngemittel (Wert wird nach der in Ammoniumzitrat löslichen Phosphorsäure berechnet).

Durchschnittsanalyse:

Kieselsäure	7 vH	
Phosphorsäure	20 „	(17 bis 23)
Eisenoxyd und Eisenoxydul . . .	14 „	
Manganoxydul	8 „	
Kalkerde	48 „	
Magnesia	2 „	
Tonerde	1 „	

6. Kleinbessemerei.

Kleine Birnen, welche für 1 bis 3 t Roheisen eingerichtet werden, erhalten stets wagerechte oder schwach geneigte Düsen, meist 3 bis 6 nebeneinander, welche den Wind über das Eisenbad führen und deren obere Reihe zur Entzündung des Kohlenoxyds dient. Zweck ist der Regel nach Herstellung von Flufswaren (Stahlgufs) mit schwachen Wandungen.

c. Flammofenflufseisen (Siemens- und Martin-Eisen).

Oefen mit Luftgasfeuerung und mit 4 Wärmespeichern, die unter dem Ofen (unter Freilassung der Herdsohle) oder vor dem Ofen liegen, oder

neben dem Ofen stehen, entweder feststehend oder kippbar. Einsatz 10 bis 250 t, der Regel nach 12 bis 40 t. Roheisen und Erz beim Siemens-, Roheisen und Schrott beim Martin-Verfahren, beim basischen Ofen Kalkzuschlag (roh oder gebrannt).

Tiefe des Bades 0,2 bis 0,4 m, woraus sich die Gröſse des Herdes ergibt. Verhältnis von Länge zu Breite wie 3 : 2. Herdlänge mindestens 3,5 m bis zu 9 m. Eine groſse Tiefe des Bades ist bei unvermeidlich gröſserem Brennstoffverbrauche geboten, wenn das Eisen dem Einflusse des Sauerstoffes möglichst entzogen werden soll. — Die Kammern der Wärmespeicher erhalten eine lichte Höhe von 3 bis 5 m.

Futter sauer (Phosphorgehalt des Roheisens $<$ 0,1 vH, ebenso Schwefelgehalt $<$ 0,1 vH) oder basisch (Phosphorgehalt hierbei in allen Grenzen zulässig). Das Gewölbe ist stets sauer (Dinasziegel) und vom basischen Unterbau durch eine Magnesia- oder Chromeisensteinschicht getrennt. Beim basischen Betriebe soll das Futter an der schwächsten Stelle nicht weniger als 0,5 m stark sein. Entweder werden dem im Ofen selbst niedergeschmolzenen Roheisen Abfälle von schmiedbarem Eisen (Martin-Verfahren), deren Menge oft ein Vielfaches des eingesetzten Roheisens (Roheisen meist 5 bis 50 vH) ist, zugegeben, oder Eisenerze (Siemens-Verfahren), oder neben Eisenabfällen Eisenerze (Siemens-Martin-Verfahren). Wenn die Entkohlung weit genug vorgeschritten ist, wird dem Bade zur Entziehung des Sauerstoffes 0,5 bis 3 vH Ferromangan oder Ferrosilizium zugesetzt. — Ununterbrochener Betrieb wird durch den Talbot-, Suczycki-, Bertrand-Thiel- oder Hoesch-Prozeſs erreicht, welche mit flüssigem Roheisen betrieben werden; ersterer im Schaukelofen mit Erz, der zweite im feststehenden Ofen mit 2 Stichöffnungen, der dritte in mehreren Oefen, der vierte in demselben Ofen unter Rückgabe des Eisens ohne Schlacken. Bei groſsen Oefen wird geschmolzenes Roheisen vom Hochofen oder Mischer eingesetzt.

Brennstoffverbrauch für 1 t fertiges Martineisen 200 bis 600 kg Steinkohle, durchschnittlich 400 kg.

Abbrand 5 bis 8 vH, je nach der Dauer des Verfahrens. Ueberwiegt im Einsatze das schmiedbare Eisen, so lassen sich sechs Hitzen in 24 st erreichen. Je mehr sich das Verfahren dem Siemens-Erzverfahren nähert, um so länger dauert die Hitze. Der Regel nach 3 Hitzen in 24 st.

Verfahren: Siemens-Verfahren benutzt nur Roheisen und Erz zur Oxydation, Martin-Verfahren Roheisen und Schrott. Oft werden beide Verfahren vereinigt, beim Talbot-Prozeſs findet die Kohlung und Desoxydation in der Pfanne statt, weil $^1/_3$ des Satzes im Ofen zurückgelassen wird. Die Endentkohlung und Entphosphorung findet unter Zuhülfenahme von Hammerschlag und Walzsinter statt.

Die Schlacke geht zum Hochofen zurück.

d. Tiegelfluſsstahl.

Tiegel. Tontiegel aus 88 vH rohem Ton, 8 vH Schamotte, 4 vH Koks. Graphittiegel aus 44 vH Graphit, 44 vH Schamotte, 12 vH Ton, oder aus 80 vH Ton, 16 vH alten Schmelztiegeln und 4 vH Koks. Die Tiegel sind für Einsätze von 15 bis 40 kg Stahl berechnet und erhalten für 30 kg Einsatz etwa 27 cm gröſsten äuſseren Durchmesser, rd. 48 cm

Höhe, 2,0 bis 2,6 cm Wandstärke, 2,6 bis 3,3 cm Bodenstärke. Trockendauer der Tiegel drei Monate. Ein Tiegel hält eine bis drei Hitzen aus.

Schachtöfen. Höhe von Rost bis Gicht 1 m, bis zum Fuchse 0,8 m. Breite und Länge des Ofens bei einem Tiegel 40 · 40 cm, bei zwei 42 · 55 cm, bei vier 55 · 60 cm Das Schmelzen dauert 3 bis 4 st, bei gröfseren Oefen mit 8 bis 12 Tiegeln 6 st. Auf 100 kg Stahl gehen 400 kg Koks, Abbrand 3 bis 5 vH.

Wärmespeicher-Flammöfen bestehen aus einem einzigen backofenförmigen Raume über der Hüttensohle, oder aus drei getrennten Kammern, jede zu sechs Tiegeln, welche in zwei Reihen aufgestellt sind. Umkehr des Feuers stündlich; für 1 t der in 24 st vergasten Steinkohlen etwa 2,5 cbm Gitterraum im Wärmespeicher. Bedienung der Oefen und Gaserzeuger für Schicht und Ofen sechs Mann; Schmelzverlust 1 bis 3 vH; Kohlenverbrauch 100 bis 150 kg für 100 kg Stahl.

Tiegelschmelzöfen mit 2 5 · 2,6 m Herdfläche und Bicheroux-Feuerung fassen 40 bis 55 Tiegel von 30 bis 35 kg Inhalt. In 24 st 2,5 bis 4 Sätze (Chargen) bei 7 bis 5 st Dauer. 1 st für Herdausbesserung und Einsetzen.

Rohstoff für die Tiegelflufsstahl-Darstellung: Zementstahl für feinen Werkzeugstahl, sonst in der Regel Puddel- oder Bessemerstahl, welchem erforderlichenfalls, je nach dem Kohlenstoffgehalte des Rohstoffes und dem verlangten Kohlenstoffgehalt im Stahl, Kohle, schmiedbares Eisen oder Eisenmangan zugesetzt wird. Um Legierungsstähle herzustellen, werden Nickel, Chrom, Wolfram, Vanadium zugefügt.

Zusammensetzung von Tiegelflufsstahl.

Stahlsorte	Kohlenst.	Silizium	Mangan	Schwefel	Phosphor
	G.-T. in vH				
Deutscher Tiegelstahl, für Drehstähle bestimmt	1,24	nicht best.	0,15	0,016	0,016
Steirischer Werkzeugstahl	1,12	„ „	0,23	0,024	0,023
Sheffielder Stahl	0,75	„ „	0,23	0,022	0,04
Werkzeugstahl von St. Etienne	1,00	0,06	0,08	0,015	0,02
Geschützstahl von Fried. Krupp	0,50	0,11	0,16	0,03	0,04 *)
Formgufs von Bochum (Herzstück)	1,31	0,09	0,98	0,05	0,13

e. Elektrostahl.

Zum Ersatz der Schmelzung im Tiegel dient die im elektrischen Ofen.

Drei Systeme: Stafsano-Schachtofen, Héroult-Herdofen, Kjellin-Induktionsofen.

Stafsano-Ofen hat wagerechte und gekühlte Kohlenelektroden an Stelle der Formen, wird besonders zu Stahlgufs aus Roh- und Schmiedeeisen benutzt. Er wirkt durch den Lichtbogen.

Héroult-Ofen hat senkrechte, regelbare Kohlenelektroden, welche in die Schlacke eintauchen, wirkt ebenfalls durch den Lichtbogen und dient hauptsächlich zur Darstellung von Legierungsstählen. Sein weiter Herd gestattet bequemes Arbeiten.

*) Kupfer (Nickel, Kobalt) 0,26 vH.

Kjellin-Ofen hat eine kreisförmige Rinne, in der Abart von Röchling-Bodenhausen zwei Rinnen, welche sich in der Mitte zu einem weiten Herde vereinigen, und dient aufser zur Herstellung von Sonderstählen auch zur Herstellung eines sehr reinen, dem schwedischen ähnlichen Handelsstahles.

Nur der Stafsano-Ofen verarbeitet kaltes Eisen, der Héroult-Ofen benutzt im Martinofen angemachtes, der Kjellin-Ofen in der Thomasbirne angemachtes geschmolzenes Eisen.

Ein Héroult- und ein Rochling-Rodenhauser-Ofen sind imstande, im laufenden Betriebe in 24 st 8 Hitzen zu je 5 t zu verfeinen. Kosten für 1 t = 23,30 Mark. Arbeit im Durchschnitt mit 150 bis 160 Ampere oder 3000 Volt. Die Herstellung der Oefen ist stets basisch. Sie werden der Regel nach als Kippöfen gebaut.

f. Zementstahl.

Ein Zementierofen fafst zwei tönerne Zementierkästen, welche im Mittel 2,8 bis 3,4 m lang, 0,7 bis 0,9 m breit, 0,7 bis 1,1 m hoch sind, meist je 7,5 bis 10 t Eisen fassen und aus feuerfestem Ton, feuerfesten Ziegeln, zuweilen auch aus feuerfesten Sandsteinplatten angefertigt werden. Wandstärke der Kästen 120 bis 150 mm. Abstand zweier Kästen von einander 0,12 bis 0,13 m, von den Seitenwänden 0,13 bis 0,21 m. Die zu zementierenden Schmiedeeisenstäbe von $8 \cdot 130$ bis $20 \cdot 60$ mm Querschnitt sind mindestens 50 mm kürzer als die Kästen.

Der Rauminhalt des in jeden Kasten eingeladenen Eisens kann bis 36 vH vom ganzen Raume betragen. Als Zementierpulver dient Holzkohle, am besten von hartem Holze (Buchen-, Birken- oder Eichenholz). Die Kohle wird in Körnern von 5 bis 15 mm Durchmesser angewendet. Man nimmt für jede Zementation $^1/_2$ bis $^3/_4$ frische Holzkohle; auf 100 kg Eisen 25 bis 30 kg Holzkohle.

Brennstoffverbrauch: bei Steinkohlen 80 vH der Menge des zementierten Eisens. Anheizen dauert etwa 24 st, Kohlung einschl. Anheizen neun bis zehn Tage, Abkühlung sechs Tage. Das Erzeugnis hat eine Gewichtzunahme von 0,5 bis 0,75 vH erfahren.

g. Schmiedbarer Gufs.

Rohstoff: Eisen, das nach dem Gusse graphitfrei ist, mit 3 bis $3^1/_2$ vH Kohlenstoff. Silizium und Mangan verzögern oder verhindern je nach ihrer Menge die Entkohlung, doch ist zur Erzielung dichter Güsse ein mäfsiger Silizium- oder Mangangehalt erforderlich. Besonders zweckmäfsig ist ein aus den reinen Roteisenerzen Cumberlands erblasenes halbiertes Roheisen von nur etwa 0,1 vH Mangangehalt, dem nach Bedarf andere Roheisensorten beigemischt werden, um den erforderlichen Siliziumgehalt ($\leqq$ 0,6 vH) zu erzielen. Entkohlungsmittel ist Roteisenstein.

Fassungsraum der zylindrischen oder parallelepipedischen Glühtöpfe 20 bis 30 kg oder 100 bis 120 kg Gufsware. Die Töpfe werden aus möglichst graphitischem Gufseisen hergestellt und halten 15 bis 20 Glühungen aus (schweifseiserne nur 3). Zylindrische Töpfe haben gewöhnlich etwa 300 mm Durchmesser, 400 mm Höhe, 10 bis 15 mm

Wandstärke und 20 mm Bodenstärke; sie sind mit Füfsen versehen, damit die Flamme darunter wegstreichen kann; parallelepipedische Kästen haben 26 mm Wandstärke.

Ein Ofen fafst 12 bis 18 Töpfe, welche bei kleineren Gufswaren (unter 25 mm stark) 18 bis 24 st darin bis zur Kirschrotglut angefeuert, 60 bis 80 st auf dieser Temperatur erhalten, dann 24 bis 36 st abgekühlt werden.

IV. WALZWERKE.*)

a. Schweifsöfen.

Schweifsöfen sind Flammöfen mit Steinkohlen- oder Gas-Feuerung. Der Herd besteht aus Sand, ist eben und nach hinten wie nach dem Fuchse um $^1/_8$ bis $^1/_{10}$ der Länge geneigt.

Abmessungen von Schweifsöfen.

Art der Benutzung	Herdlänge m	Herdbreite m	Rostfläche qm	Einsatz t
Für kleine Pakete .	2,25 bis 2,5	1,5 bis 1,55	0,95 bis 1,0	0,6 bis 0,85
Für mittlere Pakete .	2,5 bis 2,8	1,5 bis 1,6	1,0 bis 1,1	0,6 bis 1,25
Für grofse Pakete .	3,2 bis 3,5	1,95 bis 2,0	1,3 bis 1,75	1,4 bis 2,5

Höhe der Feuerbrücke über dem Herde 0,1 bis 0,4 m,
„ „ „ „ „ Roste 0,35 bis 0,7 m.

Kohlenverbrauch für 1 t Schweifseisen: bei Steinkohlenfeuerung 500 bis 700 kg, bei Gasfeuerung mit Wärmespeichern (Bicheroux, Lürmann, Siemens) 200 bis 350 kg. In der Regel wird die Abhitze der Oefen zur Dampfkesselheizung benutzt (bei Siemensöfen nicht möglich).

Auf einen Schweifsofen kommen 1,5 bis 4 Puddelöfen, je nach den herzustellenden Eisensorten, im Durchschnitte 2.

b. Wärmöfen für Flufseisen.

Rollöfen mit Planrost. Länge des Herdes $\sim$ 8 m bei $^1/_9$ Steigung nach dem Fuchse zu, Breite des Herdes 1,6 bis 2,3 m. Einsatzöffnung am Fuchse, Oeffnung zum Herausziehen der Blöcke an der Feuerbrücke. Aufserdem auf jeder Seite 8 bis 12 Türen. Rostfläche 2 bis 4 qm. Bei hinreichender Länge der Oefen gute Wärmeausnutzung. Dampfkesselheizung kaum noch lohnend. Auf 100 kg kalt eingesetzte Blöcke rechnet man 19 kg Steinkohlen, auf 100 kg warm eingesetzte Blöcke 10 kg.

Stofsöfen haben wagerechte, mit zwei durch Wasser gekühlte Rohren versehene Gleitbahnen. Die Blöcke werden durch einen hydrau

---

* Vrgl. H. Wedding, Grundr. d. Eisenhüttenkunde und Handbuch der Eisenhüttenkunde.

lischen Stöfser fortbewegt und fallen in eine tiefer gelegene Grube, aus der sie ausgezogen werden. Auf 100 kg kalter Blöcke 8 kg Kohle oder Gas.

Wärmgruben (Ausgleichgruben, nach Gjers) mit oder ohne Heizung an Stelle der Wärmöfen, wo es die Betriebsverhältnisse gestatten.

c. Walzenstrafsen.

Stabeisenwalzen sind gefurcht und festgestellt; jede folgende Furche mufs geringere Höhe und gröfsere Breite als die vorhergehende besitzen. Blechwalzen sind glatt und werden nach jedem Durchgange verstellt.

Blockwalzwerke für das Vorarbeiten der Flufseisenblöcke, Drillinge mit Rollgängen, mechanische Einführung oder Kehrwalzwerke (Reversierwalzwerke), durch Dampf, neuerdings auch durch Elektrizität angetrieben.

Drahtwalzwerke (für Eisen von 3,5 bis 12 mm Dicke) haben getrennte Vor- und Fertigwalzen. Vorwalzen 30 bis 32 cm Dmr., 200 bis 300 Uml./min. Fertigschnellwalzen 25 bis 30 cm Dmr., 500 Uml./min. Abstand der Walzenstrafsen 8 bis 10 m. Die Vorwalze wird meist unmittelbar von der Dampf- oder elektrischen Maschine getrieben.

Walzenzugmaschine 400 bis 500 PS; für Stahl etwa das 1,3-fache.

Feineisenwalzwerke (für Rund- und Quadrateisen von 12 bis 50 mm, Winkeleisen bis 65 mm Schenkellänge, Grubenschienen) haben ebenfalls getrennte Vorwalzen, unmittelbar von der Maschine betrieben, mit 120 Uml./min und 40 cm Dmr. Fertigwalzen mit 30 cm Dmr. bei 260 Uml./min. Abstand von der Hauptstrafse 7,5 m.

Walzenzugmaschine 300 bis 400 PS.

Walzwerke für Mitteleisen (Rund- und Quadrateisen bis 75 mm, Flacheisen bis 135 mm breit, Winkeleisen bis 75 mm Schenkellänge) 100 bis 120 Uml./min, Walzendurchmesser 40 cm. Drei bis vier Gerüste.

Walzenzugmaschine 300 bis 400 PS.

Stabeisenwalzwerke (für Rund- und Quadrateisen bis 150 mm, Flacheisen bis 180 mm Breite, Winkeleisen bis 125 mm Schenkellänge) erhalten bei 70 bis 80 Uml./min einen Walzendurchmesser von 50 bis 55 cm.

Walzenzugmaschine 350 bis 400 PS.

Schienenwalzwerke erfordern 100 bis 120 Uml./min der 65 bis 75 cm starken Walzen. Ein Flufseisen - Schienenwalzwerk (Trio-) liefert in 24 st etwa 1000 bis 1100 Schienen zu 300 kg, d. s. 300 bis 330 t, ausnahmsweise 1200 Stück oder 360 t.

Walzenzugmaschine 600 bis 800 PS.

Blechwalzwerke. Feinblechwalzwerke (für Bleche von 0,1 bis 5 mm Dicke, 1 m Breite, 2 m Länge), Walzendurchmesser 55 bis 60 cm bei 40 Uml./min. Bei drei Gerüsten 30 bis 40 PS. Trios nach Lauth erhalten 55 bis 60 cm starke Ober- und Unterwalzen, während die lose Mittelwalze nur 25 cm stark ist. Abbrand und Verschnitt 20 bis 25 vH.

Ein Feinblechwalzwerk liefert mit einer Vor- und einer Fertigwalze,

einem Plattinen-, einem Ausglühofen und zwei Wärmöfen in 12 st an fertigen Blechen nach der deutschen Feinblechlehre von

Nr. 11—12	13—16	17—20	21	22	23	24	25
bis 4500	3500	2500	1800	1600	1400	1150	700 kg.

Grobblechwalzwerk. Walzendurchmesser 60 bis 90 cm. Ballenlänge 2,2 bis 3,5 m. Vorrichtung zum Ueberheben der Bleche oder Umkehrung der Walzenbewegung erforderlich.

Schwungradmaschinen leisten 80 bis 100 PS für Schweifseisenbleche, 100 bis 150 PS für Flufseisenbleche. Reversiermaschinen müssen erheblich stärker sein; sie erreichen für die schwersten Bleche 600 bis 800 PS.

Ein Grobblechwalzwerk liefert in einem Ofen und in 12 st 2,25 bis 3 t gewöhnliches Kesselblech. Auf 1 t Blech beim Schweifsen kommen 1700 bis 1800 kg Kohlen. Abfall 4 bis 6 vH. Abbrand in der ersten Hitze 12 bis 14 vH, in der zweiten 9 bis 11 vH, in der dritten 6 bis 9 vH, in der vierten 4 bis 6 vH. Verschnitt 18 bis 25 vH.

Universalwalzwerk für Flacheisen, 40 bis 50 cm Breite; liegende Walzen (Hauptwalzen) mit 50 bis 60 cm Durchmesser, stehende Walzen mit etwa dem $^2/_3$-fachen Durchmesser der liegenden. Befinden sich die stehenden Walzen hinter den Hauptwalzen, so erhalten sie etwa die 1,5-fache Umfangsgeschwindigkeit der Hauptwalzen; liegen die stehenden Walzen vor den Hauptwalzen, so ist ihre Umfangsgeschwindigkeit nur 0,75 mal so grofs, als die der Hauptwalzen.

Rohre werden geschweifst oder ungeschweifst hergestellt, gewalzt oder gezogen. Die Schweifsung erfolgt stumpf oder mit Ueberlappung, letzteres stets für über Dorn gewalzte Rohre. Mannesmann-Rohre werden erst in Schrägwalzwerken gewalzt, dann gepilgert. Fingerhutverfahren nur für schwachwandige Rohre brauchbar. Verdrängungsverfahren (nach Erhardt) aus Block mit quadratischem Querschnitt durch kreuzförmigen Dorn.

SECHSTER ABSCHNITT.

MASCHINENTEILE.*)

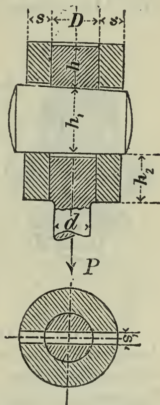
I. HÜLFSMITTEL ZUR VERBINDUNG VON MASCHINENTEILEN.

A. Keile.

Allgemeines über die Keilkette und die Kräftezerlegung am Keil s. S. 233 und 234. — Im folgenden sind die Kräfte ausgedrückt in kg, die Längen in cm und die zulässigen Spannungen in kg/qcm.

a. Querkeile.

Abb. 1.



1. Keile für ruhende Belastung.

Es wird bestimmt (Abb. 1)

der Durchmesser d durch $P = k_z \frac{\pi d^2}{4}$,

„ „ D „ $P = k'_z \left(\frac{\pi D^2}{4} - s_1 D\right)$;

darin bedeutet:

k_z die zulässige Spannung im Stangenquerschnitte $\frac{1}{4} \pi d^2$,

k'_z die zulässige Spannung in dem durch das Keilloch $s_1 D$ geschwächten Querschnitte des Stangenkopfes $\frac{1}{4} \pi D^2 - s_1 D$.

Da im Stangenkopf die Verteilung der Spannungen nicht gleichmäfsig ist, so mufs $k'_z < k_z$ gewählt werden. Man setze etwa

$$k'_z = \frac{\pi}{4} k_z.$$

Mit dem üblichen Werte $s_1 = 0{,}25\, D$ folgt alsdann aus den beiden Gleichungen für P:

$$D \sim \tfrac{4}{3}\, d.$$

*) Im wesentlichen nach C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 10. Aufl.; Stuttgart, A. Bergsträsser. 1908.

Die Pressung k in der Berührungsfläche $s_1 D$ zwischen Keil und Stange ergibt sich dabei aus

$$k_z \frac{\pi d^2}{4} = k s_1 D = k \frac{1}{4} D^2$$

zu

$$k \sim 1{,}75\, k_z.$$

Wird dieser Wert auch gegenüber der Hülse, die die Stange umschliefst, zugelassen, so folgt aus

$$2 k s s_1 = k D s_1:$$
$$s = 0{,}5\, D.$$

Für die mittlere Höhe h_1 des auf Biegung*) beanspruchten Keiles gilt

$$\frac{P}{2}\left(\frac{D}{2} + \frac{s}{2} - \frac{D}{4}\right) = k_b \frac{s_1 h_1^2}{6},$$

woraus mit $s_1 = 0{,}25\, D$, $s = 0{,}5\, D$, $P = k_z \frac{\pi d^2}{4}$:

$$h_1 = d \sqrt{\frac{3\pi}{2} \frac{k_z}{k_b}} \text{ folgt.}$$

Wird, wie vielfach üblich, für die Stange Schweifs- oder Flufseisen, für den Keil Stahl gewählt, so wird beispielsweise für $k_z = 900$ kg/qcm und $k_b = 1350$ kg/qcm:

$$h_1 \sim 1{,}75\, d \sim 1{,}33\, D.$$

Der Anzug des Keiles darf zu $^1/_{20}$ bis $^1/_{15}$ genommen werden. Die Abmessung h kann man für rechteckige Keile schätzen zu

$$h = 0{,}67\, h_1 \text{ bis } 0{,}75\, h_1.$$

Abb. 2.

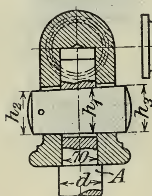
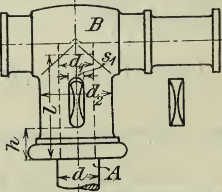


Abb. 3.



Die Höhe h_2 kann gleich h genommen werden, sofern die auf die Hülse einwirkenden (auf Ausscheren der beiden Stücke s_1, h_2 (Abb. 1) gerichteten) Kräfte nicht eine gröfsere Abmessung erfordern.

2. Keile für wechselnde Belastung.

Um die zusätzliche Beanspruchung durch das Anziehen des Keils, die bereits im unbelasteten Zustande bei den **Spannungsverbindungen** vorhanden sein mufs (Vorspannung), zu berücksichtigen, kann den Rechnungen die 1,25-fache Stangenkraft zugrunde gelegt werden.

Beispiel. Für die in Abb. 2 u. 3 gezeichnete Verbindung der Kolbenstange A einer Schwinghebel-Dampfmaschine mit dem Querhaupte B betrage die Kolbenstangenkraft $P = 10\,000$ kg, der Durchmesser der aus Flufsstahl gefertigten Kolbenstange $d = 8{,}2$ cm. Querhaupt und Keil seien aus dem gleichen Stoff hergestellt.

*) Die Proberechnung auf Scherfestigkeit (zwei Querschnitte des Keiles) ergibt in der Regel kleinere Werte als der aus der folgenden Gleichung sich ergebende Keilquerschnitt $s_1 h_1$.

Die ringförmige Anlagefläche der Stange d gegen die Hülse kann auch durch kegelige Gestaltung des Stangenkopfes ersetzt werden.

Soll in der Ringfläche $\frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$ die Spannung $k = 1000$ kg/qcm nicht überschritten werden, so mufs sein:

$$\frac{\pi}{4}(8{,}2^2 - d_1^2)\,1000 = 1{,}25 \,.\, 10\,000,$$

mithin

$$d_1 \sim 7 \text{ cm.}$$

Für die Keildicke gilt, wenn zwischen Keil und Stange die gleiche Pressung zugelassen wird,

$$s_1 \,.\, 7 \,.\, 1000 = 1{,}25 \,.\, 10\,000, \quad \text{also} \quad s_1 = 1{,}8 \text{ cm.}$$

Der Hülsendurchmesser d_2 folgt aus

$$(d_2 - d_1)\, s_1 \,.\, 1000 = 1{,}25 \,.\, 10\,000 = s_1 d_1 \,.\, 1000$$

zu

$$d_2 = 2\, d_1 = 14 \text{ cm.}$$

Die mittlere Höhe h_1 des auf Biegung beanspruchten Keiles ist bestimmt durch

$$\frac{1}{2} \cdot 1{,}25 \cdot 10\,000 \left(\frac{7{,}0 + 3{,}5}{2} - \frac{3{,}5}{2}\right) = 1000 \cdot \frac{1{,}8\, h^2}{6},$$

mithin

$$h_1 = 8{,}6 \text{ cm.}$$

Für h ergibt sich (nach dem unter **1.** Bemerkten) der Mittelwert

$$h = 0{,}7\, h_1 = 6 \text{ cm.}$$

Für die Keilneigung genügt 1 : 25; ferner ist $l = 6{,}0 + 8{,}6 + 6{,}0 = 20{,}6$ cm.

Um die scharfen, einspringenden Ecken in den Keillöchern zu vermeiden, gibt man zweckmäfsig dem Keilquerschnitt abgerundete Schmalseiten (Abb. 4), wobei alsdann h kleiner $(= 0{,}4\, h_1$ bis $0{,}5\, h_1)$ sein darf; doch empfiehlt es sich, den Wert $h = 0{,}7\, h_1$ beizubehalten.

Keile, die **bei voller Belastung eingetrieben** (angezogen) werden, müssen solche Abmessungen erhalten, dafs die Pressung in den Flächen, die hierbei aufeinander gleiten, das höchste für zulässig erachtete Mafs nicht überschreitet (Sicherheit gegen Anfressen). Dieses Mafs hängt wesentlich ab von der Sorgfalt der Ausführung, von dem Stoffe, sowie davon, ob die Verbindung mehr oder weniger häufig gelöst wird.

Abb. 4.



Abb. 5.

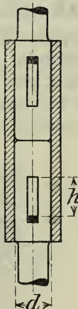


Abb. 6.

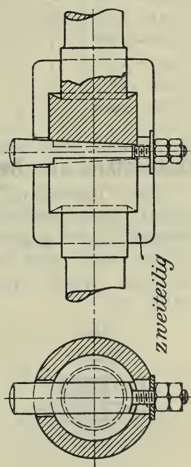


Abb. 5 zeigt ein **Gestängeschlofs,** entstanden durch Verdoppelung der einfachen Keilverbindung nach Abb. 1, wobei aber die Stangenköpfe beim Anziehen der Keile fest gegeneinander geprefst werden. — In Abb. 6 ist eine vielfach verwendete sogenannte **entlastete Keilverbindung,** ebenfalls als **Gestängeschlofs,** abgebildet. Der Keil wird nicht auf Biegung oder Scherfestigkeit beansprucht, sondern dient nur dazu, den Schlufs zwischen der zweiteiligen Hülse und den Stangenköpfen herzustellen.

Weitere Keilverbindungen, Keilsicherungen (meist durch Vorstecker, durch Endschraube oder Quer-Druckschraube) usw. finden sich bei den Maschinenteilen, zu denen sie gehören (s. besonders bei Kurbeln, Schubstangen und Kreuzköpfen).

b. Längskeile.

Abb. 7.

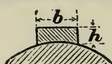


Abb. 8.

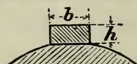


Abb. 9.

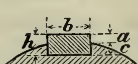
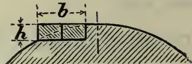


Abb. 10.



Keile für normale Wellen.

Durchmesser der Welle mm	Hohlkeil, Abb. 7		Flachkeil, Abb. 8		Nutenkeil, Abb. 9				Tangentialkeil, Abb. 10	
	b mm	*h* mm	*b* mm	*h* mm	*b* mm	*h* mm	*a* mm	*c* mm	*b* mm	*h* mm
20— 29	11	4	11	4	11	5	3	2	.	.
30— 39	13	5	13	5	13	6	4	2	.	.
40— 49	14	6	14	6	14	7	4	3	.	.
50— 64	16	6	16	6	16	8	5	3	.	.
65— 79	18	7	18	7	18	9	5	4	.	.
80— 89	21	8	21	8	21	10	6	4	.	.
90— 99	25	10	25	10	25	12	7	5	.	.
100—119	30	12	30	12	30	15	9	6	32	10
120—139	.	.	.	.	35	18	11	7	38	12
140—159	.	.	.	.	40	20	12	8	46	15
160—179	.	.	.	.	45	23	14	9	50	16
180—200	.	.	.	.	50	25	15	10	57	18

Neben dem flachen Längskeil wird vielfach angewendet der **Quadratkeil** und **Rundkeil** (Abb. 11 u. 12).

Der Quadratkeil schwächt Welle und Nabe mehr als der Flachkeil, bietet aber gröfsere seitliche Anlageflächen und ist in sich widerstandsfähiger gegen Stauchen und Verbiegen. — Der Rundkeil verspannt Nabe und Welle in radialer und tangentialer Richtung, ebenso der die Welle mehr schonende **„Alfakeil"** von v. Bechtolsheim (Abb. 13).

Abb. 11.

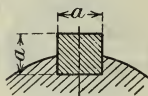


Abb. 12.

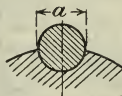
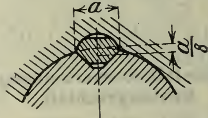


Abb. 13.



Für schwere Räder, namentlich auch dann, wenn der Drehsinn wechselt, besonders geeignet ist die Tangentialkeilanordnung nach

Abb. 14. Für **Quadrat-** und **Rundkeile:** $a = 0{,}6\sqrt{d}$ bis $0{,}7\sqrt{d}$ in cm. Für **Alfakeile:** $a \sim 0{,}25\,d$. Für **Tangentialkeile** bei gröfseren Durchmessern: $b = 0{,}25\,d$; $s = 0{,}25\,b$. — Abb. 15 zeigt einen mit der

Abb. 14.

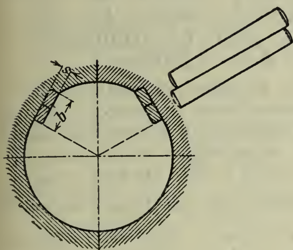
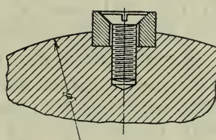


Abb. 15.



Welle durch Schraube verbundenen Flachkeil für solche Fälle, wo sich der auf der Welle sitzende Teil gegen diese verschiebt.

B. Schrauben.

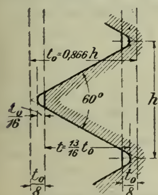
Verzeichnung der Projektion der zylindrischen **Schraubenlinie** s. S. 121. Statt durch einen Punkt (vrgl. S. 121 unter 1.) kann man sich die Schraubenlinie auch erzeugt denken durch Aufwickeln der Ebene des Steigungswinkels α auf den Mantel des geraden Kreiszylinders; bildet hierbei der eine Schenkel von α einen Kreis, rechtwinklig zur Zylinderachse, so beschreibt der andere Schenkel die Schraubenlinie.

Ist der Halbmesser des Zylinders $= r$, so ist die Ganghöhe (Steigung) der Schraubenlinie $h = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha$.

a. Gewindearten.

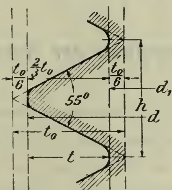
1. S. I.-Gewinde (System International) (Abb. 16), vereinbart Oktober 1898 in Zürich von deutschen, schweizerischen, französischen und belgischen Ingenieuren. Dem Gewindequerschnitte liegt das gleichseitige Dreieck (Kantenwinkel 60^0) zugrunde; an der Spitze ist die Dreieckhöhe $t_0 = 0{,}866\,h$ um $^1/_8\,t_0$ durch Abflachung, im Grunde durch Ausrundung um $^1/_{16}\,t_0$ verringert, so dafs die wirkliche Gangtiefe einschl. des Spielraumes $t = {^{13}/_{16}}\,t_0$ beträgt. Vrgl. die Tafel S. 663.

Abb. 16.



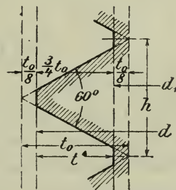
S. I.
(International)

Abb. 17.



Whitworth.
(Englisch)

Abb. 18.



Sellers.
(Amerikanisch)

2. Whitworthsches Gewinde (Abb. 17). Dem Gewindequerschnitte liegt ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Kantenwinkel 55^0 zugrunde; innere und äufsere Abrundung um $1/6\, t_0$ mit dem Halbmesser $0{,}143\, t_0$. Ist d der äufsere Durchmesser des Gewindes und d_1 der Kerndurchmesser, so ist die Ganghöhe $h = nd$ gewählt, wobei für $d = 1/4$ bis 6 Z. engl. der Zahlenwert n sich von $1/5$ bis $1/15$ ändert. Da

$$t_0 = 1/2\, h \operatorname{ctg} 27^1/_2{}^0 = 0{,}96049\, h \quad \text{und} \quad t = 2/3\, t_0 = 0{,}64033\, h,$$

so ist $$d_1 = d - 2t = d - 1{,}28065\, h = d\,(1 - 1{,}28065\, n).$$

Vrgl. hierzu die Tafeln S. 663 bis 667. In manchen (süddeutschen) Werkstätten wird das Whitworthsche Gewinde in abgeänderter Form angewendet, derart, dafs ihm nur die Ganghöhen h entnommen sind, während die äufseren Durchmesser d in Abstufungen von 3 mm aufeinander folgen; also: $d = 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ 30$ mm, usw.

Feingewinde s. S. 664 und 665. Für Mutterschrauben mit Feingewinde wird empfohlen:

bei $d =$	2	$2^1/_4$—3	$3^1/_4$—$3^3/_4$	4—$4^1/_2$	$4^3/_4$—$5^1/_4$	$5^1/_2$—8,	über 8 Z. engl.
Gänge auf 1 Z. engl.	7	6	5	$4^1/_2$	4	$3^1/_2$	3.

3. Sellerssches Gewinde (Abb. 18, S. 661). Dem Gewindequerschnitte liegt das gleichseitige Dreieck (Kantenwinkel 60^0) zugrunde mit Abflachung der Spitze wie des Grundes je um $1/8$ der Dreieckhöhe t_0. Vrgl. hierzu die Tafel S. 668. Die Ganghöhe ist $h = nd$, wobei für $d = 1/8$ bis 6 engl. Z. der Zahlenwert n sich von $1/5$ bis $2/27$ ändert. Da

$$t_0 = 1/2\, h \operatorname{ctg} 30^0 = 0{,}86603\, h \quad \text{und} \quad t = 3/4\, t_0 = 0{,}64952\, h,$$

so ist $$d_1 = d - 2t = d - 1{,}29904\, h = d\,(1 - 1{,}29904\, n).$$

4. Flachgängiges, trapezförmiges und **rundes Gewinde** (für Bewegungs- und Prefsschrauben, s. Abb. 19 bis 22). Man hat hier bei der Bestimmung von d und d_1 ziemlich freie Hand und braucht sich im allgemeinen an kein System zu halten, wie bei den scharfgängigen Schrauben.

Abb. 19.

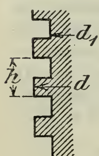


Abb. 20.

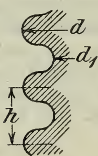
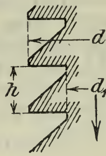


Abb. 21.



Abb. 22.



Trapezförmiger Gewindequerschnitt (Abb. 21 u. 22) wird gewählt, wenn der Druck nur in einer Richtung auf die Schraube wirkt. (Stell- und Prefsschrauben.)

b. Berechnung der Schrauben

Es bezeichne

Q die in der Richtung der Schraubenachse wirkende Kraft in kg,

k_z die zulässige Zugspannung des Stoffes in kg/qcm,

d_1 den Kerndurchmesser der Schraube in cm,

d den äufseren Gewindedurchmesser (Bolzendurchmesser) in cm.

(Fortsetzung auf S. 669.

S. I.-Gewinde.

(Gewindequerschnitt s. Abb. 16 auf S. 661).

Aeußerer Gewinde-Durchmesser d mm	Kerndurchmesser d_1 mm	Ganghöhe h mm	Gangtiefe t mm	Schlüsselweite s_0 mm	Aeußerer Gewinde-Durchmesser d mm	Kerndurchmesser d_1 mm	Ganghöhe h mm	Gangtiefe t mm	Schlüsselweite s_0 mm
6	4,59	1	0,705	12	33	28,08	3,5	2,46	50
7	5,59	1	0,705	13	36	30,37	4	2,815	54
8	6,24	1,25	0,88	15	39	33,37	4	2,815	58
9	7,24	1,25	0,88	16	42	35,67	4,5	3,165	63
10	7,89	1,5	1,055	18	45	38,67	4,5	3,165	67
11	8,89	1,5	1,055	19	48	40,96	5	3,52	71
12	9,54	1,75	1,23	21	52	44,96	5	3,52	77
14	11,19	2	1,405	23	56	48,26	5,5	3,87	82
16	13,19	2	1,405	26	60	52,26	5,5	3,87	88
18	14,48	2,5	1,76	29	64	55,56	6	4,22	94
20	16,48	2,5	1,76	32	68	59,56	6	4,22	100
22	18,48	2,5	1,76	35	72	62,85	6,5	4,575	105
24	19,78	3	2,11	38	76	66,85	6,5	4,575	110
27	22,78	3	2,11	42	80	70,15	7	4,925	116
30	25,08	3,5	2,46	46					

Gewichte schweißeiserner Muttern, Köpfe, Unterlegscheiben und Bolzen. (Whitworthsches Gewinde.)

Gewinde-Durchm. Z. engl.	Gewicht der Mutter kg	d. sechseckigen Kopfes kg	des quadrat. Kopfes kg	d. Unterlegscheibe kg	von 100 mm Bolzen kg	Gewinde-Durchm. Z. engl.	Gewicht der Mutter kg	d. sechseckigen Kopfes kg	des quadrat. Kopfes kg	d. Unterlegscheibe kg	von 100 mm Bolzen kg
1/4	0,005	0,005	0,005	0,003	0,025						
5/16	0,011	0,010	0,012	0,004	0,039	2 1/4	1,788	1,966	2,227	0,487	2,001
3/8	0,020	0,018	0,020	0,007	0,056	2 1/2	2,435	2,686	3,101	0,585	2,470
7/16	0,026	0,024	0,028	0,009	0,076	2 3/4	3,194	3,512	4,055	0,801	2,989
1/2	0,036	0,032	0,037	0,013	0,099	3	3,606	4,491	5,186	1,118	3,557
5/8	0,058	0,054	0,063	0,018	0,154	3 1/4	5,150	5,736	6,624	1,311	4,175
3/4	0,105	0,096	0,110	0,036	0,233	3 1/2	6,229	7,078	8,173	1,646	4,842
7/8	0,137	0,151	0,152	0,049	0,302	3 3/4	7,525	8,619	9,952	1,970	5,558
1	0,187	0,195	0,225	0,058	0,395	4	9,318	10,51	12,14	2,403	6,324
1 1/8	0,274	0,274	0,316	0,062	0,500	4 1/4	10,83	12,49	14,43	2,879	7,139
1 1/4	0,367	0,372	0,429	0,074	0,618	4 1/2	12,72	14,71	16,99	3,454	8,004
1 3/8	0,467	0,473	0,545	0,113	0,747	4 3/4	14,99	17,38	20,07	3,871	8,516
1 1/2	0,572	0,614	0,692	0,170	0,889	5	17,32	20,13	23,25	4,467	9,881
1 5/8	0,736	0,778	0,898	0,196	1,043	5 1/4	19,87	23,16	26,74	5,088	10,90
1 3/4	0,877	0,970	1,120	0,247	1,210	5 1/2	22,90	26,75	30,88	5,954	11,96
1 7/8	1,112	1,191	1,375	0,274	1,389	5 3/4	25,67	30,09	34,75	6,773	13,07
2	1,294	1,405	1,618	0,344	1,581	6	28,98	34,03	39,29	7,664	14,23

Anmerkung. Diese Tafel ist berechnet auf Grund der auf S. 664 gegebenen Abmessungen von Mutter, Kopf und Unterlegscheibe mit einem spez. Gewichte des Schweißeisens = 7,8. [Der in der Mutter und der Unterlegscheibe steckende Teil der Schraube ist in den Gewichtzahlen der vorstehenden Tafel nicht enthalten, sondern als Bolzenlänge mit zu rechnen.]

Whitworthsches Gewinde.

(Gewindequerschnitt s. Abb. 17 auf S. 661.)

Aeufserer Durchmesser des Gewindes d		Kern- Durchmesser d_1	Kern- Querschnitt $\frac{\pi d_1^2}{4}$	Anzahl der Gewindegänge auf einen engl. Z.	Anzahl der Gewindegänge auf die Länge d	Höhe der Mutter, abgerundet h_1	Höhe des Kopfes, abgerundet h_0	Schlüsselweite, abgerundet s_0	$Q = {}^1/_4 \pi d_1^2 k_z$, wenn (in kg/qcm) $k_z = 480$	$k_z = 600$
engl. Z.	mm	mm	qcm			mm	mm	mm	kg	kg
$^1/_4$	6,35	4,72	0,175	20	5	6	4	13	85	105
$^5/_{16}$	7,94	6,13	0,295	18	$5^5/_8$	8	6	16	140	175
$^3/_8$	9,52	7,49	0,441	16	6	10	7	19	210	265
$^7/_{16}$	11,11	8,79	0,607	14	$6^1/_8$	11	8	21	290	365
$^1/_2$	12,70	9,99	0,784	12	6	13	9	23	375	470
$^5/_8$	15,87	12,92	1,311	11	$6^7/_8$	16	11	27	630	785
$^3/_4$	19,05	15,80	1,961	10	$7^1/_2$	19	13	33	940	1175
$^7/_8$	22,22	18,61	2,720	9	$7^7/_8$	22	15	36	1305	1630
1	25,40	21,33	3,573	8	8	25	18	40	1715	2145
$1^1/_8$	28,57	23,93	4,498	7	$7^7/_8$	29	20	45	2160	2700
$1^1/_4$	31,75	27,10	5,768	7	$8^3/_4$	32	22	50	2770	3460
$1^3/_8$	34,92	29,50	6,835	6	$8^1/_4$	35	24	54	3280	4100
$1^1/_2$	38,10	32,68	8,388	6	9	38	27	58	4030	5030
$1^5/_8$	41,27	34,77	9,495	5	$8^1/_8$	41	29	63	4560	5700
$1^3/_4$	44,45	37,94	11,31	5	$8^3/_4$	44	32	67	5430	6780
$1^7/_8$	47,62	40,40	12,82	$4^1/_2$	$8^7/_{16}$	48	34	72	6150	7690
2	50,80	43,57	14,91	$4^1/_2$	9	51	36	76	7160	8950
$2^1/_4$	57,15	49,02	18,87	4	9	57	40	85	9060	11320
$2^1/_2$	63,50	55,37	24,08	4	10	64	45	94	11560	14450
$2^3/_4$	69,85	60,55	28,80	$3^1/_2$	$9^5/_8$	70	49	103	13820	17280
3	76,20	66,90	35,15	$3^1/_2$	$10^1/_2$	76	53	112	16870	21090
$3^1/_4$	82,55	72,57	41,36	$3^1/_4$	$10^9/_{16}$	83	58	121	19850	24820
$3^1/_2$	88,90	78,92	48,92	$3^1/_4$	$11^3/_8$	89	62	130	23480	29350
$3^3/_4$	95,25	84,40	55,95	3	$11^1/_4$	95	67	138	26860	33570
4	101,60	90,75	64,68	3	12	102	71	147	31050	38810
$4^1/_4$	107,95	96,65	73,37	$2^7/_8$	$12^7/_{32}$	108	76	156	35220	44020
$4^1/_2$	114,30	102,98	83,29	$2^7/_8$	$12^{15}/_{16}$	114	80	165	39980	49970
$4^3/_4$	120,65	108,84	93,04	$2^3/_4$	$13^1/_{16}$	121	85	174	44660	55820
5	127,00	115,19	104,2	$2^3/_4$	$13^3/_4$	127	89	183	50020	62530
$5^1/_4$	133,35	121,67	116,3	$2^5/_8$	$13^{25}/_{32}$	133	93	192	55810	69760
$5^1/_2$	139,70	127,51	127,7	$2^5/_8$	$14^7/_{16}$	140	98	201	61300	76620
$5^3/_4$	146,05	133,05	139,0	$2^1/_2$	$14^3/_8$	146	102	209	66740	83420
6	152,40	139,39	152,6	$2^1/_2$	15	152	106	218	73250	91560

Schlüsselweite $s_0 = 5 + 1{,}4\,d$; Unterlegscheibe Durchm. $= 1{,}3\,s_0$, Dicke $= 0{,}1\,s_0$.

Schraubenabmessungen der Firma „Archimedes" s. S. 668.

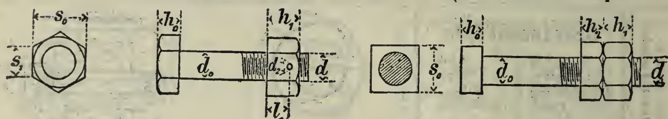
Schrauben mit Pennscher Sicherung [für Schiffsmaschinen]. (Whitworthsches Gewinde.)

Aeufserer Durchmesser des Gewindes *d*	Schraubenköpfe, 6-eckig, quadratisch oder rund: Flachkant oder Durchmesser	Schraubenköpfe, 6-eckig, quadratisch oder rund: Höhe	Schraubenköpfe, rund, eingelassen: Durchmesser	Schraubenköpfe, rund, eingelassen: Höhe	Mutter *m*	Mutter *n*	Mutter *o*	Mutter *p*	Mutter *q*	Mutter *r*	Stellschraube *s*	Stellschraube *t*	Stellschraube *u*
engl. Z.	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
$^3/_4$	31	14	28	13	31	27	35	26	12	12	5	10	8
$^7/_8$	35	16	32	15	36	31	40	29	15	12	5	10	8
1	40	18	37	17	40	35	46	33	18	12	5	10	8
$1^1/_8$	45	20	41	19	46	40	50	37	20	13	5	10	8
$1^1/_4$	49	22	46	21	52	45	57	42	23	13	5	10	8
$1^3/_8$	54	24	50	23	57	49	62	46	26	13	5	10	8
$1^1/_2$	58	26	55	25	62	54	68	50	27	15	6	13	10
$1^5/_8$	63	28	59	27	67	58	73	54	30	15	6	13	10
$1^3/_4$	67	30	64	29	73	63	79	59	33	15	6	13	10
$1^7/_8$	72	32	68	31	77	67	85	63	33	18	8	16	11
2	76	34	73	33	83	72	90	68	36	18	8	16	11
$2^1/_4$	85	38	82	37	93	81	101	77	42	18	8	16	11
$2^1/_2$	94	42	91	41	104	90	112	86	48	18	8	16	11
$2^3/_4$	103	46	100	45	114	99	123	95	50	21	10	20	13
3	112	50	109	49	125	108	134	104	55	21	10	20	13
$3^1/_4$	121	54	118	53	135	117	145	113	60	21	10	20	13
$3^1/_2$	130	58	127	57	145	126	156	122	61	25	11	22	14
$3^3/_4$	139	63	136	61	156	135	166	131	66	25	11	22	14
4	148	68	145	65	166	144	177	140	71	25	11	22	14
$4^1/_4$	157	73	154	69	177	153	188	149	73	28	13	24	16
$4^1/_2$	166	78	162	73	187	162	200	158	78	28	13	24	16
$4^3/_4$	175	83	170	77	197	171	210	167	83	28	13	24	16
5	184	88	178	81	207	179	220	175	84	32	14	28	17
$5^1/_4$	193	93	186	85	216	187	230	183	89	32	14	28	17
$5^1/_2$	202	98	194	89	225	195	240	191	90	36	16	31	19
$5^3/_4$	211	103	202	92	234	203	250	199	95	36	16	31	19
6	220	108	210	95	244	211	260	207	98	38	16	31	19

Bemerkung. Die Abmessungen der Schrauben verschiedener Fabriken weichen voneinander ab; die Werte der Tafel sind als Mindestmafse für Köpfe, Muttern und Stellschrauben anzusehen.

Abmessungen für gedrehte und ungedrehte Schrauben

(Normalien der preufsi-



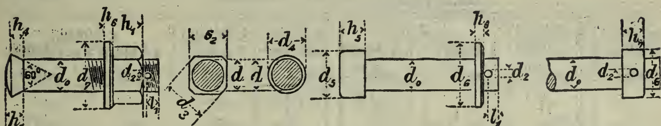
Nr. der Schrauben	Durchmesser im Schaft d_0 gedreht	Durchmesser im Schaft d_0 ungedreht	Gewindedurchmesser in den Spitzen d		Kerndurchmesser d_1	Zahl der Gänge auf einen engl. Z. z	Höhe des sechs- oder viereckigen Kopfes h_0	Höhe der Mutter h_1	Höhe der Gegenmutter h_2	Höhe des versenkten Kopfes im ganzen h_3	Höhe des versenkten Kopfes im Konus h_4	Schlüsselweite u. Seite des viereckigen Kopfes s_0
	mm	mm	engl. Z.	mm	mm		mm	mm	mm	mm	mm	mm
3	10	10	3/8	9,52	7,49	16	7	10	7	6	5	17
4	13	13	1/2	12,70	9,99	12	9	13	10	8	7	22
5	16	16	5/8	15,87	12,92	11	12	16	12	10	8	28
6	20	19	3/4	19,05	15,80	10	14	20	15	12	10	33
7	23	23	7/8	22,22	18,61	9	16	23	17	14	11	39
8	26	26	1	25,40	21,33	8	18	26	19	16	13	44
9	30	29	1 1/8	28,57	23,93	7	20	30	21	18	14	50
10	33	32	1 1/4	31,75	27,10	7	22	33	24	20	16	55
11	36	35	1 3/8	34,92	29,50	6	24	36	26	22	18	61
12	40	39	1 1/2	38,10	32,68	6	26	40	28	24	20	66
13	43	42	1 5/8	41,27	34,77	5	29	43	31	26	21	72
14	46	45	1 3/4	44,45	37,94	5	31	46	33	28	23	77
15	50	48	1 7/8	47,62	40,40	4 1/2	34	50	36	30	25	83

Das Gewinde über 20 mm Bolzendurchmesser für Stehbolzen und lotrechte Decken- gefäfsen, Probierhähnen usw. erhält

Ungedrehte Schrauben mit abweichendem Durchmesser

und gedrehte Bolzen. (Whitworthsches Gewinde.)

schen Staatsbahnen.)



Schraubenbolzen				Stiftschrauben			Glatte Bolzen		Unterlegscheiben			
		Entfernung des Splintes							Durchmesser			
Seite des Sechsecks für den Kopf oder die Mutter	Splintdurchmesser	durch die Mutter vom Rande der letzteren	vor der Mutter vom Ende des Bolzens	Durchmesser des äußeren Kreises	Seite des Vierecks	Durchmesser des Ansatzes bei runden Stiftschrauben	Durchmesser des Kopfes	Höhe des Kopfes	für gedrehte Bolzen	für Schraubenmuttern	Stärke der Unterlegscheibe	Höhe des Splintringes
s_1	d_2	l_0	l_1	d_3	s_2	d_4	d_5	h_5	d_6	d_7	h_6	h_7
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
9,8	4	7	6	14	12	13	16	5	16	22	3	10
12,7	5	9	8	20	17	16	22	6	22	28	4	11
16,2	5	12	8	22	17	20	26	7	26	36	4	12
19,1	6	14	9	26	22	23	32	8	32	44	5	13
22,5	6	16	9	34	28	26	36	9	36	50	5	15
25,4	7	18	10	34	28	30	40	10	40	56	6	16
28,9	7	20	12	40	33	33	44	10	44	62	6	17
31,8	8	22	12	40	33	36	48	11	48	68	7	18
35,2	9	24	13	.	.	.	52	11	52	74	7	19
38,1	9	26	14	.	.	.	56	12	56	80	8	20
41,6	10	29	15	.	.	.	60	12	60	86	8	21
44,5	10	31	15	.	.	.	64	13	64	92	9	22
47,9	10	34	16	.	.	.	68	13	68	100	9	23

anker, dsgl. das Messinggewinde vom Wasserstande, von den Zylinderhähnen, Schmier-
10 Gänge auf einen englischen Zoll. **(Feingewinde.)**
erhalten die Steigung der nächsten schwächeren Normalschraube.

Mutterschrauben*)

der Akt.-Ges. für Stahl- und Eisenindustrie „Archimedes" in Berlin u. Breslau.

Mutternhöhe = Bolzendurchmesser.

Bolzen-durchm. mm	Schlüssel-weite mm	Kopfhöhe 4-kantig mm	Kopfhöhe 6-kantig mm	Bolzen-durchm. mm	Schlüssel-weite mm	Kopfhöhe 4-kantig mm	Kopfhöhe 6-kantig mm
5	9,5	3	3,5	15	25	10,5	12
6	11	4	5	16	27	12	13,5
7	12	4,5	6	18	29,5	13	14
8	14	5,5	7	19	32	14	15
9	15,5	6	7,5	20	32	15	16
10	17	6,5	8	22	36,5	16	17
11	19	7,5	9	25	41,5	18	19
12	20,5	8	9,5	29	47	21	23
13	22	9	10,5	32	52	23	23
14	24	10	11,5				

Sellerssches Gewinde.

Aeußerer Gewinde-Durchm. d engl. Z.	Ganghöhe h engl. Z.	Zahlenwert n (s. u.)	Aeußerer Gewinde-Durchm. d engl. Z.	Ganghöhe h engl. Z.	Zahlenwert n (s. u.)	Aeußerer Gewinde-Durchm. d engl. Z.	Ganghöhe h engl. Z.	Zahlenwert n (s. u.)
1/8	0,0250	0,2000	1 1/8	0,1429	0,1270	3 1/4	0,2857	0,0879
3/16	0,0417	0,2222	1 1/4	0,1429	0,1143	3 1/2	0,3077	0,0879
1/4	0,0500	0,2000	1 3/8	0,1667	0,1212	3 3/4	0,3333	0,0889
5/16	0,0556	0,1778	1 1/2	0,1667	0,1111	4	0,3333	0,0833
3/8	0,0625	0,1667	1 5/8	0,1818	0,1119	4 1/4	0,3478	0,0818
7/16	0,0714	0,1633	1 3/4	0,2000	0,1143	4 1/2	0,3636	0,0808
1/2	0,0769	0,1538	1 7/8	0,2000	0,1067	4 3/4	0,3810	0,0802
9/16	0,0833	0,1481	2	0,2222	0,1111	5	0,4000	0,0800
5/8	0,0909	0,1455	2 1/4	0,2222	0,0988	5 1/4	0,4000	0,0762
3/4	0,1000	0,1333	2 1/2	0,2500	0,1000	5 1/2	0,4211	0,0766
7/8	0,1111	0,1270	2 3/4	0,2500	0,0909	5 3/4	0,4211	0,0732
1	0,1250	0,1250	3	0,2857	0,0952	6	0,4444	0,0741

Gewinde für Gasrohre.**)

Vorgeschlagen vom Vereine deutscher Ingenieure, vom Vereine deutscher Gas- und Wasserfachmänner, vom Vereine deutscher Zentralheizungsindustrieller und vom Verbande deutscher Röhrenwerke, 1903.

Lichter Rohrdurchmesser D engl. Z.	Lichter Rohrdurchmesser D mm	Aeußerer Gewindedurchm. d mm	Kerndurchmesser d_1 mm	Anzahl der Gänge auf 1 Z. engl.	Lichter Rohrdurchmesser D engl. Z.	Lichter Rohrdurchmesser D mm	Aeußerer Gewindedurchm. d mm	Kerndurchmesser d_1 mm	Anzahl der Gänge auf 1 Z. engl.
1/4	6,35	13	11,3	19	1 1/2	38,10	48	45	11
3/8	9,52	16,5	14,8	19	1 3/4	44,45	52	49	11
1/2	12,70	20,5	18,2	14	2	50,80	59,70	56	11
5/8	15,87	23	20,7	14	2 1/2	63,50	76	73	11
3/4	19,05	26,5	24,2	14	3	76,20	89	86	11
1	25,40	33	30	11	3 1/2	88,90	101,5	98,5	11
1 1/4	31,75	42	39	11	4	101,60	114	111	11

*) Ueblich bei den meisten deutschen Schraubenfabriken.

**) S. Z. d. V. d. I. 1903 S. 1236

1. Der Kern wird nur auf Zug (oder Druck) beansprucht.

Dies findet statt bei Schrauben, die ohne ihre Last angezogen werden. Hierfür ist zulässig

$$Q = \frac{1}{4} \pi d_1^2 k_z \qquad \text{I.}$$

Für schmiedeiserne Schrauben durchschnittlicher Güte nehme man unter Voraussetzung der Belastungsweise II (S. 404 u. 405)

$$k_z = 480 \text{ kg/qcm.}$$

Werden die Schrauben auf der Drehbank oder mittels zweckmäfsigen, scharfen Schneidzeuges oder mittels solcher Maschinen hergestellt, bei denen der Stoff gesund bleibt, so darf bei der Belastungsweise II für schmiedeiserne Schrauben gewählt werden

$$k_z = 600 \text{ kg/qcm.}$$

Für Stahlschrauben nehme man unter denselben Verhältnissen

$$k_z = 640 \text{ kg/qcm} \quad \text{oder} \quad k_z = 800 \text{ kg/qcm.}$$

Für schmiedeiserne Schrauben mittlerer Stärke ($d = 1{,}2$ bis $3{,}0$ cm) ergibt sich mit $k_z = 480$ oder 600 etwa

$$Q = 300\, d^2 \quad \text{oder} \quad Q = 240\, d^2.$$

Die Höhe h_1 der **Mutter** ergibt sich unter Berücksichtigung der im Gewinde auftretenden Biegungs- und Scherspannungen, wenn Bolzen und Mutter aus gleichem Stoffe sind, zu etwa $h_1 = d$; für die Höhe h_0 des **Kopfes** genügt $h_0 = 0{,}7\, d$. Die **Schlüsselweite** s_0 ist aus den Tafeln S. 663 bis 668 zu ersehen.

Ist der Bolzen aus Schmiedeisen und die Mutter aus guter Bronze, so dafs für sie unter Voraussetzung der Belastungsweise II (S. 404 u. 405) $k_b = 300$ kg/qcm gesetzt werden darf, so ergibt sich die Mutterhöhe $h_1 \sim 1{,}5\, d$. Will man aber in diesem Falle $h_1 = d$ beibehalten, so ist der Schraubendurchmesser d um 20 bis 25 vH zu vergröfsern.

Gufseisernes Gewinde ist möglichst zu vermeiden. Für Muttern aus Gufseisen ist $h_1 \geq 1{,}5\, d$, wenn angängig $h_1 = 2\, d$ zu nehmen. — Läfst sich eine so hohe Mutter nicht unterbringen, so mufs der Bolzendurchmesser der zulässigen Mutterhöhe entsprechend vergröfsert werden.

2. Der Kern wird auf Zug (oder Druck) und auf Drehung beansprucht.

1. Diese Beanspruchung findet statt bei Schrauben, die mit der Last angezogen werden. Die durch die Belastung gegeneinander gedrückten Schraubenflächen der Mutter und der Schrauben gleiten aufeinander, wobei der Flächendruck k in den Berührungsflächen eine gewisse Gröfse nicht überschreiten darf, so dafs bei z tragenden Gängen zulässig:

$$Q \leqq z \frac{1}{4} \pi (d^2 - d_1^2)\, k. \qquad \text{II.}$$

Für Befestigungs- und Stellschrauben sei, wenn
Schmiedeisen auf Schmiedeisen oder auf Bronze gleitet, $k \leqq 150$ kg/qcm,
wenn Flufsstahl auf Flufsstahl oder auf Bronze gleitet, $k \leqq 200$ kg/qcm.

Die Pressung zwischen der Mutter aus Schmiedeisen und der aus demselben Stoff bestehenden Unterlage soll nicht über 200 kg/qcm betragen.

Für die Bewegungs- und Prefsschrauben ist höchstens die Hälfte vorstehender Werte k zu rechnen. Je sicherer sich das Schmier-

mittel zwischen den Gleitflächen erhalten läfst, um so höher darf k unter sonst gleichen Verhältnissen gewählt werden.

2. Das den Schraubenbolzen auf Drehung beanspruchende Moment ist für **scharfgängige** Schrauben höchstens

$$M_d = Q r \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1{,}12\,\mu}{1 - 1{,}12\,\mu \operatorname{tg}\alpha}.$$

Setzt man $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}04$, $\mu = 0{,}15$ und $r = \frac{1}{4}(d + d_1) \sim 0{,}55\,d_1$, so ergibt sich

$$M_d = 0{,}11\,Q\,d_1.$$

Da $\sigma = \frac{Q}{\frac{1}{4}\pi d_1^2}$ und $\tau_{max} = \frac{M_d}{\frac{1}{16}\pi d_1^3} = \frac{0{,}11\,Q}{\frac{1}{16}\pi d_1^2}$, so folgt nach S. 487, **3.**, für Schweifseisen mit $k_z = 600$ kg/qcm, $k_d = 360$ kg/qcm, also $\alpha_0 = \frac{600}{1{,}3 \cdot 360} \sim \frac{4}{3}$:

$$k_z = \frac{Q}{\frac{1}{4}\pi d_1^2}\left(0{,}35 + 0{,}65\sqrt{2{,}38}\right) = \frac{Q}{\frac{1}{4}\pi d_1^2} \cdot \frac{4}{3}, \text{ mithin}$$

$$Q = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\pi d_1^2 k_z. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

Die zulässige Belastung ist mithin rund dreiviertel der unter **1.** (Gleichung 1) erlaubten. Will man also bei einer mit der Last anzuziehenden schmiedeisernen Schraube für ein gegebenes Q den erforderlichen Kerndurchmesser bestimmen, so suche man in der Tafel S. 664 das zu $\frac{4}{3}Q$ gehörige d_1; umgekehrt ist die für ein bekanntes d_1 zulässige Belastung Q nur das $\frac{3}{4}$-fache der in der Tafel S. 664 gegebenen beiden Werte.

Die Höhe der **Mutter** für Schrauben, die mit der Last angezogen werden, sei bei scharfgängigen Befestigungsschrauben $h_1 = d$, wenn Mutter und Schraube aus gleichem Stoff sind; für eine schmiedeiserne Schraube mit Bronzemutter genügt $h_1 \sim 1{,}2\,d$. Will man im letzteren Falle $h_1 = d$ beibehalten, so ist der Schraubendurchmesser d um etwa 10 vH zu vergröfsern.

Die meisten Befestigungsschrauben (wie **Fundamentanker, Flanschenschrauben** usw.) erleiden dadurch, dafs sie bereits von vornherein angezogen und während des Betriebes auch nachgezogen werden müssen, eine zusätzliche Beanspruchung. Für die gebräuchlichen scharfgängigen Schrauben ($d \geqq 1{,}6$ cm) wähle man, um diesem Umstande Rechnung zu tragen,

$$Q = 170\,d^2 \text{ bis } Q = 135\,d^2.$$

3. Für den Kerndurchmesser **flachgängiger** Schrauben erlangt man einen Annäherungswert, indem man nach **1.** den Kern (bei überschläglicher Berücksichtigung der Drehungsbeanspruchung) mit $\frac{1}{2}k_z$ bis $\frac{3}{4}k_z$ auf Zug berechnet. Dann wird für den abgerundeten Wert d_1 das Gewinde usw. bestimmt und nun die Festigkeitsrechnung auf Zug und Drehung nochmals durchgeführt und d_1 nötigenfalls berichtigt. In den meisten Fällen tritt zu dem beanspruchenden Drehmomente

$$M_d = Q r \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) = Q r \frac{h + 2\pi r \mu}{2\pi r - \mu h} \text{ (vrgl. S. 241)}$$

noch ein zweites, herrührend von den Reibungswiderständen in der Stützfläche der Schraube, das bei der genaueren Rechnung berücksichtigt werden mufs.

Erfährt die Schraube Druckbeanspruchung, so ist sinngemäfs in gleicher Weise vorzugehen; hierbei darf nicht übersehen werden, ob Knickung [Fall 2), Abb. 5, S. 414] möglich ist.

Beispiel: Die flufsstählerne, flachgängige **Spindel einer Schraubenpresse** hat einen Kerndurchmesser $d_1 = 8$ cm, einen äufseren Durchmesser $d = 10$ cm, also eine Gangtiefe $t = 1$ cm; ferner ist die Ganghöhe des dreigängigen Gewindes $h = 2$ engl. Z. = 5,08 cm. — Wie grofs ist die Beanspruchung bei einer Druckkraft von 35 t, wenn die Konstruktion derart ist, dafs Knickung nicht in Frage kommt, und das die Schraube auf Drehung beanspruchende Moment durch die vorstehende Gleichung bestimmt wird?

Es ist für den mittleren Schraubenhalbmesser $r = {}^1/_4\,(10 + 8) = 4{,}5$ cm und die Reibungszahl $\mu = 0{,}1$:

$$M_d = 35\,000 \,.\, 4{,}5\, \frac{5{,}08 + 2\pi \,.\, 4{,}5 \,.\, 0{,}1}{2\pi \,.\, 4{,}5 - 0{,}1 \,.\, 5{,}08} = 44\,850 \text{ cmkg.}$$

Die im Kernquerschnitte durch dieses Moment hervorgerufene Drehungsbeanspruchung τ_{max} ist nach S. 471:

$$\tau_{max} = \frac{44\,850}{{}^1/_{16}\,\pi\, 8^3} = 446 \text{ kg/qcm,}$$

die Druckspannung ist

$$\sigma = \frac{35\,000}{{}^1/_4\,\pi\, 8^2} = 696 \text{ kg/qcm}$$

und somit nach **3.**, S. 487 die gröfste im Querschnitte der Spindel auftretende Hauptspannung [da für die Belastungsweise II, S. 405, unter Voraussetzung vorzüglichen Eisens mit $k = 1000$ kg/qcm und $k_d = 800$ kg/qcm $\alpha_0 = 1000 : (1{,}3 \,.\, 800) \sim 1$]:

$$\sigma_{max} = 0{,}35 \,.\, 696 + 0{,}65 \sqrt{696^2 + 4 \,.\, 446^2} = 243{,}6 + 735{,}4 = 979 \text{ kg/qcm,}$$

also noch etwas unterhalb der zulässigen Normalspannung $k = 1000$ kg/qcm.

Bei Verwendung von guter Bronze für die Mutter soll nach S. 669 unten der Druck in der Berührungsfläche $k \leqq {}^1/_2 \,.\, 200$ kg/qcm sein. Wählt man $k = 95$ kg/qcm, so wird (nach Gleichung II, S. 669) für die Anzahl z der vollständig tragenden Gewindegänge:

$$35\,000 = z \,.\, {}^1/_4\,\pi\,(10^2 - 8^2)\, 95, \text{ woraus } z = 13,$$

so dafs eine Mutterhöhe $h_1 = 13\ (2:3) = 8^2/_3$ engl. Z. = 22 cm genügt.

Vrgl. auch „Schrauben und Verschraubungen" Abt. II, S. 94.

Steinschraube (mit vier eisernen Beilagen, die sich gegen die Seitenflächen des pyramidenförmigen Ankerschaftes anlegen und deren Zwischenräume durch Zement auszugiefsen sind) s. Abb. 23. $l = 5d + 5$ cm.

Abb. 23.

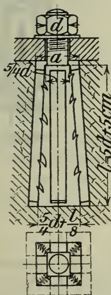


Abb. 24.

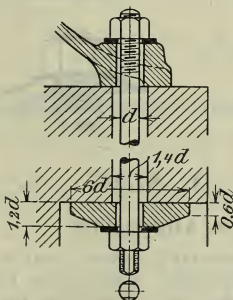
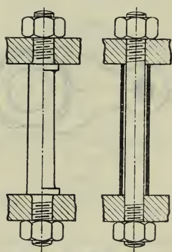


Abb. 25. Abb. 26.



Fundamentanker (nach A. Pfarr) s. Abb. 24. Unten am Gewinde sind zwei ebene Flächen angefeilt zum Festhalten des Ankerbolzens mit dem Schlüssel.

Abstandhaltende Schraubenbolzen (s. Abb. 25 u. 26). — **Schraube** (zur Aufnahme von Querkräften) mit kegelig eingeschliffenem Schaft (s. Abb. 27).

Schraubensicherungen (s. auch die Skizzen am Kopf der Tafeln S. 666 u. 667) durch Gegenmutter, durchgebohrten Stift und Vorsteckstift oder -keil. — Weitere Mittel zur Sicherung der Mutter gegen Drehen: Legeschlüssel (s. Abb. 28 u. 29); auslösbare, in eine Verzahnung an der Mutter einschnappende Federklinke (Abb. 30) oder federnde Unterlegscheiben (Abb. 31 u. 32). — Mittel zur Verhinderung des Drehens des Schraubenbolzens, auch beim Anziehen der Mutter: Vierkant oder Nase am Bolzen (Abb. 33), Anschlagflächen neben dem Bolzenkopf oder Durchsteckkeil (Abb. 34).

Abb. 27.

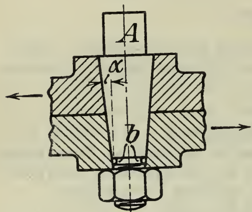


Abb. 30.

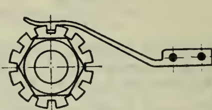


Abb. 33.



Abb. 28.

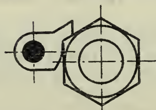


Abb. 31.

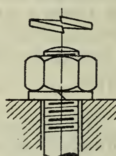


Abb. 34.

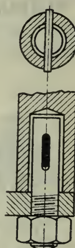


Abb. 29.

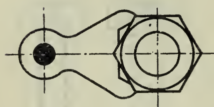


Abb. 32.



C. Niete.

a. Allgemeines.

Die **Löcher** für die Vernietung werden durch Lochen (Stanzen) oder durch Bohren hergestellt. Unter allen Umständen ist zu verlangen, dafs die Löcher der zu vernietenden Platten gut aufeinander passen.

Das Lochen ist das billigere Verfahren und setzt gutes Eisens von genügender Zähigkeit voraus. Die gestanzten Löcher fallen nicht zylindrisch, sondern etwas

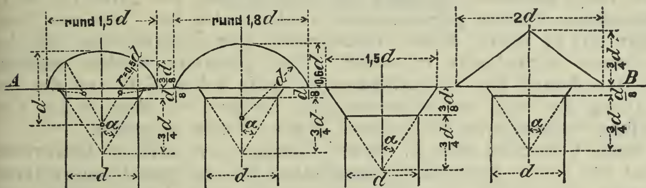
kegelförmig aus, u. zw. weiter auf der Blechseite, die sich beim Lochen unten befindet.

Das Bohren der Löcher ermöglicht, besonders durch gemeinsames Bohren der zusammengepafsten Bleche, Träger usw. mit tragbaren Bohreinrichtungen, genauere Arbeit und soll da angewandt werden, wo auf diesen Punkt sowie im Falle des Nichtausglühens darauf Wert zu legen ist, dafs die Zähigkeit des Eisens in keiner Weise beeinträchtigt wird.

Flufseisen soll nur gebohrt werden. — Vrgl. hier die Vorschriften unter 5. bis 7., S. 681.

Die **Niete** bestehen aus vorzüglichem, zähem Flufseisen oder Tiegelstahl, selten noch aus Schweifseisen. Formen der Nietköpfe s. Abb. 35 bis 38, wovon Abb. 35 und 37 die Köpfe der Normalniete für Eisenkonstruktionen darstellen.*) Den vier Köpfen liegt der gleiche

Abb. 35. Abb. 36. Abb. 37. Abb. 38.



Geschellter Kopf für **feste** Verbindungen $G = 4{,}4\ d^3$.	Geschellter Kopf für **feste** und **dichte** Verbindungen $G = 7{,}06\ d^3$.	Gehämmerter, versenkter Kopf	Gehämmerter, erhabener Kopf. $G = 6{,}13\ d^3$.

Versenkungswinkel α zugrunde; es ist ctg $\alpha = 1{,}5$; C. Bach wählt statt dessen bei übrigens gleichen Abmessungen ctg $\alpha = 1{,}2$. Als Ueberschufs an Schaftlänge zur Bildung des erhabenen Schliefskopfes ist erforderlich $^4/_3\,d$ bis $^7/_4\,d$.

Die in Abb. 37 und 38 dargestellten Köpfe werden ohne Schellhammer erzeugt. Die durch versenkte Niete bewirkte besondere Schwächung des Blechquerschnittes erfordert u. Umst. eine Vergröfserung der Nietentfernung.

G ist in den drei Formeln (bei Abb. 35, 36, 38) das Gewicht von **1000** Nietköpfen in kg, wenn der Schaftdurchmesser d in cm ausgedrückt wird.

Gewichte eiserner Nietköpfe.

d in mm	G in kg, entsprechend der Abb. 13	14	16	d in mm	G in kg, entsprechend der Abb. 13	14	16	d in mm	G in kg, entsprechend der Abb. 13	14	16
8	2,3	3,6	3,1	18	25,7	41,2	35,8	28	96,6	155,0	134,6
10	4,4	7,0	6,1	20	35,2	56,5	49,0	30	118,8	190,6	165,5
12	7,6	12,2	10,6	22	46,9	75,2	65,3	32	144,2	231,3	200,9
14	12,1	19,4	16,8	24	60,8	97,6	84,7	34	172,9	277,5	240,9
16	18,0	28,9	25,1	26	77,3	124,1	107,7	36	205,3	329,4	286,0

Die üblichen Nietstärken liegen zwischen 8 und 30 mm, bei Schiffskesseln bis 36 mm (Maschinennietung).

*) S. deutsches Normalprofil-Buch für Walzeisen, 5. Aufl., 1897, S. 25 u. 26.

b. Berechnung der Vernietungen.

Alle **Längen-Abmessungen** sind im folgenden in **cm** ausgedrückt.

Das heifs eingezogene Niet zieht sich beim Erkalten zusammen; hierdurch werden die Platten aufeinandergedrückt und Längsspannungen im Nietschafte hervorgerufen. Mit der Zusammenziehung in der Richtung der Nietachse ist gleichzeitig eine solche winkelrecht dazu verknüpft, u. zw. aus Anlafs des Erkaltens an sich und infolge der allgemein mit Längsspannungen (Längsdehnungen) verbundenen Querzusammenziehung (s. S. 390).

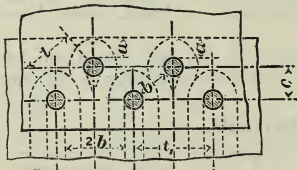
Der Nietschaft kann mithin selbst dann, wenn er sich im heifsen Zustand an die Lochwand angelegt hatte, diese nach seinem Erkalten nicht mehr berühren. Solange also kein Gleiten der durch die Niete verbundenen Platten gegeneinander stattgefunden hat, wird der Nietschaft nicht durch Kräfte beansprucht sein können, die von der Lochwand winkelrecht zu seiner Achse geäufsert werden müfsten. Die Berechnung der Nietverbindungen mufs daher nicht von der Berechnung der Niete auf Scherfestigkeit, sondern von dem in der Verbindung vorhandenen Widerstande gegen Gleiten ausgehen.

Nach Versuchen von C. Bach*) beträgt der mittlere Gleitwiderstand für jedes Paar Berührungsflächen bei sachgemäfs ausgeführter Nietung (einreihiger Ueberlappungsnietung) nach Verstemmung etwa $R = 1000$ bis 1800 kg/qcm Nietquerschnitt. Durch doppelseitige Verstemmung wird der Gleitwiderstand um etwa 30 vH gegenüber unverstemmten Nietungen erhöht. Näheres über die zulässige Belastung s. S. 675 u. ff.**)

*) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1895 S. 301 u. f., 1892 S. 1142. 1305 u. f., 1894 S. 1231 u. f., auch Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl. 1908, S. 188 bis 194.

**) Bei der bisher üblichen Berechnung der Nietverbindungen wird R vernachlässigt und (den tatsächlichen Verhältnissen nicht entsprechend) nur die Scherfestigkeit des Nietquerschnittes in Rechnung gezogen. Die vernieteten Platten werden als lediglich durch Zug (oder Druck) beansprucht angesehen und die sich hierbei ergebenden grofsen Biegungsspannungen des Schaftes und der Bleche aufser acht gelassen.

Abb. 39.



Als Beispiel (vrgl. auch Nietungen für eiserne Brücken und Hochbauten für den Gang dieser Berechnungsweise diene die einschnittige, zweireihige Vernietung (Abb. 39). Man denkt sich (nach J. W. Schwedler) zu jedem Niet (vom Durchmesser d) einen diesen seilartig umschliefsenden Blechstreifen von der Breite, $\frac{1}{2} b$ und der Dicke s und nimmt an, dafs der Nietschaft, die durchschnittliche Schubspannung k_s erfahrend, die Kraft $\frac{1}{4}\pi d^2 k_s$ durch die Lochleibung hindurch auf die beiden Enden des ihn umschlingenden Bandes übertrage und dabei in diesem die Zugspannung k_z wachrufe, so dafs

$$\frac{\pi}{4} d^2 k_s = 2\,\frac{b}{2}\, s k_z .$$

Wird $k_s = 0{,}8\, k_z$ angenommen, so ergibt sich

$$b = 1{,}25\,\frac{\frac{1}{4}\pi d^2}{s}; \text{ ferner}$$

$$t = b + d; \qquad t_1 = 2b + d; \qquad c = \sqrt{t^2 - (\tfrac{1}{2} t_1)^2}.$$

Wird Ausscheren des Randes (statt des beim Bruche tatsächlich stattfindenden Aufreifsens) vorausgesetzt, so folgt aus $\frac{1}{4}\pi d^2 k_s = 2 a s k'_s$ mit k'_s (Blech) $= k_s$:

$$a = \frac{\frac{1}{4}\pi d^2}{2s}.$$

Wird die Kraft, welche die Nietverbindung beansprucht, fortgesetzt gesteigert, so überschreitet sie den Widerstand R: die Platten gleiten, der Nietschaft gelangt zur Anlage, und schiefslich wird nach vorhergegangener, meist ziemlich weitreichender Formänderung (Streckung der Löcher in Richtung der Zugkraft, Rissigwerden der Lochränder, Abscheren der Niete oder Reifsen der Platten) die Verbindung durch Bruch zerstört.

1. Dampfkessel-Nietungen.

Sie müssen dicht und fest sein. Das Dichthalten einer Nietnaht wird bei Plattendicken von etwa 7 mm aufwärts durch Verstemmen mit stumpfem, abgerundetem Stemmer erzielt. (Abschrägung des Plattenrandes etwa 1 : 3.)

I. Ueberlappungs-Nietungen.

Hierfür wähle man auf Grund bewährter Ausführungen, wenn s die Blechdicke (in cm), den Nietdurchmesser

$$d = \sqrt{5\,s} - 0{,}4 \text{ cm};$$

für $s =$ 0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	cm
wird $d =$ 1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	2,9	3,0	3,2	3,3	3,5	3,6	cm

1. Einschnittige, einreihige Vernietung (Abb. 40).

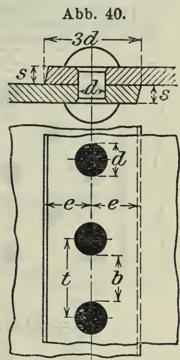
Man wähle die Nietteilung $t = 2\,d + 0{,}8$ cm und die Entfernung der Lochmitten vem Blechrande $e = 1{,}5\,d$.

Diese Angaben gelten auch für einseitig gelaschte Nietverbindungen.

Die zulässige Belastung der Niete im Betriebe soll bei Verwendung guten Nieteisens (s. Vorschriften für Lieferungen von Eisen und Stahl, 5. Abschn., Stoffkunde) und sachgemäfser Ausführung 600 bis 700 kg/qcm im Nietquerschnitt betragen, so dafs die im vollen Bleche (unter Voraussetzung gleichmäfsiger Verteilung) eintretende Spannung (in kg/qcm) höchstens

$$\sigma_v = 700\,\frac{{}^1/_4\,\pi\,d^2}{s\,t} \text{ beträgt.*)}$$

Abb. 40.



Wenn S die auf die Blechbreite t zu übertragende Kraft (in kg) bezeichnet, so mufs für Ueberlappungsnietung nach den Bestimmungen der Hamburger Normen 1898

$$(t - d)\,s\,\frac{K_z}{4{,}5} \geqq S \text{ sein,}$$

d. h. die Zugspannung des Bleches darf an keiner Stelle mehr als $^1/_{4,5}$ der Zugfestigkeit K_z des Stoffes betragen.

*) In der Formel der Hamburger Normen 1898 für die Manteldicke s zylindrischer Dampfkesselwandungen mit innerem Ueberdruck entspricht σ_v der Spannung $K_z\,\varphi : \mathfrak{S}$, und in der Formel II auf S. 503 hat k_z die Bedeutung von σ_v bei Berücksichtigung der Verschwächung durch die Nietnaht.

Beispiel. Ein Dampfkessel von 120 cm innerem Durchmesser und 5,8 kg/qcm innerem Ueberdruck soll einschnittige, einreihige Vernietung erhalten. Nach der Tafel der Blechdicken der Dampfkessel mit einreihiger Längsnaht wird geschätzt $s = 10$ mm. Für $s = 1{,}0$ cm ist $d = 1{,}8$ cm, $t = 4{,}4$ cm und $\sigma_v = 348$ kg/qcm. Die Schätzung von s erweist sich als richtig, da für 1 cm Kessellänge folgt:

$$120 \, . \, 5{,}8 = 348 \, . \, 2s \text{ oder } s = \frac{120}{2} \frac{5{,}8}{348} = 1{,}0 \text{ cm.}$$

Abb. 41.

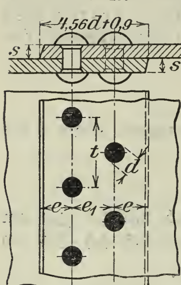
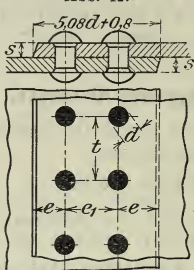


Abb. 42.



2. **Einschnittige, zweireihige Vernietung** (Abb. 41 und 42).

Man wähle den Nietdurchmesser d und den Randabstand e wie vorstehend unter 1.; ferner sei für die Zickzacknietung (Abb. 41)

die Nietteilung
$$t = 2{,}6\,d + 1{,}5 \text{ cm}$$
und die Entfernung
$$e_1 = 0{,}6\,t;$$
für die Kettennietung (Abb. 42) nehme man dagegen die Nietteilung $t = 2{,}6\,d + 1{,}0$ cm und die Entfernung $e_1 = 0{,}8\,t$.

Abb. 43.

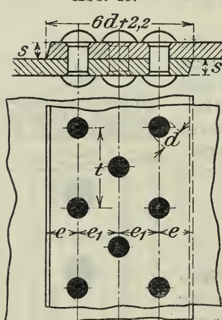
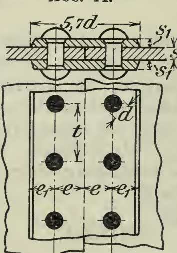


Abb. 44.



In beiden Fällen soll die zulässige Belastung der Niete im Betriebe 550 bis 650 kg/qcm Nietquerschnitt nicht überschreiten (vrgl. unter 1.), so dafs

$$\sigma_v \overline{\gtrless} 650 \, . \, {}^1/_4 \pi d^2 : ({}^1/_2 s t).$$

3. **Einschnittige, dreireihige Vernietung** (Abb. 43).

Man wähle d und e wie vorstehend unter 1.; dagegen sei

$$t = 3\,d + 2{,}2 \text{ cm}, \qquad e_1 = 0{,}5\,t;$$

$$\sigma_v = 500 \, . \, {}^1/_4 \pi d^2 : ({}^1/_3 s t) \text{ bis } 600 \, . \, {}^1/_4 \pi d^2 : ({}^1/_3 s t).$$

II. Zweiseitige Laschen-Nietungen.

1. Zweischnittige, einreihige Vernietung (Abb. 44).

Die Laschendicke sei mit Rücksicht auf Verstemmen und Abrosten

$$s_1 = {}^5/_8 s \quad \text{bis} \quad {}^2/_3 s.$$

Man wählt auch wohl die Lasche im Kesselinnern etwas stärker als die Aufsenlasche wegen der verschiedenen Abnutzung. Ferner sei

$$d = \sqrt{5s} - 0{,}5 \text{ cm};$$

$$t = 2{,}6\,d + 1{,}0 \text{ cm}; \qquad e = 1{,}5\,d; \qquad e_1 = 0{,}9\,e.$$

Da der Gleitwiderstand hier in zwei Paar Flächen, also doppelt auftritt, kann man die zulässige Belastung der Niete im Betriebe zu 1000 bis 1200 kg/qcm im Nietquerschnitt annehmen, so dafs (vrgl. S. 675)

$$\sigma_v = 1000 \frac{1/4\,\pi\,d^2}{s\,t} \text{ bis } 1200 \frac{1/4\,\pi\,d^2}{s\,t}.$$

Dabei soll nach den Hamburger Normen 1898 für zweiseitige Laschennietung

$$(t - d)\,s \frac{K_z}{4} \geqq S \text{ sein (vrgl. S. 675).}$$

Man geht hier (anstatt bis zu 2/9) bis zu 1/4 der tatsächlichen Zugfestigkeit des Bleches, weil das Blech in der Lochlinie gegen Rosten geschützt ist und die Biegungsbeanspruchung wegfällt. Hierin liegt ein wesentlicher Vorzug der zweiseitigen Laschennietung gegenüber der Ueberlappungsnietung.

2. Zweischnittige, zweireihige Vernietung (Abb. 45).

Es kann gewählt werden:

$$d = \sqrt{5s} - 0{,}6 \text{ cm}; \qquad t = 3{,}5\,d + 1{,}5 \text{ cm}; \qquad e = 1{,}5\,d;$$

$$e_1 = 0{,}5\,t; \qquad \text{Randabstand} = 0{,}9\,e; \qquad s_1 = 5/8\,s \text{ bis } 2/3\,s;$$

$$\sigma_v = 950 \frac{1/4\,\pi\,d^2}{1/2\,s\,t} \text{ bis } 1150 \frac{1/4\,\pi\,d^2}{1/2\,s\,t}.$$

Die wellenförmige Begrenzungslinie der Laschen, in Abb. 45 nur links gezeichnet, bezweckt, die Ueberlaschung an jeder Stelle so weit zu vermindern, dafs das Verstemmen zu einer dichten Verbindung führt. Bei genügender Dicke der Laschen empfiehlt es sich, die gerade Begrenzung, weil einfacher, beizubehalten.

Abb. 45.

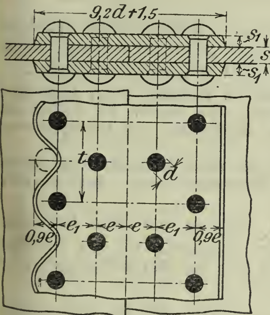
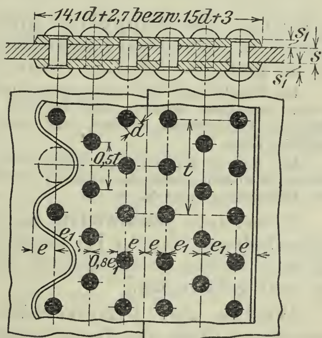


Abb. 46.



Wird in der äufseren Naht jedes zweite Niet fortgelassen, so wähle man $d = \sqrt{5s} - 0{,}6$ cm; $t = 5\,d + 1{,}5$ cm; $e = 1{,}5\,d$; $e_1 = 0{,}4\,t$; Randabstand $= 1{,}5\,d$; $s_1 = 0{,}8\,s$; s_v wie vorstehend. Ganze Laschenbreite $10\,d + 1{,}2$ cm.

3. **Zweischnittige, dreireihige Vernietung** (Abb. 46).

Es kann gewählt werden:

$$d = \sqrt{5s} - 0{,}7 \text{ cm}; \qquad t = 6\,d + 2{,}0 \text{ cm};$$

$$e = 1{,}5\,d; \qquad e_1 = {}^3/_8\,t; \qquad \text{Laschendicke} = s_1\,0{,}8\,s;$$

$$\sigma_v = 900 \frac{{}^1/_4\,\pi\,d^2}{n\,s\,t} \text{ bis } 1100 \frac{{}^1/_4\,\pi\,d^2}{n\,s\,t},$$

wobei für die linke Seite der Abb. 46 $n = {}^1/_5$, für die rechte $n = {}^1/_{\ldots}$ gilt. Die vorstehende Bemerkung über die wellenförmige Begrenzung unter 2. gilt auch hier.

III. Wahl der Vernietung.

Bei Blechdicken über 1,2 cm empfiehlt sich die einschnittige, einreihige Vernietung (s. S. 675) nur noch für die Quernähte des Kessels.

Bei hohen Dampfspannungen und grofsen Kesseldurchmessern sind die Ueberlappungsnietungen, bei denen Niet und Blech stark auf Biegung beansprucht werden, möglichst zu vermeiden.

Hinsichtlich der Quernähte kommt in Betracht, dafs die in der Richtung der Achse eines zylindrischen Kessels vom Durchmesser D bei p kg/qcm Ueberdruck auftretende Spannung σ_v' im Bleche von der Dicke s aus der Näherungsgleichung ${}^1/_4\,\pi\,D^2 p = \pi\,D\,s\,\sigma_v'$ zu

$$\sigma_v' = \frac{D}{4s} p$$

sich ergibt, während die Spannung σ_v winkelrecht dazu, d. h. in der Richtung des Umfanges, sich aus $D p = 2\,s\,\sigma_v$ (vrgl. Gl. II, S. 503) zu

$$\sigma_v = \frac{D}{2s} p$$

berechnet, also doppelt so grofs ist als σ_v'. Infolgedessen erhalten Kessel bei zweireihiger Längsnaht nur einreihige Quernaht, solange nicht σ_v' so grofs ist, dafs eine zweireihige Quernaht angezeigt erscheint.

Bei Beurteilung der Inanspruchnahme des Kessels in Richtung seiner Achse darf nicht übersehen werden, dafs liegende Kessel mehr oder minder wie Träger auf Biegung beansprucht werden, und dafs einseitige Erwärmung die Beanspruchung erhöhen kann.

Bei kurzen Kesseln und ebenso bei Gefäfsen, die durch Ringe oder auf andere Weise in kurzen Abständen versteift werden, ist σ_v kleiner als vorhin. Vrgl. hierüber die Bemerkung unter 2., S. 503.

[Ueberlappt **geschweifste** Kesselmäntel können bei dem höchsten Betriebsdrucke mit ${}^1/_7$ bis höchstens ${}^1/_6$ der Zugfestigkeit des Bleches belastet werden, vorausgesetzt, dafs dieses bei der Schweifsung nicht zu sehr gelitten hat.]

Weiteres über Dampfkessel-Nietungen s. Abt. II, Abschn. Kraftmaschinen (Teile der Dampfkessel).

2. Nietungen für Flüssigkeits- und Gasbehälter usw.

Meist einschnittige, einreihige Vernietung (s. S. 675). Die Blechdicke s wird hierbei in der Regel mehr durch Rücksicht auf Abroste

u. drgl. als durch den inneren Druck bestimmt. Es kann gewählt werden:

$$d = \sqrt{5s} - 0{,}4 \text{ cm};$$

Nietteilung $t = 3d + 0{,}5$ cm; Randabstand $e = 0{,}5\,t$.

Niete von 0,8 cm Durchmesser an abwärts werden meist kalt eingezogen und vernietet. — Platten unter 0,5 cm lassen sich erfahrungsmäfsig nicht mehr verstemmen. Gewöhnlich wird dann ein mit Mennige getränkter Leinwand- oder Papierstreifen von der Breite der Ueberlappung zwischen die abzudichtenden Flächen gelegt. Zuweilen verwendet man auch mit Mennigekitt behandelte Lederschnur u. drgl.

3. Nietungen für eiserne Brücken und Hochbauten.

Hier kann nach Mafsgabe des auf S. 674 u. f. Gesagten vorgegangen werden. Von einem Verstemmen wird bei diesen Nietungen abgesehen. Den Nietdurchmesser wähle man im allgemeinen zu

$$d = \sqrt{5s} - 0{,}2 \text{ cm},$$

wenn s die Plattendicke in cm bedeutet.

Empfohlen wird, nur Nietdurchmesser zu nehmen von 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26 mm.

Für einreihige, einschnittige Vernietung mit 600 kg/qcm Nietquerschnitt zu übertragender Kraft wird die Nietteilung

$$t = \frac{\pi d^2}{4s} + d$$

mit der Beschränkung, dafs $t \geqq 2{,}5\,d$ und der Randabstand

$$e = 1{,}5\,d \text{ bis } 2{,}0\,d.$$

Zwei- und mehrreihige Vernietungen pflegt man auf Grund des Vorstehenden nach dem Schwedlerschen Verfahren (vrgl. Fufsnote S. 674) zu bestimmen. — Ist k_z die zulässige Zugspannung des Flufseisens, aus dem die Niete hergestellt sind (gewöhnlich $k_z = 750$ kg/qcm), so wählt man $k_s = 0{,}8\,k_z = 600$ kg/qcm als zulässige Schubspannung im Nietschaft und nimmt an, dafs n Niete von d cm Durchmesser, wenn sie in m Querschnitten (meist ein- oder zweischnittig) beansprucht werden, eine Kraft (in kg) übertragen von

$$P \gtreqless 600 \,.\, {}^1/_4\, \pi d^2 mn.$$

Bei mehrschnittigen Vernietungen ist auch darauf zu achten, dafs der **Leibungsdruck** k (Druck zwischen Nietschaft und Lochwand) das für zulässig erachtete Mafs nicht überschreitet. Empfohlen wird hierfür $k = 1{,}8\,k_z$ bis $2{,}2\,k_z$, im Mittel $k = 2\,k_z$. Es mufs also sein

$$P \gtreqless k s_s d n,$$

wenn hierbei s_s die in der einen der beiden Kraftrichtungen beanspruchte geringste Gesamt-Plattendicke (in cm) bedeutet. Das sich aus den beiden letzten Formeln ergebende gröfsere n ist der Ausführung zugrunde zu legen.

Heftniete halten die verbundenen Teile nur zusammen und übertragen keine Kräfte. Ihr Abstand ist bei den der Witterung ausgesetzten Eisenverbindungen wegen des wasserdichten Fugenschlusses und zur Vermeidung von Rost nicht zu grofs zu wählen. Bei Verbindung zweier Winkeleisen oder zweier solcher mit zwischenliegendem Steh-

bleche sei der Abstand der Heftniete höchstens $8\,d$; bei Verbindung eines Bleches oder Flacheisens mit einem Winkeleisen darf bei einer Blechdicke $s = 8$ bis 11 mm die Heftnietentfernung höchstens $5\,d$ betragen und bei $s > 11$ mm höchstens $6\,d$. — Der größte Abstand der Randniete vom Blechrande soll bei Blechdicken $s \overline{<} 14$ mm nicht mehr als $2{,}5\,d$ und bei $s > 14$ mm höchstens $2{,}8\,d$ sein.*)

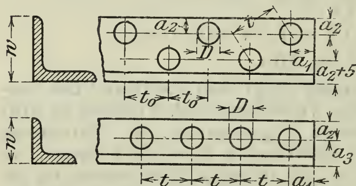
Falls sich die Stäbe, die durch die Vernietung Kräfte aufeinander übertragen sollen, nicht unmittelbar berühren, sind entsprechend mehr Niete anzuordnen. — Sämtliche auf Zug beanspruchten Verbindungsstücke sind mit Spannung einzusetzen.

Die Summe der Dicken der zu vernietenden Teile soll $3\,d$ bis $4\,d$ nicht überschreiten, da bei größerer Nietlage als etwa $5{,}5\,d$ ein Stauchen durch den ganzen Nietschaft hindurch nicht möglich ist und beim Erkalten sich die Längsspannungen leicht bis zum Absprengen des Kopfes steigern.

Können längere Niete nicht vermieden werden, so sind sie nur so weit zu erwärmen, als es die Bildung des Schließkopfes und die Erzeugung des Widerstandes gegen Gleiten erfordert.

Stählerne **kegelförmige Schraubenbolzen** mit aufgesetztem Vierkant zum sauberen Einschleifen des Kegels (mit $^1/_{20}$ bis $^1/_{10}$ Anzug) bilden einen guten aber teuren **Ersatz langer Niete** (vrgl. Abb. 27, S. 672).

Abb. 47 u. 48.



Für **Winkeleisen** empfiehlt es sich, folgende Maße innezuhalten [auf andere Profile sinngemäß anzuwenden]. (Abb. 47 u. 48.) Abb. 47 gilt nur für Winkeleisen von $w \geq 100$ mm. Der Durchmesser D des Nietkopfes ist

$$D \sim 1{,}5\,d$$

(s. Abb. 35, S. 673).

Nietdurchm.	D	t_{min}	t	t_{max}	$t_0 min$	$a_1 min$	a_1	$a_2 min$
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
$d = 16$	24	40	50	100—120	35	25	30	25
$d = 18$	27	45	55	110—135	40	27	35	27
$d = 20$	30	50	60	120—150	40	30	40	30
$d = 22$	33	55	65	130—165	45	33	45	33
$d = 24$	36	60	70	140—180	45	36	50	36
$d = 26$	39	65	75	150—195	50	40	55	40

$a_3 = 0{,}5\,w + 5$ mm; $w_{min} = 3\,d$.

§ 6 der **Normalbedingungen für die Lieferung von Eisenkonstruktionen für Brücken- und Hochbau,** aufgestellt von dem Verbande Deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine, dem Vereine deutscher Ingenieure und dem Vereine Deutscher Eisenhüttenleute (1893) bestimmt folgendes:

*) S. A. Meyerhof, Die Schwedlerbrücken zu Breslau, Z. d. V. d. I. 1906 S. 202 u. f.

Die sämtlichen Konstruktionsteile müssen genau den Zeichnungen entsprechen und folgende Bedingungen erfüllen:

1. Die durch Nietung oder Verschraubung zu vereinigenden Eisenteile sind genau auszurichten, so dafs die Fugen dicht schliefsen. — Das Verstemmen der Fugen vor Prüfung und Abnahme ist nicht gestattet.

2. Sämtliche Eisenteile müssen, entsprechend den in den Zeichnungen angegebenen Abmessungen, aus dem Ganzen gewalzt bzw. geschmiedet oder gegossen sein und dürfen nicht durch Zusammenschweifsen einzelner Teile gebildet werden. Ausnahmen sind besonders festzustellen.

3. Jede Bearbeitung des Materials, insbesondere des Flufseisens und Flufsstahls, hat entweder im kalten oder mindestens im rotwarmen Zustande zu erfolgen. Jede Bearbeitung oder Materialbeanspruchung in einem zwischenliegenden Wärmezustande (sogen. Blauwärme) ist tunlichst zu vermeiden. Hat trotzdem eine solche stattgefunden, so ist das fertige Gebrauchstück in geeigneter Weise auszuglühen.

4. Wird Flufseisen mit der Schere geschnitten, so ist das neben dem Schnitte befindliche Eisen in mindestens 2 mm Breite durch Hobeln oder Fräsen zu beseitigen; ausgenommen sind unwesentliche Teile, Futterstücke usw.

5. Alle Schrauben- und Nietlöcher, mit Ausnahme derjenigen in Futterplatten, welche gelocht werden dürfen, sind zu bohren. Der an den Löchern entstandene Grat mufs vor dem Zusammenlegen und Nieten der Stücke sorgfältig entfernt werden.

6. Die Nietlöcher müssen den vorgeschriebenen Durchmesser und die in der Zeichnung vorgeschriebene Stellung und Versenkung erhalten.

7. Die zusammengehörigen Nietlöcher müssen gut aufeinander passen. Verschiebungen sind bis höchstens 5 vH des Lochdurchmessers zulässig; sie müssen jedoch durch Aufreiben mit der Reibahle ausgeglichen werden. In derartig aufgetriebene Löcher sind entsprechend stärkere Nietbolzen einzuziehen.

8. Die Niete sind im hellrotwarmen Zustande, nach Befreiung von dem etwa anhaftenden Glühspan, in die gehörig gereinigten Nietlöcher unter gutem Vorhalten (wo tunlich mit Nietwinden) einzuschlagen. Sie müssen die Löcher nach der Stauchung vollständig ausfüllen. — Setz- und Schliefskopf müssen zentrale Lage haben, gut und vollanliegend ausgeschlagen sein, und es darf dabei keine Vertiefung entstehen. Der etwa entstandene Bart ist sorgfältig zu entfernen. Die Nietköpfe dürfen keinerlei Risse zeigen.

Die Niete zu verstemmen, ist nicht gestattet. — Nach dem Vernieten ist zu untersuchen, ob die Niete vollkommen festsitzen und nicht prellen. Alle nicht fest eingezogenen oder den sonstigen vorstehenden Bedingungen nicht entsprechenden Niete sind wieder herauszuschlagen und durch vorschriftsmäfsige zu ersetzen. In keinem Falle ist es gestattet, die Niete im kalten Zustande nachzutreiben.

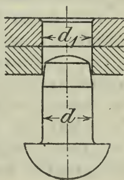
9. Die vorkommenden Schraubengewinde müssen nach der Whitworthschen Skala rein ausgeschnitten sein. Die Muttern dürfen weder schlottern, noch zu festen Gang haben. Die Köpfe und Muttern müssen mit der ganzen zur Anlage bestimmten Fläche aufliegen. — Bei schiefen Anlageflächen sind die Köpfe, soweit sie nicht genau angepafst werden, ebenso wie die Muttern, mit entsprechend schiefen Unterlegplatten zu versehen. — Sind nach Angabe der Zeichnungen oder der Bedingungen gedrehte Schraubenbolzen zu verwenden, so müssen diese in die für sie bestimmten Bohrlöcher genau passen.

10. Die Konstruktionsteile sind auf sicheren Unterlagen zusammenzupassen. Hierbei ist darauf zu achten, dafs keiner dieser Teile in eine einseitige Spannung gezwängt wird, dafs ihre Verbindung vielmehr gelöst werden kann, ohne dafs die bezüglichen Stücke auseinander federn. Sollten sich bei der Vernietung einzelne Konstruktionsteile verziehen, so müssen die Verbindungen gelöst und die vorhandenen Fehler sorgfältig beseitigt werden.

Das Nieten auf dem Bauplatze ist soviel wie irgend möglich zu beschränken.

4. Nietungen für Maschinenteile zur Uebertragung von Kräften mit fortwährend wechselnder Richtung. Solche Verbindungen werden (nach Bach z. B. bei Wasserradwellen) hergestellt durch Einziehen von Nieten im kalten Zustande derart, dafs der Nietschaft nicht nur das Loch ausfüllt, sondern sich auch mit einem gewissen Drucke gegen die Lochwand legt (s. Abb. 49).

Abb. 49.



Die Nietbolzen sind aus möglichst weichem Nieteisen so abgedreht, dafs ihr Durchmesser d um ~ 2 vH gröfser ist als der Lochdurchmesser d_1. Die Löcher müssen

genau gebohrt und sauber zylindrisch aufgerieben sein. Hierbei ist (für $k_s = 320$ kg/qcm und $k = 400$ kg/qcm) die von jedem einschnittigen Niet zu übertragende gröfste Kraft P (in kg) bestimmt durch

$$P \leqq 320 \cdot {}^1/_4\, \pi d^2 = 250\, d^2 = 400\, d s \quad (d \text{ und } s \text{ in cm}), \text{ also}$$
$$d = 1{,}6\, s;$$

Statt dessen Anordnung von so viel warm einzuziehenden Nieten, dafs bei einschnittiger Vernietnng mit $k_z \overline{\overline{<}}\, 200$ kg/qcm, bei zweischnittiger mit $k_z \overline{\overline{<}}\, 350$ kg/qcm für die von jedem Niet zu übertragende gröfste Kraft P gerechnet werden kann; es mufs hierbei alles geschehen, was den Gleitwiderstand der vernieteten Platten erhöht.

Bei der kalten Nietung starker Bleche sind diese durch einige über die Naht verteilte, warm eingezogene Niete zum Anliegen zu bringen.

Ist die Verbindung aufser dem Wechsel der Kräftewirkung Stöfsen und heftigen Erschütterungen ausgesetzt, so mufs man noch bedeutend unter den angegebenen Belastungen bleiben.

II. MASCHINENTEILE DER DREHENDEN BEWEGUNG.

A. Zahnräder.

Nach der gegenseitigen Stellung der Wellen sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Für **parallele** Wellen: zylindrische Räder, Stirnräder.
2. Für **sich schneidende** Wellen: Kegelräder.
3. Für **sich kreuzende** Wellen: hyperboloidische oder zylindrische Schraubenräder **oder** Schnecke und Schraubenrad.

a. Verzahnung.

1. Allgemeines.

Die gemeinsame Berührungsnormale der Zahnprofile, d. h. die Zahndruckrichtung, teilt in jedem Augenblicke des Eingriffes die Räderzentrale im umgekehrten Verhältnis der Achsenwinkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2. (Ueber ω s. S. 141 u. f.)

Für jedes Räderpaar ist das Verhältnis $\omega_1 : \omega_2$ in der Regel unveränderlich; nur ausnahmsweise (bei unrunden Rädern vrgl. S. 697) ist $\omega_1 : \omega_2$ periodisch veränderlich. Für gleichbleibende Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten geht die Zahndruckrichtung stets durch den Berührungspunkt der beiden Teilkreise; diese wälzen sich aufeinander ab, ohne zu gleiten. Bei unrunden Rädern treten an die Stelle der Teilkreise andere Wälzungskurven, deren Form von dem Veränderlichkeitsgesetze der Uebersetzung abhängt.

Tafel von $\left(\frac{r}{t}\right) = \frac{z}{2\pi}$.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,159	0,318	0,477	0,637	0,796	0,955	1,114	1,273	1,432
10	1,592	1,751	1,910	2,069	2,228	2,387	2,546	2,706	2,865	3,024
20	3,183	3,342	3,501	3,661	3,820	3,979	4,138	4,297	4,456	4,615
30	4,775	4,934	5,093	5,252	5,411	5,570	5,730	5,889	6,048	6,207
40	6,366	6,525	6,685	6,844	7,003	7,162	7,321	7,480	7,639	7,799
50	7,958	8,117	8,276	8,435	8,594	8,754	8,913	9,072	9,231	9,390
60	9,549	9,708	9,868	10,027	10,186	10,345	10,504	10,663	10,823	10,982
70	11,141	11,300	11,459	11,618	11,777	11,937	12,096	12,255	12,414	12,573
80	12,732	12,892	13,051	13,210	13,369	13,528	13,687	13,846	14,006	14,165
90	14,324	14,483	14,642	14,801	14,960	15,120	15,279	15,438	15,597	15,756
100	15,916	16,075	16,234	16,393	16,552	16,711	16,870	17,030	17,189	17,348
110	17,507	17,666	17,825	17,985	18,144	18,303	18,462	18,621	18,780	18,939
120	19,099	19,258	19,417	19,576	19,735	19,894	20,053	20,213	20,372	20,531
130	20,690	20,849	21,008	21,168	21,327	21,486	21,645	21,804	21,963	22,122
140	22,282	22,441	22,600	22,759	22,918	23,077	23,237	23,396	23,555	23,714
150	23,873	24,032	24,192	24,351	24,510	24,669	24,828	24,987	25,146	25,306
160	25,465	25,624	25,783	25,942	26,101	26,261	26,420	26,579	26,738	26,897
170	27,056	27,216	27,375	27,534	27,693	27,852	28,011	28,170	28,330	28,489
180	28,648	28,807	28,966	29,125	29,285	29,444	29,603	29,762	29,921	30,080
190	30,239	30,399	30,558	30,717	30,876	31,035	31,194	31,354	31,513	31,672
200	31,831	31,990	32,149	32,308	32,468	32,627	32,786	32,945	33,104	33,263
210	33,423	33,582	33,741	33,900	34,059	34,218	34,377	34,537	34,696	34,855
220	35,014	35,173	35,332	35,492	35,651	35,810	35,969	36,128	36,287	36,446
230	36,606	36,765	36,924	37,083	37,242	37,401	37,560	37,720	37,879	38,038
240	38,197	38,356	38,515	38,675	38,834	38,993	39,152	39,311	39,470	39,629
250	39,789	39,948	40,107	40,266	40,425	40,585	40,744	40,903	41,062	41,221
260	41,380	41,539	41,699	41,858	42,017	42,176	42,335	42,494	42,654	42,813
270	42,972	43,131	43,290	43,449	43,608	43,768	43,927	44,086	44,245	44,404
280	44,563	44,722	44,882	45,041	45,200	45,359	45,518	45,677	45,837	45,996
290	46,155	46,314	46,473	46,632	46,792	46,951	47,110	47,269	47,428	47,587
300	47,747	47,906	48,065	48,224	48,383	48,542	48,701	48,861	49,020	49,179
310	49,338	49,497	49,656	49,816	49,975	50,134	50,293	50,452	50,611	50,770
320	50,930	51,089	51,248	51,407	51,566	51,725	51,885	52,044	52,203	52,362
330	52,521	52,680	52,839	52,999	53,158	53,317	53,476	53,635	53,794	53,954
340	54,113	54,272	54,431	54,590	54,749	54,908	55,068	55,227	55,386	55,545
350	55,704	55,864	56,023	56,182	56,341	56,500	56,659	56,818	56,978	57,137
360	57,296	57,455	57,614	57,773	57,932	58,092	58,251	58,410	58,569	58,728
370	58,887	59,047	59,206	59,365	59,524	59,683	59,842	60,001	60,161	60,320
380	60,479	60,638	60,797	60,956	61,115	61,275	61,434	61,593	61,752	61,911
390	62,070	62,230	62,389	62,548	62,707	62,866	63,025	63,185	63,344	63,503

Ist t die Teilung, d. h. der Abstand von Zahnmitte zu Zahnmitte, gemessen als Bogen auf dem Teilkreise, so ist bei z Zähnen und dem Teilkreishalbmesser r:

$$2\pi r = zt. \quad \text{(Tafel s. S. 683.)}$$

Damit sich für den Teilkreishalbmesser r möglichst ein rundes Mafs ergibt, wählt man die Teilung t in einfachem Verhältnis zu π, also $t = m\pi$ mm, dann ist $2r = zm$. Man nennt $m = t : \pi$ den Modul der Teilung.

Teilung t = Zahnstärke s + Zahnlückenweite. Für unbearbeitete Räder wählt man

$$\textbf{Zahnstärke } s = \frac{19}{40}t, \qquad \textbf{Lückenweite} = \frac{21}{40}t,$$

entsprechend einem Flankenspielraum $= \frac{1}{20}t$, der bei bearbeiteten Rädern auf die Hälfte oder bis auf null vermindert werden kann, so dafs die Zahnstärke $s = \frac{39}{80}t$ bis $s = \frac{1}{2}t$ wird.

Die Kopfhöhe macht man gewöhnlich $= 0{,}3\,t$, die Fufshöhe $= 0{,}4\,t$, die gesamte Zahnhöhe oder Zahnlänge also $= 0{,}7\,t$.

Vielfach werden Zahnräder nur durch die Zähnezahl z und durch den Modul m bestimmt. Die Kopfhöhe des Zahnes wird dann gleich m, die Fufshöhe gleich 1,16 m genommen.

Uebersetzungsverhältnis:

$$\frac{\text{Zähnezahl des treibenden Rades}}{\text{Zähnezahl des getriebenen Rades}} = \frac{\text{Umlaufzahl des getriebenen Rades}}{\text{Umlaufzahl des treibenden Rades}}$$

zweier zusammen arbeitenden Räder

$$\varphi = r_1 : r_2 = z_1 : z_2 = n_2 : n_1 = \omega_2 : \omega_1,$$

worin r_1 und r_2 die Teilkreishalbmesser,
z_1 „ z_2 die Zähnezahlen,
n_1 „ n_2 die minutlichen Umdrehungszahlen und
ω_1 „ ω_2 die Winkelgeschwindigkeiten des treibenden und des getriebenen Rades bedeuten.

2. Stirnräder mit Zykloidenverzahnung.

(Kreisbogenförmige Eingrifflinie.)

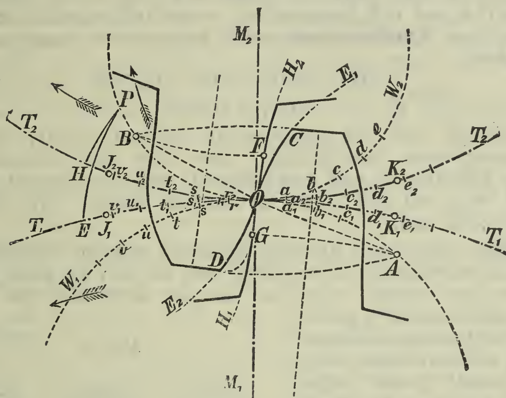
1. Bestimmung der Zahnprofile (Abb. 50).

T_1 und T_2 sind die durch $z \cdot t$ gegebenen Teilkreise, W_1 und W_2 die gewählten Wälzungskreise oder Rollkreise. (Gröfse der Wälzungskreise s. S. 686 unter Ziffer 4.)

Wälzt man Wälzungskreis W_1 auf Teilkreis T_1 ab, so beschreibt Punkt O das Fufsprofil OH_1 (eine Hypozykloide); wälzt man W_1 auf dem anderen Teilkreise T_2 ab, so beschreibt O das zugehörige Kopfprofil OE_2 (eine Epizykloide) des anderen Rades. Wälzt man W_2 auf T_1 und auf T_2 ab, so ergeben sich die Epizykloide OE_1 als Kopfprofil des ersten Rades und die Hypozykloide OH_2 als zugehöriges Fufsprofil des anderen Rades.

Hierzu trage man auf beiden Teilkreisen und auf dem Wälzungskreise W_2 gleiche Bögen $O a_1 = O a_2 = O a$, $a_1 b_1 = a_2 b_2 = a b \ldots$ ab und beschreibe mit $a O$, $b O$, $c O \ldots$ der Reihe nach um die Punkte a_1,

Abb. 50.



b_1, $c_1 \ldots$ auf T_1 und um die entsprechenden Punkte a_2, b_2, $c_2 \ldots$ auf T_2 Kreisbögen, die als Umhüllung die Epizykloide $O E_1$ und die Hypozykloide $O H_2$ abgrenzen, sobald man ab, $bc \ldots$ genügend klein wählt.

Wird entsprechend auf der anderen Seite mit dem Wälzungskreise W_1 verfahren, so ergeben sich die Epizykloide $O E_2$ und die Hypozykloide $O H_1$ unter Benutzung der zusammengehörigen Teilpunkte r, s, $t \ldots$, r_2, s_2, $t_2 \ldots$ und r_1, s_1, $t_1 \ldots$

Zahneingriff zu beiden Seiten der Zentralen $M_1 M_2$, wie er durch Benutzung von zwei Wälzungskreisen erzielt wird, liefert unter sonst gleichen Verhältnissen stets günstigere Verzahnungen als einseitiger Eingriff, da bei gleicher Länge der Eingriffstrecke die Zahndruckrichtungen weniger weit von der gemeinsamen Tangente der Teilkreise abweichen, für die der Zahndruck am kleinsten wird.

Die Kopfkreise schneiden auf der **Eingrifflinie,** die bei der Zykloidenverzahnung das zur Räderzentralen symmetrisch gelegene Spiegelbild des abgewälzten Teiles vom Wälzungskreise ist, die benutzte **Eingriffstrecke** BOA ab. Dieser entspricht der gleich grofse **Eingriffbogen** $J_1 O K_1$ bzw. $J_2 O K_2$ der Teilkreise, der gröfser als t sein mufs. **Eingriffdauer** $\tau = \frac{\text{Eingriffbogen}}{\text{Teilung}} > 1$ (möglichst $\geqq 1{,}2\ t$) ist bei der gewählten Zahnlänge $0{,}7\ t$ im allgemeinen gesichert. Bei Trieblingen mit geringer Zähnezahl (3 bis 5) ist die Zahnlänge nach Bedarf aus dem Eingriffbogen zu bestimmen.

2. **Zahnreibung.***) Die Zahnköpfe gelangen ganz zum Eingriff, die Zahnfüſse nur auf einer kurzen Strecke OG und OF. Zur Ermittlung von G und F dienen die Kreisbahnen der Punkte A und B um ihre Radmittelpunkte.

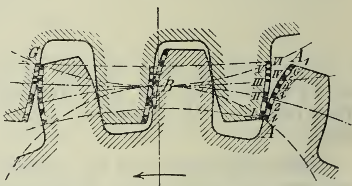
Bezeichnet P den mittleren Zahndruck, der durch die Grenzrichtungen OA und OB bestimmt ist, μ die Reibungszahl, so ist der verhältnismäſsige **Arbeitsverlust** durch gleitende Reibung in Teilen der Nutzarbeit

$$\mathfrak{V} = \mu \frac{(OD - OG + OC - OF)\,P}{(OA + OB)\,P}.$$

Diese Formel setzt die Zahnform als bekannt voraus; sie liefert gute Näherungswerte, berücksichtigt aber nicht den Wechsel in der Gröſse des Zahndruckes und den Umstand, daſs abwechselnd ein und zwei, oder zwei und drei Zähne im Eingriffe stehen. Vrgl. das Verfahren auf S. 243 u. f.

3. **Gleiten.** Die durch die Reibungsarbeit erzeugte Abnutzung ist am Zahnfuſs bedeutender als am Kopf, weil sie sich am Kopf auf eine gröſsere Strecke verteilt. Ein Bild von der Aenderung des Gleitens erhält man nach Lasche**) gemäſs Abb. 51. Man teilt das arbeitende Profil AA_1 des treibenden Zahns in eine Anzahl gleich langer Strecken 1 2 3 usw. Zu diesen Flankenteilen bestimmt man die entsprechenden Strecken auf der angetriebenen Zahnflanke I II III usw. Das Verhältnis der Längen je zweier zusammenarbeitenden Strecken bestimmt das Maſs des dabei stattfindenden Gleitens.

Abb. 51.



Bei Zykloidenzähnen ist dieses Verhältnis auf jeder Seite der Teilkreise über die ganze Länge der zusammenarbeitenden Profile unveränderlich.

4. **Wahl der Wälzungskreise.** Vergröſserung der Wälzungskreise vergröſsert die Eingriffstrecke und verkleinert den Normaldruck P; anderseits verkleinert sich dadurch die benutzbare Fuſsprofilstrecke unter Vergröſserung des Reibungsweges. Die günstigsten Verhältnisse ergeben sich im allgemeinen für Wälzungskreise, deren Durchmesser etwas kleiner ist als der Halbmesser des umschlieſsenden Teilkreises.

Vergröſserung des Wälzungskreisdurchmessers bis zum Halbmesser des umschlieſsenden Teilkreises liefert geradlinige, radiale Fuſsprofile (vrgl. auch S. 688 Abb. 52), weitere Vergröſserung konvex unterschnittene Zahnwurzeln von abnehmender Länge bis zur Beschränkung auf einen Punkt für den Grenzfall: Wälzungskreis = Teilkreis (vrgl.

---

*) S. auch M. Kohn, Zahnreibung, Z. d. V. d. I. 1895 S. 1114; ferner J. Goebel, Die Reibung der Zahnräder, Z. d. V. d. I. 1896 S. 459.

**) S. Z. d. V. d. I. 1899 S. 1417.

S. 688 Abb. 53). Ueberschreitungen des Falles: Wälzungskreisdurchmesser = Teilkreishalbmesser sind selbst bei kleinen Trieblingen für Handbetrieb möglichst zu vermeiden.

5. **Satzräder.** Wählt man bei Rädern gleicher Teilung beide Wälzungskreise von gleicher Gröfse für alle Zähnezahlen, so erhält man einen Rädersatz, dessen einzelne Räder, ganz beliebig miteinander gepaart, richtig arbeiten können, da ihre Eingrifflinien kongruent sind und der Teilkreis (oder die Zentrale) jede der beiden Eingrifflinien in zwei sich deckende Teile zerlegt.

Für Satzräder macht man gewöhnlich den Halbmesser der Wälzungskreise

$$= 0{,}875\, t = 2{,}75 \frac{t}{\pi}.$$

Hierbei wird für $z = 11$ das Fufsprofil gerade, für $z < 11$ unterschnitten; die Verzahnung ist indes (für Satzräder) bis $z = 7$ herunter brauchbar. $\tau = 1{,}22$ bis $1{,}60$.

Die Abhängigkeit der Krümmung der benutzten Eingrifflinie von dem kleinsten Rade im Satze liefert ungünstige Verzahnungsverhältnisse für die gröfseren Räder und verbietet eine allgemeine Durchführung der Satzräderverzahnung.

Aus diesem Grunde sind auch wichtige Triebwerkräder stets als **Einzelräder** zu konstruieren; sie erfordern für ruhigen Gang eine Eingriffdauer $\tau \geqq 2$ und dementsprechend grofse Zähnezahl, je nach Umständen in der Regel = 24 bis 36. Bei Rädern mit Handbetrieb begnügt man sich mit 10 Zähnen als der unteren Grenze und geht bei Zahnstangentrieblingen für Wagenwinden sogar auf $z = 4$ herab, bei etwa $\tau = 1{,}2$.

6. **Künstliche Lückenprofilierung.** Nimmt man den Wälzungskreis mit dem Teilkreise zusammenfallend an, so schrumpft das Fufsprofil auf einen Punkt zusammen, und der Gegenzahnkopf erfordert eine künstliche Vertiefung der Lücke für seine Bahn. Auch sonst kann jederzeit das Zahnwurzelprofil von dem äufsersten Punkte seines Eingriffes ab ausschliefslich mit Rücksicht auf die Bahn des Eckpunktes des Gegenzahnkopfes ausgebildet werden, wovon bei stark unterschnittenen Zahnwurzeln Gebrauch zu machen ist. Die relative Kopfbahn GD (s. Abb. 50 S. 685) wird eingehüllt durch Kreisbögen, die mit den Halbmessern OD, $r_2 D$, $s_2 D$, $t_2 D$ . . . um die Mittelpunkte O, r_1, s_1, t_1 . . . beschrieben sind. Das wirkliche Zahnflufsprofil GH_1 mufs noch einigen Spielraum lassen, wodurch eine etwaige kleine Verschiebung des Rades in Richtung der Zentralen berücksichtigt wird; jedenfalls läfst sich eine erhebliche Verstärkung des Fufsprofils erreichen, das in G in die benutzte Profilstrecke OG übergeht.

7. **Hohlräder** erhalten bei der Zykloidenverzahnung umgekehrt wie Vollräder Hypozykloiden als Zahnköpfe, Epizykloiden als Zahnfüfse.

8. **Zahnstangen** werden mit gewöhnlichen Zykloiden für Kopf und Fufs profiliert, da ihr unendlich grofser Teilkreis eine Gerade ist. Der Wälzungskreis für die Zahnwurzeln darf sehr grofs gewählt werden; nur sind Steigerungen bis zum Uebergange in eine Gerade, also Deckungen mit dem Teilkreise zu vermeiden.

Der Durchmesser des Wälzungskreises für die Zahnköpfe sei womöglich gleich oder kleiner als der Halbmesser des Trieblings. Zur Sicherung ausreichender Eingriffdauer $\tau \geq 1{,}2$ ist erforderlichenfalls bei kleiner Zähnezahl $z = 4$ die Zahnfufslänge 0,4 t an der Zahnstange zu vergröfsern unter gleichzeitiger Vergröfserung der Trieblings-Zahnkopflänge, solange sich die Kopfprofile des Trieblings noch aufserhalb ihres Kopfkreises schneiden.

9. **Geradflankenverzahnung** (Abb. 52) entsteht für Voll- oder Hohlräder bei Wahl einseitiger Eingrifflinie, sobald man den Wälzungskreis halb so grofs als den umschliefsenden Teilkreis wählt, läfst sich also stets nur für ein Rad eines Räderpaares ausführen und ist trotz einfacher Zahnform wegen der ungünstigen Eingriffverhältnisse nicht

Abb. 52.

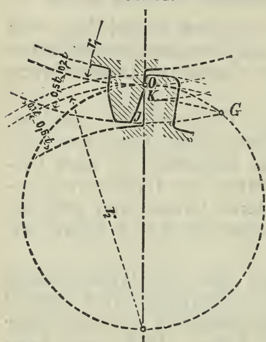
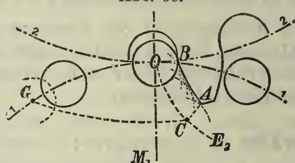


Abb. 53.



empfehlenswert, mit Rücksicht auf ausreichende Eingriffdauer auch nur bei gröfseren Zähnezahlen verwendbar. Radiale Zahnflanke 0,6 t lang, aufserhalb des Teilkreises zur Abrundung der scharfen Ecke mit einem Viertelkreisbogen von 0,1 t Halbmesser verlängert; Gegenprofillücke um 0,2 t radial vertieft.

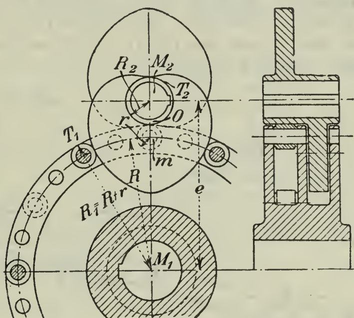
10. **Triebstockverzahnung** (Abb. 53) entsteht bei Wahl einseitiger Eingrifflinie, sobald der eine benutzte Wälzungskreis gleich dem umschliefsenden Teilkreise ist und das hierdurch auf einen Punkt beschränkte Fufsprofil durch einen gleichachsigen Kreis zu einem Zylinder erweitert wird. Durchmesser dieses Kreises $= {}^{19}/_{40}\, t$. Dies ergibt für das Gegenprofil die der Epizykloide entsprechende Aequidistante. Zahnkopfhöhe durch Eingriffbogen $OG > t$ bestimmt. Die Verzahnung läfst sich für Voll- und Hohlräder wie für Zahnstangen anwenden, ist aber wegen ungünstiger Druck- und Abnutzungsverhältnisse nur notgedrungen zu wählen.

Bei allen Zykloidenrädern sind die Zahnformen nach Schablonen auszuführen.

11. **Grisson-Getriebe** (D. R. P. 93 236, ausgeführt von E. Becker, Berlin-Reinickendorf-Ost) als Ersatz für Schneckengetriebe, doppelte oder dreifache Vorgelege, für grofse Uebersetzungen (1 : 5 bis 1 : 50), eine Form von Stirnrädern mit Triebstockverzahnung. Das grofse Rad M_1 (Abb. 54) enthält zwischen seinen drei Kranzscheiben zwei um eine halbe Teilung gegeneinander versetzte Reihen von (z. B. je sechs) Triebstöcken, die zur Verminderung der Reibung als Hohlzylinder um schwächere Zapfen drehbar sind. Rollen und Bolzen sind

aus hartem Stahl gefertigt und werden nach dem Härten nach Grenzlehren mit 0,01 mm Toleranz geschliffen. Die Bolzen sind in der Mittelrippe des Rollenrades durch eine Splintsicherung (D. R. P. 110 158) befestigt. Das kleine Rad M_2, ebenfalls aus hartem Stahl, hat nur zwei um 180° gegeneinander versetzte Daumen, die je ein **einzähniges Rad** darstellen. Die Daumenkurve ist die dem Abstande r entsprechende Aequidistante zu der verkürzten Epizykloide, die der Mittelpunkt m der Triebstockrollen beim Abwälzen des Rollenkreises ($R_1 = R + r$) auf dem Daumenkreise ($R_2 = e - R_1$, wobei e der Achsenabstand) beschreibt. Teilkreise R_1, R_2. Die Eingrifflinie ist, abgesehen von einer kurzen Anfangstrecke, nahezu eine Gerade, daher die Richtung, in der der Daumen auf die Rollen wirkt, nahezu unveränderlich. Uebersetzungsverhältnis in Abb. 54 = 1 : 6. Nach der Preisliste werden Daumenräder mit Bohrungen von 10 bis 100 mm Dmr. und entsprechende Triebstockräder mit 5 bis 30 Bolzen geliefert. Genaue Konstruktion und sorgfältige Ausführung sind notwendig für ruhigen Gang.

Abb. 54.



Wirkungsgrad nach Versuchen von E. Roser*) = 0,86 bis 0,96 bei 1 : 18 Uebersetzung ins Langsame; 0,53 bis 0,90 ins Schnelle. Die höchste zulässige Umfangskraft P (am Halbmesser R wirkend) mufs mit der minutl. Umlaufzahl n des Rades für Dauerbetrieb in der Beziehung stehen $Pn \leqq 200000$. (Gröfstwerte von Pn für Stahldaumen 274 000, für Daumen aus Stahlgufs 314 000.)

Grisson-Getriebe sind besonders vorteilhaft anwendbar bei Uebersetzungen vom Schnellen ins Langsame (**Antrieb durch Elektromotoren**, Dampfturbinen usw.); auch angewendet für Uebersetzung ins Schnelle (Antrieb durch Wasserräder usw.).

Bei hoher Umlaufzahl ist zweiseitige Lagerung des Daumenrades erforderlich. — Das Getriebe wird von E. Becker bei Umfangsgeschwindigkeiten über 1 m/sk in eisernen Oelkästen eingebaut mit Ringschmierlagern geliefert.

3. Stirnräder mit Evolventenverzahnung.

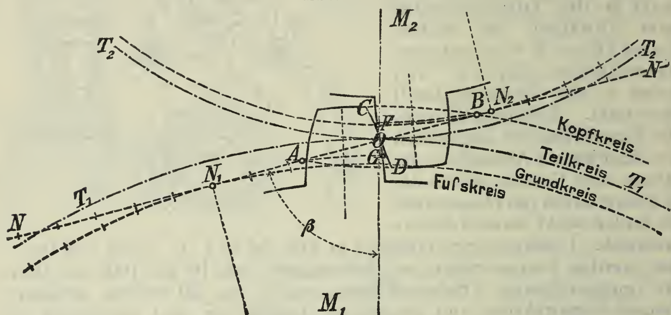
(Gerade Eingrifflinie).

1. T_1 und T_2 sind die gegebenen Teilkreise; die **Zahnprofile** werden durch Abwälzen der Geraden NON (Abb. 55) auf den beiden Grundkreisen erzeugt.

*) Vrgl. E. Roser, Untersuchung des Grisson-Getriebes, Stuttgart 1901.

Zu dem Zwecke sind auf NN und auf den Grundkreisen zu beiden Seiten der Berührungspunkte N_1 und N_2 der Linie NN mit den Grundkreisen gleiche Teilstrecken aufzutragen. Die Teilpunkte auf den Grundkreisen liefern die Mittelpunkte für die Umhüllungskreisbogen der Evolventen, die Abstände zwischen O und den aufeinanderfolgenden Teilpunkten auf NN die zugehörigen Halbmesser. Kopf- und Fufskreise im Abstande 0,3 t und 0,4 t von den Teilkreisen. Liegt der Fufskreis innerhalb des Grundkreises, so werden die Evolventen bis auf den Grund der Lücke durch radiale Ansätze verlängert (für $\beta = 75^0$ stets, wenn $z < 74$).

Abb. 55.



Die Erzeugende NN ist die **Eingrifflinie**; Begrenzung der Eingriffstrecke durch die Schnittpunkte A und B der beiden Kopfkreise.

Zahnstärke, Ermittlung der benutzten Fufsprofilstrecken OF und OG, sowie Bestimmung der Zahnreibung wie bei Zykloidenverzahnung.

$$\text{Eingriffdauer } \tau = \frac{\text{Eingriffstrecke} \times \text{Teilkreishalbmesser}}{\text{Grundkreishalbmesser} \times \text{Teilung}} > 1.$$

Aus der Entstehung der Profile ergibt sich:

1) Die benutzbare Eingriffstrecke mufs zwischen $N_1 N_2$ liegen, weil der Fortsetzung des Eingriffes über N_1 oder N_2 hinaus als Zahnprofil ein neuer Evolventenzweig entsprechen würde, der von N_1 oder N_2 aus in die benachbarte Lücke hineinragt und deshalb nicht ausgeführt werden kann.

2) Tritt dieser Fall beim Entwerfen ein, so ist die Eingriffdauer oder, wenn dies nicht statthaft, der Winkel β zu verkleinern. Die hiermit verbundene Verschlechterung der Verzahnung bestimmt die kleinste zulässige Zähnezahl.

3) Der Winkel β mufs stets kleiner sein als 90^0, weil für $\beta = 90^0$ die Strecke $N_1 N_2 = 0$ wird. Meist wählt man $\beta = 75^0$ ($= 45^0 + 30^0$). Dann ist $z_{\min} = 14$ und $\tau = 1$ bis 2,5.

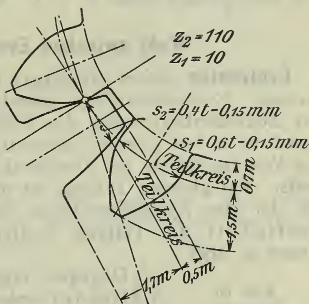
4) Der Eingriff reicht nie über den Grundkreis hinaus; daher sind radiale Verlängerungen der Fufsprofile innerhalb der Grundkreise für den richtigen Eingriff ohne Einflufs.

5) Die jedesmalige gemeinschaftliche Tangente beider Grundkreise wird die neue Eingrifflinie; die Gestalt der erzeugten Evolventen und das Uebersetzungsverhältnis bleiben ungeändert. Daher gestatten Evolventenräder, die Entfernung der Achsen zu ändern, solange die Eingriffdauer $\tau > 1$ erhalten bleibt.

Alle Evolventenräder mit gleicher Teilung sind Satzräder, sobald die Erzeugende gegen die gemeinsame Mittellinie dieselbe Neigung hat.

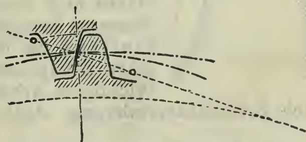
Die frühere Angabe, dafs Evolventen als Satzräder nur für $z \geqq 30$ zu empfehlen sind, kann nicht mehr aufrecht erhalten werden. Zwar kommt der Grundkreis, je kleiner z ist, dem Teilkreis immer näher, so dafs die Zähne (mit radialen Flanken) immer mehr unterschnitten werden, und die nutzbare Zahnflanke kleiner wird, doch ist dies und die Schwächung des Zahnfufses bis zu $z = 20$ bedeutungslos. Bei kleineren Zähnezahlen wird die Schwächung des Zahnfufses vermieden und die nutzbare Zahnflanke vergröfsert durch Verlegung des Teilkreises derart, dafs bei kleinen Triebrädern der Teilkreis sehr nahe an den Fufskreis, dagegen bei den grofsen Rädern der Teilkreis nahe an den Kopfkreis rückt. Abb. 56 [über die Gleitverhältnisse s. unter 4.] zeigt eine derartige Verzahnung für ein Radpaar mit den nach früheren Anschauungen recht ungewöhnlichen Zähnezahlen von 10 und 110. Modul $m = \frac{t}{\pi} = 16$; Teilung $t = 16\,\pi = 50{,}265$ mm; Zahnhöhe $h = 2{,}2$ cm. Die Lageder Fufs- und Kopfkreise ist in Modulmafs in der Abbildung bestimmt. Zahnstärke des kleinen Rades im Teilkreis $s_1 = 0{,}6\,t - 0{,}15$ mm, des grofsen Rades $s_2 = 0{,}4\,t - 0{,}15$ mm. — Allgemein wird angegeben, wenn der Teilkreis $= zm$ ist, für den Fufskreis des kleinen Rades: $d = (z - 1{,}4)\,m$; für den Kopfkreis $d = (z + 3)$ m, dagegen für das grofse Rad: Fufskreis $d = (z - 3{,}4)\,m$, Kopfkreis $d = (z + 1)\,m$.

Abb. 56.



2. **Hohlräder** werden mehr und mehr angewendet. Vorteile (bei richtiger Ausführung): längerer Zahneingriff, geräuschloser Gang, — ferner Raumersparnis, u. U. auch durch Ausnutzung des grofsen Rades als Riemenscheibe, Zahnrad mit Aufsenverzahnung usw. Im übrigen wie Vollräder zu behandeln; erhalten konkav gekrümmte Zahnflanken (Abb. 57).

Abb. 57.



3. **Zahnstangen** erhalten, ihren unendlich grofsen Teil- und Grundkreisen entsprechend, auch Evolventen von unendlich grofser Krümmung, d. h. geradlinige Profile, winkelrecht zur gewählten Eingrifflinie.

Evolventenprofile lassen sich unter Benutzung einer Schablone für den Grundkreis durch eine Uhrfeder mit zwei Nadelfüfsen, von denen man den einen am Umfange der Schablone einsetzt, den anderen zur Erzeugung der Kurve benutzt, unmittelbar am Arbeitstücke vorreifsen.

4. **Gleitverhältnisse.** Die Untersuchung nach S. 688 führt hier zu Abb. 58.

Man erkennt, dafs das Gleiten am Kopfende des gröfseren Rades besonders stark ist. Die Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft zu Berlin

Abb. 58.

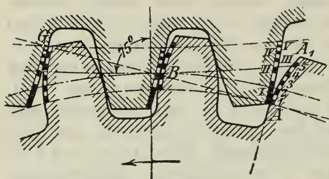
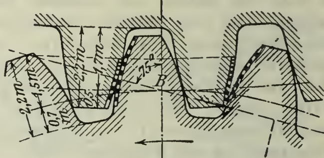


Abb. 59.

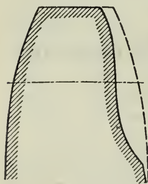


kürzt daher die Kopfhöhe des grofsen Rades unter 0,3 t und verkleinert damit die Eingriffstrecke vor der Zentrale; Umgekehrtes findet statt bei dem kleinen Rade (s. z. B. Abb. 59, vrgl. auch Abb. 57).

Wahl zwischen Evolventen und Zykloiden.

Evolventen liefern einfachere und daher leichter herstellbare Zahnformen. Evolventenzähne gestatten im neuen Zustande Aenderung der Achsenentfernungen der Räder [s. o. unter 5,] auf welchen Umstand u. a. bei Zahnradlokomotiven, bei Stirnrädern für Blechwalzen, bei Wechselrädern für Drehbänke usw. Rücksicht genommen werden mufs. Bei gleicher Teilung ist der Fufs des Evolventenzahnes stärker als der des Zykloidenzahnes, daher ersterer von Vorteil, wenn die Festigkeit die Teilung bestimmt. (Krafträder, z. B. für Winden, Krane u. drgl.).

Abb. 60.



Dagegen ergeben sich für zusammenarbeitende Vollräder unter sonst gleichen Verhältnissen bis um 50 vH gröfsere spezifische Zahnpressungen, weil zwei konvex gekrümmte Profile sich berühren, während sich bei **Zykloiden** das konvexe Profil in ein konkaves einschmiegt. Daher gröfsere Abnutzung bei Evolventenrädern und Verschwinden der Evolventenform*) nach längerem Betriebe, wodurch bei gleich bleibender Stellung der Räder der Nachteil der gröfseren spezifischen Zahnpressung allmählich verschwindet (Abb. 60). Wichtigere Arbeitsräder (Triebwerkräder) erhalten vielfach Zykloidenverzahnung, doch sind bei **Evolventenrädern** die Vor-

*) Vrgl. Bach, Maschinen-Elemente. 10. Aufl., 1908 S. 307, Abb. 296.

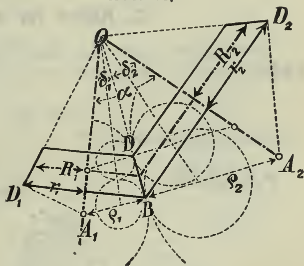
teile der einfacheren Zahnform (Erzeugung der Evolvente an neueren Sondermaschinen im Abwälzungsverfahren, wobei für alle Zähnezahlen einer Teilung nur ein Werkzeug gebraucht wird, während bei **Zykloiden** für jede Zähnezahl ein Werkzeug angefertigt werden mufs, von dessen Genauigkeit die Richtigkeit der Zahnform abhängt) und der gröfseren Unempfindlichkeit gegen Unterschiede in der Achsenentfernung so grofs, dafs oft fast ausschliefslich Evolventenräder angewendet werden.

4. Kegelräder.

Zusammenarbeitende Kegelräder müssen sich in einer gemeinsamen Kegelseite berühren; die Spitzen der Kegel müssen zusammenfallen. Als Teilkreise werden die Grundkreise der sich berührenden Kegelstümpfe **(Grundkegel)** benutzt (Abb. 61).

Nach dem gebräuchlichen Näherungsverfahren erfolgt die Verzahnung auf den Mantelflächen der **Ergänzungskegel** $A_1 D_1 B$ und $A_2 D_2 B$, deren Erzeugende $A_1 B$ und $A_2 B$ winkelrecht auf der Erzeugenden BO der Grundkegel stehen, indem man diese Mantelflächen als Kreisausschnitte in die Zeichenebene abwickelt und dann die Kreise mit den Halbmessern ϱ_1 und ϱ_2 wie die Teilkreise von Stirnrädern benutzt. Das Verfahren ist nur hinreichend genau für nicht zu kleine Zähnezahlen (> 24); streng genommen sind die Zahnprofile auf Kugelflächen zu verzeichnen.

Abb. 61.



Teilung und Zahnstärke werden auf den wirklichen Teilkreisen mit den Halbmessern r_1 und r_2, die Zahnlänge in der Richtung $A_1 A_2$, die Zahnbreite $b = BD$ in der Richtung BO gemessen. Die Zahnstärke wird für die mittleren Grundkegelstumpfkreise mit den Halbmessern R_1 und R_2 mittels der Beziehung

$$2 \pi R = z t \text{ berechnet.}$$

Bezeichnen z_1 und z_2 die zugehörigen Zähnezahlen, so ist das Uebersetzungsverhältnis $\varphi = z_1 : z_2 = r_1 : r_2 = \sin \delta_1 : \sin \delta_2$, ferner

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos \alpha}}{z_2 + z_1 \cos \alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\varrho_2}{r_2} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos \alpha}}{z_1 + z_2 \cos \alpha},$$

$$r_1 = R_1 + \frac{b}{2} \sin \delta_1 \quad \text{und} \quad \sin \delta_1 = \frac{z_1 \sin \alpha}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos \alpha}}.$$

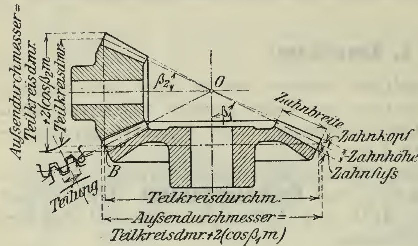
Für $\alpha = 90^0$ **(Winkelräder)** ist

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_2}, \qquad \frac{\varrho_2}{r_2} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1},$$

$$\sin \delta_1 = \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \qquad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

Die Zähne selbst ergeben sich als abgestumpfte Pyramiden und verjüngen sich sämtlich nach der gemeinsamen Kegelspitze O. Es empfiehlt sich, die Zahnprofile auch für den Punkt D zu verzeichnen, indem man die zugehörigen Halbmesser der Hülfsverzahnungskreise ermittelt unter Wahl entsprechender Eingrifflinien, proportional denen für die Grundkreise.

Abb. 62.

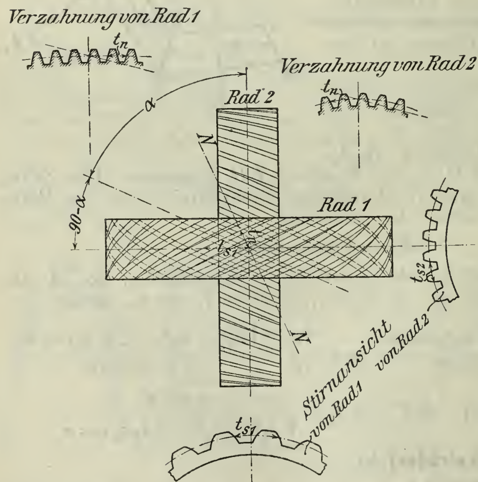


Kegelräder (Abb. 62) sind als Einzelräder mit Zykloiden- oder Evolventenverzahnung (mit $z > 20$) zu konstruieren.

5. Räder für sich kreuzende Wellen.

Grundform entweder das Hyperboloid oder der Zylinder. **Hyperbelräder** werden wegen der teuren Herstellung, des grofsen Arbeitsverlustes und der starken Abnutzung fast stets durch Einschaltung einer Hülfswelle (zwei Paar Kegelräder oder ein Kegel- und ein Stirnräderpaar) vermieden.

Abb. 63.



Bei zylindrischer Grundform ergeben sich **zylindrische Schraubenräder** (Abb. 63), d. s. zylindrische Räder mit schraubenförmig gewundenen Zähnen.*) Die Zähne berühren sich auch bei guter Ausführung nur in einer kleinen Fläche und arbeiten stark gleitend aufeinander; bei erheblichem Zahndruck daher rasche Abnutzung.

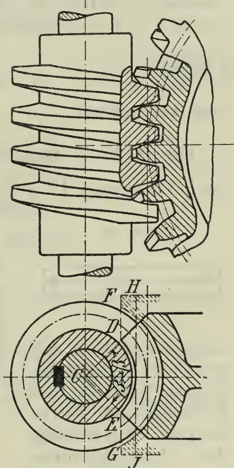
*) S. C. Bach, Masch.-Elem., 10. Aufl. 1908 S. 333 ff. — Gefräste Schraubenräder liefert u. a. die Räderfabrik von Friedrich Stolzenberg & Co., G. m. b. H., Berlin-Reinickendorf.

Proportionalität zwischen Durchmesser und Zähnezahlen, wie sie bei Stirn- und Kegelrädern immer vorhanden ist, besteht hier nur, wenn der Steigungswinkel **beider** Rädei $\alpha = 45^0$ ist. Für das schneller laufende Rad (bei ungleichen Steigungswinkeln) empfiehlt Stolzenberg & Co. Stahl, für das langsamer laufende Phosphorbronze; für höchste Geschwindigkeiten gehärteten Stahl. Gufseisen ist nur verwendbar für geringe Geschwindigkeit und kleinen Zahndruck. Ursprünglich fast ausschliefslich angewendet als Steuerungsräder an Motoren, werden sie jetzt vielfach, beispielsweise an Werkzeugmaschinen benutzt.

6. Schnecken- und Schraubenräder.

Zykloidenverzahnung s. Abb. 74 S. 703, Evolventenverzahnung s. Abb. 64. Die Verzahnung z. B. für die durch die Schneckenachse $A_1 A_1$ (Abb. 74 u. 75) gehende Schnittebene $A_1 C$ erfolgt so, dafs der Eingriff der einer Zahnstange, deren Mittelebene in $A_1 C$ liegt, mit einem Stirnrade vom Halbmesser CE ist; die Verzahnung für die Stirnfläche ist also mit den Teilkreishalbmessern CE und $A_1 E$ zu entwerfen unter Beachtung des bereits vorliegenden Schraubengangprofils, zu dem hiernach die gesuchte Zahnform das Gegenprofil bildet. Entsprechend die Verzahnung für die beliebige Schnittebene $A_1 G$. Reichlicher Spielraum der Räder ist notwendig; die Zähne liegen anfangs nur mit den Ecken an. Durch Ausfräsen der Zahnlücken mittels einer Frässchnecke, deren Profil dem der Betriebsschnecke entspricht, wird eine gute Zahnform für das Schraubenrad sicher erzielt.

Abb. 64.



Nach Versuchen von A. Ernst empfiehlt sich Evolventenverzahnung (Abb. 64); sie ist leichter genau herzustellen und ergibt günstigeren Eingriff, wenn sie auch für Abänderungen des Achsenabstandes, wie sie für Stirnräder zulässig sind (s. S. 692), nicht unempfindlich ist, da hier nur die Mittelebene eine reine Evolventenverzahnung hat, in allen übrigen Eingriffebenen aber die Schnittprofile dem Evolventengesetze nicht entsprechen.

Die genaue Lage der Radmittelebenen ist auch beim Betriebe dauernd zu sichern.

Gerade Zähne (S. 703 Abb. 75 oben) nur für untergeordnete Zwecke; sie gewähren nur geringe Anlage an die Schneckengänge. Bei grofsen Kräften allgemein konkave Zähne (Abb. 75 unten, Abb. 64); dabei ist der Zentriwinkel 2β (Abb. 64) so grofs zu wählen, als es die Rücksicht auf Vermeidung zu spitzer Zahnformen in den durch D und E bestimmten Schnitten gestattet. Die Begrenzung der Zahn-

köpfe nach DF und DG (punktiert) vergröſsert das sogen. Eingriffsfeld*) des Zahnes und der Schnecke ein wenig.

Begrenzung nach HJ (Abb. 64), d. i. Abdrehen des Schraubenrades bis auf den Halbmesser des Mittelschnitts, ermöglicht die Ausnutzung nur der günstigsten Teile des Eingriffs, setzt aber groſse Räder mit reichlicher Zähnezahl voraus, wenn die spez. Zahnpressung in zulässigen Grenzen bleiben soll.

Evolventenschnecken mit einer Kopfhöhe bis 0,25 t ergeben bei Rädern mit mindestens 30 Zähnen günstige Eingriffsfelder für Schraubensteigungen bis 18⁰ (im Teilkreise gemessen) und gestatten die Ausnutzung des gröſseren Wirkungsgrades steilgängiger Schnecken ohne erhebliche Zunahme der spez. Pressung.

Für Schraubenräder mit 30 und mehr Zähnen wird der Teilkreisdurchmesser gewählt $d = \frac{z\,t}{\pi}$ und der Durchmesser d_a (Abb. 65) des **Auſsenkreises**

$$d_a = d + \frac{2\,t}{\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1).$$

Für Räder mit $z < 30$ würde dabei der Zahnfuſs, je kleiner z ist, umsomehr unterschnitten. Um das zu vermeiden, empfiehlt Stolzenberg & Co. die folgenden Formeln:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Teilkreis} & d = \frac{z\,t}{\pi} \cdot 0{,}937 + \frac{2\,t}{\pi} \\ \text{und Auſsenkreis} & d_a = d + \frac{2\,t}{\pi} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2).$$

Die Abb. 66 zeigt links ein Schraubenrad von 15 Zähnen, wie es nach Gleichung 1) mit $d = \frac{z\,t}{\pi}$ aussehen würde, und rechts das nach 2) ausgeführte Rad mit gleicher Zähnezahl. (Ueber Material von Schnecke und Schraubenrad, Aufhebung des Achsialdruckes usw. s. S. 702 u. f.)

Abb. 65.

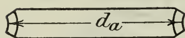
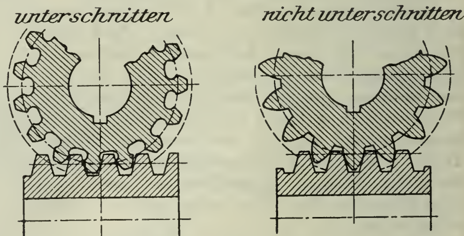


Abb. 66.



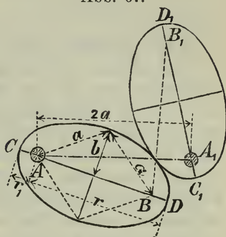
7. Elliptische Räder.

Nur als Stirnräder zur Uebertragung periodisch wechselnder Winkelgeschwindigkeiten ausführbar. Die Zähne werden zweckmäſsig so ge-

*) Genaueres hierüber s. R. Stribeck, Versuche mit Schneckengetrieben, Z. d. V. d. I. 1897 S. 936 u. 968, auch C. Bach, Masch.-Elem., 10. Aufl., 1908 S. 337 u. ff. — Ad. Ernst, Eingriffsverhältnisse des Schneckengetriebes . . . und ihr Einfluſs auf die Lebensdauer des Triebwerks, Berlin 1901, auch Z. d. V. d. I. 1900 S. 1229 u. f.

stellt, dafs ihre Mittellinien in die Normalen der Ellipse fallen. Zahnform wie bei Kreisrädern, wobei die Ellipsen der Abb. 67 an die Stelle der Teilkreise treten.

Abb. 67.



Es bezeichne

A den Drehpunkt des treibenden Rades,
A_1 den Drehpunkt des getriebenen Rades,
a die halbe grofse Achse, b die halbe kleine Achse der beiden Ellipsen,
A, B, A_1, B_1 die Brennpunkte der Ellipsen,
ω die unveränderliche Winkelgeschwindigkeit des treibenden Rades A,
ω_1 die gröfste, ω_2 die kleinste Winkelgeschwindigkeit des getriebenen Rades A_1,
r und r_1 s. Abb. 67.

1. **Uebersetzungsverhältnis** für die Berührung im Punkte D ist

$$\varphi_1 = \frac{AD}{A_1C_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega},$$

im Punkte C

$$\varphi_2 = \frac{AC}{A_1D_1} = \frac{r_1}{r} = \frac{\omega_2}{\omega}, \quad \text{und} \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{r^2}{r_1^{\,2}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = V.$$

2. Wenn die Entfernung der beiden Wellen $AA_1 = 2a$ und das Verhältnis V gegeben ist, so findet man b und somit die **Form** der elliptischen Räder durch die Gleichung

$$b = \frac{2a\sqrt[4]{V}}{\sqrt{V}+1}.$$

b. Berechnung der Zähne.*)

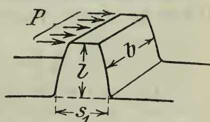
1. Stirnräder mit geraden Zähnen.

Es bezeichne

r den Teilkreishalbmesser in cm, t die Teilung in cm, } z die Zähnezahl $= 2\pi r : t$,
b die Zahnbreite $= \psi t$ in cm,
l die Zahnlänge, in der Regel $= 0{,}7\, t$ in cm,
s die Zahndicke, auf dem Teilkreise gemessen, in cm,
P den Zahndruck in kg, bestimmt durch das zu übertragende Drehmoment $M_d = Pr$ in cmkg,
n die minutliche Umlaufzahl des Rades,
N die zu übertragende Leistung in PS.

α) Berechnung mit Rücksicht auf Festigkeit **(Krafträder)**, wie z. B. bei den Rädern der von Hand betriebenen Winden, Krane usw.

Abb. 68.



Bei guter Lagerung der Räder und geschnittenen Zähnen ist der Zahndruck über die ganze Breite b gleichmäfsig verteilt. Beim ungünstigsten Angriff von P (an der Spitze des Zahnes, Abb. 68) ist

$$Pl = Wk_b$$

$$P\,0{,}7\,t = \frac{1}{6}\,b\,s_1^2\,k_b. \quad \text{Hierbei sei } s_1 \sim \frac{t}{2}$$

$$P = 0{,}06 \text{ bis } 0{,}07\,k_b\,b\,t$$

$$\boldsymbol{P = c\,b\,t.}$$

Für Gufseisen ($k_b = 300$ kg/cm²) $c = 0{,}06$ bis $0{,}07 \,.\, 300 = 21$ bis 24.

Bei selten voll beanspruchten Winden ist eine Steigerung von c für Gufseisen auf 24 bis 28 zulässig, wobei die Zahnwurzelstärke mit $0{,}5\,t$ bis $0{,}55\,t$ vorausgesetzt ist. Die **Zahnbreite** b wird vielfach $= 2\,t$ genommen; für genaue Ausführung und Lagerung oft $b \geqq 3\,t$ (s. S. 699). Bei unbearbeiteten Zähnen und schlechter Lagerung, z. B. bei den Rädern von Hand getriebener Winden usw., greift P im ungünstigsten Falle an einer Zahnecke an. Dann trägt der Zahn, auch wenn $b > 2\,t$ ist, nur in einer Länge von $b \sim 2\,t$.

Bei dieser Ermittlung ist angenommen, dafs nur ein Zahn kämmt. Ergibt sich aus der Verzahnung, dafs dauernd zwei Zähne die Kraft übertragen, so kann dies berücksichtigt werden. Weicht l erheblich von der angenommenen Gröfse $0{,}7\,t$ ab, so ist dies besonders zu berücksichtigen. Mit Rücksicht auf zufällige Mehrbelastungen sei bei Windenrädern $t \geq 2{,}5$ cm.

Für andere Stoffe ist c nach folgendem Verhältnis zu wählen (Gufseisen $= 1$ gesetzt):

Gufsstahl $= 3{,}0$ bis $3{,}3$; Stahlgufs $= 2$; Deltametall $\sim 2{,}5$; Phosphorbronze, Rotgufs 1,7 bis 1,3, Rohhaut 1 bis 0,5.

β) Berechnung mit Rücksicht auf Abnutzung **(Triebwerkräder, Arbeitsräder).** Auch hier gilt $\boldsymbol{P = c\,b\,t.}$

Der Wert von c wird hier beeinflufst durch die spezifische Pressung, durch das Gleiten, durch die Schmierung und durch die Umfangsgeschwindigkeit. Unter gewöhnlichen Verhältnissen kann bei Zykloidenverzahnung und bei Umdrehungszahlen bis $n =$ rd. 250 des (hinsichtlich der Erwärmung, Abnutzung) mafsgebenden Rades gewählt werden, falls Gufseisen auf Gufseisen läuft,

$$c = 20 - \sqrt{n},$$

so dafs für	$n = 16$	25	36	49	64	81	100	144	196	256
folgt	$c = 16$	15	14	13	12	11	10	8	6	4
dabei sei	$b \leqq 2{,}6\,t$	$2{,}8\,t$	$3{,}0\,t$	$3{,}2\,t$	$3{,}5\,t$	$3{,}8\,t$	$4{,}2\,t$	$5{,}25\,t$	.	.

da die gröfste zulässige Zahnbreite aus Festigkeitsrücksichten

$$b \leqq 42\,\frac{t}{c} \text{ sein mufs.}$$

Bei Holz (Weifsbuche) auf Gufseisen gilt ungefähr das 0,4- bis 0,5-fache dieser Werte für c, so dafs z. B.

für $n = 36$	64	144	256
$c = 14 \,.\, 0{,}4 = 5{,}6$	$12 \,.\, 0{,}4 = 4{,}8$	$8 \,.\, 0{,}45 = 3{,}6$	$4 \,.\, 0{,}5 = 2{,}0.$

Ueber diese Werte und auch über die sich aus $c = 20 - \sqrt{n}$ ergebenden Gröfsen kann man (bei richtiger Verzahnung, sorgfältiger Ausführung und Wartung) erheblich

*) Vrgl. ferner R. Stribeck, Berechnung der Zahnräder. Z. d. V. d. I. 1894 S. 1182 u. f.

h i n a u s g e h e n, wenn der Eingriffbogen die doppelte Teilung, also die Eingriffdauer die Zahl 2, derart überschreitet, dafs mit Sicherheit auf das gleichzeitige Anliegen (Zusammenarbeiten) mindestens z w e i e r Flankenpaare gerechnet werden darf.

Räder mit **Evolventen**verzahnung sind oft etwas geringer belastet. Andererseits werden gerade für Evolventen bei v o r z ü g l i c h e r A u s f ü h r u n g und M o n t a g e, bei dauernd guter I n s t a n d h a l t u n g sehr viel höhere Werte für c gewählt, so nach Fr. S t o l z e n b e r g & Co., abhängig von der Umfangsgeschwindigkeit:

bei $v = 0{,}25$	0,5	1	2	3	5	7	9	11	13	15 m
$c = 28$	27,5	26	24	22,5	20	17,5	15	14	13	12

Für die oben unter α) genannten Stoffe gelten auch hier gleiche Verhältniszahlen, je nach Ausführung und Wartung.

Rädern, deren Zähne zuweilen die Eingrifflanke wechseln, oder die sehr stofsen, überhaupt solchen Rädern, deren Zähne dem Einflusse starker Schwankungen der lebendigen Kräfte in den getriebenen oder treibenden Massen ausgesetzt sind, gibt man möglichst reichliche Abmessungen. Teilweise aus diesem Grunde werden z. B. Räder zum Betriebe der M a h l g ä n g e bei Holz auf Eisen mit $c = 2$ bis 3 entworfen, während ein gewöhnliches Triebwerkrad bei demselben n mit $c = 4$ bis 4,5 zu belasten sein würde.

2. Aus dem zu übertragenden Drehmomente M_d (in cmkg) oder aus der zu übertragenden Leistung N (in PS) bestimmt sich die Teilung t (in cm), wie folgt. Nach S. 210 ist

$$Pr = M_d = 71\,620\,\frac{N}{n} \text{ in cmkg.}$$

Da $P = cbt = c\psi t^2$ und $r = zt : 2\pi$, so ergibt sich

$$t = \sqrt[3]{\frac{2\pi M_d}{c\psi z}} \quad \text{oder} \quad t = 10\sqrt[3]{\frac{450}{c\psi z}\,\frac{N}{n}}.$$

3. **Zahnbreite** $b = \psi t$. Das **Verhältnis** ψ wähle man

$\psi = 2$ für Krafträder (Windenräder u. drgl.),

$\psi = 2$ bis 3 für gewöhnliche Triebwerkräder,

$\psi = 3$ bis 5 für Triebwerkräder, die grofse Mengen mechanischer Arbeit zu übertragen haben (z. B. verzahnte Schwungräder der Dampfmaschinen).

$t = 130$ und $b = 600$ mm sind Werte, die für gewöhnlich nicht überschritten werden, doch kommen Räder bis $t = 250$ und $b = 900$ mm vor.

4. Für die **Zähnezahl** z gilt

$z \geqq 10$ bis 11 für Krafträder (unter bes. Umst. noch weniger),

$z \geqq 24$ für Arbeitsräder; je gröfser hierbei die Zähnezahl, um so ruhiger der Gang. — Bei Rädern mit Holzzähnen und bei g e t e i l t e n Rädern mufs z meist ein Vielfaches der Armzahl sein. Wünschenswert, wenn auch nicht gerade notwendig, ist dies auch bei den übrigen Rädern.

Das **Uebersetzungsverhältnis** zweier Räder sei bei **gleichmäfsigem Zahndruck** möglichst 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4 usw., um ein gutes Einarbeiten der Zähne herbeizuführen.

Bei **periodischer Veränderlichkeit** des Zahndruckes (wie z. B. bei verzahnten Schwungrädern, dem Rade eines Hammerwerkes, Antrieben

von Pumpen usw.) erscheint es dagegen rätlich, um ungleichmäfsige Abnutzung zu vermeiden, Verhältnisse wie 1 : 2, 1 : 3 usw. nicht zu wählen, sondern etwa 2 : 3, 2 : 5 usw. oder 3 : 4, 3 : 5 usw. oder gar die bei gleichmäfsigem Zahndruck durchaus zu verwerfenden Zähnezahlen, wie z. B. 29 : 45 oder 23 : 48 usw.

Für Krafträder geht man mit dem Uebersetzungsverhältnis nicht ohne Not unter 1 : 10, doch wird es heute vielfach schon 1 : 13 und kleiner angenommen (vrgl. Abb. 56, S. 691 mit 1 : 11), für Arbeitsräder bei langsamem Gange, wenn möglich, nicht unter 1 : 6 (wobei dann für das kleine Rad $z_{\min} = 36$ bis 40), bei raschem Gange etwa nur bis 1 : 5. Uebersetzung von der Dampfmaschinenkurbelwelle nicht unter 1 : 3 bis 1 : 4 (wobei $z_{\min} = 54$ bis 72).

5. **Holzzähne** (Kämme) (s. Abb. auf S. 705) gibt man dem einen Rade des Paares bei gröfserer Geschwindigkeit oder gröfserer Umlaufzahl in der Absicht, einen ruhigen, womöglich geräuschlosen Gang zu erzielen. In der Regel erhält das gröfsere der beiden Räder die Holzzähne; nur dann nicht, wenn die Kraftübertragung periodisch stark veränderlich ist und die Ursache hierzu von der Welle ausgeht, auf der das gröfsere Rad sitzt.

Die Teilung ist bei Kammrädern etwa $^1/_{10}$ stärker zu wählen als für gufseiserne Räder gleicher Leistungsfähigkeit.

6. Die **Zahnstärke** (im Teilkreise gemessen) wird genommen bei Eisen auf Eisen:

für roh bleibende Zähne . . . . $s = {}^{19}/_{40}\, t$,
für bearbeitete Zähne . . . . $s = {}^{19}/_{40}\, t$ bis ${}^{39}/_{80}\, t$,
[bei Werkzeugmaschinen usw. geht man bis $s = {}^1/_2\, t$];

bei Holz auf Eisen entweder für den Eisenzahn $s = {}^{19}/_{40}\, t$ und für den hölzernen Zahn $s = {}^{19}/_{40}\, t$ bis ${}^{39}/_{80}\, t$, oder

für den Eisenzahn . . . . $s = {}^{16}/_{40}\, t = 0{,}4\, t$,
für den Holzzahn . . . . $s = {}^{23}/_{40}\, t$ bis nahe $0{,}6\, t$.

Den Zahnfufs (die Zahnwurzel) macht man in der Regel $0{,}4\, t$, den Zahnkopf (die Zahnkrone) $0{,}3\, t$ hoch, so dafs die Zahnlänge $l = 0{,}7\, t$. oder in Modulmafs $l = 2{,}16$ m (s. S. 684). Hiernach beträgt der Spielraum in der Richtung des Umfanges zwischen zwei unbearbeiteten Zähnen $^1/_{20}\, t$, zwischen zwei bearbeiteten Zähnen $^1/_{40}\, t$ (bis herab auf null), der Spielraum in der Richtung des Halbmessers $^1/_{10}\, t$ für beide Fälle.

Abweichungen von der normalen Zahnlänge s. S. 691 u. 692.

2. Stirnräder mit einfach schrägen Zähnen und mit Winkelzähnen.

Ruhiger Gang (grofse Eingriffdauer), daher für Präzisionsräder sehr geeignet, sowie grofse Widerstandsfähigkeit. Die Zähne sitzen schraubenförmig auf dem Grundzylinder.

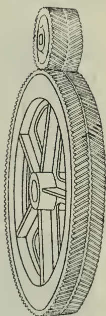
1. **Einfach schräge Zähne** erhalten Evolventenverzahnung wie gerade Zähne. Sprung (t_0) ist der Teilkreisbogen, um den die beiden Stirnflächen eines Zahnes gegeneinander versetzt sind. Ist γ der zum

Sprung gehörige Zentriwinkel, r der Teilkreishalbmesser, also $s_0 = r\gamma$, so ergibt sich der Neigungswinkel der Schraubenlinie im Teilkreise aus

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{t_0} = \frac{b}{r\gamma}.$$

Zahnreibung s. S. 243. Aufserdem Arbeitsverluste durch den von der Schrägstellung der Zähne herrührenden seitlichen Druck (Lagerreibungen). Zur Verringerung des letzteren β grofs, mindestens 70 bis 80°, sogar $86^1/_2{}^0$ ($t_0 = 0{,}06\, b$).

Abb. 69.

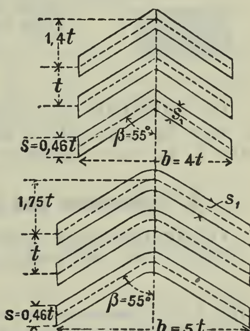


Räder mit **zweifach** (links und rechts) **schrägen** Zähnen, die im Aussehen völlig den unter 2. noch zu besprechenden Pfeilrädern gleichen, werden **in der Mitte** der Radbreite **geteilt**, genau zentriert und zusammengeschraubt hergestellt; sie haben den Vorteil, dafs der Achsialdruck aufgehoben ist.

Die Zahnräderfabrik Augsburg vorm. Joh. Renk (A.-G.) fertigt unter dem Namen Wüst-Getriebe Zahnräder mit links und rechts schräg stehenden, um die halbe Teilung gegeneinander versetzten Zähnen, bei denen der Achsialdruck ebenfalls aufgehoben ist. Der Gang soll sehr ruhig bei langer Eingriffdauer sein (Abb. 69).

2. **Winkelzähne (Pfeilräder)**. Der bei den Rädern mit einfach schrägen Zähnen auftretende Achsialdruck ist hierbei wie bei den Rädern mit zweifach schrägen Zähnen aufgehoben, die Festigkeit der Zähne ist durch das Zusammenlaufen in der Pfeilspitze gröfser als bei einfach oder zweifach schrägen Zähnen. Bestimmung der Teilung t wie üblich, mit $c = 40$ für Gufsstahl.

Abb. 70.



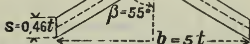


Abb. 71.

Zahnhöhe 0,6 bis $0{,}7\, t$, Zahnfufs 0,35 bis $0{,}4\, t$, Zahnkopf 0,25 bis $0{,}3\, t$. Zahnstärke im Teilkreise $s = 0{,}46\, t$, wirkliche Zahnstärke $s_1 = s \sin \beta$ (= rd. $0{,}377\, t$ bei $\beta = 55^0$).

Gebräuchliche Zahnbreite $b = 4\, t$, Sprung $t_0 = r\gamma = 1{,}4\, t$ (gemessen im Teilkreise), daraus $\beta = 55^0$ (s. Abb. 70); bei Kraus- oder Kammwalzen mit wenigen Zähnen (s. Abb. 71):

$$b = 5\,\mathrm{t}, \qquad t_0 = 1{,}75\, t, \qquad \beta = 55^0.$$

Bei gewähltem Sprung ist die Zahnform so auszuführen, und insbesondere für Evolventenverzahnung der Winkel zwischen der Erzeugenden und der Räderzentralen (etwa 68 bis 72°) so klein zu wählen, dafs beim Formen das Modell für die Zahnlücke herausgezogen werden kann; bei gegebener Zahnform ist der Sprung entsprechend klein zu wählen.

Pfeilräder mit gefrästen Winkelzähnen werden ausgeführt mit Zähnezahlen bis herab zu 5, ja 3. Das kleine Rad (aus Stahl) erscheint dann als Doppelschnecke (Abb. 72). Versuche von Bach*) mit zwei Räderpaaren von 5 und 50 bezw. 3 und 30 Zähnen der Zahnräderfabrik Augsburg vorm. Joh. Renk haben Nutzeffekte von 91,7 bis 93,9 vH ergeben bei Umlaufzahlen von 277 bis 824 bis 1670, entsprechend 0,5 m bis 1,51 m bis 3,07 m Umfangsgeschwindigkeit im Teilkreis. Das Radpaar von 5 und 50 Zähnen hatte 21,98 mm Teilung, Radbreite 86 mm, Teilkreisdurchmesser 34,98 und 349,8 mm, der halbe Winkel an der Spitze betrug 29° 45′ 40″. Bei dem anderen Radpaar $z = 3$ und 30 war Radbreite und Teilkreisdurchmesser wie vor, die Teilung 36,62 mm, der halbe Winkel an der Spitze 18° 56′ 30″. Die kleinen Räder sind aus Stahl, die grofsen (geteilt) aus Gufseisen.

Abb. 72.



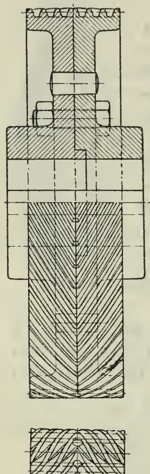
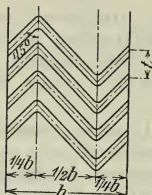


Abb. 73.



Bei der Drehung mit voreilender Winkelspitze sind die Zähne widerstandsfähiger als bei der entgegengesetzten Drehung. Mufs das Rad wechselweise nach beiden Seiten umlaufen, so ist durch Anordnung von Seitenscheiben die Widerstandsfähigkeit der Zähne nach aufsen hin zu erhöhen, auch empfiehlt sich seitliche Abschrägung des Zahnkopfes, oder es wird, wie bei dem System Citroën, ausgeführt von der Bergischen Stahlindustrie in Remscheid, die aus Abb. 73 ersichtliche Zahnform gewählt, die bis zu einer vollständigen **W**-Form der Zähne ausgebildet werden kann. Nach diesem System werden von derselben Firma auch Kegelräder mit Pfeilverzahnung hergestellt.

3. Kegelräder.

Die Zahnstärke der Kegelräder wird für die mittleren Halbmesser R_1 und R_2 (Abb. 61, S. 693) in derselben Weise berechnet, wie dies unter **1.** für die Stirnräder gezeigt worden ist.

4. Schnecken- und Schraubenräder (Abb. 74 und 75).**)

Verhältnismäfsiger Arbeitsverlust $\mathfrak{V}_s$ s. S. 245. Verzahnung vrgl. S. 695. — Bei der Berechnung der Teilung t ist von der Gleichung

$$P = c\,b\,t$$

(vrgl. S. 699) auszugehen und im Mittel (bei unvollkommenen Zähnen) die Zahnbreite zu wählen $b = 1{,}5\,t$, bei kleinem Schneckendurchmesser weniger, bis auf etwa $b = t$ herab; bei richtig geformten Zähnen sei (im Zahngrunde) $b = 2{,}5\,t$ und mehr; für Gufseisen ist

*) S. Z. d. V. d. I. 1908 S. 661.

**) S. auch die Abh. von Stribeck und Ernst in Z. d. V. d. I. 1899 u. 1900 und Ernst, Hebezeuge, 4. Aufl., Bd. 1, S. 201.

$c = 18$ bis 28 kg/qcm, wenn nur die Festigkeit in Betracht kommt (bei Schraubenflaschenzügen u. drgl. noch gröfser),

$c = 8$ bis 20 kg/qcm, je nach der Umlaufzahl der Schnecke und unter der Voraussetzung ausreichender Schmierung (Oelbad), wenn die Abnutzung mafsgebend ist.

Abb. 74.

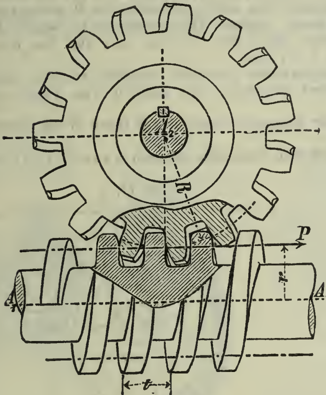
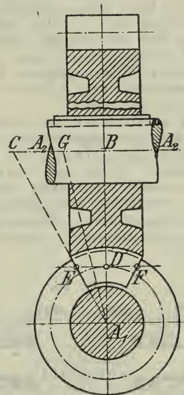


Abb. 75.



Nach Stribeck ist bei Gleitgeschwindigkeiten von 4 m/sk im eingelaufenen Zustande der Räder $c = 20$ noch zulässig.

Für gute Phosphorbronze für das Rad und harten Stahl für die Schnecke, bei grofsen Umdrehungszahlen benutzt, ist, wenn die Festigkeit mafsgebend ist, $c = 32$ bis 50 zu setzen.

Das zum Drehen der Schraube (Schneckenwelle) erforderliche Moment (Antriebmoment) beträgt nach S. 241 (mit einem Zuschlage von 2 bis 10 vH für die Reibung in den Lagern der Schraube) in cmkg

$$M_d = (1{,}02 \text{ bis } 1{,}1)\, P r \frac{h + 2\pi r \mu}{2\pi r - \mu h},$$

worin bezeichnet

P den Zahndruck des Schraubenrades in kg, am Hebelarme R wirkend (s. Abb. 74),

r den mittleren Schneckenhalbmesser bis zum Teilkreise des Schraubenrades in cm,

h die Ganghöhe der Schraube in cm, und zwar für die eingängige Schraube $h = t$, für die m-gängige Schraube $h = mt$,

μ die Reibungszahl (bei guter Oelung und glatten Oberflächen für Gufseisen $= 0{,}1$, für Stahl auf Phosphorbronze $= 0{,}03$, sonst höher).

Ist z die Zähnezahl des Schraubenrades, so ist bei m-gängiger treibender Schraube das Uebersetzungsverhältnis

$$\varphi = m : z = n_2 : n_1,$$

worin entsprechend S. 684 n_1 die Umlaufzahl der treibenden und n_2 die der getriebenen Welle bedeutet.

Soll die Anordnung selbsthemmend sein, so mufs (vrgl. S. 242)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r} \overline{\overline{<}}\, \mu, \text{ also für Gufseisen } \overline{\overline{<}}\, 0{,}1 \text{ sein.}$$

Sind Erzitterungen zu befürchten, z. B. bei Fahrstühlen, so mufs für die Selbsthemmung $\operatorname{tg}\alpha$ noch geringer gewählt werden, bis auf $^1/_{12}$ herab; der Wirkungsgrad sinkt hierbei auf $\eta \overline{\overline{<}} 0{,}40$, und die Folge dieser grofsen Arbeitsverluste ist starke Abnutzung der aufeinander gleitenden Flanken. Soll das Getriebe nur für den Ruhezustand selbsthemmend sein, so ergibt sich η bis 0,70.

Gröfsere Wirkungsgrade des Schneckengetriebes ($\eta = 0{,}80$ bis 0,90) werden erzielt bei Anordnung von Schrauben mit gröfserer Steigung, also solchen von zwei- oder mehrfacher Gangzahl.

Zur Aufnahme des Achsialdruckes der Schnecke werden auf ihrer Welle Kamm- oder Kugellager angeordnet*) (s. Abb. 76).

Der Achsialdruck von Schneckengetrieben läfst sich dadurch beseitigen, dafs zwei gleich grofse auf derselben Welle sitzende Schnecken (die eine rechts-, die andere linksgängig) zwei ineinandergreifende Schraubenräder (mit parallelen Achsen) antreiben (s. Abb. 77).

Abb. 76.

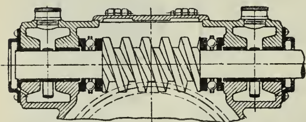
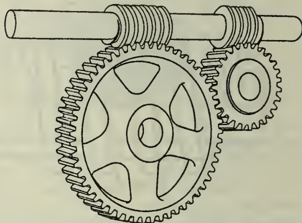


Abb. 77.



c. Radkörper.

1. Für die **Stärke des Zahnkranzes** ist bei gröfseren Teilungen $0{,}5\,t$ ausreichend, mit schwacher Verjüngung (1 : 40 bis 1 : 60) nach aufsen, um das Herausheben des Modelles aus der Form zu erleichtern (Abb. 78 u. 79); bei geringer Armzahl oder grofsem Raddurchmesser empfiehlt sich eine mittlere Verstärkungsrippe. Für Kammräder vrgl. Abb. 82 bis 87.

Abb. 78.

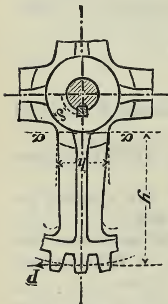
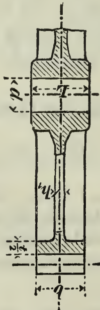


Abb. 79.



2. Unverletzte **Wandstärke der gufseisernen Nabe** (Abb. 78, 79 u. 81):

$$\delta = {}^1/_5\,(d_0 + {}^1/_2\,d) + 1 \text{ cm} \quad \text{bis}$$
$$ {}^1/_4\,(d_0 + {}^1/_2\,d) + 1 \text{ cm},$$

worin bedeutet

d die Bohrung der Nabe in cm,

d_0 die Wellendicke (in cm), die dem zu übertragenden Drehungsmomente $M_d = Pr = k_d\,0{,}2\,d_0^3$ (vrgl. S. 471 unter 1) entspricht und aus diesem zu bestimmen ist.

*) S. Frölich, Maschinelle Einrichtungen für das Eisenhüttenwesen, Z. d. V. d. I. 1906 S. 1856 u. f.

Nabenlänge: $L = 1{,}2\,d$ bis $1{,}5\,d$ und mehr,
oder $L \geqq b + 0{,}05\,r$, wenn r = Teilkreishalbmesser.

Lange Naben erhalten Aussparung (s. Abb. 81), dabei

$$l_1 = 0{,}4\,d \text{ bis } 0{,}5\,d.$$

3. **Anzahl der Arme** eines Rades etwa $i = {}^1/_7 \sqrt{D}$ bis ${}^1/_8 \sqrt{D}$, worin D den Teilkreisdurchmesser in **mm** bedeutet.

4. Der **Querschnitt** der auf Biegung beanspruchten Arme ergibt sich für gewöhnlich, unter Bezugnahme auf Abb. 78 bis 80, aus

Abb. 80.

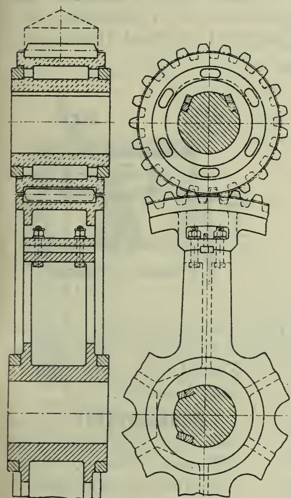
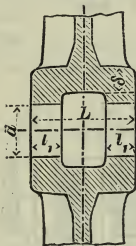


Abb. 81.



$$Py = k_b\,W\,\frac{i}{4},$$

worin W das dem Biegungsmomente Py entsprechende Widerstandsmoment des Armquerschnittes bezeichnet. Für gewöhnliche Kraft und Triebwerkräder ist bei Wahl von k_b die Belastungsweise II, S. 404, zugrunde zu legen.

Für den kreuzförmigen Armquerschnitt mit $h_1 = {}^1/_5\,h$ (s. Abb. 78 u. 79) wird für $k_b \sim 300$ kg/qcm

$$h = \sqrt[3]{\frac{Py}{2{,}5\,i}}.$$

h verjüngt sich nach dem Kranze auf etwa $0{,}8\,h$.

Gröſsere Räder*) werden aus mehreren Teilen zusammengeschraubt (s. Abb. 80 u. 87). Das Rad nach Abb. 80 hat übrigens Pfeilzähne nach dem aus der Linie über dem Schnitt angegebenen Winkel; Abb. 87 hat Holzkämme.

Zur Vermeidung des Tönens groſser Räder kann der Radkranz kastenförmig ausgebildet und mit Zement ausgefüllt werden, oder es werden, wie z. B. von der A. E. G. die Wandungen und Arme des Rades mit Filz bekleidet.

Zur Vermeidung starker Beanspruchungen durch Stöſse werden nach J. D. Weitzer**) elastische Zwischenglieder (Druckfedern und Druckwasserkolben) zwischen Zahnkranz und Nabe, die gesondert ausgeführt sind, eingeschaltet.

Für die Abmessungen der **Holzzähne** s. Abb. 82 bis 87. Der Kamm wird in zwei Teile (Abb. 86 u. 87) geteilt, je nach den Abmessungen der vorhandenen Kämme für $b \geqq 18$ cm. Befestigung der Kämme

---

*) Vrgl. Bach, 10. Aufl. 1908 S. 366 u. f.

**) Vrgl. Z. d. V. d I. 1903 S. 1355 u. f.

entweder mit Stiften (Abb. 82 u. 83) oder mit Holzkeilen (Abb. 84 bis 87). Sorgfältiges Einpassen und reichliche Kranzstärken sowie völlig trockene Kämme (Weifsbuchenholz) sind nötig zum sicheren Betriebe. — Bei Rädern mit Holzzähnen mufs die Zähnezahl ein Vielfaches der Armzahl sein.

Abb. 82.

Abb. 83.

Compoundverzahnung von H. Michaelis in Chemnitz. Die arbeitende Zahnflanke ist mit Holz ausgerüstet, wodurch das Ganggeräusch der Eisenzähne und die geringe Festigkeit (Federung) der Holzkämme ohne Hinzufügung neuer Teile beseitigt wird. Solche Räder haben sich für grofse Umfangsgeschwindigkeiten und grofse Zahndrücke als dauerhaft bewährt.

Abb. 84.

Abb. 85.

Abb. 86.

Abb. 87.

Rohhauträder (bis 800 mm Durchm. und 300 mm Breite). Zur Erzielung geräuschlosen Ganges bei hohen Umlaufszahlen ($n = 400$ bis 1000) werden Zahnräder und Kämme aus Leder derart angefertigt, dafs Stücke aus besonders hergerichteter Rohhaut unter hohem Drucke und bei Verwendung eines besonderen Bindemittels zusammengeprefst und dann wie ein Eisenrad oder Kamm bearbeitet werden. Die Räder erhalten Radkörper und

Seitenscheiben aus Gufseisen oder Stahl, mit Kupferbolzen genietet oder verschraubt. Kleine Räder werden nicht derart verstärkt.

Von den zusammenarbeitenden Rädern erhält nur das eine Rohhautzähne, während das andere aus Stahl, Bronze oder Gufseisen besteht. Man wählt hierbei (in der Gleichung $P = cbt$) den Wert $c = 4$ bis 8, bei Motoren für elektrische Strafsenbahnen sogar 8 bis 16 u. mehr. $z_{min} = 11$, $t_{min} = 7$ bis 8 mm. — Für kleine Teilungen findet (statt der Rohhaut) auch Vulkanfiber Verwendung.

Räder aus Rohhaut oder Vulkanfiber sind gegen Hitze und Nässe empfindlich. — Es empfiehlt sich, Rohhauträder von Zeit zu Zeit gut zu reinigen und mit Leinöl zu tränken.

---

5. Gewichte der Zahnräder.

Nach Otto Gruson & Co. in Magdeburg-Buckau.

Gewicht $G = z(\alpha + \beta b) - \gamma$ kg.

z = Zähnezahl. b = Zahnbreite in mm.

Teilung	4 Arme			6 Arme			8 Arme			10 Arme		
t mm	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ
15	0,03	.	0,3	0,04	.	0,5	0,05	.	1,1	0,07	.	1,3
20	0,08	.	0,8	0,10	.	1,3	0,13	.	2,3	0,15	.	3,4
25	0,15	0,01	1,5	0,20	0,01	3,2	0,25	0,01	4,9	0,30	0,01	6,5
30	0,25	0,01	2,7	0,34	0,01	5,2	0,43	0,01	8,5	0,51	0,01	11,1
35	0,40	0,01	4,3	0,54	0,01	8,0	0,68	0,01	12,6	0,81	0,01	17,2
40	0,60	0,01	5,5	0,81	0,01	12,7	1,01	0,02	19,9	1,21	0,02	26,2
45	0,86	0,02	8,1	1,15	0,02	17,5	1,44	0,02	28,0	1,73	0,02	37,3
50	1,18	0,02	11,5	1,58	0,02	24,7	1,98	0,03	38,0	2,38	0,03	51,2
55	1,56	0,02	15,6	2,10	0,03	33,3	2,63	0,03	51,0	3,16	0,03	67,4
60	2,03	0,03	20,5	2,72	0,03	42,0	3,41	0,04	65,5	4,10	0,04	88,8
65	2,58	0,03	24,8	3,46	0,04	54,1	4,34	0,04	83,4	5,22	0,05	112,7
70	3,22	0,04	31,4	4,32	0,05	68,1	5,42	0,05	104,1	6,52	0,05	141,4
75	3,97	0,05	39,3	5,32	0,05	83,7	6,67	0,06	128,3	8,02	0,06	172,7
80	4,81	0,05	46,2	6,42	0,06	102,0	8,09	0,07	155,8	9,73	0,07	209,6
85	5,77	0,06	56,2	7,74	0,07	122,2	9,70	0,07	186,1	11,67	0,08	252,0
90	6,85	0,07	67,6	9,19	0,07	144,9	11,52	0,08	222,3	13,85	0,09	299,7
95	8,06	0,07	77,8	10,80	0,08	170,4	13,55	0,09	260,6	16,29	0,10	353,2
100	9,40	0,08	92,0	12,60	0,09	198,0	15,80	0,10	304,0	19,00	0,11	410,0

Beispiel. Ein Kegelrad aus Stahlgufs mit 1,53 m mittlerem Durchmesser und 96 Zähnen von 150 mm Breite hat eine Teilung von

$$765 : 15{,}279 = \text{rd. } 50 \text{ mm}$$

und (S. 705 entsprechend) $^1/_7 \sqrt{1530}$ = rd. 6 Arme. Mithin ist

$$G = [96\,(1{,}58 + 0{,}02 \cdot 150) - 24{,}7] \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}09 = 415 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}09 = 413 \text{ kg.}$$

Die vorstehende **Gewichtstafel** liefert die annähernden Gewichte der gufseisernen Stirnräder gewöhnlicher Bauart mit geraden Zähnen.

Holzkammräder, Schraubenräder und Stirnräder mit Winkelzähnen (Pfeilräder) wiegen annähernd so viel wie Stirnräder mit Eisenzähnen gleicher Teilung, Zähnezahl und Breite.

Kegelräder wiegen rd. 0,9 mal so viel wie Stirnräder.

Das Gewicht der Stahlgufsräder ist etwa um 8,5 vH gröfser als das der gufseisernen Räder gleicher Abmessungen.

B. Reib- und Keilräder.*)

1. Es bezeichne

Q den Druck, mit dem die beiden zylindrischen **Reibräder** radial gegeneinander geprefst werden, in kg,

P die durch das Räderpaar zu übertragende Umfangskraft in kg,

$\mu = \text{tg}\,\varrho$ die Reibungszahl (vrgl. S. 226 u. f.); man setze:

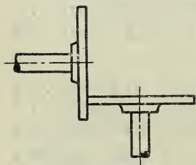
$\mu = 0,10$ bis $0,15$ bei Gufseisen auf Gufseisen,
$\mu = 0,15$ „ $0,20$ „ „ „ Papier,
$\mu = 0,20$ „ $0,30$ „ „ „ Leder,
$\mu = 0,20$ „ $0,50$ „ „ „ Holz,

und zwar sind die kleineren Werte zu benutzen, wenn die Reibflächen glatt und fest sind, was gewöhnlich der Fall ist. Es ist alsdann

$$P \overline{\gtrless} Q\mu.$$

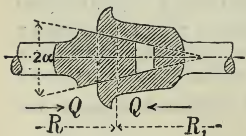
Zur Aenderung des Uebersetzungsverhältnisses während des Ganges **(Wechselgetriebe)** dienen zwei Reibräder in der Anordnung nach Abb. 88, wobei die eine Scheibe mit ihrer stehenden Welle oder auf ihrer (durchlaufenden) Welle verschiebbar ist. Die Scheibe auf der liegenden Welle besteht meist aus Flufseisen, die andere aus Holz derart, dafs möglichst dessen Hirnseite zur Berührung gelangt.

Abb. 88.



Kann die eine Scheibe über die Achsenmitte der anderen hinaus verschoben werden, so wird mit dem Uebersetzungsverhältnis zugleich bei gleichbleibender Drehrichtung der treibenden Welle, der Drehsinn der angetriebenen Welle geändert. (**Wendegetriebe** s. auch Abb. 93.)

Abb. 89.



2. Für **Keilräder** (Abb. 89), zur Uebertragung gröfserer Kräfte dienend, ergibt sich bei dem Keilnutenwinkel 2α mit den vorstehenden Bezeichnungen

$$P \overline{\gtrless} Q \frac{\mu}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = Q\mu',$$

woraus beispielsweise für $\alpha = 15^0$ und $\mu = 0,1$ (Gufseisen auf Gufseisen) $\mu' = 0,28$ folgt, also $Q \sim 3,5\,P$ und $\mu' : \mu = 1 : 0,36$. In letzterem Verhältnis wird das zur Uebertragung einer bestimmten Kraft P nötige Q bei Keilrädern geringer als bei zylindrischen Reibrädern. Ein Nach-

*) Ueber den Wirkungsgrad von Reibrädergetrieben auf Grund von Versuchen, s. Z. d. V. d. I. 1897 S. 1862.

teil (u. zw. die Ursache starker Abnutzung) ist bei Keilrädern, dafs nur in einem zylindrischen Schnitte durch jeden Kranz, dem Berührungspunkte der Teilkreise entsprechend, ein Rollen stattfinden kann. Dieser Fehler wird um so kleiner, je kleiner die Kopflängen der Keile im Verhältnis zu R und R_1 sind, und je geringer die radiale Eingrifftiefe der Räder ist.

Zur Verminderung des Flächendrucks f. 1 cm Länge der Berührungslinie der Räder macht man diese mehrspurig. Wählt man für $\alpha = 15^0$ bei Gufseisen auf Gufseisen die Eingrifftiefe $= 1$ cm, und ist z (meist $= 3$ bis 6) die Anzahl der Keilrillen eines Rades, so setze man (in kg):

$$P \gtreqless 20\,z.$$

Wirkungsgrad der Keilräder (nach Ernst) $\eta = 0{,}88$ bis 0,90.

3. **Kegelförmige Reibräder** (Abb. 90). Mit den Bezeichnungen unter 1 und 2 gilt auch hier die Beziehung unter 2, wobei α der halbe Spitzenwinkel des kleineren, glatten Kegels ist, gegeben durch das Uebersetzungsverhältnis

$$\operatorname{tg} \alpha = r : R.$$

Abb. 90.

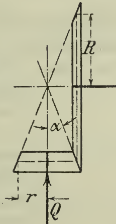


Abb. 91.

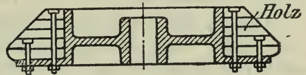
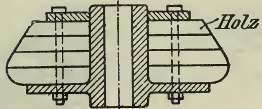


Abb. 92.



Für $\operatorname{tg} \alpha = 1:4$ bis $1:6$ wird $Q = 3{,}3$ bis $2{,}8\,P$, also nicht ungünstiger als bei zylindrischen Keilrädern; hierbei ist nach Ernst $\eta = 0{,}85$ bis 0,92. Für kleinere Uebersetzungen bis $1:1$ wird Q bis $6{,}5\,P$, also sehr grofs.

Abb. 93.

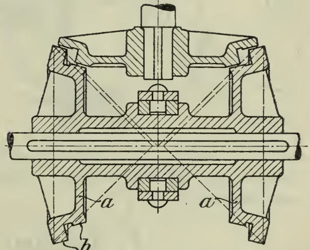


Abb. 91 und 92 zeigen ein gröfseres und ein kleineres Getriebe mit Holzbesatz; ganz ähnlich werden Räder aus Papierlagen hergestellt.

Abb. 93 zeigt ein **Wendegetriebe** unter Benutzung eines verschiebbaren Räderpaares *a a*, dessen Reibkranz *b* zur besseren Kraftübertragung abgestuft ist.

4. **Reibräder unter Vermittlung eines dritten, den Druck durch sich fortpflanzenden Körpers.***)

(Triebe von Stevens, Evans, Seybold und C. Hoppe). Zwischen den beiden Reibscheiben liegt ein geschlossener, dicker, leicht auswechselbarer Riemen, der eine geringere spez. Pressung ergibt und

*) Näheres s. C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 10. Aufl. 1908 S. 398 ff.

die Abnutzung aufnimmt (Abb. 94). C. Hoppe drückt zwischen den beiden Scheiben zwei elastisch durch Gummibänder oder drgl. miteinander verbundene Rollen an (Abb. 95); Kraftübertragung an zwei Stellen.

Abb. 94.

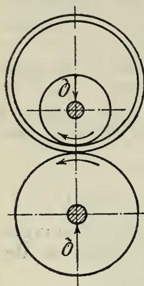
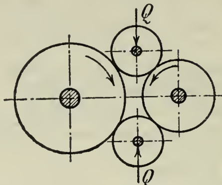


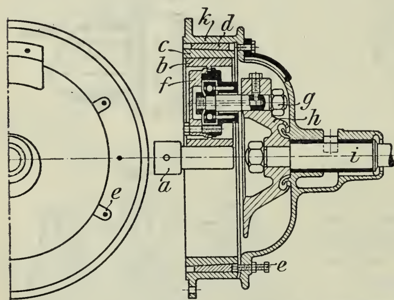
Abb. 95.



5. Ein **Reibrädergetriebe,** das zum Antrieb langsam laufender Wellen von der gleichachsig angeordneten, schnelllaufenden Welle, z. B. eines Elektromotors, dient, ist unter dem Namen **Zentrator-Kupplung** bekannt geworden. Das Getriebe wird für kleinere Kräfte vielfach, beispielsweise auch von der A. E. G. angewendet und von W. H. Hilger & Cie., Maschinenfabrik in Bonn a. Rh. für Uebersetzungen von 12 : 1 bis 7 : 1 gebaut. Die beste Uebersetzung ist ∼ 9 : 1.

Gegen den Zapfen der schnellaufenden Welle *a* (s. Abb. 96) liegen vier oder drei Ringe *b* unter dem Druck der Stahlklemmringe *c* und des gufseisernen Druckringes *d* an. Die Ringe *c* und *d* berühren sich in Kegelflächen. Der Druckring *d* kann durch die Schrauben *e* vorgetrieben werden, um die erforderliche Anpressung der Ringe *b* bis zur Höchstleistung herzustellen. In den rotierenden Ringen *b* liegen Leitrollen *f*, die an der Rollbewegung teilnehmen und durch Eingreifen mit einem Ringwulst das Verlaufen der Ringe *b* verhindern. Die Uebertragung der Bewegung mit verminderter Umlaufzahl auf die Welle *i* geschieht durch die Mitnehmerbolzen *g* und die Mitnehmerscheibe *h*. Das Ganze ist staub- und wasserdicht in das (stillstehende) Gehäuse *k* eingekapselt.

Abb. 96.



C. Riemen- und Seilbetrieb.

Ueber den durch Gleiten des Riemens oder Seiles auf den Scheiben entstehenden **Arbeits-** und **Geschwindigkeitsverlust** 𝔙 s. S. 246 u. f., s. auch unten S. 712 u. f.

a. Allgemeines.

1. Die Achsen der beiden Scheiben *A*, *B* liegen in einer lotrechten Ebene (Abb. 97). *A* sei die treibende Scheibe (oder Rolle), so dafs

ab der ziehende und cd der gezogene Faden ist; die senkrechten Abstände der punktierten Linien $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$ von der Fadenlinie deuten die Spannungen im ziehenden Faden $a b$ im Verhältnis zu den Spannungen im gezogenen Faden $a_1 b_1$ an. Es bezeichne

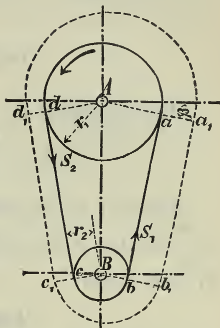


Abb. 97.

- S_1 die Spannkraft im ziehenden Faden in kg,
- S_2 die Spannkraft im gezogenen Faden in kg,
- S_0 die Spannkraft, mit der der Faden aufgelegt werden mufs, in kg,
- α den kleineren der beiden Zentriwinkel, die dem vom Faden umschlungenen Bogen entsprechen, in Bogenmafs,
- μ die Reibungszahl für die Berührung zwischen Faden und Scheibenoberfläche,
- r_1 den Halbmesser der treibenden und r_2 den der getriebenen Scheibe in cm,
- P die durch den Faden zu übertragende Umfangskraft $= S_1 - S_2$ in kg,
- f den Querschnitt des Fadens in qcm,
- v die Geschwindigkeit des Fadens in m/sk,
- q das Gewicht des Fadens in kg/m,
- $q_1 = q : f$ das Gewicht eines Fadenstückes von 1 qcm Querschnitt und 1 m Länge,
- $\sigma_z = S_1 : f$ die von S_1 herrührende Normalspannung des Fadens in kg/qcm unter Voraussetzung gleichmäfsiger Kraftverteilung über den Querschnitt.
- k_z die zulässige Gesamtspannung des Fadens in kg/qcm,
- c (in kg/qcm) einen Beiwert (s. unten),
- e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen (s. S. 43),
- g die Beschleunigung durch die Schwere $= 9{,}81$ m/sk²;

dann ist unter Berücksichtigung der Fliehkraft

$$S_1 = P \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} + q \frac{v^2}{g},$$

$$S_2 = P \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} + q \frac{v^2}{g},$$

$$P = \left(S_1 - q \frac{v^2}{g}\right) \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} = \left(\sigma_z - q_1 \frac{v^2}{g}\right) \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} f.$$

Setzt man

$$\left(\sigma_z - q_1 \frac{v^2}{g}\right) \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} = c,$$

so wird die **zu übertragende Kraft**

$$\boldsymbol{P = cf.}$$

Die durch einen gegebenen Faden übertragbare **Arbeitstärke** Pv wird am gröfsten ($= [Pv]_{\max}$) für die Fadengeschwindigkeit

$$v' = \sqrt{\frac{\sigma_z g}{3 q_1}} = \sqrt{\frac{S_1 g}{3 q}};$$

$$(Pv)_{\max} = \frac{2}{3} \sigma_z \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} f \sqrt{\frac{\sigma_z g}{3 q_1}}.$$

Die Spannkraft S_0 des ruhenden Fadens ist

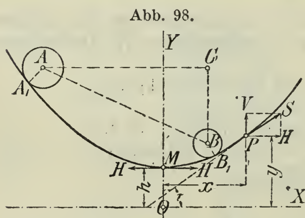
$$S_0 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{P}{2} \frac{e^{\mu\alpha} + 1}{e^{\mu\alpha} - 1} + q \frac{v^2}{g}.$$

Während des Betriebes verschwindet infolge der Fliehkraft das Glied $q \frac{v^2}{g}$ für den Achsdruck, so dafs bei gleichen Richtungen von S_1 und S_2 sich ergibt:

$$\textbf{Achsdruck}\ 2 S_0' = P \frac{e^{\mu\alpha} + 1}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

2. Liegen die Achsen der beiden Scheiben A und B (Abb. 98) nicht in derselben lotrechten Ebene, so gelten die Gleichungen unter 1. gleichfalls, die Gleichungen für S_0 und $2 S_0$ jedoch nur angenähert bei nicht zu starkem Durchhange des Fadens (insbesondere ist beim Drahtseilbetrieb eine Berichtigung erforderlich). In diesen Fällen bildet der als durchaus biegsam vorausgesetzte laufende Faden eine **Kettenlinie** $A_1 M B_1$ (vrgl. S. 113 u. f.).*) Wird die Kettenlinie auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz bezogen, für das die x-Achse Leitlinie und die y-Achse Symmetrieachse ist, und bedeuten

Abb. 98.



x, y die Koordinaten des beliebigen Punktes P der Kettenlinie in m,

l die Länge des Kettenlinienbogens MP in m,

H die wagerecht gerichtete Spannkraft im Scheitel M in kg,

S die Spannkraft im Punkte P in kg,

$V = ql$ das Gewicht des Seilstückes MP in kg,

$MO = h$ den Parameter der Kettenlinie in m, so ist

$$H = \text{konst.} = hq = S \cos\tau = \frac{V}{\operatorname{tg}\tau} \text{ und } \quad S = yq = \frac{qh}{\cos\tau}.$$

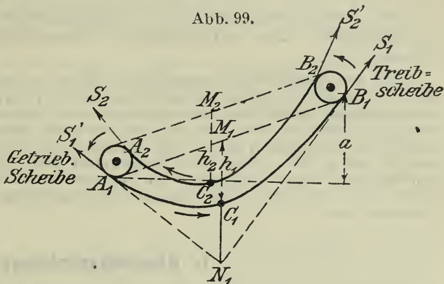
Der **Spannkraftunterschied** zwischen zwei Punkten, die einen Höhenunterschied z haben, beträgt also zq.

*) Ist der Faden elastisch, so wird bei gröfseren Geschwindigkeiten S_2 erheblich kleiner, bis nahe null, während S_1 sich dem Werte P mehr und mehr nähert.

Bei der Anordnung eines solchen Fadenbetriebes für eine beliebige Höhenlage der Scheiben zueinander kann für gewöhnlich in folgender Weise vorgegangen werden.

Die Abweichung der Seillinie von der geraden Verbindungslinie ihrer beiden Endpunkte ist fast immer so gering, dafs statt der Kettenlinie eine **Parabel** gesetzt werden darf. Um diese aufzuzeichnen, berechne man zunächst den lotrechten Durchhang h_1 (Abb. 99) in der Mitte M_1 von $A_1 B_1$, wobei $A_1 C_1 B_1$ die Länge des ganzen ziehenden Fadens ist, und mache dann $N_1 C_1 = C_1 M_1 = h_1$. Die Verbindungslinien $N_1 B_1$ und $N_1 A_1$ liefern die Parabeltangenten in den Endpunkten B_1 und A_1 und damit die Parabel nach Abb. 18 S. 106. Ist die Fadenspannkraft im Punkte C_1 gleich S_{m1}, so ist der Durchhang

Abb. 99.



$$h_1 = \frac{\overline{A_1 B_1}^2 \cdot q}{8\, S_{m1}}.$$

Ebenso wie für den ziehenden Faden $A_1 C_1 B_1$ zeichne man für den gezogenen Faden $A_2 C_2 B_2$ an Stelle der Seillinie die Parabel mit Hülfe des Durchhanges

$$h_2 = \frac{\overline{A_2 B_2}^2 \cdot q}{8\, S_{m2}}.$$

Die mittleren Fadenspannkräfte S_{m1} bzw. S_{m2} folgen aus den Spannkräften $S_1 S_2$ in den oberen Endpunkten $B_1 B_2$, oder aus den Spannkräften $S_1' S_2'$ in den unteren Endpunkten $A_1 A_2$ des Fadens:

$$S_{m1} = S_1 - q\,\frac{a}{2} = S_1' + q\,\frac{a}{2},$$

$$S_{m2} = S_2 - q\,\frac{a}{2} = S_1' + q\,\frac{a}{2}.$$

Die Spannkräfte $S_1' S_2'$ in $A_1 A_2$ sind für die zu übertragende Umfangskraft P mafsgebend, bzw. hierdurch bestimmt; die gröfsere der beiden Spannkräfte $S_1 S_2$ in $B_1 B_2$ bestimmt den erforderlichen Fadenquerschnitt.

Mit Rücksicht auf den Geschwindigkeitsverlust $\mathfrak{V}$ (vrgl. S. 246) ist das tatsächliche **Uebersetzungsverhältnis** φ, wenn s die Fadendicke in cm:

$$\varphi \sim \frac{r_1 + {}^1/_3\, s}{r_2 + {}^2/_3\, s}\,(1 - \mathfrak{V}).$$

3. Die zur Uebertragung der Kraft P erforderlichen Fadenspannkräfte lassen sich statt durch das Eigengewicht des durchhängenden Fadens (Drahtseiltrieb) auch durch starke Dehnung des Fadens beim Aufbringen auf die Scheiben oder durch eine Spannrolle erzeugen (**Dehnungs-** und **Belastungs**spannung bei Riemen und Seilen).

b. Riemenbetrieb.

Die Anordnung mufs stets derartig sein, dafs bei jeder Scheibe die Mittellinie des auflaufenden Riementeiles in die Mittellinie der Scheibe fällt.

Sind die beiden Wellen parallel und liegen die Scheiben in derselben Ebene, so haben die Scheiben gleiche Drehrichtung beim offenen (s. Abb. 97 S. 711), dagegen entgegengesetzte Drehrichtung beim gekreuzten (ganz geschränkten) Riemen (s. Abb. 104 auf S. 719). Sind die Wellen windschief, und stehen dabei die Mittelebenen der Scheiben winkelrecht aufeinander, so ist der Riemen halbgeschränkt (Halbkreuzriemen (s. Abb. 101 auf S. 718). Diese drei Riemenarten sind selbstleitend, während bei sich schneidenden Wellenrichtungen, d. h. bei dem sogen. Winkeltrieb (vrgl. Abb. 102, S. 718), aufser den beiden Scheiben noch zwei Leitrollen für die Führung des Riemens erforderlich sind.

1. Riemenberechnung.

Näheres über Ledertreibriemen s. S. 627. Es sei

b die Breite des Riemens in cm, s die Dicke des Riemens in cm, $f = bs$ der Riemenquerschnitt in qcm,
D der Durchmesser der treibenden Scheibe in cm,
n deren Umlaufzahl i. d. Min.,
N die zu übertragende Leistung in PS,

so ist die vom Riemen **übertragene Kraft** in kg nach S. 711

$$P = cf = cbs,$$

worin c den dort angegebenen Wert haben würde. In Wirklichkeit ist die Ermittlung von c für gegebene Verhältnisse wegen der Unsicherheit der Gröfsen σ_z (Einflufs der Biegung) und μ (der übliche Wert $\mu = 0{,}28$ nach Morin gilt nur für etwa $v = 3$ m/sk), namentlich aber wegen des sich der Berechnung entziehenden Einflusses der Elastizität des Riemens z. Z. nicht möglich.

Die Riemendicke s ist allein für die zulässige Belastung P nicht mafsgebend, weil ein Riemen aus bestem, meist etwa 0,5 cm dickem (und 20 bis 30 cm breitem) Mittelrücken bei schnellerem Laufe ebenso stark beansprucht werden darf als das weniger gleichmäfsige, 0,8 bis 0,9 cm starke Seitenleder derselben Kernhaut. Hierzu kommt noch, dafs infolge der Krümmung der Scheiben der Riemen über den Querschnitt nicht gleichmäfsig beansprucht wird und dafs dicke Riemen auf kleinen Scheiben eine erheblich andere Beanspruchung erfahren als dünne Riemen auf grofsen Scheiben. Endlich wächst mit der Riemendicke der Unterschied der Wege der Aufsenseite und der Laufseite beim Rundlaufe auf der Scheibe; bei geringer Geschwindigkeit ($v \sim 3$ m/sk) haben die Faserspannungen innen und aufsen Zeit, sich auszugleichen, um so mehr als hierbei das gezogene (lose) Riemenstück gespannter ist als bei schnellem Laufe ($v \gtreqless 10$ m/sk);*) bei dicken Riemen und grofsen Geschwindigkeiten sind daher möglichst grofse Scheiben zu wählen.

Hiernach ist es gerechtfertigt, die zulässige Belastung des Riemens nicht auf 1 qcm Querschnitt, sondern auf 1 cm Breite zu beziehen.

---

*) Statt des gewöhnlich angenommenen Wertes $S_1 \sim 2\,S_2$ findet sich bei $v = 15$ bis 20 m/sk $S_1 \sim 50\,S_2$ und mehr (vrgl. Gehrckens, Z. d. V. d. I. 1893 S. 15 ff.

Zulässige Riemenbelastung p

in kg f. 1 cm Riemenbreite.

Einfacher offener Riemen aus gutem Kernleder auf gufseisernen Scheiben, nahezu wagerechter Betrieb mit hinreichend grofsem Achsenabstande; der ziehende Riementrieb liegt unten, der gezogene oben (vrgl. S. 717).

(Nach C. Bach, 10. Aufl. 1908 S. 431.)

D m	$v =$ 3	10	20	30	40 m/sk
0,120	2	.	.	.	.
0,200	3,5	.	.	.	.
0,500	5	7	9	10	10
1,000	6	8,5	11	12	12
2,000	6,5	9,5	12	13	13

C. Otto Gehrckens in Hamburg empfiehlt für günstige Betriebsverhältnisse (s. S. 717) und für Riemen aus ausgewählten Häuten folgende Werte für p, wobei die **fett** gedruckten für Doppelriemen, die übrigen für **einfache** Riemen gelten. (Zwischenwerte, z. B. für 15 und 25 m/sk sind als Mittel der Werte für 10, 20 und 30 m/sk zu nehmen.)

mm Durchm.	3		5		10		20		30		40		50 m/sk		
100	2	.	2,5	.	3	.	3,5	.	3,5	.	3,5	.	3	.	kg
200	3	.	4	.	5	.	6	.	6,5	.	6,5	.	6,5	.	„
300	4	**5**	5	**6**	6	**7**	7,5	**9,5**	8,5	**10**	9	**10**	9	**10**	„
400	5	**6,5**	6	**8**	7	**9**	9	**11**	10	**12**	10,5	**12,5**	11	**12,5**	„
500	6	**8**	7	**9,5**	8	**11**	10	**13**	11	**13,5**	11,5	**14**	12	**14**	„
600	7	**9,5**	8	**11**	9	**12**	11	**15**	12,5	**16**	13	**16,5**	13,5	**17**	„
750	8	**11**	9	**12,5**	10	**14**	12	**17,5**	13	**18,5**	13,5	**19,5**	14	**20**	„
1000	9	**13**	10	**15**	11	**17**	13	**21**	14	**22**	14,5	**23**	15	**24**	„
1500	10	**15**	11	**17**	12	**19**	13,5	**23**	14,5	**26**	15	**27**	15,5	**28**	„
2000	11	**17**	12	**19**	13	**21**	14	**25**	15	**28**	15,5	**29**	16	**30**	„

Erfahrungsgemäfs werden bei langsamem Lauf die Riemen meist zu knapp gerechnet.

Für steilen Betrieb oder bei kleinem Achsenabstande sind vorstehende Zahlen um etwa 20 vH zu vermindern.

Für Doppelriemen von 10 mm Dicke sind die Zahlen der nach C. Bach gegebenen Tafel, wenn $D > 1{,}00$ m, um 50 bis 60 vH; und wenn $D > 2{,}00$ m, bis um 70 vH zu erhöhen.

Bei Uebersetzungen ins Langsame sind nach C. Bach etwas geringere Werte für p zu wählen, u. U. (bei Elektromotoren) bis herab auf $0{,}5\,p$, sogar $0{,}33\,p$. Bei hoher Geschwindigkeit $v > 30$ m/sk hält aber Gehrckens die Uebertragung ins Langsamere für bedeutend günstiger, als bisher angenommen ist.

Bei stark ungleichförmigem Betriebe (Fallhämmer, Sägegatter usw.) ist das durchschnittliche P zugrunde zu legen und p, der Un-

gleichförmigkeit entsprechend, bis zu 50 vH und mehr niedriger zu wählen.

Riemen, die durch Gabeln geführt und oft verschoben werden, sind entsprechend geringer zu belasten.

Für gekreuzte Riemen vermindere man nach C. Bach die Werte von p für offene Riemen je nach Achsenabstand und Riemenbreite um 10 bis 30 vH. Gehrckens beansprucht gekreuzte Riemen bei langsamem Lauf mindestens wie offene wegen des gröfseren Umfassungsbogens. — Achsenabstand $e \geq 20$ mal Riemenbreite. Bei schnellem Laufe sowie bei breiten Riemen ist die Kreuzung möglichst zu vermeiden. — Für Halbkreuz-Riemen nehme man je nach Achsenabstand und Riemenbreite p geringer als bei offenen Riemen (vrgl. S. 718).

Die mittels eines einfachen Riemens **übertragbare Leistung** in PS ist, wenn D der Scheibendurchmesser in **m**:

$$N = \frac{Pv}{75} = \frac{pb\pi Dn}{60 \,.\, 75}; \quad \text{mithin } bD = \frac{4500\,N}{\pi p n} = \frac{1432{,}4}{p}\,\frac{N}{n}.$$

Für mittlere Verhältnisse ($p = 7{,}5$) ergibt sich hieraus die leicht zu merkende Formel

$$N = bRn,$$

worin b und R (Scheibenhalbmesser) in **m** auszudrücken sind.

Riemengeschwindigkeit gewöhnlich zwischen $v = 3$ bis 30 m/sk; $v > 40$ m/sk selten, notwendig ist dabei bestes Leder aus Mittelrücken (Wirbelstück der Kernhaut).

Beispiele. I. Auf einer Riemenscheibe von 2 m Durchmesser überträgt ein einfacher offener, wagerechter Riemen von $b = 20$ cm Breite bei einer Geschwindigkeit von $v = 25$ m/sk, da nach der Tafel S. 715 von C. Bach hierfür $p = \frac{1}{2}\,(12 + 13) = 12{,}5$ kg/cm ist:

$$N = 12{,}5 \,.\, 20 \,.\, 25 : 75 = 83{,}3 \text{ PS}.$$

II. Ein offener Doppelriemen erfordert auf einer Scheibe von 1 m Durchmesser bei $v = 15$ m/sk, also nach der Tafel mit $p = 1{,}50 \cdot \frac{8{,}5 + 11}{2} = 14{,}6$ kg/cm für Uebertragung von 80 PS eine Riemenbreite b (75 . 80) : (14,6 . 15) = 28 cm.

Gummi-, Balata-, Kamelhaar- und **Baumwollriemen** können in gewöhnlichen Fällen mit $P = 8\,bs$ bis $10\,bs$ belastet werden.

Ueber **Stahlbänder** als Ersatz für Treibriemen kann nach Kammerer z. Z. ein abschliefsendes Urteil noch nicht abgegeben werden. — Ein schwacher Punkt des Stahlbandes liegt augenscheinlich immer noch im Schlofs, das noch nicht allen Anforderungen an Festigkeit und Schmiegsamkeit zu genügen scheint.

Einfache Riemen sind nicht über 50 bis höchstens 60 cm Breite zu empfehlen, von da ab verdienen **Doppelriemen** den Vorzug. Dabei lege man die Fleischseiten aufeinander und nicht die glatten Haarseiten. (Lage des einfachen Riemens s. S. 628.) Doppelriemen leisten bei kleinen Scheiben wenig mehr als einfache Riemen, bei grofsen Scheiben ($R > 1$ m) dagegen zeigen sie eine Mehrleistung von 70 vH und darüber. — Breite Riemen erhalten wohl zwei seitliche Beläge aufgenäht, um das Schwanken und Schlagen zu vermindern. Die Zweckmäfsigkeit dieser Beläge ist bestritten, da sie das Gewicht des Riemens

erheblich vermehren, aber nur wenig an der Kraftübertragung teilnehmen. Besser ist es, das Mittelrückenstück zu verwenden, das ohne zu schlagen gerade läuft.

Achsdruck. Der Druck, den der gespannte Riemen während des Betriebes auf die Welle ausübt und der diese auf Biegung beansprucht und die Zapfenreibung erzeugt, kann nach S. 712, sofern $\mu = 0{,}25$ und $\alpha = 2{,}8$, also $e^{\mu\alpha} \sim 2$ gesetzt wird, für mittlere Verhältnisse zu

$$2\,S_0' = 3\,P$$

angenommen werden. (Für schnellaufende Riemen ist $2\,S_0'$ erheblich kleiner.) Will man sicher gehen, so ist dieser Wert bei Festigkeitsrechnungen, bei Ermittlung der Durchbiegung der Welle sowie bei Bestimmung des Arbeitsverlustes zu erhöhen, da der frisch aufgelegte Riemen gewöhnlich stärker gespannt wird, als zur Uebertragung von P kg erforderlich ist.

Folgende **günstige Betriebsverhältnisse** sind für **offene Riemen** anzustreben. Uebersetzung ins Schnellere: höchste Punkte der Scheiben in wagerechter Linie (oder zu dieser unter höchstens 45°); unteres Riemenstück das ziehende (oberes das schlaffe); Scheibendurchmesser-Verhältnis 1 : 1 bis 2 : 1, höchstens bis 5 : 1; Scheibendurchmesser (auch bei Doppelriemen) womöglich $D \geqq 100 \times$ (Gesamt-)Riemendicke. Wellenabstand für schmale Riemen (bis $b = 10$ cm) $e = 5$ m, für breitere $e = 10$ m, so dafs schmale Riemen bei wagerechtem Laufe 50 bis 100 mm, breite 100 bis 200 mm durchhängen (über $e = 15$ bis 18 m hinaus geht man nicht); Scheiben (zumal bei schnellem Laufe) genau zentriert und winkelrecht zur Wellenachse, sorgfältig abgedreht und ausgewogen; ausgewogene Riemen von überall gleicher Biegungsfähigkeit (auch in der Schlufsverbindung).

Bei Uebersetzung ins Langsamere wähle man, wenn der Riemen ohne Spannrolle läuft (womöglich) für die treibende Scheibe nicht unter 0,5 m, besser nicht unter 1 m Dmr.

Der auf Länge zusammengefügte Riemen soll vor dem Auflegen 1 bis 3 Tage lang durch angehängte Gewichte oder durch Spannen auf der Streckmaschine, entsprechend einer Belastung von etwa $3\,S_1$ kg (vrgl. S. 712) gedehnt werden; bei breiten Riemen soll dies schon mit den einzelnen Riemenstücken vor der Herstellung des Riemens geschehen. Hierbei ergibt sich 4 bis 5 vH bleibende Dehnung.

Hat sich der eingelaufene Riemen über das zulässige Mafs gedehnt, so empfiehlt es sich nicht, ihn sofort zu kürzen; besser ist es, die auflaufende Fleischseite mit Rindertalg einzufetten. Zunähst beginnt hiernach der Riemen zu gleiten; die eintretende Erwärmung aber macht das Fett flüssig, so dafs es vom Riemen aufgesogen wird und diesen durch Anschwellen bis zu 2 vH kürzt und zum Durchziehen veranlafst.

Die beste **Schlufsverbindung** (s. S. 628) für Riemen ist, diesen endlos zu machen, also den geleimten Riemen zu-leimen, den genähten zu nähen; für gewöhnlichen offenen und gekreuzten Lauf ist dieses wünschenswert, für Halbkreuz-, Winkel- und Kegelscheiben-Trieb sowie für schnellen Lauf aber geboten. — Die Kralle hat sich bei $v < 10$ m/sk als einfache Verbindung bewährt. — Zum Nähen mit Drahtspiralen wird die Riemenverbindemaschine der Falkenauer Maschinenfabrik mit Vorteil verwendet.

Dicke Ansätze im Riemen wirken schädlich durch Stöfse gegen die Scheiben, durch Steifheit und gröfseres Gewicht, hauptsächlich aber, weil der Riemen gezerrt wird, wenn sich eine längere klumpige Verbindung auf die kleine Scheibe legt. Wird

das ziehende Riemenstück plötzlich um etwa 5 bis 6 mm gedehnt, so tritt ein Stofs in der Kraftleitung ein, der sich z. B. bei elektrischem Licht bemerkbar macht und bei der häufigen Wiederholung zum Bruche des Riemens führt.

Bedingung für jede Riemenverbindung ist, dafs sie nicht dicker als der Riemen sei; deshalb sind bei Anwendung von Ueberschlag-Verbindungen beide Riemenenden gut anzuschärfen.

Bei **Halbkreuz-Riementrieb** soll nach Völckers der Wellenabstand (in m) $e \geqq 10\sqrt{bD}$ sein, worin b und D ebenfalls in m zu nehmen ist; dabei soll e mindestens das Doppelte des Durchmessers der gröfseren Scheibe, nach Gehrckens aber mindestens dafs Vierfache des Scheibendurchmessers oder die zwanzigfache Riemenbreite betragen. — Gehrckens verwendet bei **Halbkreuztrieb** einen Riemen, der aus zwei ungleich breiten, treppenförmig über einander gelegten Riemen (Abb. 100) besteht. Damit wird bezweckt, das die einfache Kante sich dehnen kann, während ein Einreifsen durch die zurückliegende Verdopplung verhindert wird. Durch den Treppenriemen wird der Durchmesser der Scheibe bis a vergröfsert, so dafs der Riemen hier einen gröfseren Weg zurücklegen mufs; damit wird der gröfste Zug im Riemen von der an sich ungünstig gezerrten Kante fort und nach dem Doppelriemen bis a verlegt.

Abb. 100.



Anordnung der genau zylindrisch gedrehten Scheiben nach Bach gemäfs Abb. 101; darin ist die treibende Scheibe um etwa $e_1 = 0{,}1$ bis $0{,}2\,b$, die getriebene um: $e_2 = 0{,}5$ bis $0{,}6\,b$ gegen dafs gezeichnete Mittellinienkreuz verschoben. Die genaue Stellung der Scheiben mufs im Betriebe festgestellt werden. Die getriebene Scheibe mufs sehr breit sein, weil der Riemen im Betriebe auf ihr hin und her wandert. Die Uebertragungskraft ist je nach Umständen bis zu 25 vH geringer als bei offenem Riemen.

Abb. 101.

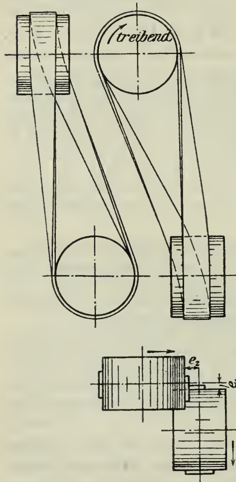
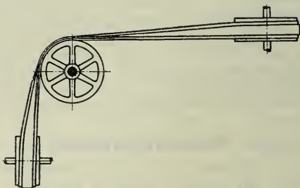


Abb. 102.



Für **Winkeltrieb** sind Leitrollen erforderlich (Abb. 102), dabei soll die Leitrolle des ziehenden Riementeiles mindestens den Durchmesser der treibenden Scheibe und deren 1,5 fache Breite, dagegen die Leitrolle des losen Riementeiles mindestens den Durchmesser der getriebenen Scheibe und deren 2- bis 2,5fache Breite erhalten.

Gehrckens verwendet für Winkeltrieb einen Mittelleisten-Riemen, bei dem die Mittellinie durch Auflage eines schmäleren Riemens verstärkt ist, weil die Aufsenkanten wechselseitig stärker gezerrt sind als die Mittellinie des Riemens. Als Riemenverbindung hier ganz besonders Leimen zu empfehlen; bei genähten Verbindungen reifsen die Löcher an den Kanten aus.

Kegelscheiben-Trieb namentlich offener, verlangt eine bestimmte Riemengeschwindigkeit, deren Mindestmafs sich nach der Steigung des Kegels richtet. Diese Steigung sei so klein wie möglich, jedenfalls nicht mehr als 10 vH ($\operatorname{tg} \alpha < 0{,}1$). Die auflaufenden Riemen sind (am besten durch Rollen) zu führen. Gekreuzter Trieb ist nach Gehrckens dem offenen vorzuziehen, zumal bei Geschwindigkeiten unter 10 m.

Bei offenem Lauf (Abb. 103) verwendet Gehrckens einen in der Mittellinie verstärkten Riemen, bei gekreuztem Lauf einen dreifach treppenartig übereinander liegenden. (Abb. 104). — Die Uebertragungskraft bei Kegelscheiben mufs wesentlich ungünstiger als bei gewöhnlichen zylindrischen oder balligen Scheiben angenommen werden.

Abb. 103.

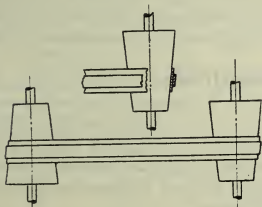


Abb. 104.

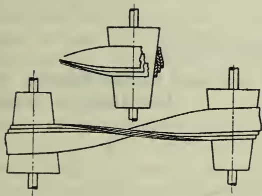
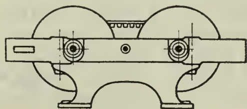
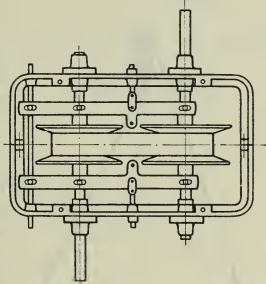


Abb. 105.

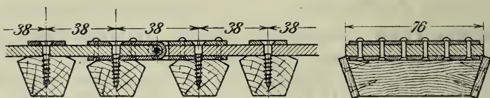




Als neuerer Ersatz für Kegelscheiben dient der **Umdrehungsregler** von G. Polysius, Dessau (s. Abb. 105). Er dient auch als Ersatz für Stufenscheibenvorgelege und ist besonders geeignet zum Antriebe von Werkzeugmaschinen. Aenderung der Umlaufzahl während des Ganges der Maschine dadurch, dafs die Kegelscheiben durch zwei doppelarmige Hebel paarweise einander genähert und voneinander entfernt werden, wodurch der Treibgurt seine Höhenlage zwischen den Scheibenpaaren ändert.

Der Treibgurt besteht aus einem Gummiriemen mit Baumwolleinlage, der mit Rotbuchenholzklötzen besetzt ist; diese sind seitlich an den Teilen, wo sie mit den Kegelscheiben in Berührung sind, mit Leder besetzt (Abb. 106). Der Umdrehungsregler wird gebaut für

Abb. 106.

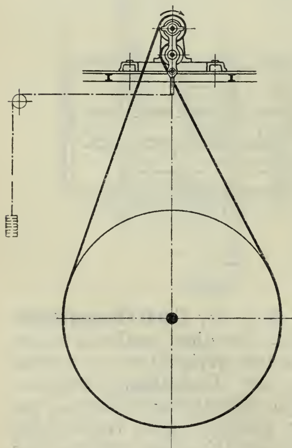


Uebersetzungsverhältnisse bis 1 : 10, wobei die Umlaufzahl der getriebenen Welle bis zu 320 betragen kann und für Uebertragungen bis zu 110 PS (bei u/min = 100).

Spannrollen. Richtig bemessen und gelagert — dicht an der kleinen Scheibe, am gezogenen Riemenstück und mit Durchmesser mindestens gleich der getriebenen Scheibe (wenn möglich 1,5 bis 2 mal so grofs) — verringert die Spannrolle nach Kammerer den Wirkungsgrad nur wenig (bis um etwa $v = 30$ m/sk,) erhöht aber infolge des gröfseren umspannenden Bogens die übertragbare Nutzleistung. Auch wird der Riemen geschont, da die richtig angeordnete Spannrolle gestattet, den Riemen jederzeit mit dem zulässigen Mindestwert der Vorspannung zu betreiben und ihn bei längeren Betriebspausen (über Nacht) ganz zu entspannen.

Als Beispiel ist das **Lenix-Spannrollengetriebe** der B.-A. M.-A.-G. anzufüllen, das auch bei senkrechtem Riemen, kleiner Achsenentfernung und grofsem Uebertragungsverhältnis (bis 15 : 1) vorteilhaft arbeitet.*) (Abb. 107.)

Abb. 107.



Für feuchte Räume, kurzen Achsenabstand und starke Uebersetzung sind **Glieder-Riemen** (ähnlich wie Gelenkketten aus Lederlaschen und stählernen Gelenkstiften bestehend) zu empfehlen, des Gewichtes halber aber nur bei wagerechtem oder annähernd wagerechtem Laufe. Auch sind **Gummi-Riemen** hier am Platze. — **Baumwollen-Riemen** strecken sich im Betriebe meist stärker als Leder-Riemen, sind jedoch geschmeidiger und von gleichmäfsigerer Dicke. Sie müssen sorgfältig durchfettet sein, damit der wechselnde Feuchtigkeitsgehalt der Luft nicht zu sehr auf die Länge einwirkt.

Gehrckens**) empfiehlt gut eingefettete Lederriemen, möglichst leichte Doppelriemen, bei denen die Verbindungsteile der beiden Riemenbahnen einander decken.

*) Z. d. V. d. I. 1907 S. 636.
**) Z. d. V. d. I. 1899 S. 1631.

Zusammenfassung der Versuche Kammerers*) mit Riementrieben.

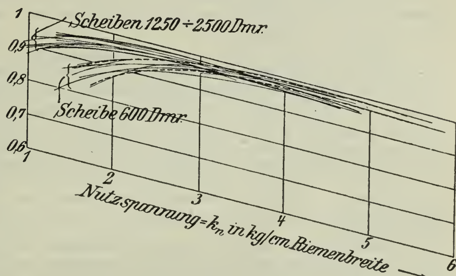
1. Die Vorspannung k_v kann wesentlich kleiner sein, als die übliche Rechnung annimmt, weil der Reibungswert sich bis auf das Doppelte der üblichen Zahl steigend erwiesen hat. Damit fällt die Gesamtspannung des Riemens kleiner aus, oder bei gleicher Gesamtspannung kann die Nutzspannung k_n entsprechend erhöht werden.

Dieser Vorteil kann nur dann voll ausgenutzt werden, wenn eine Spannvorrichtung (Spannschlitten der Elektromotoren oder die Spannrolle, vrgl. unter 9) vorhanden ist, welche die Vorspannung genau ein- und nachzustellen erlaubt.

2. Die Gesamtspannung $k_v + {}^1/_2\, k_n$ ruft nicht diejenige Riemendehnung hervor, die sich rechnungsmäfsig aus Vorspannung und Nutzspannung ergeben würde, sondern die Dehnung bleibt um so mehr hinter diesem Wert zurück, je gröfser die Geschwindigkeit ist, weil der Dehnungswechsel im belasteten Riemen anscheinend dem raschen Spannungswechsel nicht zu folgen vermag.

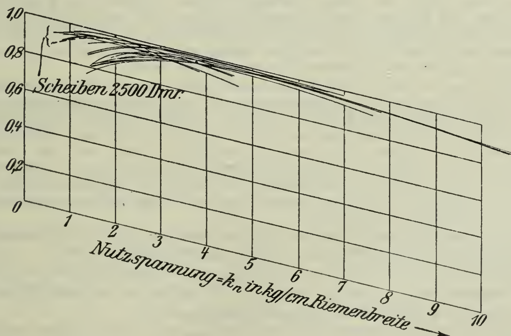
3. Der Wirkungsgrad η steigt mit zunehmender Nutzspannung sehr rasch an, bleibt bis zu einer gewissen Nutzspannung nahezu unveränderlich und fällt mit noch weiter zunehmender Nutzspannung ganz langsam ab (vrgl. Abb. 108 und 109). Der Höchstwert des Wirkungsgrades bewegt sich innerhalb der Nutzspannungen von 2 bis 6 kg auf 1 cm Riemenbreite zwischen 0,94 und 0,98. Innerhalb der Auflaufspannung des ziehenden Trums von 5 bis 15 kg/cm bleibt der Höchstwert des Wirkungsgrades zwischen 0,95 und 0,98. Die angegebenen Werte beziehen sich auf die Verluste durch Schlupf, Steifigkeit und durch den Luftwiderstand des Riemens selbst; nicht enthalten sind darin Lagerreibung und Luftwiderstand der Scheiben.

Abb. 108.



4. Der Reibungswert μ hat sich wesentlich gröfser ergeben, als vorausgesetzt wird: die beobachteten Grenzwerte, bei denen der Gleitschlupf beginnt, liegen zwischen 0,6 und 0,8, während

Abb. 109.



*) Z. d. V. d. I. 1907 S. 1085 und Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom V. d. I. Heft 155: vrgl. ferner auch die Versuche von Niethammer und Czepek, Z. d. V. d. I. 1908, S. 668 u. f.

unmittelbare Reibungsversuche Grenzwerte von nur 0,16 bis 0,28 bei Doppelriemen und von 0,24 bis 0,46 bei einfachen Riemen liefern (s. auch unter 6. 7. 8.) Die hohen Betriebswerte von μ sind nur dadurch zu erklären, dafs der Riemen nicht nur durch seine Eigenspannung, sondern auch durch Adhäsionswirkung an die Scheibe angeprefst wird, indem das Längen auf der getriebenen Scheibe und das Einkriechen auf der treibenden Scheibe den Riemen an die Scheibe innig ansaugt.

5. Der scheinbare Schlupf σ steigt in gleichem Verhältnis mit der Nutzspannung k_n, entsprechend der von Bach aufgestellten Beziehung

$$\sigma = \propto k_n \text{at} = \frac{\propto k_n \text{kg/cm}}{s^{\text{cm}}},$$

wobei sich $\propto$ zu $1/_{1100}$ ergeben hat. Erst wenn das Spannungsverhältnis

$$\frac{k_v + 1/2 k_n}{k_v - 1/2 k_n} = e^{\mu\omega}$$

so grofs geworden ist, dafs μ den Wert 0,6 bis 0,8 erreicht hat, vergröfsert sich der scheinbare Schlupf plötzlich auf einen Gleitschlupf.

Aus der Schlupfmessung bei verschiedener Uebersetzung ergab sich, dafs der Durchmesser $D_r = D + s$ als der für die Uebersetzung mafsgebende zu betrachten ist. Dabei ist s die Riemendicke.

6. Die Geschwindigkeit v des Riemens übt einen Einflufs sowohl auf die Gesamtspannung als auch auf den Reibungswert aus. Bei Geschwindigkeiten von mehr als 20 m/sk fällt die gemessene Auflaufspannung des ziehenden Trums $k_a + 1/2\, k_n$ um so gröfser als die rechnungsmäfsige Auflaufspannung $k_v - k_f + 1/2 k_n$ aus, je gröfser die Geschwindigkeit ist (s. unter 2). Bei höherer Geschwindigkeit sind ferner um so gröfsere Grenzwerte von μ festgestellt worden (s. unter 4). Ansaugen des Riemens, das um so mehr eintritt, je gröfser die Geschwindigkeit ist. Beide Umstände wirken in dem Sinne, dafs bei gleichbleibender Gesamtspannung die zulässige Nutzspannung, d. h. die Uebertragungsfähigkeit des Riemens, bei höherer Geschwindigkeit gröfser ist, als es nach der bisher üblichen Rechnung erwartet werden durfte.

7. Der Scheibendurchmesser beeinflufst den Reibungswert μ in dem Sinne, dafs μ um so höher ausfällt, je gröfser der Scheibendurchmesser ist. Diese Beobachtung läfst es im Zusammenhang mit der unter 4) und 6) genannten Erscheinung zweckmäfsig erscheinen, Riementriebe mit grofsen Scheibendurchmessern und hohen Geschwindigkeiten auszuführen.

8. Das Scheibenmaterial kommt insofern sehr merkbar zur Geltung, als Scheiben nach den Versuchen bis zu 600 mm Durchmesser aus Holz beträchtlich höhere Werte von μ ergeben haben als eiserne Scheiben; dieser Einflufs des Materials ist so grofs, dafs er den des Scheibendurchmessers überwiegt. Es empfiehlt sich daher um so mehr, die Scheiben aus Holz auszuführen, je kleiner sie sind. Ob die Abnutzung des Leders auf Holzscheiben nicht gröfser ist als auf Eisenscheiben, mufs noch durch ausgedehnte Dauerversuche festgestellt werden.

9. Eine Spannrolle, richtig bemessen und gelagert (in unmittelbarer Nähe der kleinen Scheibe, am gezogenen Trum, und von einem Durchmesser gleich dem anderhalbfachen bis doppelten der kleinen Scheibe), verringert bei Geschwindigkeiten bis zu etwa 30 m/sk den Wirkungsgrad nur sehr wenig, erhöht aber infolge des gröfseren umspannten Bogens das Spannungsverhältnis und mit ihm die übertragbare Nutzleistung. Entgegen dem herrschenden Vorurteil gegen Spannrollen, das auf schlechte Ausführungen zurückzuführen ist, ist daher die Einschaltung einer Spannrolle immer dann zu empfehlen, wenn eine grofse Uebersetzung angestrebt wird (vrgl. z. B. das Lenixgetriebe Abb. 107).

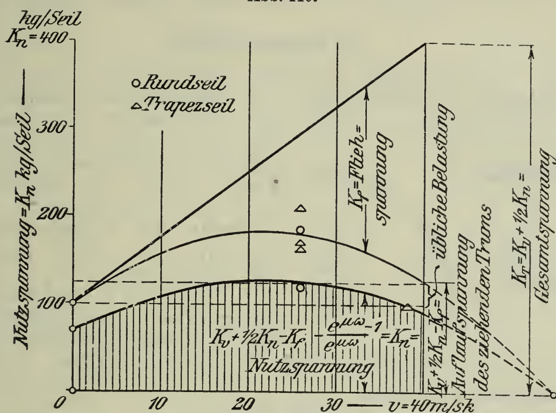
Da die Spannrolle gestattet, den Riemen jederzeit mit dem zulässigen Mindestwert der Vorspannung zu betreiben, so wird der Riemen sehr geschont.

10. Die zulässige Nutzspannung k_n ist abhängig von der dem Riemen zuträglichen Gesamtspannung $k_t = k_v + 1/2\, k_n$, von der Riemengeschwindigkeit v, von dem Reibungswert μ und von dem Scheibendurchmesser D.

Zunächst hat sich ergeben, dafs die Dehnung des Riemens nicht den Wert erreicht, der rechnungsmäfsig der Gesamtspannung $k_v + 1/2\, k_n$ entspricht, und zwar um so weniger, je höher die Geschwindigkeit ist. Man wird daher die zulässige Gesamtspannung nicht als eine gleichbleibende Gröfse einführen dürfen, sondern wird sie für gröfsere Geschwindigkeiten etwas höher, für kleinere etwas niedriger wählen müssen.

(Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl. S. 428). In Abb. 110 ist willkürlich $k_v + {}^1/_2 k_n$ für $v = 0$ zu 5 kg/cm und für $v = 40$ zu 25 kg/cm für einfache Riemen auf Scheiben von 1000 mm Dmr. gewählt worden. Von der Linie, die diese Gesamtspannung darstellt, ist zunächst

Abb. 110.



die Fliehspannung k_f in Abzug gebracht worden, so daſs die Ordinate der neuen Linie dem Wert $k_v + {}^1/_2 k_n - k_f$, also der Auflaufspannung des ziehenden Trums entspricht.

Ferner ist nach Punkt 4. der Reibungswert μ wesentlich höher, als bisher vorausgesetzt. Dementsprechend sind nicht mehr der Reibungswert $\mu = 0{,}28$, das Spannungsverhältnis $e^{\mu\omega} = 2$ und der Quotient

$$\frac{e^{\mu\omega} - 1}{e^{\mu\omega}} = 0{,}5,$$

sondern der Wert $\mu = 0{,}5$, das Spannungsverhältnis $e^{\mu\omega} = 3{,}5$ und der Quotient

$$\frac{e^{\mu\omega} - 1}{e^{\mu\omega}} = 0{,}7$$

der Abb. 110 zugrunde gelegt worden. Aus der Linie für $k_v + {}^1/_2 k_n - k_f$ ergibt sich dann die Kurve für

$$[k_v + {}^1/_2 k_n - k_f] \frac{e^{\mu\omega} - 1}{e^{\mu\omega}},$$

deren Ordinate nichts anderes als die zulässige Nutzspannung k_n darstellt.

Diese letztere Linie für k_n umschlieſst die Werte aller Versuche, die bisher ausgeführt wurden. Da diese Versuche mit groſser Vorsicht angestellt wurden, um die Vergleichsriemen nicht zu schädigen, so ist zu erwarten, daſs weitergehende Dauerversuche eine Höherlegung der Linie für k_n zulassen werden. Für gröſsere Scheibendurchmesser sind die Werte für k_n dem gröſseren beobachteten μ entsprechend zu erhöhen, für kleinere Durchmesser entsprechend zu erniedrigen.

Jedenfalls stimmt aber der Verlauf der Linie für k_n recht gut mit den Werten überein, die aus den Erfahrungen der Praxis durch die Veröffentlichungen von C. Otto Gehrckens in Hamburg bekannt geworden sind.

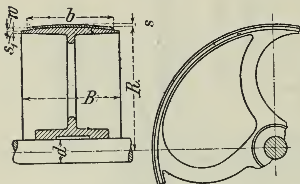
11. Dauerversuche mit verschiedenartigem Riemenmaterial (Chromleder, Gummi, Balata, Baumwolle, Kamelhaar) müssen noch durchgeführt werden, um die für dauernden Betrieb zulässige Gesamtspannung $k_v + \frac{1}{2} k_n$ festzustellen.

12. Die bisher übliche Prüfung von Riemen durch Festigkeitsversuche liefert keinen Mafsstab für die Brauchbarkeit des Riemens im Betrieb.

2. Riemenscheiben.

Meist aus Gufseisen, in neuerer Zeit vielfach auch aus Holz, Schmiedeiserne Scheiben (Nabe aus Gufseisen oder Stahlgufs, Arme aus schmiedeisernen Rundstäben, Kranz aus Blech oder aus Blech gedrückt mit gufseiserner Nabe) sind wenig beliebt. Die folgenden Angaben gelten für Gufseisen.

Abb. 111.



Breite des Scheibenkranzes (s. Abb. 111) für gerade und ruhig laufende Riemen

$$B = 1{,}1\, b + 1{,}0 \text{ cm},$$

für geschränkte oder unruhig laufende Riemen etwas mehr, bei der getriebenen Scheibe in diesem Falle $B = 2\, b$ und darüber.

Randdicke des Kranzes

$$s_1 = 0{,}01\, R + 0{,}3 \text{ cm}.$$

Wölbungshöhe w des Kranzes, wenn w und B **mm:**

$$w = \tfrac{1}{4}\sqrt{B} \quad \text{bis} \quad \tfrac{1}{3}\sqrt{B}.$$

Die Wölbung hat den Zweck, die kleinen, unvermeidlichen Aufstellungsfehler der Triebwerkanlage auszugleichen.

Alle treibenden Scheiben, ferner beide Scheiben bei Kreuz- und Winkeltrieb (bei letzterem auch die Leitrollen) sowie die Scheiben auf denen der Riemen verschoben werden mufs oder auf denen mehrere Riemen laufen (mehrfache Scheiben), sind nicht gewölbt (ballig) sondern flach, d. h. zylindrisch abzudrehen.

Wagerecht angeordnete Scheiben erhalten einen **Rand;** sonst sind Ränder an den Scheiben zu vermeiden, da sie nicht nur nicht nützen, sondern auch den Riemen zerstören, sobald er die Ränder berührt.

Die Scheiben seien **glatt,** weil der elastische Riemen auf der Scheibe gleitet, d. h. gegen die Scheibe voreilt (sich längt) oder zurückbleibt (einkriecht), je nachdem er vom gezogenen Riemenstück in das ziehende oder vom ziehenden in das gezogene übergeht; auch ergeben glatte Scheiben geringere Abnutzung des Riemens als rauhe Scheiben.

Die **Anzahl der Arme** sei, wenn D der Scheibendurchmesser in **mm** ist, etwa:

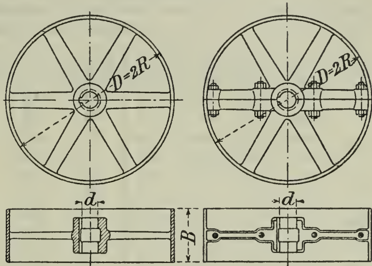
$$i = \tfrac{1}{7}\sqrt{D}.$$

Die Arme werden (bei genügend schwachem Kranze) nur noch gerade hergestellt (Abb. 112); die früher übliche geschwungene For

vergröfsert nur das Gewicht der Scheibe nachteilig, nicht aber deren Festigkeit, beseitigt auch nicht etwaige Gufsspannungen.

Der nach dem Kranze zu im Verhältnis von etwa 5 : 4 sich verjüngende **Armquerschnitt** ist meist ellipsenförmig (Achsenverhältnis 1 : 2 bis 1 : 2,5). Ist bei dem bis zur Wellenachse verlängert gedachten Arme h (in cm) die grofse und 0,4 h die kleine Achse des Ellipsenquerschnittes und erfolgt die Kraftübertragung durch $^1/_3\, i$ Arme, so findet sich mit $c = 10$ und $k_b = 300$:

Abb. 112.



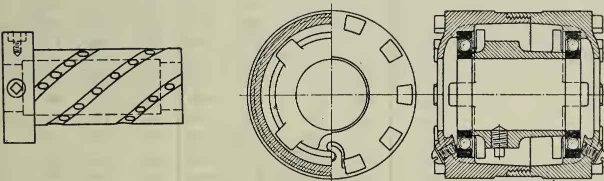
$$h = \sqrt[3]{\frac{2,5}{i}\, b\, s\, R},$$

worin b, s und R in cm und für $b s$ mindestens 3 qcm einzuführen sind.

Die **Naben** können ein wenig schwächer, als für Räder (S. 704) angegeben, gemacht werden und eine Länge $= B$ erhalten, sofern dabei $B \geq 1,2\, d$ bis $1,5\, d$ (d = Wellendurchmesser). Breitere Scheiben erhalten meist kleinere Nabenlänge als B. Bei Doppelscheiben genügt als Nabellänge $^1/_2\, B$, wenn $^1/_2\, B \geqq {}^5/_4\, d$ bis $^7/_4\, d$. Für $B > 30$ cm gibt man der Scheibe zwei Armsterne.

Bei **Los- oder Leerscheiben** ist das auflaufende Riemenstück zu verschieben. — **Losscheiben** erhalten eine Nabenlänge $= 2\, d$ und mehr. Achsiale Schubbegrenzung ist vorzusehen. — Bei gröfserem Riemenzug und langanhaltendem Leerlauf entsteht leicht starke Erwärmung

Abb. 113. Abb. 114.



und Abnutzung. Um dies zu vermeiden und die Gleitflächen genügend mit Oel zu versorgen, werden Leerlaufbüchsen verwendet (vrgl. Abb. 113). Eine **selbstschmierende Kugellagerlaufbüchse** von G. Polysius in Dessau, bei der zwischen den Kugellaufringen eine Büchse sitzt, die mit Armen zum Heben und Abstreifen des Oels versehen ist, zeigt Abb. 114. Der äufsere Oelbehälter besteht aus zwei ineinander geschraubten Muffen.*)

*) Vrgl. Volk, Maschinenteile, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1767.

Gewichte fertig gedrehter und gebohrter Riemenscheiben nach Abb. 112 in kg.

(Angaben der B.-A. M.-A.-G., Dessau.)

Die **obere** Gewichtsangabe gilt für die **ungeteilte**, die **untere** für die **geteilte**, gebrauchsfertige Scheibe. Die Scheiben sind **flach** (nicht ballig) gedreht. Bohrung $< 0{,}1\,D + 20$ mm.

D in mm	Breite B der Scheiben in mm											
	75	100	125	150	200	250	300	350	400	450	500	600
200	6,5 7,5	7,5 8,5	8,5 10,0	10,0 11,5	12 14	14,5 16,5	18 21	25 28	30 33	·	·	
300	10,0 11,0	11,5 12,5	13,0 14,5	15,0 16,5	17 19	22,0 26,5	27 31	37 43	43 53	·	·	·
400	15,0 16,0	16,5 18,0	18,0 19,5	20,0 21,5	23 28	32,0 36,5	37 44	52 61	58 73	·	·	·
500	20,0 21,5	21,5 23,5	23,0 25,0	28,0 31,0	33 38	42,0 47,0	49 59	67 81	74 95	86 96	98 108	·
600	24,0 26,0	25,5 28,5	27,0 30,0	35,0 39,0	42 48	50,0 59,0	61 71	83 99	92 117	106 120	122 136	·
700	28,5 31,0	31,0 34,0	34,0 38,0	43,0 48,0	52 59	62,0 71,0	75 85	100 121	112 141	130 148	146 164	·
800	·	39,0 43,0	42,0 47,0	51,0 58,0	62 71	76,0 85,0	89 101	120 145	132 165	154 178	174 192	·
900	·	47,0 52,0	50,0 56,0	59,0 68,0	72 84	90,0 99,0	105 119	141 171	154 191	182 210	204 224	·
1000	·	55,0 61,0	58,0 65,0	69,0 79,0	84 98	104 115	123 137	165 199	178 217	212 244	236 260	·
1100	·	64,0 71,0	68,0 76,0	79,0 91,0	96 113	122 131	142 157	189 229	202 247	244 280	268 298	·
1200	·	74,0 82,0	80,0 89,0	91,0 103	110 129	140 149	162 177	217 261	230 279	280 318	304 338	·
1300	·	84,0 93,0	92,0 102	105 117	126 146	160 169	184 198	245 295	260 313	316 358	344 382	·
1400	·	·	·	119 133	142 164	182 191	207 222	277 331	292 349	354 400	388 428	·
1500	·	·	·	135 151	162 183	204 215	231 248	310 369	326 387	394 444	432 478	·
1600	·	·	·	153 171	182 203	226 241	258 276	346 409	364 427	438 490	480 530	·
1700	·	·	·	171 191	202 225	248 269	286 306	382 451	404 469	484 540	528 586	·
1800	·	·	·	191 213	222 249	274 299	316 338	420 495	446 515	534 594	580 642	·
1900	·	·	·	211 237	246 275	302 331	346 372	462 541	490 565	586 652	634 704	·
2000	·	·	·	·	270 303	330 365	378 408	506 589	538 619	642 714	692 766	·
2500	·	·	·	·	416 473	496 561	560 618	776 889	828 927	968 1078	1034 1136	1254 1376
3000	·	·	·	·	608 693	706 791	784 878	1116 1259	1188 1327	1372 1510	1456 1596	1748 1904
3500	·	·	·	·	838 963	956 1071	1048 1188	1512 1685	1604 1797	1838 2034	1950 2134	2318 2508
4000	·	·	·	·	1096 1269	1234 1383	1346 1532	1932 2169	2050 2308	2334 2590	2486 2738	2938 3160

3. Stufenscheiben.*)

Bedingung: Riemenlänge L = konst. — Man ordnet die Stufenscheiben vielfach so an, dafs die verschiedenen Umlaufzahlen der getriebenen Welle eine geometrische Reihe bilden.

Im allgemeinen sind gegeben: der Achsenabstand e, die Stufenzahl, die minutlichen Umlaufzahlen n_{max} und n_{min} der getriebenen Welle, die gleichbleibende minutliche Umlaufzahl n der treibenden Welle und deren gröfster Scheibenhalbmesser r_1, dem also auf der getriebenen Welle als kleinster Halbmesser entpricht:

$$r_2 = r_1 (n : n_{max}).$$

Die theoretische Riemenlänge ist:

$$L = \pi (r_1 + r_2) + 2\beta \frac{\pi}{180} (r_1 \mp r_2) + 2e \sqrt{1 - \left(\frac{r_1 \mp r_2}{e}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

$$L \sim \pi (r_1 + r_2) + 2e + \frac{(r_1 \mp r_2)^2}{e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II,}$$

worin − für offene und + für gekreuzte Riemen gilt und der Winkel β (vrgl. Abb. 97, S. 711) in Grad auszudrücken ist, so dafs

$$\sin \beta = \frac{r_1 \mp r_2}{e}.$$

Soll nun L für ein anderes Halbmesserpaar $(R_1 R_2)$ denselben Wert besitzen wie für $(r_1 r_2)$, so mufs für den **gekreuzten** Riemen

$$R_1 + R_2 = r_1 + r_2,$$

d. h. die Summe je zweier zusammengehörigen Halbmesser mufs bei miteinander arbeitenden Stufenscheiben unveränderlich sein.

Daher müssen auch im Falle des gekreuzten Kegeltriebes die Kegelseiten beider Trommeln gleiche Achsenwinkel bilden. — In manchen Fällen können die beiden [einander entgegengesetzt gelagerten] Stufenscheiben (bzw. Kegeltrommeln) ganz gleich, unter Benutzung desselben Modelles, ausgeführt werden.

Wenn für **offene** Riemen $e \geqq 20 (r_1 - r_2)$ ist, so genügt ebenfalls $R_1 + R_2 = r_1 + r_2 =$ konst. Ist e aber kleiner und wird z. B. das Uebersetzungsverhältnis $\varphi = R_1 : R_2$ beabsichtigt (genauer ist φ auszudrücken nach S. 713), so ermittle man (unter Benutzung des Wertes L aus Gleichung II) R_2 aus der angenäherten Gleichung:

$$R_2^2 (\varphi - 1)^2 + \pi (\varphi + 1\, e R_2 + 2e^2 = eL,$$

alsdann

$$R_1 = \varphi\, R_2 \quad \text{usw.}$$

Auszuführen ist hierbei das genaue L nach Gleichung I. — Mittels der für die verschiedenen Scheibenpaare auszurechnenden L lassen sich die gefundenen Halbmesser prüfen. — Bei kleinem e und offenem Riemen kann, streng genommen, ein zusammengehöriges Stufenscheibenpaar nicht gleich ausfallen; auch empfiehlt es sich, im Falle des offenen Kegeltriebes die eine Trommel etwas bauchig auszuführen.

c. Drahtseilbetrieb.

Zur eigentlichen Kraftübertragung (Transmission) auf kleinere Entfernung neuerdings seltener angewendet. Bei gröfseren Entfernungen

*) Vrgl. J. Bartl, Zivilingenieur, Bd. XXVI, Heft 1; ferner Kohn, Z. d. V. d. I. 1886 S. 1004.

Triebwerk-Drahtseile

von Felten & Guilleaume-Lahmeyerwerke in Mülheim (Rhein), Wien und Budapest.

I. Für normale Seilscheiben-Durchmesser: $D = 150\,d$ bis $175\,d$.				II. Für kleine Seilscheiben-Durchmesser: $D = 120\,d$ bis $150\,d$.			
Durchmesser des Seiles	Zahl der Drähte im Seile	Dicke der Drähte im Seile	Ungef. Gewicht des Seiles	Durchmesser des Seiles	Zahl der Drähte im Seile	Dicke der Drähte im Seile	Ungef. Gewicht des Seiles
mm	Stück	mm	kg/m	mm	Stück	mm	kg/m
9	36	1,0	0,26	11	48	1,0	0,36
10	42	1,0	0,31	12	54	1,0	0,40
11	36	1,2	0,38	13	60	1,0	0,45
12	42	1,2	0,45	14	64	1,0	0,48
13	36	1,4	0,51	15	72	1,0	0,55
14	42	1,4	0,61	16	64	1,2	0,69
15	48	1,4	0,70	18	72	1,2	0,79
16	42	1,6	0,79	20	80	1,2	0,88
18	48	1,6	0,91	22	80	1,4	1,20
20	48	1,8	1,15	24	88	1,4	1,33
22	54	1,8	1,30	26	80	1,6	1,56
24	60	1,8	1,46	28	88	1,6	1,73
26	60	2,0	1,80	30	80	1,8	1,98
28	66	2,0	2,00	32	88	1,8	2,19
30	72	2,0	2,20	34	96	1,8	2,41
				37	96	2,0	2,97

III.

Eisendraht (statt Hanf) in den Litzen.

(Nur für grofse Achsenabstände und grofse Seilscheiben.)

Kleinster zulässig. Seilscheiben-Durchm. mm	Drahtdicke mm	Durchmesser des Seiles mm	Zahl der Drähte im Seile	Ungef. Gewicht des Seiles kg/m	Kleinster zulässig. Seilscheiben-Durchm. mm	Drahtdicke mm	Durchmesser des Seiles mm	Zahl der Drähte im Seile	Ungef. Gewicht des Seiles kg/m
		7	24	0,18			10,5	24	0,41
1000	1,0	9	42	0,32	1500	1,5	14	42	0,71
		12	56	0,42			18	56	0,95
		7,5	24	0,22			11	24	0,46
1100	1,1	10	42	0,38	1600	1,6	15	42	0,81
		13	56	0,51			19	56	1,08
		8,5	24	0,26			12	24	0,52
1200	1,2	11	42	0,46	1700	1,7	16	42	0,92
		14	56	0,60			20	56	1,21
		9	24	0,30			13	24	0,58
1300	1,3	12	42	0,54	1800	1,8	17	42	1,03
		15	56	0,71			21	56	1,36
		10	24	0,35			14	24	0,72
1400	1,4	13	42	0,62	2000	2,0	19	42	1,27
		17	56	0,82			23	56	1,68

In Tafel III ist für jede Drahtdicke ein Zwischendurchmesser fortgelassen.

(schon von 50 m ab) mehr und mehr durch elektrische Kraftübertragung verdrängt.

1. Drahtseile, Die schraubenförmig um eine Hanfseele gelagerten Drähte bilden eine Litze (Strähne); das Seil besteht aus einer Anzahl Litzen, die schraubenförmig um eine gemeinsame Hanfseele angeordnet sind (hierzu Tafel I und II, S. 728). Statt der Hanfseelen auch weicher, ausgeglühter Eisendraht; solche Seile (Tafel III, S. 728) sind weniger biegsam, recken sich aber weniger leicht und eignen sich daher besonders für grofse Scheibenabstände und grofse Scheiben.

Draht aus schwedischem Holzkohleneisen oder aus Tiegelstahl, verzinkt oder unverzinkt. Im Freien (wegen der Rostgefahr) und bei grofsen Achsenabständen (über 50 m), um übermäfsiges Längen des Seiles durch sein Gewicht zu verhindern, sind Stahldrahtseile mit verzinkten Drähten empfehlenswert. Zum Verspleifsen der Seilenden ist 3 bis 5 m Mehrlänge erforderlich. Das statt des umständlichen Splisses benutzte Seilschlofs (2 Anschlufshülsen mit Oesen, 4 Keile und 1 zweiteiliges Verbindungsglied) beschädigt auf die Dauer die Scheiben. Rostschutz durch **Schmieren** der Seile (alle 3 bis 6 Wochen) mit gekochtem Leinöl oder gekochtem Talg mit Graphit oder Seilfirnis. Die Dauer eines Seiles, gute Einrichtungen und sorgsame Behandlung vorausgesetzt, beträgt bei fortwährendem Betriebe 2 bis 3 Jahre. — Elastizitätsmodul für Drahtseile s. S. 248 u. 403.

2. Drahtseil-Scheiben, geteilt oder ungeteilt, gewöhnlich ganz aus Gufseisen mit 6 oder 8 geraden Armen von ellipsenförmigem Querschnitte (vrgl. S. 725), bei mehr als 1 m Dmr. auch wohl mit doppeltem schmiedeeisernem Armsterne und grofser Armzahl. Bei geteilten Scheiben kann die Teilung innerhalb eines (gufseisernen) Armpaares oder zwischen zwei gegenüberliegenden Armen liegen. Durchmesser der Scheiben s. S. 731. Gewichte gufseiserner Seilscheiben s. nachstehende Tafel. Die Scheiben dürfen nicht schlagen und werden deshalb gut ausbalanziert und nicht auf die Achsen aufgekeilt (durch Hohl-, Flach- oder Nutenkeil), sondern besser mit gespaltener Nabe versehen und durch Schrauben aufgeklemmt; der beigetriebene Keil darf nur ein Mitnehmerkeil (Tangentialkeil) sein.

Gewichte gufseiserner Drahtseil-Scheiben

von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein), Wien und Budapest.

6 Arme. Teilung erfolgt in einem Armpaare		Ungeteilte Scheiben								Geteilte Scheiben			
Scheiben-Durchmesser	mm	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000	3250	3500	3600
Gewicht der **einrilligen** Scheiben	kg	106	135	160	215	270	330	400	575	1015	1200	1410	1600
Gewicht der **zweirilligen** Scheiben	kg	170	210	255	315	395	510	645	825	1270	1580	1950	2300

Der Seilscheibenrille (Abb. 115 u. 116) gibt man die doppelte Seildicke als Tiefe, sodafs das Seil (mittels des Seilauflegers) leicht aufzulegen und abzuschlagen ist, doch wird (s. Abb. 117) die Rille häufig viel tiefer gemacht. (Ausführung von G. Polysius, Dessau.) Ausfütterung der Rille bei Trieb- und Zwischenrollen mit Stückchen Hirnleder, seitlich eingeschoben (Abb. 115) oder schräg eingesteckt

Abb. 115.



Abb. 116.

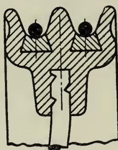


Abb. 117.

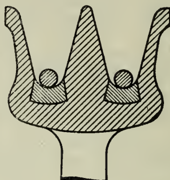
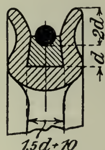


Abb. 118.

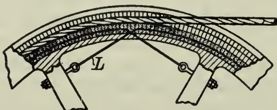


und dicht aneinander getrieben und abgedreht (Abb. 116 u. 117). Seilscheibe mit zwei Rillen mit gufseisernem Kranz und Nabe und mit eingegossenen Armen aus Rundeisen (Abb. 116). Dauer des Lederfutters 3 Jahre und darüber. Auch Holzfutter (mit radialer Faserrichtung) oder Guttapercha. Bei Guttapercha (teurer als Leder) ist der Einflufs von Wärme und Oel zu beachten. Die Ausfütterung wird entweder nach Abb. 117 oder nach Abb. 118 hergestellt. Die Rillen sind stets glatt auszudrehen, auf dem Grunde genau nach dem Durchmesser des Seiles und so, dafs dieses mit einem Drittel seines Umfanges aufliegt.

Abb. 119.



Abb. 120.



Bei der Bauart „Heckel“ (ausgeführt von Felten & Guilleaume) sind die Lederplättchen P auf eine Drahtlitze L (Abb. 119 u. 120) aufgereiht, die an drei Armen der Scheibe befestigt ist.

Bei Bestellung von Triebwerk-Drahtseilen und deren Seilscheiben empfiehlt sich die Angabe der Anzahl der zu übertragenden PS, ferner des Achsenabstandes, der Umdrehungszahlen, der Scheibendurchmesser, der Scheibenbohrungen, des Rillenquerschnittes; endlich ist anzugeben, ob die Scheiben mit oder ohne Ledereinlage, und ob sie geteilt oder ungeteilt zu liefern sind.

3. Anordnung des Betriebes. Drahtseilbetrieb wird meist angewendet für grofse Achsenabstände; die ganze Arbeitsleistung wird meist durch ein endloses Seil übertragen, doch nimmt man der Betriebssicherheit wegen vereinzelt auch wohl zwei getrennte Seilleitungen.

Die erforderlichen Seilspannungen S_1 und S_2 (vrgl. S. 711 u. f.) werden durch das Eigengewicht des Seiles hervorgebracht; Spannrollen (Spannwagen) oder straffes Anspannen sind zu verwerfen. Kleinster Achsenabstand der Triebrollen 15 bis 20 m, gröfster 80 bis 125 m; nur geringe Kräfte lassen sich mit verhältnismäfsig grofsen Scheiben noch bei 13 m Entfernung übertragen.

Wird der Achsenabstand gröfser als 80 bis 125 m, so ist das Seil, zumal das gezogene Seilstück, alle 80 bis 125 m durch Tragrollen

zu unterstützen (einfacher Seiltrieb), oder man teilt besser die ganze Trieblänge (früher bis zu 2000 m ausgeführt) in kleinere Strecken ($\lesssim$ 100 m) ein und ordnet an den Zwischenstellen zweirillige Rollen an (zusammengesetzter Seiltrieb); Abstand der Zwischenstellen möglichst gleich grofs, um die vorrätig zu haltende Anzahl gebrauchsfertiger Ersatzteile zu verringern.

Wechsel der Seilrichtung durch Leitrollen oder (besser) durch Einschalten eines Kegelräderpaares oder eines Riemenwinkeltriebes (Wechselstation). — Die Anwendung von Trag- und Leitrollen ist im allgemeinen nicht ratsam.

Die Mittelebenen der treibenden und der getriebenen Scheibe sollen genau in derselben lotrechten Ebene liegen; die Trieb- und die Zwischenscheiben sollen möglichst gleichen Durchmesser haben. Eine etwa gewünschte gröfsere oder kleinere Umlaufzahl der getriebenen Scheibe durch Einschalten eines Riemenvorgeleges zwischen Antriebscheibe und Kraftquelle. Stöfse im Betriebe sind, da sie das Seil vorzeitig zerstören, zu vermeiden; u. Umst. ist deshalb durch Einschalten besonderer Schwungmassen die gleichmäfsige Aufnahme und Abgabe der Kraft zu sichern. Das untere Seilstück sei das ziehende.

Die Durchsenkung beträgt für je 100 m Achsenabstand beim ziehenden Seilstück etwa 1,5 m, beim losen etwa 3 m. Nach der Durchsenkung richten sich die Höhen der Tragpfeiler (Lagerstühle). Die Längenänderung des Seiles durch Temperaturwechsel (etwa $\pm$ 25 mm für je 100 m Seillänge in Bezug auf die Mitteltemperatur, bei einem gesamten Temperaturunterschiede von 40°) wird durch die Durchsenkung ausgeglichen.

Lotrechter oder nahezu lotrechter Seiltrieb ist wegen Mangels der Durchsenkung ohne bewegliche Spann- oder Leitrollen bei Verwendung der üblichen Drahtseile nicht zulässig. — Kreisseiltrieb (s. S. 735) empfiehlt sich für Drahtseil nicht. — Schutzvorrichtungen (Netze usw.) sind für den Personenverkehr gegen abschlagende oder gerissene Seile anzubringen.

4. Berechnung der Drahtseile. Es bedeute

d den Durchmesser des Seiles in cm,
δ die Dicke der einzelnen Drähte in cm,
i die Anzahl der Drähte im Seile,
D den Durchmesser der treibenden Scheibe in cm,
n deren minutliche Umlaufzahl,
v die Seilgeschwindigkeit in m/sk,
P die durch das Seil übertragbare Kraft in kg,
N die zu übertragende Leistung in PS,
E den Elastizitätsmodul des Drahtes in kg/qcm (s. S. 403),
c_1 einen Beiwert in kg/qcm.

Die weiteren Bezeichnungen S_1, S_2, S_0, k_z, σ_z, q, α, μ, e, g s. S. 711.

Je gröfser D, desto haltbarer ist das Seil und desto besser wirkt es. Man wähle (auch für die getriebene Scheibe und die Zwischenrollen)

$$D \geqq 150\,d \quad \text{oder auch} \quad \geqq 1500\,\delta.$$

Seilscheiben unter 1 m Durchmesser sind nicht zu empfehlen.

Durchmesser der Tragrollen $= 0{,}8\,D$. $n\,(=100$ bis $130)$ und D sind so zu wählen, dafs bei Uebertragung geringerer Kräfte $v = 6$ bis 10 m/sk, bei gröfseren Kräften $v = 20$ bis 30 m/sk wird.

Ist σ_b die im Seile durch das Umschlingen der Scheibe hervorgerufene Biegungsspannung in kg/qcm, und wird für Eisendrahtseile eine Gesamtspannung $k_z = 1050$ kg/qcm als zulässig erachtet, so folgt für $E = 2\,000\,000$ kg/qcm aus

$$\sigma_b = \left(\frac{3}{8}E\right)\frac{\delta}{D}\,^{*)} \quad \text{und} \quad k_z = \sigma_z + \sigma_b$$

die durch S_1 im Seile hervorgerufene mittlere Normalspannung $\sigma_z = 1050 - 750\,000\,\frac{\delta}{D}$, im besondern für

$$\begin{array}{llll} D = 1500\,\delta & 2000\,\delta & 2500\,\delta & \\ \sigma_z = \;\;550 & 675 & 750 \text{ kg/qcm.} \end{array}$$

Für $\sigma_z = 675$ kg/qcm ergibt sich, da für mittlere Verhältnisse der Metallquerschnitt des Seiles

$$f = i\,.\,{}^1\!/_4\,\pi\,\delta^2 = 0{,}42\,.\,{}^1\!/_4\,\pi\,d^2:$$

$$S_1 = \sigma_z f = 223\,d^2 \quad \text{und} \quad \text{allgemein} = c_1\,d^2.$$

Ferner ist im Mittel $q = 0{,}35\,d^2$, $\mu = 0{,}25$ (für ausgelederte Scheiben), $\alpha = 2{,}8$, also $e^{\mu\alpha} \sim 2$, aus der allgemeinen Formel für P auf S. 711 folgt daher die zu übertragende Kraft:

$$P = 0{,}5\left(c_1 - 0{,}35\,\frac{v^2}{g}\right)d^2.$$

Für $v = 25$ m/sk, $g = 9{,}81$ m/sk³, $c_1 = 223$ kg/qcm ergibt sich

$$\boldsymbol{P = 100\,d^2.}$$

Dieser Wert für P gilt nur unter den vorstehenden Voraussetzungen; für kleine Scheibendurchmesser, für geringe Achsenabstände und ebenso für nicht ausgefütterte Scheiben ist P kleiner zu nehmen.

Sind N, v und n bekannt, so folgt aus $Pv = 75\,N$, wenn für die Antriebscheibe $D = 200\,d$,

$$d^2 = \frac{3}{4}\,\frac{N}{v} \quad \text{und} \quad d = \sqrt[3]{\frac{45}{2\pi}\,\frac{N}{n}} = 1{,}93\,\sqrt[3]{\frac{N}{n}}.$$

Für das gezogene Seilstück wird (unter den vorstehenden Bedingungen) $S_2 = 123\,d^2$, sodafs das Seil mit einer Anspannung $S_0 = {}^1\!/_2\,(S_1 + S_2) = 173\,d^2$ aufgelegt werden mufs.

$(Pv)_{\max}$, die gröfste übertragbare Leistung, wird (nach S. 712) für $S_1 = 223\,d^2$ und $q = 0{,}35\,d^2$ erreicht bei $v' = 45{,}6$ m/sk; jedoch wählt man in der Regel $v = 25$ m/sk, wie vorstehend angenommen.

---

*) Der Beiwert ${}^3\!/_8$ ergibt eine Berichtigung mit Rücksicht darauf, dafs die Biegungsbeanspruchung $\frac{E\delta}{d}$ bei Beginn der Krümmung nicht plötzlich auftreten kann, sondern dafs hier ein Ausgleich derart stattfindet, dafs der Querschnitt des Seiles nicht radial bleibt, wie die Rechnung dies voraussetzt, so dafs σ_b kleiner als $\frac{E\delta}{d}$ ausfällt.

Für die Untersuchung der Seildurchsenkung vrgl. S. 712 und 713. — Da der Geschwindigkeitsverlust $\mathfrak{V}$ nur gering ist (vrgl. S. 246), so ist bei der Bestimmung des Uebersetzungsverhältnisses φ darauf keine Rücksicht zu nehmen. Der Arbeitsverlust kann mit 1 bis 1,5 vH für je 100 m Achsenabstand veranschlagt werden.

d. Hanfseil- und Baumwollseilbetrieb.

1. Seile. Die geschlagenen Rundseile bestehen meist aus drei Litzen, deren jede aus einer gröfseren Zahl schraubenförmig gewundener Fäden zusammengesetzt ist. Ist d der Seildurchmesser und δ der Litzendurchmesser, so ist $d \sim 2{,}2\,\delta$, mithin der Gesamtquerschnitt der Litzen etwa nur das 0,62-fache der Fläche $^1/_4\,\pi\,d^2$. Ganghöhe der Litzenschraubenlinien im Mittel etwa $5\,\delta$. Manilahanfseile sind weniger geschmeidig und verlangen daher gröfsere Scheibendurchmesser.

Runde Treibseile aus Hanf oder Baumwolle
von Felten & Guilleaume in Cöln (Rhein).
Seil-Gewicht q in kg/m.

Seildurchmesser d in mm	25	30	35	40	45	50	55
Gehechelter Schleifshanf . .	0,52	0,73	1,05	1,40	1,70	2,00	2,40
Hellster Manilahanf	0,46	0,65	0,85	1,20	1,45	1,85	2,20
Amerikanische Baumwolle . .	0,47	0,67	0,93	1,25	1,50	1,90	2,25

Zur Verbindung der Seilenden durch Verspleifsen ist 3 bis 4 m Mehrlänge nötig; Seilschlösser haben sich nicht bewährt. Das Nachspleifsen der im Betriebe gelängten Seile ist kostspielig und zeitraubend; deshalb sind die Seile vor dem Gebrauche gut auszurecken und zu trocknen. — Dauer der Seile bei sachgemäfsem Betriebe und guter Behandlung (Einfettung alle 2 bis 3 Monate, anfangs öfter) bis 6 Jahre und mehr.

Dreikantseile, geflochtene, von derselben Fabrik, ergeben durch die grofse, gleichmäfsige Auflagerfläche an beiden Rillenseiten gute Kraftausnutzung ohne erhebliche Formänderung des Seiles.

Seildurchmesser .	25	30	35	40	45	50	55	mm
Querschnitt . . .	4,3	6,5	9	12	15	19,5	23	qcm
Gewicht	0,43	0,65	0,90	1,20	1,45	1,70	2,00	kg/m

Quadratseile der Quadratseilfabrik „Patent Bek“ in Mannheim-Neckarau.

Seildicke	25	30	35	40	45	50	55	mm
Querschnitt . . .	6,25	9,0	12,25	16,0	20,25	25,0	30,25	qcm
Gewicht	0,55	0,90	1,10	1,45	1,75	2,15	2,70	kg/m
Scheibendurchmesser, kleinster . . .	0,375	0,45	0,7	0,8	0,9	1,1	1,4	m.

Die geflochtenen Quadratseile zeigen grofse Geschmeidigkeit, haben keine Neigung zu Drehbewegungen, weil drallfrei; sehr geringe Längenänderung.

Gewichte gufseiserner Hanfseilscheiben in kg.

Eisenwerk Wülfel vor Hannover.

Die oberen Gewichte gelten für ungeteilte, die unteren für geteilte, fertig bearbeitete Scheiben.

Scheiben-Durchmesser mm	Anzahl der Rillen für 45 mm Seildurchmesser									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1100	140 160	200 230	270 315	330 390	390 460	460 545	545 630	620 715	695 795	765 875
1200	155 175	220 250	290 335	360 420	430 500	500 585	605 690	680 775	755 855	835 945
1300	170 195	245 280	315 365	390 455	470 545	545 640	665 760	745 850	825 935	910 1030
1400	190 215	270 305	345 395	425 490	510 585	590 685	730 825	810 915	900 1010	985 1105
1500	205 230	295 335	375 430	460 530	550 635	635 740	790 895	880 995	970 1090	1065 1200
2000	305 335	420 470	535 605	655 740	770 870	885 1010	1125 1250	1255 1395	1370 1515	1495 1655
2500	420 460	575 640	730 820	885 995	1040 1170	1200 1355	1545 1700	1705 1875	1865 2045	2015 2215
3000	. .	770 845	970 1070	1175 1300	1380 1530	1585 1760	2055 2230	2260 2450	2465 2670	2670 2895

2. Seilscheiben. Gewöhnlich aus Gufseisen, geteilt oder ungeteilt, meist mit 6 geraden Armen, die bei über 300 mm breiten Scheiben als Doppelarme ausgebildet sind; Scheiben von mehr als 3 m Durchmesser erhalten 8 und 10 Arme. Armquerschnitt ellipsenförmig (vrgl. S. 725). Ueber Teilung der Scheiben vrgl. S. 729. Abb. 121 zeigt

Abb. 121.

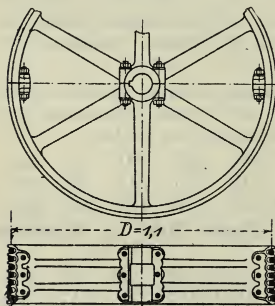


Abb. 122.

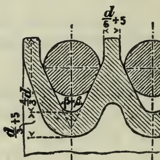
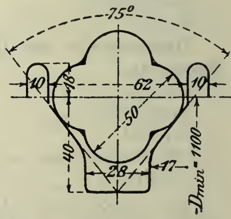


Abb. 123.



Abb. 124.



eine zwischen den Armen geteilte Hanfseilscheibe (von $D = 1{,}1$ m) der B.-A. M.-A.-G. zu Dessau.

Die Rillen einer Scheibe sollen möglichst glatt, mit gleichem Durchmesser und Querschnitte gedreht sein.

Für die Treib- und Zwischenrollen wähle man die Rillenform nach Abb. 122, wobei d der Seildurchmesser in mm und $\operatorname{tg} \beta = {}^8/_{20}$ bis ${}^9/_{20}$, oder $2\beta = 43{,}5$ bis 45^0; die Tragrollen erhalten auf dem Grunde nach dem Durchmesser d kreisförmig ausgedrehte Rillen (Abb. 123). Dreikantseile erhalten die Rillenform nach Abb. 122, ebenso Quadratseile; für letztere wird indessen bei Kreisseiltrieb die Rille nach Abb. 124 empfohlen.

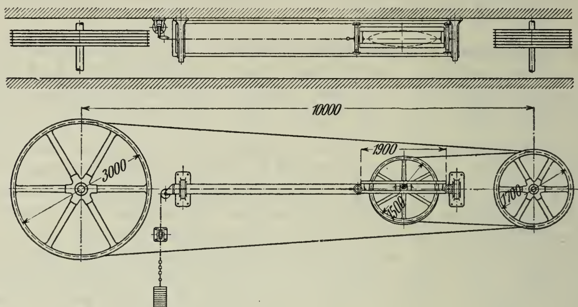
3. Anordnung des Betriebes. Hanfseil- (oder Baumwollseil-) betrieb ist da zweckmäfsig, wo Riemen durch grofse Länge und Breite zu kostspielig ausfallen. Zumeist Betriebe mit Dehnungsspannung, neuerdings mehr und mehr auch solche mit Belastungsspannung.

Bei dem Betriebe mit Dehnungsspannung wird die Kraft auf mehrere Seile (von höchstens 50 bis 55 mm Durchmesser) verteilt, die sie dann, je nach Bedarf, wieder gesondert abgeben können. Von der Antriebscheibe aus treiben einzelne Seilgruppen die verschiedenen Wellenstränge. Die erforderlichen Seilspannungen S_1 und S_2 (vrgl. S. 711 u. f.) werden durch das Seil-Eigengewicht und durch straffes Anspannen der Seile erzeugt, die vorher gut ausgetrockneten Seile müssen daher in einer 3 bis 5 vH kürzeren Länge gepleifst werden, als der Achsenentfernung und den Scheibendurchmessern entspricht. Der Achsdruck $2\,S_0'$ (in kg) (s. S. 712) steigert sich bei einem neu aufgelegten Seile bis $40\,d^2$ (d in cm) und darüber, wodurch die Scheiben, Wellen, Zapfen und Lager u. Umst. stark beansprucht werden. Gegen die das Seil verkürzende Feuchtigkeit der Luft helfen reichliche Seildurchsenkungen. Das untere Seilstück sei das ziehende. Lotrechter oder nahezu lotrechter Betrieb mit Dehnungsspannung ist nur mit sehr elastischen Seilen und bei gröfserem Achsenabstande möglich, aber wenig empfehlenswert. Abstand der Scheibenachsen zwischen 6 bis 8 m und 20 bis 25 m, bei gröfseren Abständen Zwischenrollen. Durchmesser der Seilscheiben bei Rundseilen mindestens $D = 30\,d$, besser 40 bis $50\,d$. Bei kleinem Achsenabstande und kleinem d besser Baumwollseile (s. w. unten). Abweichungen der Scheibenmittelebenen, abgesehen vom Leitrollenbetriebe, bis etwa $6^1/_2{}^0$ zulässig.

Bei dem Betriebe mit Belastungsspannung wird, wenn die Kraftabgabe auf mehrere Wellenstränge erfolgt, ein endloses Seil (bis zu 500 und 600 m Länge) über die verschiedenen Scheiben geführt, u. zw. leitet man am besten das Seil nach jeder Umschlingung einer Arbeitscheibe auf die gemeinsame Treibscheibe zurück, um es jedesmal zu entlasten, bevor es aufs neue Kraft überträgt. Die durch die dauernde Inanspruchnahme, den Temperatur- und den Feuchtigkeitswechsel erzeugte Längenänderung des Seiles wird von einer Stelle aus durch einen Spannschlitten (Spannwagen) ausgeglichen, so dafs fortwährend eine gleichmäfsige Seilspannung vorhanden ist. Derartige einseilige sogen. **Kreisseiltriebe** lassen sich auch zwei- oder mehrseilig einrichten; auch sind im Freien befindliche sowie lotrechte Antriebe hierbei leicht möglich. Die **Spannrolle,** wie sie bei Riemen mit Erfolg benutzt wird, ist bei Seilen zu vermeiden.

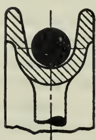
Der Spannschlitten ist an eine gezogene Seilschlingung anzuschliefsen, besonders bei stark wechselnder Kraftübertragung (s. Abb. 125). Anordnungen, bei denen das Seil abwechselnd in entgegengesetztem

Abb. 125.



Sinne gebogen wird, sind möglichst zu vermeiden, besonders bei kleineren Seillängen. Durchmesser der Spann- und Leitrollen $D \geqq 30\,d$; Rillenform so, dafs das Seil im Grunde aufruht und nicht klemmt (Abb. 126); Rillen der Treibrollen nach Abb. 122 (S. 734) mit $\operatorname{tg} \beta = 0{,}4$. Weglänge des Spannwagens bei Antrieben in Gebäuden etwa 2,5 vH, bei solchen im Freien 3 bis 3,5 vH der ganzen Seillänge (entspr. 5 bzw. 6 bis 7 vH Seilverlängerung); gestatten die örtlichen Verhältnisse diese Gleislänge nicht, so mufs das Seil später gekürzt werden. Belastungsgewicht regelbar aus einer gröfseren Zahl von Scheiben herzustellen.*)

Abb. 126.



4. Berechnung der Hanfseile. Bezeichnungen s. S. 731.

1. Betrieb mit Dehnungsspannung. Für Hanfseile wähle man $D = 30\,d$ bis $50\,d$. Seilgeschwindigkeit $v = 15$ bis 20 m/sk; darüber hinaus geht man selten. Für d in cm ist bei einem Hanfseile die übertragbare Kraft in kg:

$$P = 3\,d^2 \text{ bis } 4\,d^2, \text{ wenn } D \geqq 30\,d \text{ und } \alpha \geqq 2{,}5;$$

$$P = 5\,d^2 \text{ bis } 6\,d^2, \text{ wenn } D \geqq 50\,d \text{ und } \alpha \geqq 3{,}0.$$

Die gröfseren Werte von P sind nur dann zulässig, wenn der Betrieb wagerecht oder nur wenig schief, der Achsenabstand genügend, der Wechsel in der Gröfse von P nicht zu bedeutend ist, die Scheibendurchmesser reichlich bemessen sind, die Geschwindigkeit v etwa 20 m/sk nicht überschreitet, das Seil aus vorzüglichem Schleifshanfe gefertigt ist und die Spleifsstellen mit Sorgfalt hergestellt wurden.

Bei Verwendung von z Seilen folgt aus $Pzv = 75\,N$ und $P = 6\,d^2$ bis $3\,d^2$:

$$z\,d^2 = 12{,}5\,\frac{N}{v} \text{ bis } 25\,\frac{N}{v}.$$

*) Näheres s. Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl. 1908 S. 465.

Für $P = 4{,}5\,d^2$, $q = 0{,}075\,d^2$, $v = 20$ m/sk, $e^{\mu\alpha} \sim 2$ wird nach S. 710 u. f.:

$$S_1 \sim 12\,d^2; \qquad S_2 \sim 6\,d^2; \qquad S_0 \sim 9\,d^2.$$

Die Bestimmung von $(Pv)_{\max}$ nach S. 712 ergibt zu kleine Werte, da σ_z veränderlich, u. zw. wachsend mit v anzusehen ist.

Für eine Scheibe mit $D = 60\,d$ wird bei $P = 4{,}5\,d^2$ und z Seilen:

$$75\,N = Pz\,\frac{\pi D}{100}\,\frac{n}{60} = 4{,}5\,d^2\,z\,.\,0{,}6\,\pi\,d\,\frac{n}{60},$$

also

$$z = \frac{5000\,N}{3\pi n d^3} \sim 500\,\frac{N}{n d^3}.$$

Dreikantseile (s. S. 733) gestatten $P = 6\,d^2$, bei ruhigem, nicht stofsweise arbeitendem Betriebe bis $P = 7{,}5\,d^2$ (d = Seildurchm.)

Quadratseile „Patent Bek" (s. S. 733) ergeben für $v = 10$ bis 25 m/sk

$$P = 6\,s^2 \quad \text{bis} \quad 8\,s^2,$$

worin s die Seildicke in cm.

2. Betrieb mit Belastungsspannung. Bei der Anordnung, wobei das Seil nach jeder Umschlingung der getriebenen Scheibe auf die treibende zurückgeführt wird, gelten die Gleichungen unter 1., dabei können die Zahlenbeiwerte bis um 25 vH höher gewählt werden. Empfohlen wird

$$P = 5\,d^2, \quad D = 30\,d \text{ für Leit- und Spannrollen,}$$
$$D \geqq 30 \text{ bis } 40\,d \text{ für Treibrollen.}$$

5. Baumwollseile (s. Tafel S. 733) für Triebwerke berechne man wie Hanfseile (s. **4.**). Für Laufkrane geht man mit der übertragbaren Kraft wohl bis

$$P_{\max} = 9\,d^2 \quad \text{bei} \quad D \geqq 30\,d,$$

so dafs bei dem üblichen $v_{\max} = 25$ m/sk und dem Seildurchmesser $d = 16$ mm $^1/_{75}\,.\,9\,.\,1{,}6^2\,.\,25$ = rd. 8 PS übertragen werden können.

Für den Antrieb von Schiebebühnen, Laufkranen usw. werden Baumwollseile in Dicken von 16 bis 22 mm benutzt. Baumwollseile sind auch bei stofsendem Betriebe (z. B. bei Walzwerken) empfehlenswert. Bei ihnen ist E kleiner als bei Hanfseilen, daher ergeben sie ein erheblich gröfseres $\mathfrak{B}$ (vrgl. S. 246). Man wähle $D = 20\,d$ bis $30\,d$; zulässig sind noch Scheiben unter 1 m Durchmesser.

Die Kraftübertragung erfolgt durch Dehnungsspannung wie beim Riemenbetriebe; das dort Gesagte gilt also auch hier. Bei grofsen Seillängen sind Tragrollen anzuordnen. Der Achsenabstand kann wegen der Geschwindigkeit und grofsen Elastizität der Seile bis auf das 1,5 fache der Scheibendurchmesser-Summe verkleinert werden.

Treibrollen erhalten Rillen nach Abb. 122 (S. 734), bei Laufkranen $\beta \sim 15^0$; Leitrollen erhalten Rillen nach Abb. 123 (S. 734).

Zusammenfassung der Versuche Kammerers mit Hanfseilen.

1. Die Vorspannung K_v kann beträchtlich unter den rechnungsmäfsigen Wert sinken, ohne dafs Gleiten eintritt. Bei gleicher Gesamtspannung K_t kann dement-

sprechend die Nutzspannung bis zu einem Höchstwert von etwa 0,8 K_t steigen, statt 0,5 K_t, wie bei der üblichen Rechnung angenommen.

Dieser Vorteil kann indessen nur durch eine Spannvorrichtung ausgenutzt werden, welche die Vorspannung richtig ein- und nachzustellen erlaubt. Seiltriebe ohne Spannvorrichtung werden im allgemeinen immer mit zu hohen Vorspannungen arbeiten. Im Durchschnitt wird für Seiltriebe mit Spannvorrichtung eine Vorspannung von

$$K_v = 200 \text{ kg für 1 Rundseil von 50 mm Dmr.}$$

und für Seiltriebe ohne Spannvorrichtung eine Vorspannung von

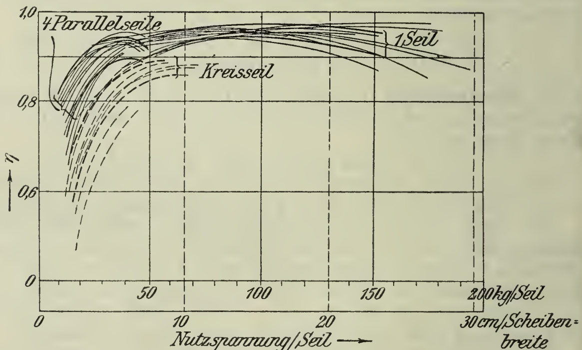
$$K_v = 400 \text{ kg für 1 Rundseil von 50 mm Dmr.}$$

genügen.

2. Die Gesamtspannung $K_v + {}^1/_2\, K_n$ ruft nicht diejenige Dehnung hervor, die dem Dehnungskoeffizienten entsprechen würde; die Dehnung bleibt vielmehr stark hinter diesem Wert zurück, wenn die Seilgeschwindigkeit mehr als 20 m/sk beträgt, u. zw. sowohl bei geringer wie bei grofser Belastung.

3. Der Wirkungsgrad η steigt in allen Fällen mit zunehmender Nutzspannung sehr rasch an. Bei Anwendung von nur einem Seil bleibt η bis zu einem hohen Wert der Nutzspannung nahezu unveränderlich und fällt dann langsam ab. Bei Parallelschaltung von vier Seilen dagegen fällt der Wirkungsgrad unmittelbar nach Erreichung des Höchstwertes wieder merklich ab. Die Grenzen der Höchstwerte liegen bei einem Seil zwischen $\eta = 0{,}94$ bis 0,96, u. zw. bei $K_n = 80$ bis 120 kg; bei vier Seilen liegen sie zwischen $\eta = 0{,}89$ bis 0,94 bei $K_n = 35$ bis 45; bei dem Kreisseiltrieb liegt η zwischen 0,86 und 0,90 bei $K_n = 50$ bis 60 kg. In Abb. 127 sind die beobachteten Wirkungsgrade übereinander gezeichnet und die so erhaltenen Linien-

Abb. 127.



büschel durch Grenzlinien umhüllt. — Die gemessenen Werte von η gelten für die Verluste durch Schlupf, Steifigkeit und durch den Luftwiderstand der Seile selbst; nicht enthalten sind darin Lagerreibung und Luftwiderstand der Scheiben. Die Lagerreibung ist bei den Seiltrieben beträchtlich gröfser als bei den Riementrieben, weil Seile im Durchschnitt mit gröfserer Vorspannung aufgelegt werden als Riemen, damit sie glatten Lauf zeigen.

Ein Vergleich zwischen den Wirkungsgraden der Riemen und der Seile läfst sich nur von Fall zu Fall stellen. Leistung, Geschwindigkeit, Scheibendurchmesser, Achsenabstand, Uebersetzung und Betriebseigentümlichkeiten werden in jedem einzelnen Fall berücksichtigt werden müssen.

Mit zunehmender Geschwindigkeit und mit abnehmendem Scheibendurchmesser nimmt bei Seiltrieben der Wirkungsgrad rasch ab. Für grofse Geschwindigkeiten und bei kleinen Scheibendurchmessern wird man daher wirtschaftlicher Riemen verwenden.

Spannvorrichtungen sind für die Wirtschaftlichkeit sowohl der Riemen als auch der Seile zweckmäfsig, weil sie gestatten, mit geringster, d. h. günstigster Vorspannung zu arbeiten. Während aber bei Riemen sowohl der Spannschlitten als auch die Spannrolle wirtschaftlich arbeitet, trifft dies bei Seilen nur für den Spannschlitten zu.

Der Höchstwert des Wirkungsgrades steigt beim einfachen und beim Doppelriemen auf 0,98, beim einseiligen Trieb auf 0,97, bei Rundseilen in Parallelschaltung auf 0,95 und bei 4 Rundseilen in Kreisseilschaltung auf 0,90, bei günstigster Vorspannung und Nutzspannung in allen Fällen. Aus dem Schaubild ist ersichtlich, dafs diejenige Nutzspannung, bei welcher der Wirkungsgrad einen Höchstwert erreicht, bei Parallelseilen und beim Kreisseil wesentlich geringer ist als bei einem Seil.

Zu den gemessenen Verlusten kommt noch die Lagerreibung (im allgemeinen bei Rundseilen gröfser als bei Riemen und bei Trapezseilen gröfser als bei Rundseilen).

4. Der Reibungswert μ ist bis zu $\mu = 0,6$ wiederholt beobachtet worden, ohne dafs Gleitschlupf eingetreten ist. Eine Ausnutzung dieser Beobachtung wird nur bei Seiltrieben, mit Spannschlitten ausgerüstet, möglich sein.

5. Der scheinbare Schlupf σ ist bei Seiltrieben verschwindend klein; man mufs daher annehmen, dafs der Dehnungswechsel sich nicht wie bei Riementrieben auf der Scheibe vollzieht, sondern im wesentlichen erst beim Ablauf von der Scheibe eintritt.

6. Die Geschwindigkeit v beeinflufst die Auflaufspannungen in dem Sinne, dafs diese tatsächlich gröfser beobachtet werden, als die Rechnung erwarten läfst. Bei Geschwindigkeiten über 20 m/sk vermag der Dehnungswechsel dem Spannungswechsel nicht zu folgen; es treten kleinere Dehnungen ein, als Spannung und Dehnungskoeffizient sie bedingen würden. Infolgedessen kann die Gesamtspannung bei gröfseren Geschwindigkeiten gröfser gewählt werden als bei geringen, ohne dafs schädliche Dehnungen zu befürchten sind.

7. Der Scheibendurchmesser bewirkt bei Anwendung von einem Seil, dafs der Höchstwert des Wirkungsgrades bei gröfserem Durchmesser zwar derselbe ist wie bei kleinerem, dafs er aber bei gröfserem Durchmesser schon bei geringerer Nutzspannung erreicht wird. Bei Verwendung von vier Seilen bewirkt die Vergröfserung des Scheibendurchmessers eine beträchtliche Erhöhung des Wirkungsgrades.

8. Eine Spannrolle bewirkt bei Seilen in Parallelschaltung beträchtliche Verminderung des Wirkungsgrades und erhöht die Reibungswerte nur im Verhältnis der umspannten Bogen, während bei Riementrieben mit Spannrolle der Wirkungsgrad auf voller Höhe bleibt. Es wäre daher die Anwendung von Spannrollen bei Seilen in Parallelschaltung unzweckmäfsig.

9. Die Seilzahl beeinflufst den Wirkungsgrad in der Weise, dafs bei einem Seil η seinen Höchstwert innerhalb sehr weiter Grenzen der Nutzspannung beibehält, während bei vier Seilen der Höchstwert bereits bei $K_n = 40$ kg erreicht wird und dann ein merkliches Fallen eintritt. Dies läfst darauf schliefsen, dafs die Belastung nicht ganz gleichmäfsig verteilt ist, sondern dafs das straffste Seil eine höhere Belastung erfährt. Diese Vermutung wird bestärkt durch die Versuche über die gegenseitige Wanderung der Seile.

10. Die Schaltung der Seile übt einen sehr grofsen Einflufs auf den Wirkungsgrad aus: bei dem Kreisseiltrieb liegt η durchweg beträchtlich tiefer als bei parallel geschalteten Seilen: Höchstwert der letzteren $\eta = 0,95$ gegen 0,90 beim Kreisseil.

11. Die Art der Seile macht sich insofern geltend, als der Wirkungsgrad der Trapezseile um ein geringes tiefer liegt als der der Rundseile, weil erstere eine beträchtlich höhere Vorspannung erhalten müssen, um schwankungsfrei zu laufen.

12. Die Gröfse der Uebersetzung und die Lage des ziehenden Trums haben beim Seiltrieb keinen Einflufs auf den Wirkungsgrad. Diese Bemerkung gilt natürlich wie alle anderen nur für den Bereich, in dessen Grenzen die Versuche lagen.

13. Die Nutzspannung K_n ist abhängig von der dem Seil zuträglichen Gesamtspannung $K_T = K_v + {}^1/_2\,K_n$, von der Seilgeschwindigkeit v, von dem Reibungswert η und von dem Scheibendurchmesser D.

Bei grofser Seilgeschwindigkeit erreicht nach den Versuchsergebnissen die Dehnung des Seiles nicht den Wert, der rechnungsmäfsig der Gesamtspannung $K_v + {}^1/_2\,K_n$ entspricht. Man wird daher die Gesamtspannung für gröfsere Geschwindigkeiten höher wählen dürfen als für geringere Geschwindigkeiten. In Abb. 128 ist die Gesamtspannung $K_v + {}^1/_2\,K_n$ zunächst willkürlich für $v = 0$ zu 100 kg und für $v = 40$ m/sk zu 400 kg für Seile auf Scheiben von 1000 mm Dmr. gewählt worden. Von dieser Linie ist die Fliehspannung K_f in Abzug gebracht worden; die Ordinaten der neuen Linie stellen den Wert $K_v + {}^1/_2\,K_n - K_f$, d. h. die Auflaufspannung des ziehenden Trums dar.

Der Reibungswert hat sich bei den Versuchen bis zu $\mu = 0{,}6$ erwiesen; legt man einen Wert von $\mu = 0{,}5$ und einen umspannten Bogen $= 0{,}4$ des ganzen Umfanges zugrunde, so wird das Spannungsverhältnis $e^{\mu\,\omega} = 3{,}5$. Die zulässige Nutzspannung ergibt sich dann zu

$$K_n = \left[K_v + {}^1\!/\!_2\, K_n - K_f\right] \frac{3{,}5 - 1}{3{,}5} = \left[K_v + {}^1\!/\!_2\, K_n - K_f\right] 0{,}7,$$

d. d. die Ordinaten der vorher gezogenen Kurve sind im Verhältnis 0,7 : 1 zu teilen; die so entstandene neue Linie gibt die höchste zulässige Nutzspannung für jede Seilgeschwindigkeit an.

Die tatsächlich gemessenen Versuchswerte liegen zum Teil beträchtlich über der genannten Linie. Zu beachten ist, dafs bei diesen Versuchen immer nur ein Seil auf den Scheiben lag.

Abb. 128.



Für gröfsere Scheibendurchmesser können die zulässigen Werte für K_n im Verhältnis der gefundenen μ-Werte erhöht werden, bei kleinerem Durchmesser ist K_n in der gleichen Weise niedriger zu halten.

14. Dauerversuche werden auch für Seile noch angestellt werden müssen, um die Grenzen für K_n für Seile verschiedenen Ursprunges festzustellen, da kurzzeitige Versuche wohl über Wirkungsgrad und Reibungswert zuverlässigen Aufschlufs geben, nicht aber über die bleibende Dehnung.

15. Eine Prüfung von Seilen kann in einwandfreier Weise ebenso wie bei Riemen nur in der Weise bewirkt werden, dafs die Seile in ganzer Länge auf die Versuchsmaschine aufgelegt und einem Dauerversuch mit steigender Belastung unterzogen werden, bis die bleibende Dehnung so grofs wird, dafs ein Beharrungszustand nicht mehr eintritt.

D. Zapfen.

Ueber die Zapfenreibung s. S. 234 u. f.; über die Zapfenreibungszahl μ_1 s. S. 240 u. f.*) — Mafsgebend für die Zapfenberechnung sind: 1. die Festigkeit und das gleichmäfsige Aufliegen des Zapfens über

*) Im Mittel ist $\mu_1 = {}^1\!/\!_{16}$ bei Stahlzapfen in Metallagern. Nach Versuchen von Stribeck (Z. d. V. d. I. 1902 S. 1341 u. f.) schwankt μ_1 für das Sellers-Lager zwischen 0,14 und 0,0035, für das Weifsmetallager zwischen 0,24 und 0,0021; die Grenzen entsprechen dem Ruhezustande und dem Beharrungszustande bei gröfseren Geschwindigkeiten unter mäfsiger Last.

die ganze Länge der Lagerschale, 2. die Sicherheit gegen zu grofse Reibung und gegen das Anfressen der Gleitflächen, 3. die Sicherheit gegen das Heifslaufen des Zapfens und Lagers, erzeugt durch den in Wärme umgesetzten Teil der Reibungsarbeit. Es bezeichne

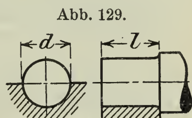
P den gröfsten Zapfendruck in kg,
d den Durchmesser und l die Länge des Zapfens in cm,
W das Widerstandsmoment des Zapfenquerschnittes in cm^3,
k_b die zulässige Biegungsspannung des Stoffes in kg/qcm,
k den zulässigen Flächendruck in kg/qcm,
v die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens in m/sk,
μ_1 die Zapfenreibungszahl,
n die Zahl der Umdrehungen i. d. Minute.

a. Tragzapfen.

1. Zylindrischer Tragzapfen (Stirn- und Halszapfen).

Gang der Berechnung. Aus Gl. III (s. unten) wird $l:d$ bestimmt, dann nach Gl. II d und l. Genügt das so erhaltene l der Bedingung nach Gl. IV, so werden die Werte von d und l beibehalten; ist das nicht der Fall, so ist l aus Gl. IV zu ermitteln und hiermit aus Gl. I der Wert von d.

Abb. 129.



1. P wirkt bei diesen Zapfen winkelrecht zur Drehachse (s. Abb. 129). Die Rücksicht auf Festigkeit ergibt für den vollen Stirnzapfen:

$$P \cdot 0{,}5\, l = W k_b \sim 0{,}1\, d^3 k_b \quad \text{(vrgl. S. 436)},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{5\, P l}{k_b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

und für den hohlzylindrischen Stirnzapfen, dessen äufserer Durchmesser d_2 cm, dessen innerer d_1 cm beträgt,

$$P \cdot 0{,}5\, l = W k_b \sim 0{,}1\, \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2}\, k_b \quad \text{(vrgl. S. 436)}.$$

Die Rücksicht auf die Gröfse des zulässigen Flächendruckes ergibt, wenn der Zapfen zur Hälfte vom Lager umschlossen ist,

$$P = k l d \quad \text{bzw.} \quad P = k l d_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Aus den beiden Gleichungen für den vollen Zapfen folgt

$$\frac{l}{d} = \sqrt{\frac{0{,}2\, k_b}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

Häufig wird $l:d$ für Kreuzkopfzapfen u. drgl. mit rd. 3 : 2 angenommen*) (s. S. 734 für rasch laufende Wellen).

Die Schulterhöhe des Zapfens sei

$$\tfrac{1}{16}\, d + 0{,}5 \text{ cm} \quad \text{bis} \quad \tfrac{1}{10}\, d + 0{,}5 \text{ cm}.$$

*) Vrgl. Volk, Maschinenteile, Z. d. V. d. I. 1908 S. 490, Abb. 19.

2. In vielen Fällen ist die Belastungsweise III auf S. 404 vorhanden, so dafs bei Wahl der zulässigen **Biegungsspannung** k_b zugrunde zu legen ist für

Flufsstahl	$k_b = 400$	bis	500	kg/qcm
Schmiedeeisen	„ $= 300$	„	400	„
Stahlgufs	„ $= 250$	„	350	„
Gufseisen	„ $= 150$	„	250	„

Wechselt die Beanspruchung nicht vollständig, so kann die Spannung k_b gröfser als diese Werte genommen werden.

Für die Wahl des **Flächendruckes** k sind aufser dem Stoffe des Zapfens und der Lagerschale mafsgebend die Vollkommenheit der Schmierung, die Stärke der Wärmeentziehung, die minutliche Umdrehungszahl n bzw. die Umfangsgeschwindigkeit v des Zapfens, die Güte der Ausführung usw. Der Flächendruck k kann für beständig sich in nachstellbaren Lagern drehende Zapfen unter gewöhnlichen Verhältnissen betragen:

bei gehärtetem Tiegelstahl auf gehärtetem Tiegelstahl	bis	150	kg/qcm
„ gehärtetem Tiegelstahl auf Bronze	„	90	„
„ ungehärtetem Tiegelstahl auf Bronze	„	60	„
„ Flufseisen, Schweifseisen mit glatter, dichter Oberfläche auf Bronze	„	40	„
„ Schweifseisen mit nicht ganz reiner Oberfläche, oder für Gufseisen auf Bronze	„	30	„
„ Schweifseisen mit nicht ganz reiner Oberfläche auf Gufseisen	„	25	„
„ Flufseisen, Schweifseisen auf Pockholz bei Wasserschmierung	„	25	„

Behält P auch im Ruhezustande des Zapfens annähernd Gröfse und Richtung (z. B. durch stark belastete Wellen, schwere Räder usw.), so wähle man k kleiner als vorstehend angegeben.

Für Zapfen (oder Lager), die nur schwingen, kann man k erheblich höher nehmen. Für Zapfen von Seil-, Kettenrollen usw., die sich nur zeitweise drehen, und bei denen die Abnutzung entweder gering ist oder nicht ins Gewicht fällt, können die oben angegebenen Werte $k = 60$ bis herab auf 25 kg/qcm um das Doppelte bis Dreifache überschritten werden.

Für die aus Tiegelstahl bestehenden und auf Bronze laufenden Kurbel- und Kreuzkopfzapfen normaler Dampfmaschinen wählt man $k = 60$ bis 70 bzw. 75 bis 80 kg/qcm; bei Lokomotiven findet man hierfür $k = 100$ bzw. 150 kg/qcm, bei Dampfmaschinen mit grofser Umdrehungszahl $k = 40$ bzw. 50 kg/qcm. Bei den Schwungradwellenzapfen von Dampfmaschinen sei $k = 15$ bis 16 kg/qcm.

Für die Kurbelzapfen von Lochmaschinen und Scheren nimmt man k bis 200 kg/qcm und darüber.

3. Damit der Zapfen **nicht heifs läuft,** mufs sein:

$$l \geqq \frac{Pn}{w} \quad \text{oder} \quad n \leqq w\frac{l}{P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{IV.}$$

Hierin ist P der mittlere Zapfendruck in kg und w eine Erfahrungszahl, die um so gröfser ausfällt, je kleiner die Reibung und je gröfser die Wärmeableitung ist. Es ist $w = \frac{1500\, A_z}{\mu}$, wo A_z die Reibungsarbeit in mkg/sk f. 1 qcm der Zapfengrundfläche ld, μ die Reibungszahl bedeutet.

Für die Kurbelzapfen (s. o.) mit Stahl- oder Bronzelagern, bei denen beide Lagerschalen durch den Luftzug gleichmäfsig abgekühlt werden, wählte man früher $w = 37\,500$, jetzt findet sich w bis 90 000 und darüber, letzteres allerdings unter sehr günstigen Verhältnissen (d. h. bei kleinem l und k, Weifsmetallagern und vorzüglicher Schmierung). Für gewöhnlich sei $w < 90\,000$.

Für die Zapfen der Schwungrad- oder Kurbelwellen (Wärmeabfuhr nur durch die untere Lagerschale, der kühlende Luftzug fehlt) wählte man früher $w = 15\,000$; heute geht man (bei Weifsmetall) bis $w = 40\,000$ und darüber; durch Wasserkühlung läfst sich hier w noch wesentlich steigern.

Bei den Achsen der Eisenbahn-Personenwagen findet sich w bis 80 000, bei den Laufachsen dreiachsiger Lokomotiven w bis 150 000, bei äufseren Lokomotivkurbelzapfen w bis 250 000; hier ist jedoch die zugelassene Abnutzung gröfser als bei Betriebsdampfmaschinen, ferner nimmt mit n (entsprechend einer Fahrgeschwindigkeit V bis 90 km/st) auch die Wärmeentziehung durch den gesteigerten Luftzug zu, und bei den Kurbelzapfen macht sich die Abkühlung durch die Stirnfläche des Zapfens und des Stangenkopfes geltend.

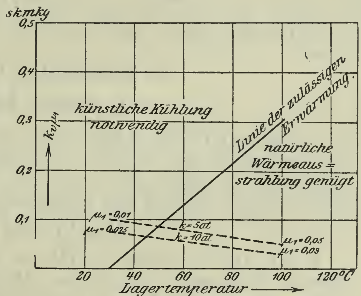
4. Für die Berechnung der Zapfen empfiehlt sich nach Kammerer auch folgendes Verfahren, bei dem die Gröfse der Reibungsleistung zugrunde gelegt ist. Mit

$$k \text{ kg/qcm} = \frac{P}{ld}$$

$$\text{und } v \text{ m/sek} = \frac{\pi d n}{60}$$

ist $k v \mu_1 = \varrho$ sekmkg/qcm die Reibungsleistung in m/kg oder $\frac{1}{424} \cdot \varrho$ WE/qcm in Wärmeeinheiten in der Sekunde.

Abb. 130.



Erzeugt die Reibung eine über der Linie der zulässigen Erwärmung (vrgl. Abb. 130) liegende Lagertemperatur, so mufs für künstliche Wärmeabfuhr durch Wasser oder Oel gesorgt werden. 100° C ist als obere Grenze der Lagertemperatur anzusehen mit Rücksicht auf die Erhaltung des Lagermetalls und des Schmiermittels.

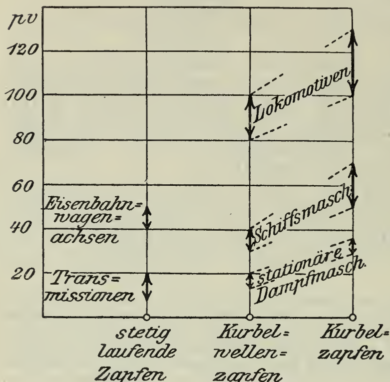
Bei den heute vorkommenden hohen Umlaufzahlen ($n \leq 3000$) bei Dampfturbinen und Elektromotoren müssen die Zapfen länger genommen werden:

$$n < 100 \qquad l \sim 1{,}5\, d$$
$$n < 200 \qquad l \sim 2\, d$$
$$n > 200 \qquad l \sim 3 \text{ bis } 4\, d.^{*)}$$

*) Vrgl. Niethammer, Elektrotechnik und Maschinenbau 1906 S. 739, Z. d. V. d. I. 1906 S. 218 u. f.

Der Gefahr der damit wachsenden Durchbiegung wegen darf man mit dieser Verlängerung aber nicht zu weit gehen, sondern es hat dann künstliche Kühlung einzutreten, die man sonst im allgemeinen gern vermeidet, weil sie immerhin versagen kann.

Abb. 131.



Da μ_1 für gewisse Fälle konstant bleibt, so kann man nach Kammerer, wie Abb. 131 zeigt, der Zapfenberechnung auch den Wert $k\,v$ zugrunde legen.

2. Kugelförmiger Tragzapfen.

Meist als Kurbelzapfen verwendet. Bezeichnet für diesen Fall d_1 den Kugeldurchmesser in cm, so gilt, wenn Tiegelstahl auf Bronze gleitet,

$$P = 40\,d_1^2$$

und mit Rücksicht auf das Heifslaufen unter Voraussetzung genauer Kugelform (vrgl. Gleichung IV, S. 742):

$$d_1 \geqq \frac{P n}{30\,000}.$$

Der Durchmesser am Halse des Kugelzapfens sei etwa $^5/_8\,d_1$.

b. Spurzapfen (Stützzapfen).

1. Ebener Spurzapfen.

Bezeichnet P den in der Richtung der Drehachse wirksamen gröfsten Zapfendruck in kg, d den Durchmesser des Zapfens in cm und k den zulässigen Flächendruck in kg/qcm, so gilt bei Vernachlässigung der Schmiernuten, welche die Auflagerfläche um 10 bis 20 vH verkleinern,

$$P = {}^1/_4\,\pi\,d^2 k \sim 0{,}8\,d^2 k.$$

k ist hierin gemäfs S. 742 zu wählen; dann ergibt sich für gehärteten Tiegelstahl auf Bronze $P \leqq 70\,d^2$. Für Tiegelstahlzapfen auf dichtem, hartem Gufseisen (Turbinenzapfen) sei k etwa wie für Bronze.

Mit Rücksicht auf das Heifslaufen sei

$$d \geqq \frac{P n}{w} \quad \text{oder} \quad n \mathrel{\substack{=\\<}} w\,\frac{d}{P},$$

worin n die minutliche Umdrehungszahl des Zapfens, P der mittlere Zapfendruck in kg und w eine Erfahrungszahl ist, die bei Triebwerken nicht ohne Not gröfser als 40 000 gewählt wird; dabei darf keine Reibung an der Mantelfläche des Spurzapfens auftreten. Bei Turbinenzapfen von vorzüglicher Ausführung und mit sorgfältiger Schmierung findet sich w bis 125 600.

2. Ringförmiger Spurzapfen.

Ist d_2 der äufsere und d_1 der innere Zapfendurchmesser in cm, so gilt hier

$$P = {}^1\!/_4\, \pi\, (d_2^2 - d_1^2)\, k \sim 0{,}8\, (d_2^2 - d_1^2)\, k;$$

$$d_2 - d_1 \geqq \frac{P n}{w}.$$

Für k und w gilt das vorstehend für ebene Spurzapfen Bemerkte.

3. Kammzapfen (Abb. 132).

Mit $d_m = {}^1\!/_2\, (d_1 + d_2)$ und $b = {}^1\!/_2\, (d_2 - d_1) \sim 0{,}1\, d_1$ bis $0{,}15\, d_1$ ist, wenn z die Anzahl der tragenden Ringe, für den Kammzapfen:

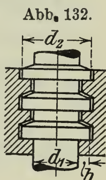
$$P = \pi\, d_m\, b\, z\, k, \quad \text{also} \quad b\, z = \frac{P}{\pi\, k\, d_m},$$

und

$$b\, z \geqq \frac{P n}{w}, \text{ worin (bei Luftkühlung) } w = 20\,000.$$

Bei Kammzapfen hält es schwer, für gröfsere Zapfendrücke die gleichmäfsige Berührung sämtlicher Ringflächen zu sichern; daher ist es ratsam, k und w mit wachsendem z höchstens 0,5 bis 0,3 mal so grofs zu wählen wie für ebene Spurzapfen. Für w kommt überdies in Betracht, dafs die Wärmeableitung durch den Körper des Kammzapfenlagers nach aufsen verhältnismäfsig schwierig ist. Aus diesen Gründen ist man im Turbinenbau zum ebenen Spur- und Ringzapfen zurückgekehrt und wählt dafür lieber Durchmesser von 160 mm und mehr, ehe man sich zu einem Kammzapfen entschliefst.

Abb. 132.



Höhe eines Ringes $= b$ bis $1{,}5\, b$.

Neuerdings bei Hebezeugen mit Schneckenantrieb*) vielfach verwendet, da Umkehr der Zapfendruckrichtung zulässig; dann sind die Kämme meist nicht trapezförmig, wie in Abb. 132, sondern rechteckig im Querschnitt und liegen mit beiden Seiten eingeschliffen an.

Bei senkrechten Wellen (Turbinen) ist meist unter dem Kammzapfen ein Halslager angeordnet. — Bei wagerechter Welle nimmt der Kammzapfen nur den Achsenschub auf, so dafs auch hier Traglager angeordnet sind.

Kammzapfen der Betriebswellen von Schraubenschiffen s. Abschn. Schiffbau.

c. Wagenschneiden.

Aus glashartem, nicht (oder nur strohgelb) angelassenem Stahl. Schneidenwinkel $\alpha = 120^0$ (bei hohem Drucke und kleinem Ausschlage) bis $\alpha = 45^0$ (bei feineren Wagen); im ersteren Falle ist das eigentliche Lager eine Ebene, im zweiten eine Kerbe (Winkelfläche), deren Ebenen einen Winkel von etwa 105^0 bilden.

---

*) Vrgl. Frölich, Maschinelle Einrichtungen für das Eisenhüttenwesen. Z. d. V. d. I. 1906 S. 1856.

Zulässiger Druck für 1 mm Schneidenlänge keinesfalls über 200 kg; besser ist es, nicht über 100 kg zu gehen. Bei feinen Wagen sinkt der Druck bis auf 0,2 kg/mm und darunter. Mit dem Drucke wächst die erforderliche Abrundung der Schneidenkante, wodurch die Empfindlichkeit der Wage abnimmt.

Drücke bis zu 300 kg für 1 mm Schneidenlänge, wie sie sich bei den Schneiden grofser Festigkeitsmaschinen (bei einer Abrundung der Kante mit etwa 0,75 mm Durchmesser) finden, sind nicht zu empfehlen.

E. Achsen und Wellen.

Es bedeutet

M_b das Biegungsmoment und M_d das Drehmoment in cmkg,
k_b die zulässige Biegungsspannung in kg/qcm,
k_d die zulässige Drehungsspannung in kg/qcm,
d den Durchmesser einer vollen Welle (Achse) in cm,
d_1 den inneren und d_2 den äufseren Durchmesser einer hohlen Welle (Achse) in cm, wobei $d_m = {}^1/_2\,(d_2 + d_1)$ und $s = {}^1/_2\,(d_2 - d_1)$,
W das Widerstandsmoment des Achsenquerschnittes in cm³ (s. S. 434 bis 437),
N die zu übertragende Leistung in PS,
n die Zahl der minutlichen Umdrehungen der Achse (Welle).

a. Achsen.

Die hier allein in Rechnung zu ziehende **Biegungsbeanspruchung** ergibt für die vollen Achsen (W s. S. 438):

$$M_b = W k_b \sim 0{,}1\, d^3 k_b,$$

für die Hohlachsen (W s. S. 439 u. 440):

$$M_b = W k_b \sim 0{,}1\, \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2}\, k_b,$$

und wenn deren Wandstärke s gering ist (vrgl. S. 438),

$$M_b \sim 0{,}8\, d_m^2 s k_b.$$

In den meisten Fällen wechselt die Kraftrichtung vollständig, so dafs für die zulässige **Biegungsspannung** k_b gemäfs III in der Tafel S. 405 etwa zu wählen ist für:

Schweifseisen	∼ 300 kg/qcm	Stahlgufs	∼ 250—300 kg/qcm
Flufseisen	∼ 300—400 „	Gufseisen	∼ 130—250 „
Flufsstahl	∼ 400—600 „	Eichenholz	∼ 60 „

Bei Gufseisen ist die Bemerkung [3]) auf S. 405 zu beachten.

Wechselt die Kraftrichtung nicht vollständig oder überhaupt nicht, so sind die Werte für k_b gemäfs S. 404 höher zu wählen.

b. Wellen.

1. Drehungs- (und Biegungs-) beanspruchung mafsgebend.

Bezeichnungen s. o. — Bei Beanspruchung auf **Drehung** allein ist (vrgl. S. 471) für volle Wellen (W s. S. 438)

$$M_d = 2\, W k_d = \frac{\pi}{16}\, d^3 k_d \sim 0{,}2\, d^3 k_d,$$

für hohle Wellen (Werte für W s. S. 439 u. 440)

$$M_d = 2\,W k_d \sim 0{,}2\,\frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2}\,k_d \sim 1{,}6\,d_m^2\,s k_d.$$

Für die Wahl der zulässigen **Drehungsspannung** k_d aus der Tafel 405 (nebst Bemerkungen [1]) und [2]) gilt folgendes.

I. In den Fällen, in denen das Drehmoment M_d unveränderlich und stofsfrei ist, sind für k_d die Werte I zu nehmen.

II. Schwankt M_d ohne Stofs abwechselnd (oder wenigstens oft) zwischen null und seinem gröfsten Betrage, so wähle man für k_d die Werte II.

III. Wechselt das Drehmoment ohne Stofs abwechselnd (oder wenigstens oft) zwischen einem gröfsten $+M_d$ und einem gleichen oder doch nahezu gleichgrofsen $-M_d$, so sind für k_d die Werte III zu nehmen.

Stofswirkungen sind besonders zu berücksichtigen. (Vrgl. S. 404.)

Die Belastungsweise I kommt bei den üblichen Wellen kaum vor. Am nächsten stehen z. B. die Wellen von **Turbinen** und **Wasserrädern**, falls die Arbeitsmaschinen ihren Kraftbedarf nicht stark verändern; bei derartigen Wellen liegt k_d zwischen den Werten I und II. Für **eichene** Wasserradwellen sei $k_d = 50$ bis 60 kg/qcm.

Die meisten Wellen entsprechen einer Belastungsweise zwischen II und III.

Für **Gufseisen** ist k_d [unter Beachtung der Bemerkung [4]) auf S. 405] bei der Belastungsweise I: $k_d = 240$ bis 300 kg/qcm, bei II: $k_d = 160$ bis 200 kg/qcm und bei III (wobei indessen Gufseisen besser ganz zu vermeiden ist): $k_d = 80$ bis 100 kg/qcm.

Nach S. 210 ist das drehende Moment

$$M_d = 71\,620\,\frac{N}{n}\ \text{cmkg};$$

mithin ergibt sich der zur Uebertragung von N PS bei n Umdrehungen i. d. Minute erforderliche Wellendurchmesser (in cm)

$$d \sim \sqrt[3]{\frac{360\,000}{k_d}\,\frac{N}{n}}.$$

Um für **Triebwerkwellen** aus gewöhnlichem Walzeisen auch dem erfahrungsmäfsig gleichzeitig mit M_d auftretenden M_b (durch Gewicht, Raddruck, Seilzug usw.) Rechnung zu tragen, wähle man in vorstehender Formel $k_d = 120$ kg/qcm, so dafs

$$d = \sqrt[3]{3000\,\frac{N}{n}} = 14{,}42\,\sqrt[3]{\frac{N}{n}},\ \text{bzw. } M_d = 24\,d^3 \text{ wird [s. f. Tafel].}$$

Leistung normaler Triebwerkwellen.

d cm	M_d cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	M_d cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	M_d cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	M_d cmkg	$\frac{N}{n}$
3,0	648	0,009	6,0	5184	0,072	9,0	17496	0,243	14	65856	0,915
3,5	1029	0,014	6,5	6591	0,092	9,5	20577	0,286	15	81000	1,125
4,0	1536	0,021	7,0	8232	0,114	10,0	24000	0,333	16	98304	1,365
4,5	2187	0,030	7,5	10125	0,141	11,0	31944	0,444	17	117912	1,638
5,0	3000	0,042	8,0	12288	0,171	12,0	41472	0,576	18	139968	1,944
5,5	3993	0,055	8,5	14739	0,205	13,0	52728	0,732	20	192000	2,666

Durchmesser *d* normaler Triebwerkwellen.

N	Minutliche Umlaufzahl $= n$														
PS	40	60	80	100	120	140	160	180	200	225	250	275	300	350	400
1	50	45	45	40	40	35	35	35	35	35	35	30	30	30	30
2	60	55	50	50	45	45	40	40	40	40	40	35	35	35	35
3	65	60	55	50	50	50	45	45	45	45	40	40	40	40	40
4	70	65	60	55	55	50	50	50	50	45	45	45	45	40	40
5	75	65	60	60	55	55	55	50	50	50	50	45	45	45	45
6	75	70	65	60	60	55	55	55	50	50	50	50	50	45	45
8	85	75	70	65	65	60	60	55	55	55	55	50	50	50	50
10	85	80	75	70	65	65	60	60	60	55	55	55	55	50	50
12	90	85	75	75	70	65	65	65	60	60	60	55	55	55	50
14	95	85	80	75	75	70	70	65	65	60	60	60	60	55	55
15	95	85	80	75	75	70	70	65	65	65	60	60	60	55	55
16	100	90	85	80	75	70	70	70	65	65	65	60	60	60	55
18	100	90	85	80	75	75	70	70	70	65	65	65	60	60	60
20	105	95	85	85	80	75	75	70	70	70	65	65	65	60	60
25	110	100	90	85	85	80	80	75	75	70	70	70	65	65	60
30	115	105	95	90	85	85	80	80	75	75	70	70	70	65	65
35	120	105	100	95	90	85	85	80	80	80	75	75	75	70	70
40	120	110	105	100	95	90	85	85	85	80	80	75	75	70	70
45	125	115	105	100	95	95	90	85	85	85	80	80	75	75	70
50	130	115	110	105	100	95	90	90	85	85	85	80	80	75	75
55	130	120	110	105	100	95	95	90	90	85	85	85	80	80	75
60	135	120	115	110	105	100	95	95	90	90	85	85	85	80	75
65	140	125	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85	80	80
70	140	125	120	110	105	105	100	95	95	90	90	90	85	85	80
75	145	130	120	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85	80
80	145	130	120	115	110	105	105	100	100	95	95	90	90	85	85
85	145	135	125	120	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85
90	150	135	125	120	115	110	105	105	100	100	95	95	90	90	85
95	150	135	130	120	115	110	110	105	100	100	95	95	90	90	85
100	155	140	130	120	115	115	110	105	105	100	100	95	95	90	85

Entfernung der Lager bei Triebwerkwellen (in cm) $l \lesseqgtr 100\sqrt{d}$, wobei freie Auflagerung der Enden vorausgesetzt ist. Danach wird für

$d =$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13,5	15 cm
$l =$	170	200	220	240	260	280	300	320	330	350	370	390 cm.

Um die Wellen durch nachträgliches Aufsetzen von Riemenscheiben usw. später in verstärktem Maſse belasten zu können, empfiehlt sich $l \lesseqgtr 110\sqrt[3]{d}$, woraus für

$d =$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13,5	15 cm
$l =$	160	175	190	200	210	220	230	240	245	250	260	270 cm.

Die vorstehenden Zahlen geben nur einen Anhalt. In Wirklichkeit bestimmen oft örtliche Verhältnisse (z. B. Stellung der Arbeitsmaschinen, Abmessungen der Gebäudeteile, wie Säulen-, Balken- und Trägerabstände usw.) die Lagerentfernungen.

2. Formänderung bei der Verdrehung mafsgebend.

Ueber den **Verdrehungswinkel** $\psi \gtreqless l\vartheta$ s. S. 743 u. f. Vielfach wird empfohlen, um die durch M_d bewirkte gesamte Formänderung der Welle gering zu halten, $\psi \gtreqless {}^1/_4{}^0$ f. 1 m zu machen; mit $\psi = {}^1/_4{}^0$ ergibt sich (bei $G = 800\,000$ i. M.)

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 0{,}734 \sqrt[4]{M_d} \quad \text{oder} \quad M_d = 3{,}454\, d^4.$$

Hieraus ergibt sich folgende Tafel:

d cm	M_d cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	M_d cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	M_d cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	M_d cmkg	$\frac{N}{n}$
3,0	279	0,0039	6,5	6166	0,0861	10	34535	0,4822	17	28847	4,0278
3,5	516	0,0072	7,0	8294	0,1158	11	50571	0,7061	18	36258	5,0625
4,0	881	0,0123	7,5	10929	0,1526	12	71620	1,0000	19	45011	6,2847
4,5	1418	0,0198	8,0	14145	0,1975	13	98649	1,3774	20	55262	7,7160
5,0	2156	0,0301	8,5	18027	0,2517	14	132683	1,8526			
5,5	3158	0,0441	9,0	22661	0,3164	15	174853	2,4414			
6,0	4476	0,0625	9,5	28132	0,3928	16	226355	3,1605			

Für Wellen, die grofse Drehmomente zu übertragen haben, liefern die vorstehenden Gleichungen, wie die Tafel zeigt, für d zu geringe Werte.

Die Gröfse der Beanspruchung gemäfs 1 ist daher stets zu prüfen.

3. Biegungs- und Drehungsbeanspruchung mafsgebend.

Bei Wellen, auf denen schwere Räder sitzen, oder die sonst erheblich auf Biegung beansprucht werden, wie z. B. die Wellen der Kraftmaschinen, erste Antriebwellen (Hauptwellen), ist neben M_d auch das Biegungsmoment M_b zu berücksichtigen, d. h. sie sind nach 1) auf S. 487 auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen. Für k_b gilt hierbei das auf S. 746 unter **a.** und für k_d das unter **b.** III. Gesagte.

Die höchste zulässige **Durchbiegung** einer Welle (zwischen zwei Lagern) sei $^1/_3$ mm auf 1 m Wellenlänge. Dabei ist stets noch zu prüfen, ob die Länge der Zapfen selbsttätig sich einstellende Lagerschalen verlangt oder nicht. Kupplungen, Scheiben, Räder usw. bringe man möglichst dicht bei den Lagern an.

4. Konstruktion der Achsen und Wellen.

Als **Umlaufzahlen** in der Minute sind etwa zu wählen n = Uml./min für:

Hauptwellen und Wellen zum Betriebe schwerer Metallbearbeitungsmaschinen	100—150
Leichte Metallbearbeitungsmaschinen	150—250
Nebenwellenleitungen	200—300
Zum Betrieb von Holzbearbeitungsmaschinen	250—300 bis 400
Zum Betrieb von Spinnereimaschinen	300—400

Auf die **Ausdehnung durch die Wärme** (vrgl. S. 297) ist bei langen Wellensträngen stets Rücksicht zu nehmen.

Jeder Wellenstrang (ohne eingedrehte Lagerstellen) mufs mit mindestens zwei schmiedeisernen **Stellringen** versehen sein, die seitliche Verschiebungen verhindern; jedoch ist die Wärmeausdehnung hierbei in Betracht zu ziehen. Die Stellringe (geteilt [Abb. 133] oder ungeteilt [Abb. 134]) werden zu beiden Seiten eines Lagers oder auch zwischen zwei benachbarten Lagern angebracht. Auf der Hauptwelle bringe man die Stellringe möglichst am vordersten Lager an. Für $d = 3$ bis 15 cm ist die Breite eines Stellringes = 3,5 bis 5,5 cm und seine Dicke = 2 bis 3,5 cm. Eine oder zwei gehärtete Stahlschrauben mit versenkten Köpfen. Feste, aufgeschweifste Bunde (statt der Stellringe) sind nicht zu empfehlen; Eindrehungen der Welle für Halslager sind, weil sie das Arbeitsvermögen der Welle (s. S. 474) sehr vermindern, tunlichst zu vermeiden.

Abb. 133.

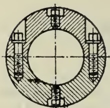
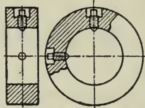


Abb. 134.



Der geeignetste **Stoff** für (Achsen und) Wellen ist (aufser Bronze, Deltametall u. a. Legierungen) Flufseisen und Tiegelstahl (zäher Flufsstahl); scharfe Eindrehungen und plötzliche Uebergänge sind unzulässig. Geschmiedete, gewalzte (Achsen und) Wellen meist mit vollem Querschnitt. Hohlwellen sind zur Gewichtverminderung, zur Prüfung des Stoffes, zur Schmierung oder zur Kühlung hohl gebohrt; Wellen aus geschweifsten oder nahtfrei gewalzten Rohren oder aus genieteten Hohlzylindern sind Ausnahmen. — Gufseisen ist nur als Hohlgufs (Kreisringquerschnitt), keinesfalls mit **+**-Querschnitt zu verwenden. — Holz kommt aufser im Mühlenbau meist nur noch bei Wasserrädern vor (s. S. 747).

Wellenlängen. Bei $d = 3$ bis 5 cm wähle man die Längen L der Wellenstücke zwischen 4 und 6 m, bei gröfserem Durchmesser wegen des Eisenbahnversandes und der Aufbringung $L \leqq 7$ m. Für $L > 7$ m und $L < 2$ m erhöhen sich die Einheitspreise.

Die sogen. **komprimierten** (blanken) Wellen aus sehr weichem Martinstahl haben gegenüber den abgedrehten oder rund gewalzten Wellen den Vorzug gleichförmigeren Durchmessers (auf $^1/_{20}$ mm genau) und höherer Festigkeit, sind daher dünner, leichter und billiger. Nach Versuchen von C. Bach ziehen sie sich jedoch beim Einfräsen von Nuten stärker krumm als gewöhnliche Wellen.

Die komprimierten Wellen von Gebr. Reimbold in Kalk bei Cöln (aus weichem, schweifsbarem [Martin-] Stahl von $K_z = 5500$ kg/qcm Festigkeit) sind für $d = 1{,}0$ bis 10,0 cm (mit Zwischenstufen von 1 mm bis $d = 5{,}2$ cm, 3 bis 5 mm bis $d = 10{,}0$ cm) bis zu 6 und 6,5 m Länge erhältlich. Krummziehen beim Einfräsen von Nuten nur gering, die härtesten Stellen liegen nicht an der Oberfläche, sondern etwa auf halbem Halbmesser.

Biegsame Wellen, aus Stahldrahtschrauben gefertigt, zum Antriebe transportabler Arbeitsmaschinen, Hebezeuge usw. Gröfster Durch-

messer $d = 100$ mm. Der zulässige Krümmungshalbmesser, in dem die Wellen normal arbeiten können, ist 6 bis 7 d. Zum Schutze und zur bequemen Handhabung mit einem Metallschlauche, in feuchten Räumen noch mit einem Ledermantel umgeben.

Biegsame Wellen*)

der Deutschen Fabrik biegsamer Wellen, A. Otto & Co. in Berlin N.

d mm	N_{max} bei $n = 100$	d mm	N_{max} bei $n = 100$	d mm	N_{max} bei $n = 100$	d mm	N_{max} bei $n = 100$
8	0,007	20	0,05	40	0,38	60	1,00
10	0,017	25	0,10	45	0,50	65	1,25
12,5	0,025	30	0,17	50	0,75	70	1,50
15	0,030	35	0,25	55	0,83		

Die Werte von N_{max} sind aus der Preisliste angenähert ermittelt.

F. Kupplungen.

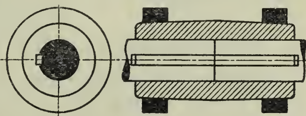
Um längere Wellenstränge herzustellen, sind die einzelnen Wellen aneinander zu kuppeln, u. zw. im allgemeinen derart, dafs ihre geometrischen Achsen zusammenfallen (Ausnahme s. **2.**, S. 754). Die elastischen Kupplungen S. 755 u. f. gestatten geringe Abweichungen von dieser Regel.

a. Feste Kupplungen.

1. Hülsenkupplungen.

Zwei an ihrem äufseren Umfang als Doppelkegel ausgebildete gufseiserne Schalen, die durch zwei entsprechend kegelförmig gebohrte, schmiedeiserne Ringe zusammengetrieben werden (s. Abb. 135), bilden eine Hülse, die sich fest um die Wellenenden drückt; Nutenkeilsicherung. Leichtes Aufbringen, keine vorstehenden Teile. Soll ein Abschnitt der Wellenleitung auf längere Zeit abgekuppelt werden, so ist die Kupplung leicht lösbar und erspart die teuren Ausrückkupplungen. Die Durchmesser d der Wellenenden müssen möglichst genau übereinstimmen.

Abb. 135.



Dicke der Schalenwand $= 0{,}4\,d + 1$ cm, wovon die Tiefe der Keilnut abgeht; Ansteigung aufsen $= {}^1/_{25}$ bis ${}^1/_{20}$; Hülsenlänge $= 3\,d + 2$ cm bis $4\,d$; Querschnitt eines Ringes $= {}^1/_6\,d^2$ bis ${}^1/_4\,d^2$.

Statt der Verbindung der beiden Hülsenhälften durch Ringe wird auch eine solche (namentlich für stärkere Wellen) durch Schrauben

*) Werden u. a. auch von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein) geliefert.

ausgeführt, bis zum Wellendurchmesser von 200 mm. Die Schraubenlöcher liegen längs der Bohrung zu je 2 bis 5 auf jeder Seite; Kopf und Mutter sind eingelassen (sog. **Schalenkupplung,** s. Abb. 136).

Abb. 136.

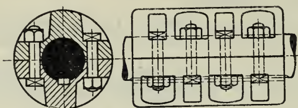
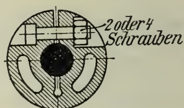


Abb. 137.

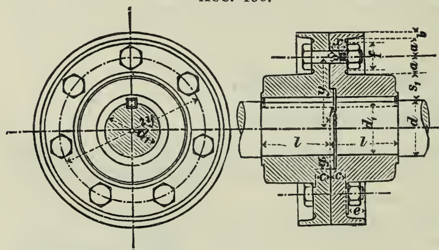


Kupplungen mit Schraubenverbindung und nur einseitig aufgeschnittener, etwas federnder Hülse (Abb. 137), liefert die Duisburger Maschinenbau-A.-G. vorm. Bechem & Keetman zu Duisburg. Die federnde Hülse wird (ähnlich wie bei der Schalenkupplung, aber einseitig) durch meist 4 Schrauben zusammengezogen.

2. Scheibenkupplung (Abb. 138).

Sie ist nur für stärkere Wellen (mit $d \geqq 10$ cm) anzuwenden. Die gleichachsige Verbindung beider Wellen wird am besten durch Aufziehen jeder Kupplungshälfte mittels der Wasserdruckpresse und durch nachfolgendes Abdrehen beider Hälften erreicht. Nachteile: Alle Lager müssen offen sein; Räder und Scheiben, die auf den Wellen zu befestigen sind, müssen geteilt hergestellt werden. Eine Einzelwelle kann aus dem Strange erst nach Verschiebung um die Ansatzhöhe h (s. Abb. 138) herausgenommen werden.

Abb. 138.



Scheibensitz-Durchmesser $d_1 = d$; oder $d_1 = d - 0{,}2$ cm bis $d - 0{,}4$ cm. Wandstärke $s_1 = 0{,}4\,d + 1{,}0$ cm. Nabenlänge $l \geqq 1{,}25\,d$ für warm oder kalt (mit der Presse) aufgezogene Scheiben, $l \geqq 1{,}5\,d$ für aufgekeilte Scheiben. Die Stärke der **Schrauben** kann gewählt werden etwa nach:

$$\delta = {}^1/_8\, d + 1{,}0 \text{ cm bis } {}^1/_8\, d + 1{,}5 \text{ cm}.$$

Die Anzahl der Schrauben z (meist in gerader Zahl) wird berechnet aus der Bedingung, dafs die durch das Anziehen erzeugte Reibung der Stirnflächen der Scheiben zur Uebertragung des Drehmomentes M_d genügen mufs. Setzt man $M_d = 36\,d^3$, je eine Schraubenbelastung $= 300\,\delta^2$ und die Reibungszahl $\mu = 0{,}25$ (Stirnebenen der Scheiben rauh), so ergibt sich $z = 0{,}48 \dfrac{d^3}{\delta^2 y}$, worin y den Halbmesser des

Schraubenkreises bedeutet. Zugleich mufs $\frac{M_d}{yz} \frac{x}{2} \leqq 0{,}1\, k_b\, \delta^3$ sein, worin k_b hoch sein darf. x ergibt sich aus der Scheibendicke $c = {}^5/_4\, \delta$ und der Höhe der Arbeitsleiste (0,3 bis 0,6 cm) zu

$$x = c + 0{,}4 \text{ cm}; \quad a = 1{,}5\, \delta; \quad y = 0{,}5\, d_1 + s_1 + a;$$
$$b = {}^1/_4\, \delta + 0{,}5 \text{ cm}; \quad e = {}^5/_4\, \delta; \quad f = 2{,}1\, \delta + 0{,}5 \text{ cm}; \quad g = {}^1/_2\, s_1;$$
$$h = {}^1/_3\, \delta.$$

Ausführungen der **Berlin-Anhaltischen Maschinenbau-Aktien-Gesellschaft** in **Dessau.**

Bohrung d . . . . mm	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
Länge $2\,l$ . . . . mm	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550
Gröfster Durchmesser . mm	360	385	420	435	455	470	500	520	555	570	590
Schrauben $\delta =$ mm	26	26	29	29	29	29	33	33	36	36	36
Schrauben $z =$	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	10
Gewicht . . . . . kg	92	112	138	158	180	215	250	290	335	375	420

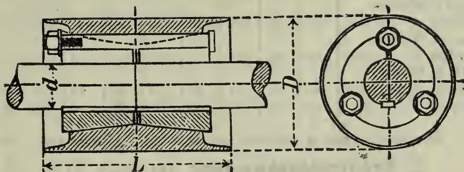
Bohrung d auch bis zu 5 mm gröfser, als in der Tafel angegeben.

3. Klemm- oder Doppelkegel-Kupplung nach Sellers.

Die Wellen werden auch dann noch gleichachsig und sicher verbunden, wenn die Durchmesser der beiden Wellenenden etwas verschieden sind. Leichtes Aufbringen und Lösen der Kupplung ist möglich.

Ein aufsen zylindrisch gedrehter, innen doppelkegelförmig ausgebohrter Hohlkörper umschliefst zwei (unterhalb der oberen Schraube in Abb. 139) geschlitzte, aufsen kegelförmige und innen zylindrische Hülsen. Durch das Anziehen der achsial liegenden drei Schrauben wird jede Hülse sowohl gegen ihr Wellenende als auch gegen den äufseren Hohlkörper gedrückt; die hierdurch erzeugte Reibung kuppelt die Wellen. Neigung der Kegelflächen gegen die Wellenachse etwa $^1/_8$.

Abb. 139.



Zur Sicherung gegen Verdrehen dient eine Feder gegenüber dem Hülsenschlitze. Zwei gegenüber liegende Schaulöcher in der Mitte des Aufsenkörpers lassen die richtige Lage des Wellenstofses in Kupplungsmitte erkennen. — Ausführungen der B.-A. M.-A.-G.:

Bohrung d . mm	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Länge L . . mm	160	200	220	250	290	310	330	370	390	410
Durchmesser D mm	110	130	150	180	200	222	250	270	290	300
Gewicht . . kg	8	13	20	31	44	59	79	96	124	150

Bohrung d auch bis zu 5 mm gröfser als in der Tafel angegeben.

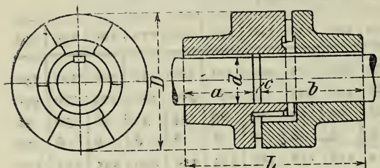
b. Bewegliche Kupplungen.

Aufser der wenig benutzten **Oldhamschen Kupplung** und der gewöhnlichen **Klauenkupplung** (Sharp u. a.) sind hier anzuführen:

1. Ausdehnungskupplung (Abb. 140).

Die gleichachsige Lage der Wellen wird durch einen im Inneren der Kupplung liegenden Ring gesichert. Die mit je drei Klauen ineinander greifenden Kupplungsstücke sind fest auf die Wellenenden gekeilt.

Abb. 140.



Die Kupplung ist bei langen Wellensträngen dann anzuwenden, wenn deren Enden keine Verschiebungen zulassen, z. B. wenn das eine Ende mit Rücksicht auf den Antrieb fest gelagert ist und das andere Ende Kegelräder treibt. Sie empfiehlt sich aber auch dann, wenn nach einem Wellenende hin gröfsere Längsverschiebungen statthaft sind, denn die Wellen bleiben dann möglichst in ihren Lagern und ziehen keine Verunreinigungen hinein, was sonst durch die häufigen Längenänderungen des Wellenstranges infolge des Temperaturwechsels zu befüchten ist. — Ausführungen der B.-A. M.-A.-G.:

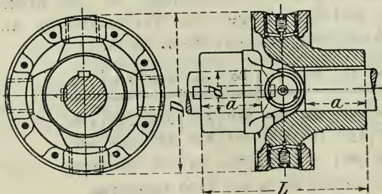
Bohrung d . . mm	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
Durchmesser D mm	180	195	215	238	260	284	308	334	362	390	420	450	480	510	540
Länge L . . mm	221	250	284	315	349	378	409	440	467	501	530	563	600	631	662
Länge d. Wellenenden a . . mm	82	94	107	120	133	145	157	170	181	193	205	218	230	243	255
Länge d. Wellenenden b . . mm	127	144	162	180	198	215	232	250	266	283	300	320	340	358	377
Spiel d. Wellenenden c . . mm	12	12	15	15	18	18	20	20	20	25	25	25	30	30	3
Gewicht . . kg	19	25	35	47	61	80	110	140	170	200	244	304	368	440	52

Die Bohrungen d können bis zu 5 mm gröfser sein, als in der Tafel angegeben.

2. Kreuzgelenkkupplung der B.-A. M.-A.-G. (Universalgelenk).

Dient zur Verbindung zweier sich unter einem Winkel schneidender Wellen. Die Bewegungsübertragung ist ungleichförmig und erfolgt bei einem Winkel α, den die Mittellinien der Wellen miteinander bilden, so, dafs $1 : \cos \alpha$ und $\cos \alpha$ die äufsersten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten sind. Liegen die Wellenmittellinien nicht genau in derselben Ebene, so drehen sich nicht nur die Gelenkzapfen (Abb. 141) in ihren Lagern, sondern sie verschieben sich auch. Sind drei Wellen durch Universal-

Abb. 141.



gelenke gekuppelt, so wird die Bewegung gleichförmig von der ersten auf die dritte Welle übertragen, wenn beide symmetrisch zur mittleren Welle liegen. Zapfenhülsen aus Rotgufs sind nur dann notwendig, wenn α erheblich von 180^0 abweicht.

Wellendurchmesser *d* mm	40	50	60	70	80	90	100	110	120	135	155	175
Durchmesser *D* . . mm	180	210	240	280	315	350	390	430	490	580	690	810
Länge *L* . . . . . mm	166	204	240	280	330	370	402	440	490	580	640	730
Länge d. Wellenendes für die Nabe *a* . . mm	60	75	90	105	120	135	150	165	190	210	255	300
Gewicht . . . . . . kg	10	16	25	40	58	86	120	165	225	330	520	780

Die Wellendurchmesser *d* können bis zu 5, bei den 5 letzten *d* bis zu 15 mm gröfser sein, als in der Tafel angegeben.

3. Elastische Kupplungen

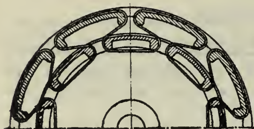
sind überall da am Platze, wo auftretende Stöfse in der Kupplung gemildert, oder wo zwei Wellen miteinander verbunden werden sollen, deren Mittellinien geringe Abweichungen voneinander aufweisen. Solche Abweichungen können auch im Betriebe entstehen, z. B. durch starkes Durchbiegen der Wellenenden, durch ungleichmäfsige Abnutzung der Lager usw. Zur Uebertragung der Bewegung von einer Kupplungshälfte auf die andere dienen elastische Bänder, Scheiben oder Bolzen, die zugleich isolierend wirken (Gummi, Leder o. drgl.), oder es arbeiten die üblichen Uebertragungsmittel mit Puffern aus Holz, Leder usw. zusammen.

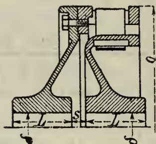
Nr. der Kupplung	$\frac{N}{n}$	Durchmesser *D* mm	Länge *L* mm	Naben-Bohrung *d* mm	Abstand *s* mm	Riemen- Breite mm	Riemen- Dicke mm	Riemen- Länge mm	Gewicht kg
0,7	0,00087	70	30	15	25	15	1	320	1,2
0,9	0,0017	90	30	20	25	15	1	400	1,8
1,2	0,003	120	40	20	20	20	2	900	3,8
1,5	0,007	150	50	25	18	25	2	1100	7
2	0,01	200	50	30	20	25	2	1450	13
3	0,03	300	75	40	20	40	3	2450	28
4	0,075	400	90	50	20	50	4	3450	55
5	0,15	500	115	60	20	50	4	4300	85
6	0,46	600	160	90	30	75	6	5350	170
8	1,12	800	220	120	30	100	7	6950	345
10	2,13	1000	260	140	40	2× 65	7	8500	640
12	3,8	1200	300	170	40	2× 65	7	11100	900
14	5,25	1400	330	200	50	2× 75	7	12800	1300
16	8,0	1600	360	230	50	2× 80	8	14700	1750
18	11,5	1800	400	250	50	2×100	8	17400	2460
20	15,6	2000	480	300	70	2×100	8	20500	4450

Besondere Anordnungen für wechselnde Drehrichtung sowie zum Ausrücken.

α) Bei der elastischen Isolationskupplung Pat. **Zodel-Voith** der Firma J. M. Voith in Heidenheim a. Br. (Abb. 142) dient zur Uebertragung ein Leder- oder Baumwollriemen, der nur lose angezogen, nahtartig durch Schlitze der ineinander greifenden zylindrischen Ränder der Kupplungsscheiben geschlungen ist.

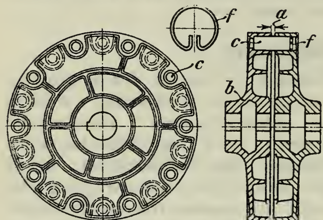
Abb. 142.





β) **Elastische Bolzenkupplung** der **B.-A. M.-A.-G.,** Dessau, eignet sich für Vor- und Rückwärtsgang, bei grofser Ausführung selbst für Betriebe mit stofsweiser Aenderung der Kraftrichtung. Wird neuerdings auch für Walzenzugmaschinen und schweren Förderbetrieb angewendet. Wie Abb. 143 zeigt, besteht die Kupplung aus zwei mit Zwischenraum *a* auf den Wellenenden aufgekeilten Scheiben *b*, deren Löcher *c* genau gegenüberliegend gebohrt sind. In diese werden 10 Lederbolzen oder (punktiert) 20 Gummibolzen *c* als Uebertragungsmittel eingesetzt. Federringe *f*, die in Nuten eingesetzt sind, hindern die leicht herausnehmbaren

Abb. 143.

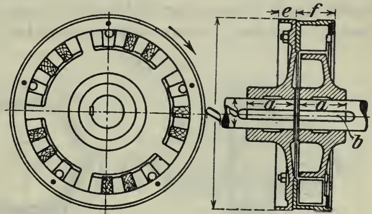


Modell-Nr. (theoretischer Wellen-durchmesser) mm	Durch-messer D mm	Länge L mm	Abstand der Wellenenden a mm	Gröfste Bohrung d mm	$\frac{N}{n}$ höchstens	Gewicht kg
20—25	145	90	4	25	0,0019	5
30—35	195	114	4	35	0,0072	10
40—45	250	154	4	65	0,0198	22
50—55	320	195	5	80	0,0441	35
60—65	395	226	6	95	0,0861	58
70—75	445	260	6	105	0,1526	85
80—85	510	296	6	115	0,2517	120
90—95	600	328	8	130	0,3928	170
100—105	675	368	8	140	0,5862	230
110—115	765	400	8	150	0,8435	310
120—130	895	450	10	170	1,3774	470
135—150	1055	520	10	195	2,4414	730
155—170	1255	590	10	220	4,0278	1100
175—190	1465	670	10	245	6,2847	1500

Bolzen am Herausfallen. Ausführung mit Gummibolzen bis 130 mm, mit Lederbolzen bis 190 mm Wellendurchmesser.

γ) **Elastische Zahnkupplung** von **G. Polysius**, Dessau. Die beiden Kupplungshälften aus Gufseisen (für Umlaufgeschwindigkeiten > 25 m aus Stahlgufs) greifen mit angegossenen Zähnen ineinander. Zwischen die Zähne sind abwechselnd Zwischenlagen aus Filz und Holz eingeschoben. Treibt die Kupplung nur nach einer Richtung, so liegen die elastischen Zwischenlagen vor den treibenden Zähnen und nur je eine Zwi-

Abb. 144.

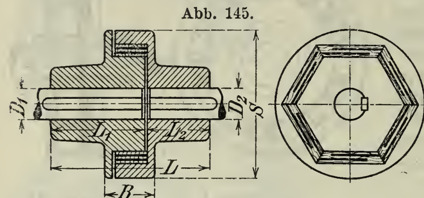


$\frac{N}{n}$	Aeufserer Durchmesser der Kupplung mm	Normale Bohrung der Kupplung mm	Nabenlänge a mm	Wellenabstand b mm	Ausführung I mit beiderseits angegossenen Zähnen: Kranzbreite mm	Ausführung I: Gewicht der Kupplung kg	Ausführung II mit an einer Kupplungsscheibe angeschraubten Zähnen: Kranzbreite e mm	Ausführung II: Kranzbreite f mm	Ausführung II: Gewicht der Kupplung kg
0,002	140	20	35	4	46	3	24	43	4
0,007	210	30	50	5	57	7	25	52	8
0,020	280	40	70	6	74	16	30	68	20
0,044	350	50	85	7	81	31	35	75	40
0,085	420	60	105	8	104	62	40	95	70
0,151	490	70	120	9	113	100	50	105	110
0,25	560	80	135	10	124	130	55	115	150
0,39	630	90	155	11	138	162	60	130	190
0,59	700	100	170	12	154	260	65	145	290
0,84	770	110	190	13	163	350	70	155	390
1,17	840	120	205	14	180	435	75	170	500
1,60	910	130	220	16	196	555	85	185	610
2,13	980	140	240	18	206	675	90	195	770
2,78	1050	150	255	20	222	850	95	210	960
3,52	1120	160	270	22	246	1080	105	235	1235
4,53	1190	170	290	24	264	1360	115	250	1500
5,61	1260	180	305	26	274	1590	120	260	1800
6,92	1330	190	325	28	296	1770	130	280	2000
8,46	1400	200	340	30	306	1970	130	290	2250
10,24	1470	210	355	32	322	2230	135	305	2500
12,25	1540	220	375	34	334	2570	140	315	2850
14,67	1610	230	390	36	340	2810	140	320	3200
17,30	1680	240	410	38	360	3110	155	340	3600
20,38	1750	250	425	40	382	3700	155	355	4100

schenlage hinter ihnen. Soll die Kupplung nach beiden Richtungen treiben, so sind vor und hinter den Zähnen gleich viel Zwischenlagen.

Bei einer anderen Ausführung sind an einer Scheibe die Kupplungszähne angeschraubt (s. Abb. 144), und zwar an dem treibenden Teil; an der getriebenen Scheibe sind sie auch hier angegossen. Dabei kann nach Lösen der Schrauben jede der Wellen aus den Lagern gehoben werden, ohne dafs achsiales Verschieben nötig wäre. Die Kupplung ist bis zu einer Leistung von 7200 PS bei 250 Uml./min ausgeführt.

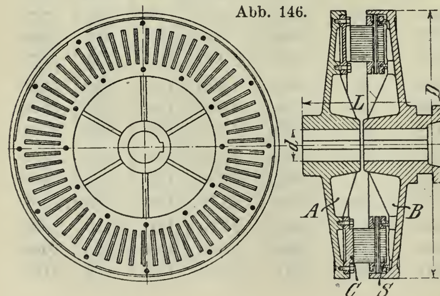
Abb. 145.



δ) Eine sehr einfache elastische Kupplung ist die **Grisson - Kupplung** (Abb. 145), die von der Maschinenfabrik E. Becker, Berlin-Reinickendorf, gebaut wird. Zwei gufseiserne, als Sechskant ausgebildete Kupplungsteile greifen mit in dem hohlen Sechskant angeordneten Zwischenstücken aus Hartholz, die zur Erhöhung der Federung mit Einschnitten versehen sind, ineinander. Für beide Drehrichtungen verwendbar.

Bohrung		$\frac{N}{n}$	Durchmesser	Länge			Kranzbreite	Gewicht
D_1 mm	D_2 mm		S mm	L mm	L_1 mm	L_2 mm	B mm	kg
20	20	0,005	105	120	70	50	38	5
30	30	0,015	150	150	90	60	47	10
40	40	0,039	200	200	120	80	61	20
50	50	0,07	250	250	150	100	71	35
60	60	0,12	300	280	170	110	91	50
70	70	0,19	350	310	190	120	111	80
80	80	0,284	400	340	210	130	121	125
90	90	0,405	450	370	230	140	141	180
100	100	0,555	500	400	250	150	151	240

Abb. 146.



4. Ein- und ausrückbare elastische Kupplungen.

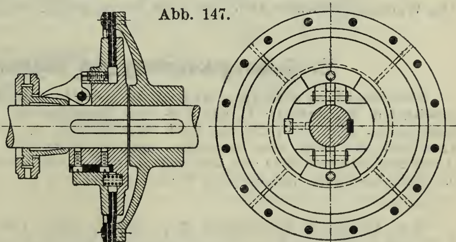
Getrennte Wellenstränge sind oft ungleichmäfsig beansprucht und können demnach bei längerem Betrieb ihre gleichachsige Lage durch ungleiche Abnutzung der Lager verlieren. Wird eingerückt,

so entsteht die Gefahr, dafs die Lager heifslaufen, wenn die Kupplung nicht nachgiebig ist.

α) Aus- und einrückbare elastische **Bürstenkupplung** der Maschinenfabrik **G. Luther,** A.-G. in Braunschweig (Abb. 146). Die Kupplung besteht aus 2 Scheiben *A* u. *B*. Die fest aufgekeilte Scheibe *A* trägt gleichachsig angeschraubte Segmente *C* mit dünnen radialen Zähnen oder Rippen. Die auf ihrer Welle verschiebbare Scheibe *B* trägt auf ihren Segmenten *S* radial gerichtete Reihen von Stahldrahtbürsten. Die Zähne auf *C* und die Bürsten auf *D* haben gleiche Abstände, so dafs stets sämtliche Zahnreihen mit allen Bürstenreihen in Eingriff sind. Die Bürsten müssen stets gut geölt sein. — Die Kupplung kann im vollen Betriebe aus- und eingerückt werden; beim Einrücken gleiten die Bürsten unter entsprechender Durchbiegung so lange über die Zähne hinweg, bis die volle Eingrifftiefe der Bürsten (die ausgerückt etwa 5 mm von den Mitnehmerzähnen abstehen) erreicht ist.

Theoretischer Wellendurchmesser *d* mm	Durchmesser *D* mm	Länge *L* mm	Länge der Zahnscheibe *a* mm	Länge der Bürstenscheibe *b* mm	Gewicht kg
30	245	190	80	105	54
35—40	345	275	110	145	77
45—50	440	310	130	155	120
55—60	550	325	140	165	150
65—70	650	350	155	180	200
75—80	750	375	165	200	330
85—90	850	415	180	225	415
95—100	950	440	190	240	500
105—110	1050	470	200	260	605

β) **Biegsame aus- und einrückbare Reibkupplung***) von **Baumgartner.** Am Kranz der rechten Kupplungshälfte sind zwei oder drei Ringscheiben aus Leder angeschraubt, die in zwei Reibscheiben der linken Kupplungshälfte im ausgerückten Zustande geringes Spiel haben. Die linke der beiden gufseisernen Reibscheiben ist um so viel verschiebbar, dafs sie beim Ein-


Abb. 147.

*) S. Volk, Maschinenteile, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1768.

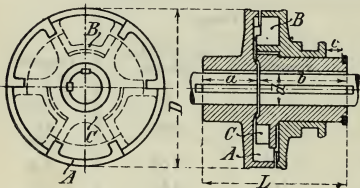
rücken die Lederscheiben mit Druck gegen die andere Reibscheibe prefst (Abb. 147).

c. Weitere Kupplungen zum Aus- und Einrücken.*)

Die wichtigsten dieser Kupplungen sind aufser den eben beschriebenen und aufser der unter **b.** genannten Klauenkupplung die Zahnkupplung von Hildebrandt und von Missong, die Schraubenfeder-Reibungskupplung**) von Louis Schwarz & Co. in Wetter a. d. Ruhr, die Gnomkupplung***) der Peniger Maschinenfabrik und Eisengiefserei und die unter 2. bis 7. genannten Reibungskupplungen.

1. Zahnkupplung von Hildebrandt.

Abb. 148.



Die beiden Kupplungshälften (Kreuz C und Gehäuse A) sind auf den Wellenenden festgekeilt. Die 4 Zähne der auf C verschiebbaren Muffe B greifen schliefsend in 4 Lücken der Scheiben C und A ein. Einrücken nur zulässig beim Stillstande oder bei langsamem Gange, Ausrücken jederzeit. —

Ausführungen der B.-A. M.-A.-G.

Wellendurchmesser . mm	30	40	50	60	70	80	95	110	125	140	160	180
Durchmesser D . . mm	250	275	300	330	365	425	500	575	650	750	920	1080
Länge L . . . . . mm	240	260	280	300	330	380	450	515	590	670	820	960
Länge d. Wellenendes f. d. feste Scheibe a mm	90	97	105	110	125	142	167	193	220	250	300	350
Länge d. Wellenendes f. Kreuz u. Muffe b mm	145	158	170	185	200	230	275	314	360	410	505	596
Hub c . . . . . . mm	23	24	27	31	35	42	51	60	70	80	100	112
Gewicht . . . . . kg	42	47	54	68	91	136	220	325	460	675	1030	1620

Der Wellendurchmesser kann um 5 bis 20 mm gröfser sein, als in der Tafel angegeben.

2. Reibungskupplung von Dohmen-Leblanc.

Diese Kupplung wird [von der B.-A. M.-A.-G., Dessau] für fünf verschiedene Zwecke verschieden angeordnet: 1) zur Ver- und Entkupplung zweier Wellen während des Betriebes (s. Abb. 149); 2) um einen Wellenstrang in und aufser Betrieb zu setzen, wenn sich auf ihm eine beständig umlaufende Scheibe oder ein Zahnrad befindet; 3) um eine Scheibe oder ein Zahnrad in und aufser Betrieb zu setzen, wenn sie sich auf einer beständig umlaufenden Welle befinden; 4) zur Ver- und Entkupplung zweier

---

*) S. Ad. Ernst, Ausrückbare Kupplungen; Berlin 1890, J. Springer, auch Z. d. V. d. I. 1889 S. 481; auch der eben genannte Aufsatz in der Z. d. V. d. I. 1907 S. 1768.

**) S. Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl. 1908, S. 632.

***) S. Z. d. V. d. I. 1907, S. 1769.

Wellen (während des Betriebes), von denen bald die eine, bald die andere die treibende ist; 5) um eine für sich gelagerte, auf einer Hohlwelle sitzende schwere Antriebscheibe mit einer in der Mittellinie der Hohlwelle befindlichen, beständig umlaufenden Welle zu kuppeln.

Abb. 149.

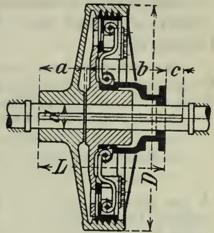


Abb. 149 zeigt die Anordnung 1. Auf dem linken, treibenden Wellenende ist eine Scheibe festgekeilt. Durch Verschieben der Hülse auf der getriebenen Welle von rechts nach links in die gezeichnete Stellung werden mittels der vier federnden, hakenförmigen stählernen Druckstangen (Kniehebel) vier Gleitstücke in einem auf der getriebenen Welle festgekeilten Armkreuze nach aufsen gegen die geriffelte Innenfläche der Scheibe gedrückt, so dafs die dadurch entstehende Reibung die Kupplung der Wellen vermittelt. Beim Verschieben der Hülse von links nach rechts tritt Entkupplung ein.

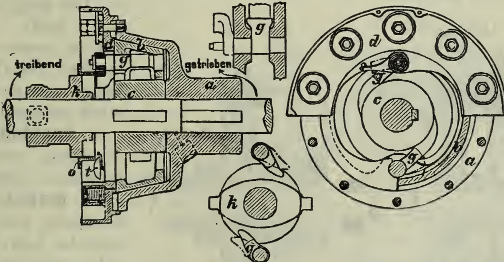
Wellendurchmesser . mm	40	45	50	55	65	70	75	85	95	110	120	140
Durchmesser *D* . . . mm	350	400	450	600	660	860	740	880	1040	1290	1490	1720
Länge *L* . . . . mm	229	229	271	314	358	388	413	451	525	575	646	780
Länge d. Wellenendes für das Gehäuse *a* mm	80	80	85	100	125	135	150	160	180	200	230	300
Länge d. Wellenendes f. Kreuz u. Muffe *b* mm	147	147	184	211	230	250	260	288	340	370	411	475
Hub *c* . . . . . . mm	30	30	40	50	60	65	55	75	95	110	125	140
Gewicht . . . . . kg	40	50	70	100	150	210	240	320	490	740	1050	1600

Die Wellendurchmesser 55, 75, 85, 110 können bis um 5 mm, 95, 120, 140 bis um 10 mm gröfser sein.

3. Reibungskupplung von Lohmann & Stolterfoht in Witten (Ruhr).

Auf der treibenden Welle (Abb. 150) ist der mit Zähnen versehene Körper *c*, auf der getriebenen Welle der Hohlkegel *a* aufgekeilt.

Abb. 150.



Gegen die innere Fläche von *a* wird der Reibungskegel *b* durch die Stirnscheibe *d* mittels Schrauben dauernd so stark angedrückt, dafs die entstehende Reibung (zwischen *a* und *b*) zur Uebertragung des Drehmomentes ausreicht. Der Kegel *b* trägt die beweglichen Klinken *g*, die sich im eingerückten Zustand der Kupplung gegen die Zähne des Körpers *c* legen. Soll ausgerückt werden, so ist die Muffe *k*, deren

Anlaufflächen hierbei durch Vermittlung von Hebeln auf Auswärtsdrehung der Klinken *g* wirken, nach *b* hin zu verschieben. Das Einrücken erfolgt durch Zurückziehen der Muffe *k*. Die Signalglocke *t* ist mit ihrem federnden Klöppel auf der Stirnscheibe *d* befestigt und ertönt während der Dauer des Gleitens (beim Einrücken wie beim Bremsen).

Nachstehende Tafel enthält für einige der von Lohmann & Stolterfoht gelieferten Kupplungen zur Verbindung von Wellenenden die wichtigsten Angaben; für die richtige Wahl der Nr. der Kupplung sind weniger *N* als vielmehr die Häufigkeit der Benutzung, die Gröfse der eingerückten Muffen und andere Betriebsverhältnisse mafsgebend.

Wellendurchmesser	mm	40	50	60	80	90	100	120	140	150	175	200
N bei 100 Uml./min . .	PS	4	6	8	23	35	50	100	160	200	300	450
Gröfster Durchmesser . .	mm	340	390	410	505	580	625	745	850	900	1040	1200
Ganze Länge	mm	355	395	450	580	625	680	790	895	955	1080	1250
Gewicht	kg	55	70	95	175	240	305	500	750	890	1400	1950

Die Kupplung gewährt unveränderliche Anpressung, ziemlich erhebliche Längsbeweglichkeit und eine gewisse Winkelbeweglichkeit. Sie ist auch (mittels Seil- oder Drahtzuges) aus gröfserer Entfernung leicht ein- und ausrückbar (Sicherheitskupplung für ganze Triebwerkanlagen).

4. Reibungskupplung von Hill. (Abb. 151 u. 152.)

(**Eisenwerk Wülfel** in Wülfel vor Hannover.)

Der Reibungsring (Hill-Ring) *B* ist beiderseits glatt überdreht; das Hill-Kreuz *A* trägt in seinen radialen Armen 2 bis 6 Paare Reibungsbacken *C*, die mit Holz gefüttert sind und beim Einrücken von innen und aufsen sich gleichzeitig und mit gleichem Drucke gegen *B* andrücken, so dafs *B* frei von Biegungsspannungen bleibt.

Beim Einrücken wird Hebel *h* um Zapfen *d* gedreht, der in der äufseren Backe gelagert ist; dabei drückt das Ende von *h* mit der Rolle *e* gegen Bolzen *f* der inneren Backe. Hierdurch nähern sich beide Backen und drücken sich gegen *B*. — Damit die ausgerückten Backen einen Halt gegen radiale Verschiebung haben, sind sie durch den um Bolzen *i* drehbaren Lenker *l* verbunden und entfernen sich daher gleichweit von *B*. Die Abnutzung ist auf die leicht (durch Anziehen der Schraube *k*) nachstellbaren oder auswechselbaren Holzfutter beschränkt; diese sowie die Federung der Zapfen liefern die erforderliche Elastizität.

Abb. 151.

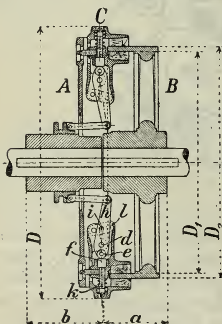
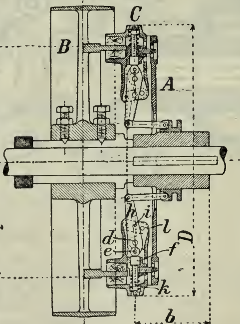


Abb. 152.



Die Kupplung, die für hohe Umlaufzahlen sowie auch bei starker Staubentwicklung anwendbar ist, wird gebaut:

1. **ungeteilt** zur Verbindung zweier Wellenenden (Abb. 151);
2. **geteilt,** in Verbindung mit Riemenscheibe usw., zum Ersatz des mit starker Abnutzung des Riemens verbundenen Antriebes mit fester und loser Riemenscheibe (Abb. 152);

3. in Verbindung mit Hohlwelle, wobei A auf der Antriebwelle, B auf der Hohlwelle sitzt, die gleichachsig mit der Hauptwelle besonders gelagert ist (für schwere Hauptantriebe und Dynamos).

Nr.	Gröfste Leistung N in PS bei $n =$			Anzahl der Arme	Hill-Kreuz A			Hill-Ring B				Gewicht	
					D	b		D_1	D_2	a			
						ungeteilt	geteilt			ungeteilt	geteilt	ungeteilt	geteilt
	60	150	250		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	kg	kg
6	4	11	15	2	610	170	200	490	510	140	180	79	114
7	7	16	23	3	610	170	.	490	510	140	.	86	.
8	10	27	40	3	725	200	.	599	625	165	.	143	.
9	17	42	65	4	865	245	265	713	745	180	205	255	295
10	25	60	85	4	980	265	295	800	835	200	225	343	403
11	36	90	130	4	1090	310	345	902	940	235	245	481	554
12	50	130	190	4	1255	345	385	1036	1080	280	280	718	790
13	90	225	300	4	1420	380	425	1168	1220	310	310	1005	1147
14	130	325	475	6	1420	435	450	1168	1220	310	310	1280	1345
15	190	475	625	6	1620	480	500	1344	1400	350	375	1857	2010
16	250	625	700	6	1810	500	525	1510	1570	400	400	2602	2636

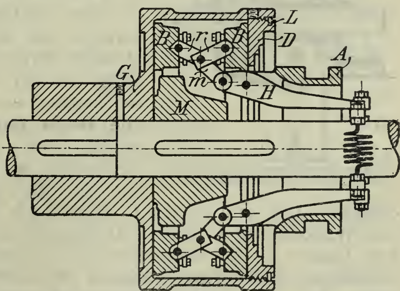
Aufserdem die Nrn. 6 a, 7 a, 8 a, 9 a, 10 a mit $D = 680$, 680, 765, 925, 1080 mm.

5. Doppelscheiben-Reibungskupplung.

Von **G. Luther**, A.-G., Braunschweig. (**Benn-Kupplung.**)

Auf dem einen Wellenende (links) sitzt fest aufgekeilt das Gehäuse G mit dem rechts daraufsitzenden, mittels Gewinde einstellbaren Deckel D. Auf dem anderen Wellenende ist die Mitnehmerscheibe M festgekeilt. Durch deren Wandungen sind zwei sich gegenüberliegende Bolzen geführt, auf deren beiderseits vorstehenden Enden die Bremsklötze B B verschiebbar sind. An B B greifen die Hebel r r an, die durch einen dritten Hebel m drehbar mit den beiden von der Ausrückmuffe A getragenen Drehhebeln H verbunden sind. Die Ausrückmuffe A führt sich mit ihrer Aufsenfläche in dem Ausschnitt des Deckels D. Die Hebel H werden an ihren äufseren Enden durch Schraubenfedern F zusammengehalten. Abb. 153 zeigt die ausgerückte Kupplung. Durch Verschieben der Muffe A nach links werden die Gelenkhebel r r von den Hebeln H und m kniehebelartig durchgedrückt, wobei der Hebel m bis über seine Mittellage nach links bewegt wird und sich die Bremsklötze B B an die Reibungsflächen des Gehäuses G und seines Deckels D legen. Die Kupplung wird auch in Verbindung mit Riemen-

Abb. 153.

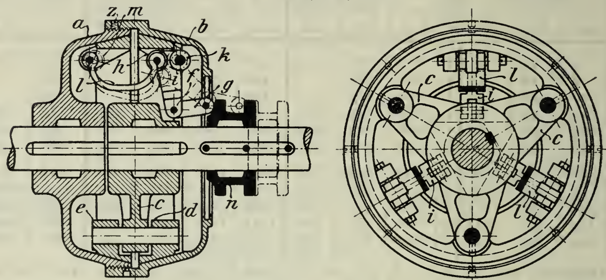


oder Seilscheibe geliefert. — Die inneren Teile können ständig im Oelbade laufen.

6. Doppelkegel-Reibungskupplung der Sächsischen Maschinenfabrik vorm. Rich. Hartmann, A.-G., Chemnitz.

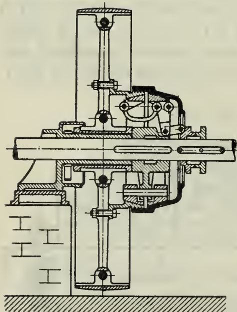
Die Kupplung wird in 4 verschiedenen Anordnungen geliefert. Anordnung 1 zur Verbindung zweier Wellenenden (s. Abb. 154). Anordnung 2 zur Verbindung

Abb. 154.



leichter oder mittlerer Riem- oder Seilscheiben mit stets laufenden Wellen, wenn die Kupplungen nur selten und für kurze Zeit ausgerückt werden, ebenso wenn zeitweilig stillstehende Wellen mit stets laufenden Scheiben gekuppelt werden sollen. Anordnung 3 zur Verbindung leichter oder mittlerer Scheiben mit stets laufenden Wellen, wenn die Kupplungen meist ausgerückt sind und nur zeitweilig eingerückt werden (Abb. 155). Die Welle ist durch den hohlen Losscheibenträger frei durchgeführt. Die Scheibe ist mit Rotgufsbuchse versehen, auf deren über den Nabenrand vorstehenden Teil der Schmierring aufgehängt ist, der die Lauffläche bei eingerückter Kupplung mit Oel versorgt. Anordnung 4 zur Verbindung einer Hohlwelle nebst auf ihr sitzender Scheibe mit der durch die Hohlwelle frei durchgeführten Vollwelle. Hierbei kann ebensogut die Scheibe wie auch die Vollwelle treiben. Vollwelle und Hohlwelle sind so nahe wie möglich an Scheibe und Kupplung doppelt zu lagern.

Abb. 155.



Die Reibungskupplung nach Anordnung 1 ist in Abb. 154 in Schnitt und Ansicht dargestellt. Das Gehäuse der Kupplung ist auf der linken Welle festgekeilt; es besteht aus den beiden Teilen *a* und *b*, die beide innen mit Kegelreibflächen versehen sind. Die zweite Welle trägt den Mitnehmer *c* mit durchgehenden Zapfen, die als Führung für die Reibringe *d* und *e* dienen. Der am Bolzen *f* angreifende Lenker *g* fafst mit Bolzen *h* den Winkelhebel *i*, dessen Drehpunkt *k* im Reibring *d* gelagert ist. Der Bolzen *h* des Winkelhebels ist mittels der Feder *l* mit dem im Reibringe *e* gelagerten Bolzen *m* verbunden. Im eingerückten Zustande liegen die Mitten der Bolzen *k*, *h* und *m* genau oder nahezu in einer geraden Linie, so dafs das Getriebe selbstsperrend und die Muffe entlastet ist.

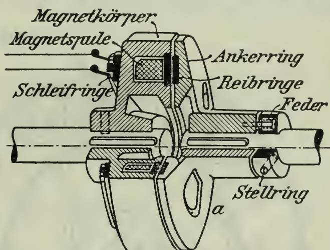
Soll die Kupplung ausgerückt werden, so wird die Muffe *n* auf der Welle nach aufsen gerückt und nimmt durch die Lenker *g* die Winkelhebel *i* mit. Diese drehen sich um die noch festliegenden Punkte *k*, so dafs der Reibring *e* ausgerückt und von dem Gehäuseteil *a* entfernt wird, bis *e* am Mitnehmer *c* einen Stützpunkt findet. Dadurch werden die Bolzen *m* zu Festpunkten des Getriebes. Die weitere Bewegung der Muffe *n* bewirkt einen Vorschub der Punkte *k* nach dem Mitnehmer zu, so dafs auch der Reibring *d* aufser Eingriff mit dem Gehäuse kommt. Beim Einrücken der Kupplung durch Bewegung der Muffe *n* nach innen kommt zuerst der Reibring *e* in Eingriff mit Gehäuseteil *a*. Nachdem *m* ein fester Drehpunkt geworden ist, erfolgt auch das Einrücken des Reibringes *d*.

Durch Zusammenschrauben der Gehäusehälften kann die Kupplung nachgestellt werden. Die Reibringe laufen in Oel. Ausführungen für Wellendurchmesser von 40 bis 200 mm.

7. Elektromagnetische Friktionskupplung „Vulkan" der Berlin-Anhaltischen Maschinenbau-A.-G. in Dessau und Berlin.

Die Kupplung (Abb. 156) besteht aus zwei Teilen, dem Magnetkörper, fest auf dem einen Wellenende, und dem Anker *a*, verschiebbar auf dem anderen. Im Magnetkörper ist die Magnetspule untergebracht, der mit Schleifringen und Schleifkontakten ein Gleichstrom beliebiger Spannung zugeführt wird. Bei Stromschlufs ziehen sich Magnetkörper und Ankerring an, jedoch ohne sich zu berühren, so dafs die Reibringe aus nicht magnetischem Stoff den vollen Druck aufzunehmen haben. Bei Unterbrechung des Stromes wird die Kupplung sofort gelöst, da die Kupplungsteile durch Spiralfedern so weit voneinander entfernt werden, dafs Berührung der Reibringe nicht mehr stattfindet.

Abb. 156.



Ausrückung aus beliebiger Entfernung. Ausführung bis zu 2000 PS und für beliebige Umlaufzahlen. Keine Reibungsverluste durch achsialen Druck.

d. Kraftmaschinen-Kupplungen.

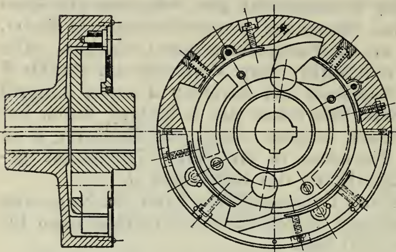
Wird ein Wellenstrang von zwei Kraftmaschinen angetrieben, z. B. Wasserrad oder Turbine als Hauptmotor mit Dampfmaschine oder Verbrennungskraftmaschine als Hülfsmotor, so wird eine Kupplung eingeschaltet, die sich je nach der Geschwindigkeit der beiden Kraftmaschinen selbsttätig ein- oder ausrückt.

1. Uhlhornsche Klinkenkupplung in der Ausführung der Maschinenfabrik G. Luther, A.-G. in Braunschweig.

Die Kupplung wird zwischen den Antrieben der beiden Kraftmaschinen in den Wellenstrang eingeschaltet. Sie rückt selbst-

tätig ein, sobald die Hauptkraftmaschine zu langsam geht, und schaltet sich wieder aus, wenn der Hauptmotor allein die gewünschte Umlaufzahl innehalten kann. — Der innere Teil der Kupplung (Abb. 157) mufs stets auf die Welle der Hülfsmaschine gesetzt werden. Die innere Scheibe überträgt die Umfangskraft auf die von der Hauptkraftmaschine getriebene Welle durch Sperrklinken, die in den äufseren Kupplungsteil eingreifen.

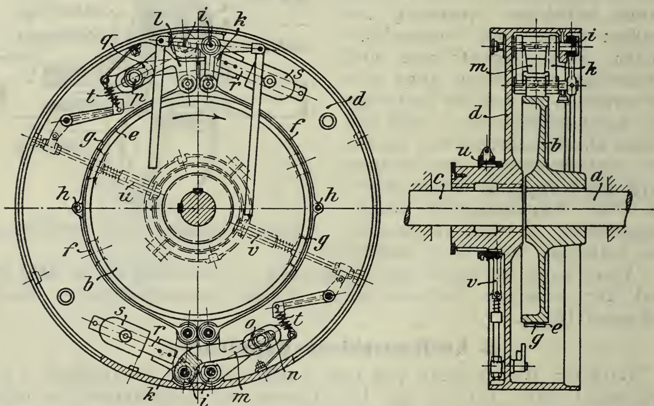
Abb. 157.



2. Kraftmaschinen-Kupplung „Ohnesorge“ der B.-A. M.-A.-G. in Dessau und Berlin. (Abb. 158.)

Auf der Welle *a* der ständig laufenden Hauptmaschine sitzt aufgekeilt die Bremsscheibe *b*. Die Welle *c* der je nach Bedarf einzu-

Abb. 158.



schaltenden Zusatzmaschine trägt das Kupplungsgehäuse *d*. Um die Bremsscheibe *b* ist der zweiteilige, mit Bronzebelag *e* ausgefütterte Bremszaum gelegt, dessen Teile *f* und *g* durch die Gelenkbolzen *h* aneinander geschlossen sind. Die Teile *f* und *g* des Bremszaumes sind gelenkig an radial stehende, um Bolzen *i* im Gehäuse *d* schwingende Hebel *k* und *l* angeschlossen. Der Hebel *k* besitzt einen starr mit ihm verbundenen Arm *m*, der zwischen dem zweiteiligen

Hebel l frei hindurchgeht und in einer Bahn n den Stein o trägt, dessen Zapfen p in Bohrungen der mit den Hebeln l starr verbundenen Winkelhebel q gelagert sind. Der Vorteil dieser neuen Anordnung der Differentialhebel liegt darin, dafs man die Hebel k und l beliebig, je nachdem die baulichen Rücksichten es fordern, bemessen kann. Ferner haben kleine Ungenauigkeiten des Einbaues sowie solche, welche sich im Laufe der Zeit einstellen könnten, nur ganz verschwindenden oder keinen schädlichen Einflufs auf die Aenderung des Differentialverhältnisses.

Die auf Stangen r an den Hebeln k einstellbaren Schwunggewichte s dienen dazu, die freien Fliehkräfte für alle Winkelgeschwindigkeiten auszugleichen. — Um für den Betrieb ein ständiges Anliegen des Zaumes zu erhalten, wird dieser leicht durch die Federn t angeprefst, die von einer auf der Nabe des Gehäuses d verschiebbaren Muffe u aus mittels der federnd über die Knicklage hinaus bewegten Stangen v ein- und ausgerückt werden können.

Arbeitsweise der Kupplung: Da im ausgerückten Zustand der Bremszaum völlig gleichförmig abgehoben ist, so läuft während der Dauer der Arbeitslieferung allein durch die Hauptmaschine die Bremsscheibe b völlig frei. Mufs nun bei Mehrbedarf an Kraft die Zusatzmaschine eingeschaltet werden, so wird mit ihrem Anlassen oder kurze Zeit nachher der Bremszaum mit Hülfe der Einrückvorrichtung angelegt; da dies bei der selbsttätigen Wirkung der Kupplung nur ein Schalten auf Eingriff bedeutet, so ist lediglich die Bedingung vorhanden, dafs es zeitlich vor Erreichung der Umlaufzahl der Hauptmaschine erfolgen mufs. Unter leichtem, durch die federnde Anpressung des Zaumes bedingtem Schleifen eilt das hier der Zusatzmaschine angehörige Kupplungsgehäuse d der Bremsscheibe b nach. Sobald gleiche Geschwindigkeit erreicht ist, findet dann die selbsttätige Kupplung statt, die sich als einfaches Anspannen des bereits in der richtigen Lage befindlichen Zaumes darstellt. Da der Zusatzmaschine nicht der geringste Weg zur Erlangung einer positiven Massenbeschleunigung geboten ist, so ist jeder Stofs bei der Arbeitsabgabe des Zusatzmotors vermieden. Dies Spiel wiederholt sich unter völliger Geräuschlosigkeit jedesmal, wenn die Zusatzmaschine zurückbleibt.

G. Lager.

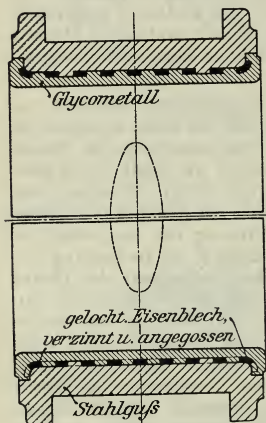
Die nachstehend angegebenen Abmessungen von fertigen Lagern sind (ausgen. das Stehlager von Wülfel S. 770 u. 771) dem Preisbuche der **Berlin-Anhaltischen Maschinenbau-Aktien-Gesellschaft in Dessau** auszugweise entnommen. In den angegebenen Gewichten der Lager ist das Gewicht der Grundplatte nicht enthalten. Das Grundplatten-Gewicht beträgt für die kleinsten bis zu den gröfsten Lagern etwa 100 bis 75 vH des Lagergewichtes

Wesentliche Teile eines Lagers: Lagerschalen, Lagerkörper, Lagerdeckel, Deckelschrauben mit Muttern, Grundanker und Grundplatte. Die Grundanker machen besondere Lagerfufsschrauben (zur Befestigung des Fufses an der Grundplatte) überflüssig und bieten den Vorteil unmittelbarer Uebertragung eines etwa nach oben gerichteten Lagerdruckes auf den Unterbau.

Baustoff für die **Lagerschalen:** (Tafel f. d. Flächendruck zwischen Zapfen und Lagerschale s. S. 742) Gufseisen, besonders bei Kugelschalen (Sellers-Lagern) angewendet (s. Abb. 165 u. 166). — **Bronze** (Rotgufs) oder **Weifsmetall.** Vielfach Gufseisen- oder Rotgufsschalen mit **Weifsmetall ausgegossen** (Abb. 163 u. 164). Damit das Weifsmetall gut haftet, mufs die Schale mit quer- und längsgerichteten Schwalbenschwanznuten versehen werden (s. auch unter Schubstangenköpfe).

Statt der Schwalbenschwanzverbindung, die eine unerwünschte Schwächung der Schale ergibt, wird neuerdings zur Verbindung von Schale und Weifsmetalleingufs das **Glyco-Skelett** angewendet (Abb. 159).

Abb. 159.



Danach werden in die Gufsform der Schale, die aus Gufseisen oder Stahlgufs besteht, Skelettbleche (gelochte, verzinnte Eisenbleche) eingelegt, die an die Schale angegossen und dann mit **Glyco-Metall** ausgegossen werden, wobei die Löcher des Skelettbleches die Verbindung einerseits mit der Schale, anderseits mit dem Ausgufs aus Weifsmetall sichern. — Glyco-Metall ist eine Weifsmetallegierung von hohem Bleigehalt und geringem Reibungskoeffizienten. Für kleinere dünnwandige Lagerschalen wird das gelochte und verzinnte Skelettblech unmittelbar in die Sand- oder Metallform eingelegt und mit Glyco-Metall umgossen.

Länge l und innerer Durchmesser d der **Lagerschalen** sind durch den aufzunehmenden Zapfen gegeben. Rotgufsschalen erhalten eine kleinste Dicke $s = \frac{1}{16} d + 0{,}5$ cm. Die Abmessungen der einzelnen Lagerteile sind aus dem Zapfendrucke $P = kld$ (s. S. 741) zu ermitteln. Je nach der Gröfse des Flächendruckes k (s. S. 742) erhält man schwere oder leichte Lager; für gewöhnliche Triebwerklager mit $l = 1{,}5\,d$ genügt $k = 20$ bis 25 kg/qcm. Mit der zulässigen Biegungsspannung für Gufseisen kann man bis $k_b = 360$ kg/qcm gehen; ändert jedoch P seine Gröfse und Richtung sehr, so ist k_b entsprechend kleiner zu nehmen.

Der mittlere Flächendruck zwischen Grundplatte und auf dem Sandstein- oder Klinkermauerwerk ruhenden Zementuntergufs sei höchstens 10 kg/qcm. Ist das Lager unmittelbar auf Holz oder Eisen (Hängeböcke, Säulen- und Wandkonsolen, Mauerkasten, Lagerstühle, Walzträger) zu schrauben, so fallen Grundplatte und Arbeitsleisten der unteren Lagerfläche fort.

Erfüllen bei Raummangel die Deckelschrauben gleichzeitig den Zweck der Grundschrauben (wobei aufser der Grundplatte noch die seitlichen Lagerfüfse wegfallen), so entsteht das **Rumpflager.**

Ist der Zapfendruck stets nach unten gerichtet, so kann an Stelle der oberen Rotgufs- oder Weifsmetallschale eine solche von Gufseisen und an Stelle des gewöhnlichen Deckels ein Staubdeckel oder Schmierkissen treten.

Ansprüche an ein gutes Lager.

1. Der Zapfen soll der ganzen Länge nach und im gröfsten Teile seines tragenden Umfanges anliegen.

2. Der Spielraum zwischen Zapfen und Pfanne sei möglichst klein, jedoch so grofs, dafs das Schmiermittel durchtreten kann.

3. Die Abnutzung durch Reibung ist durch richtige Zufuhr von Schmiermittel zu verhindern, wobei das Schmiermittel u. a. zugleich zur Wärmeabfuhr dienen kann.

4. Die Schmierung mufs während der Drehung des Zapfens zuverlässig wirken. Solange der Zapfen stillsteht, mufs die Schmierzufuhr ruhen.

5. Das Schmiermittel darf, nachdem es in den Laufflächen gewirkt hat, nicht verloren gehen oder die Umgebung verunreinigen; es mufs sich in besonderen Kammern zum Zwecke weiterer Verwendung aufspeichern.

6. Billige und einfache Wartung.

7. Möglichkeit jederzeitiger Prüfung des Zustandes des Lagers.

Für die **Lagerschalen** gilt aufserdem:

1. Abnutzung der Lagerschalen soll durch Nachstellen möglichst so ausgleichbar sein, dafs die Welle ihre ursprüngliche Achsenlage beibehält (vrgl. z. B. die Abb. 168, 169 u. 170).

2. Abgenutzte Schalen müssen billig und schnell ersetzt und eingepafst werden können.

3. Der Baustoff der Schalen mufs so gewählt sein, dafs die Zapfen geschont werden und die Abnutzung sich auf die Schalen beschränkt.

Zuführung der Schmiere mittels Selbstöler oder Starrschmierbüchsen, neuerdings fast nur noch durch Ringe **(Ringschmierlager)**, die im Lager auf der Welle lose hängen und in das Oel tauchen.*) Statt der losen Ringe, die bisweilen unregelmäfsig laufen, auch zweiteilige Oelringe, die im Lager durch eine starke Blattfeder o. drgl. derart auf die Welle festgeklemmt werden, dafs diese in der Längsrichtung verschiebbar bleibt (vrgl. Abb. 164 u. 167).

1. Stehlager mit festen Schalen.

Stehlager (nach R. Escher) für schwerere Wellen, zur Lagerung schwerer ausrückbarer Kupplungen und da, wo starke seitliche Züge auftreten, s. Abb. 160, 161 u. 162, letzteres mit Ringschmierung.**)

Stehlager der B.-A. M.-A.-G. mit herausnehmbaren Weifsmetallschalen, s. Abb. 163.

Der Mittelpunkt des Lagers kann nur wagerecht verstellt werden. Die Lager bis 160 mm Bohrung haben einen geteilten Schmierring, die mit gröfserer Bohrung zwei geteilte Schmierringe S. Tafel S. 770 u. 771.

*) Vrgl. hierzu R. Kablitz, Z. d. V. d. I. 1902 S. 1841.

**) Vrgl. Volk, Bearbeitung der Ringschmierlager, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1245 ff.

Abb. 160.

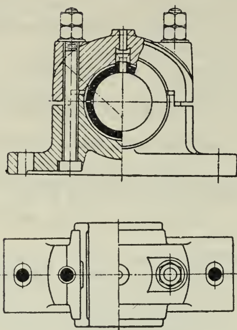


Abb. 162.

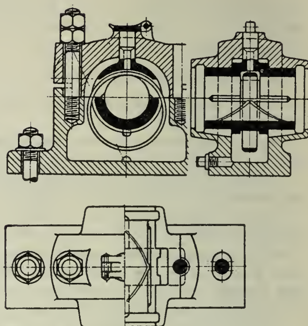


Abb. 161.

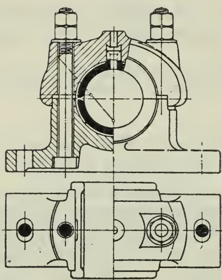
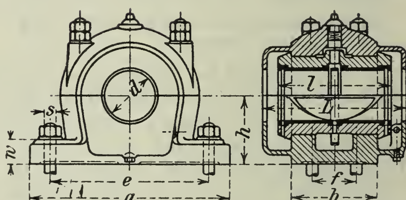


Abb. 163.



Bohrung des Lagers	Länge der Schale	Länge des Körpers	Lagerhöhe	Fufsplatte Länge	Fufsplatte Breite	Fufsplatte Dicke	Lagerfufsschrauben Entfernung		Lagerfufsschrauben Zahl	Lagerfufsschrauben Durchmesser	Gewicht
d	*l*	*L*	*h*	*a*	*b*	*w*	*e*	*f*		*s*	
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm		mm	kg
30—35	90	125	65	190	75	23	140	.	2	13	7
40—45	110	150	75	220	90	25	166	.	2	13	11
50—55	130	180	82	260	105	30	200	.	2	16	19
60—65	155	205	95	310	125	35	230	.	2	20	27
70—80	175	230	110	350	140	40	260	.	2	23	38
85—95	205	265	125	400	165	50	300	.	2	26	65
100—110	240	310	140	450	190	50	340	.	2	29	93
115—130	280	360	170	510	220	62	400	110	4	26	145
135—160	330	420	200	580	250	72	460	130	4	32	230
165—190	390	490	235	680	280	85	550	150	4	39	365
195—220	450	560	270	790	320	93	630	170	4	42	540
225—260	525	650	300	900	380	100	720	210	4	51	800
265—300	600	750	340	1000	425	110	800	240	4	58	1220

Stehlager für schwere Hauptantriebe mit herausnehmbaren Weifsmetall-Lagerschalen, Ringschmierung und **sichtbarem Oelumlauf**, vom Eisenwerk Wülfel in Wülfel vor Hannover (Abb. 164).

Der geteilte Oelring *A* ist gleichachsig auf der Welle festgeklemmt und achsial leicht verschiebbar. Das am Oelringe haftende Oel sammelt sich in dem sichtbaren Behälter *B* und wird von hier über die ganze Lauffläche geleitet Der grofse Umfang des Oelringes und die hohe Lage von *B* fördern den Oelumlauf. *B* gestattet, stets den Oelinhalt zu prüfen sowie geeignete Schmiermittel auf Grund der Temperaturzunahme zu wählen.

Wellen-durch-messer *d* mm	Lager-länge *L* mm	Scha-len-länge *l* mm	Lager-höhe *h* mm	Fufsplatte			4 Befestigungs-schrauben			Ge-wicht kg
				a mm	*b* mm	*c* mm	*s* mm	Längs-Ent-fernung *J* mm	Quer-Entfer-nung mm	
60	245	160	100	270	130	30	13	210	65	30
70	270	180	110	310	145	35	16	240	75	40
80	300	200	125	330	160	40	16	255	85	53
90	330	220	140	360	180	45	19	280	95	75
100	360	240	150	395	200	50	22	300	105	100
110	390	260	160	410	210	50	22	320	115	115
120	415	280	170	430	220	55	22	335	125	142
130	440	300	180	465	235	60	25	365	135	170
140	470	320	190	510	250	65	29	400	145	205
150	515	360	210	550	280	75	32	430	160	275
170	570	400	240	640	320	85	35	500	180	405
200	620	440	260	700	360	90	44	540	200	460
220	690	490	290	770	400	100	44	600	230	625
240	740	540	330	850	440	110	51	660	250	875

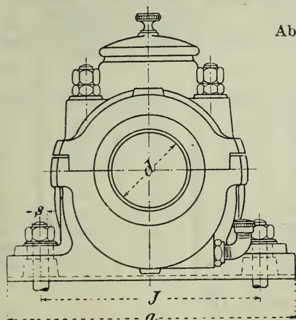
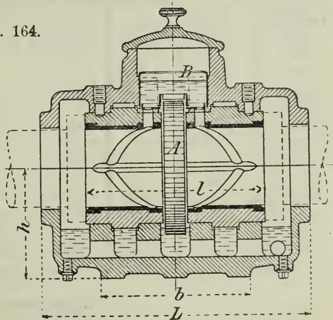


Abb. 164.



In ähnlicher Bauart auch Lager für leichtere Triebwerke mit Kugelbewegung, Ringschmierung und sichtbarem Oelumlauf.

2. Stehlager mit Kugelschalen (Sellers-Lager).

Die beiden gufseisernen Schalen haben kugelförmige Drehzapfen, die in der Lagermitte ihren gemeinsamen Mittelpunkt haben und mit

dem Deckel und dem Lagerkörper ein Kugelgelenk bilden; dadurch stellen sich die Schalen selbsttätig in Richtung der Welle ein. Grofse Schalenlänge (etwa $l=4$ bis $5\,d$), also kleiner Flächendruck, gute und billige Schmierung, geringe Abnutzung, gute Wärmeentziehung.

Abb. 165.

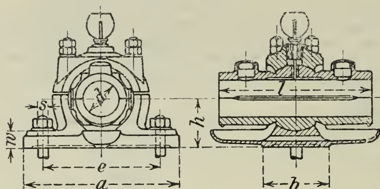


Abb. 165 geschlossenes Stehlager der B.-A. M.-A.-G. Schalenlänge $= 4\,d$. Bis 65 mm Bohrung haben die Schalen zwei, von 70 mm Bohrung an vier Kugelflächen.

Abb. 166.

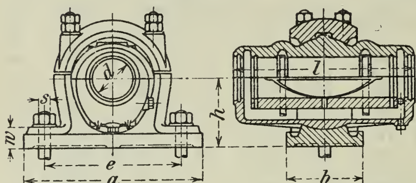


Abb. 166 geschlossenes Ringschmier-Stehlager der B.-A. M.-A.-G. Das Lager ist selbstdichtend, läfst also weder durch die Teilfugen noch an den Enden Oel austreten, ohne Verwendung besonderer Abstreichvorrichtungen o. drgl.

Der Mittelpunkt des Lagers läfst sich bei **beiden** Lagern nur wagerecht verstellen (durch Verschieben des Lagers auf seiner Unterlage).

Lager nach Abb. 165.

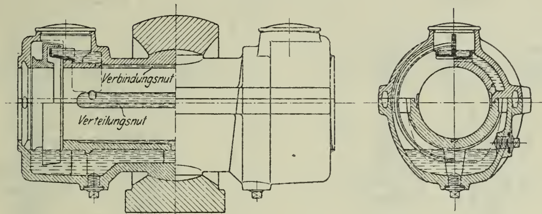
Bohrung des Lagers d mm	Länge der Schale l mm	Lagerhöhe h mm	Fufsplatte Länge a mm	Fufsplatte Breite b mm	Fufsplatte Dicke w mm	Lagerfufsschrauben Entfernung e mm	Lagerfufsschrauben Durchmesser s mm	Gewicht kg
25	$l = 4\,d$	48	160	65	20	115	13	3
30—35		55	190	75	23	140	13	5
40—45		75	220	90	25	166	13	9
50—55		82	260	105	30	200	16	14
60—65		95	310	125	35	230	20	23
70—80		110	350	140	40	260	23	38
85—95		125	400	165	50	300	26	58
100—110		140	450	190	50	340	29	88
115—130		160	516	220	62	396	32	144

Lager nach Abb. 166.

Bohrung des Lagers d mm	Länge der Schale l mm	Lagerhöhe h mm	Fufsplatte Länge a mm	Fufsplatte Breite b mm	Fufsplatte Dicke w mm	Lagerfufsschrauben Entfernung e mm	Lagerfufsschrauben Durchmesser s mm	Gewicht kg
30—35	150	80	190	75	23	140	13	8
40—45	200	90	220	90	25	166	13	12
50—55	240	100	260	105	30	200	16	18
60—65	280	110	310	125	35	230	20	27
70—80	330	130	350	140	40	260	23	43
85—95	390	150	400	165	50	300	26	67
100—110	460	180	450	190	50	340	29	98
115—130	520	200	516	220	62	396	32	152

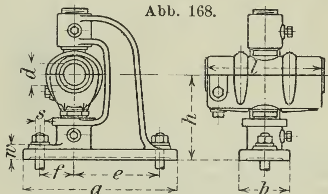
Ein Stehlager mit Kugelschalen und festen Schmierringen zeigt Abb. 167 nach der Ausführung der Peniger Maschinenfabrik und Eisengiefserei. Es hat links und rechts von den Lagerschalen je

Abb. 167.



einen auf der Welle klemmend sitzenden einteiligen Schmierring. Die Schmierringe heben das Oel, das von Streichzungen abgenommen wird und durch Kanäle in der Oberschale zu Schmiernuten gelangt, die nur wenig über Wellenmitte liegen. Hier kommt das Oel zur Ruhe und verteilt sich gleichmäfsig über die ganze Länge der Lagerschalen. Auf der Welle festsitzende Schmierringe (vrgl. auch Abb. 164) verlangen sorgfältige Bearbeitung, laufen aber dann auch bei grofser oder ungleichmäfsiger Geschwindigkeit ohne Schwanken und nutzen weder sich noch die Welle ab.*)

Abb. 168.



Offenes Stehlager der B.-A.-M.-A.-G. (Abb. 168). Der Mittelpunkt der Lagerschalen ist aufser in wagerechter (durch Verschieben des Lagers auf seiner Unterlage), auch in lotrechter Richtung verstellbar.

Bohrung des Lagers	Länge der Schale	Lagerhöhe	Fufsplatte			Lagerfufsschrauben			Gewicht
			Länge	Breite	Dicke	Entfernung		Durchmesser	
d	*l*	*h*	*a*	*b*	*w*	*e*	*f*	*s*	
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	kg
40 - 45	200	160	270	90	25	150	60	13	15
50—55	240	175	315	105	30	175	70	16	22
60—65	280	205	380	125	35	215	85	20	33
70—80	330	240	445	140	40	255	100	23	52
85—95	390	275	510	165	50	295	115	26	77
100—110	460	310	570	190	50	340	130	29	115

*) S. Volk, Maschinenteile, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1765.

3. Hängelager.

Offenes Hängelager (Abb. 169), offenes Hängelager mit Stangenschlufs (Abb. 170), sowie **geschlossenes Hängelager** (Abb. 171), mit Kugelbewegung und in der Bauhöhe verstellbar (B.-A. M.-A.-G.).

Abb. 169.

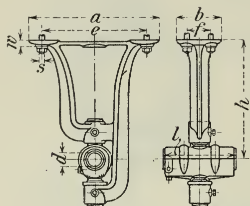


Abb. 170.

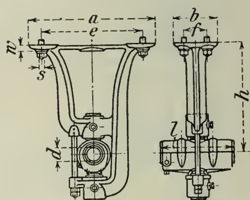
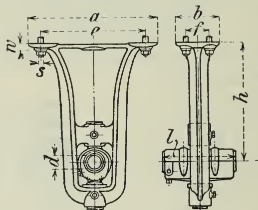


Abb. 171.



Bohrung des Lagers *d* mm	Schalenlänge *l* mm	Ausladung *h* mm	Fufsplatte Länge *a* mm	Fufsplatte Breite *b* mm	Fufsplatte Dicke *w* mm	Befestigungsschrauben Entfernung *e* mm	Befestigungsschrauben Entfernung *f* mm	Befestigungsschrauben Zahl	Befestigungsschrauben Durchmesser *s* mm	Lagergewicht offen (Abb. 169) kg	Lagergewicht offen mit Stangenschlufs (Abb. 170) kg	Lagergewicht geschlossen (Abb. 171) kg
30—35	160	250	360	100	20	285	.	2	16	12	.	.
		300	380	105	21	300	.	2	20	13	.	.
		350	405	110	21	320	.	2	20	15	.	.
		400	430	115	22	340	.	2	20	17	.	.
40—45	200	250	380	110	22	300	.	2	20	20	.	20
		300	405	115	22	320	.	2	20	21	.	21
		350	430	120	22	340	.	2	20	22	.	22
		400	455	125	23	360	.	2	20	23	.	23
		450	480	130	23	380	.	2	20	25	.	25
		500	505	135	24	400	.	2	23	27	.	27
50—55	240	300	430	125	23	340	.	2	20	26	27	28
		350	455	130	23	360	.	2	20	28	29	30
		400	480	135	24	380	.	2	23	30	31	32
		450	505	140	24	400	.	2	23	32	33	34
		500	530	145	25	420	.	2	23	34	35	36
		550	555	150	25	440	.	2	23	36	37	38
		600	580	155	26	460	.	2	23	38	39	40
		650	605	160	26	480	.	2	23	41	42	43
		700	630	165	27	500	.	2	23	44	45	46

Bohrung des Lagers *d* mm	Schalenlänge *l* mm	Ausladung *h* mm	Fufsplatte Länge *a* mm	Fufsplatte Breite *b* mm	Fufsplatte Dicke *w* mm	Befestigungsschrauben Entfernung *e* mm	Befestigungsschrauben Entfernung *f* mm	Befestigungsschrauben Zahl	Befestigungsschrauben Durchmesser *s* mm	Lagergewicht offen (Abb. 169) kg	Lagergewicht offen mit Stangenschlufs (Abb. 170) kg	Lagergewicht geschlossen (Abb. 171) kg
60—65	280	300	470	140	24	370	.	2	23	36	37	37
		350	495	145	25	390	.	2	26	39	40	40
		400	520	150	25	410	.	2	26	42	43	43
		450	545	155	26	430	.	2	26	45	46	46
		500	570	160	27	450	.	2	29	48	49	49
		550	595	165	27	470	.	2	29	51	52	52
		600	630	170	28	500	.	2	29	54	55	55
		650	655	175	28	520	.	2	29	57	58	58
		700	680	180	29	540	.	2	29	61	62	61
70—80	330	350	530	170	27	420	.	2	26	60	62	60
		400	555	175	28	440	.	2	26	63	65	64
		450	580	180	28	460	.	2	26	66	68	68
		500	605	185	29	480	.	2	29	69	71	72
		550	635	190	29	505	.	2	29	72	74	76
		600	665	195	30	530	.	2	29	76	78	80
		650	695	200	30	555	.	2	29	80	82	84
		700	725	220	30	580	110	4	23	84	86	88
		800	785	230	31	630	120	4	23	92	94	98
85—95	390	350	535	210	29	425	100	4	23	88	90	88
		400	565	215	29	450	105	4	23	92	94	92
		450	595	220	30	475	110	4	23	96	98	96
		500	625	225	30	500	115	4	23	100	102	100
		550	655	230	31	525	120	4	26	105	107	105
		600	685	235	31	550	125	4	26	110	112	110
		650	715	240	32	575	130	4	26	115	117	115
		700	745	245	32	600	135	4	26	121	123	121
		800	805	255	33	650	145	4	26	133	135	133
100 bis 110	460	400	605	250	32	475	135	4	29	129	132	136
		450	635	255	33	500	140	4	29	134	137	141
		500	665	260	34	525	145	4	29	139	142	146
		550	695	265	34	550	150	4	29	145	148	152
		600	725	270	36	575	155	4	32	151	154	158
		650	755	275	36	600	160	4	32	157	160	164
		700	785	280	37	625	165	4	32	163	160	170
		750	815	285	38	650	170	4	32	170	173	177
		800	845	290	38	675	175	4	32	177	180	184

4. Konsollager („Sparlager") der B.-A. M.-A.-G. s. Abb. 172. Ein Säulenkonsol mtt Schellenbefestigung bei veränderlicher Ausladung zeigt Abb. 173, einen Mauerkasten für Stehlager Abb. 174.

Abb. 172.

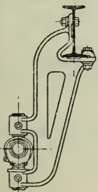


Abb. 173.

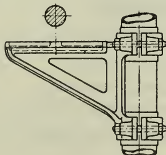
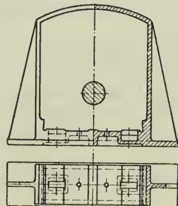


Abb. 174.



5. Kugellager.

1. **Stahlkugeln.** Werden zwei gleiche Stahlkugeln vom Durchmesser d (in cm) mit der Kraft P (in kg) zentrisch gegeneinander gedrückt, so ist nach H. Hertz der Durchmesser der Druckfläche (in cm)

$$\varDelta = 1,40 \sqrt[3]{\frac{P d}{E}},$$

worin $E = 2\,150\,000$ kg/qcm der Elastizitätsmodul,

die elastische **Annäherung** der Kugeln je $\frac{\delta}{2} = 1,95\, d \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 d^4}}$

und die **gröfste Druckbeanspruchung** (in der Mitte der Druckfläche) in kg/qcm:

$$p_{\max} = 1,5\, p_m = 1,5 \frac{P}{{}^1/_4\, \pi\, \varDelta^2},$$

wobei p_m die mittlere Druckbeanspruchung bezeichnet.

Wegen der Veränderlichkeit von E ist nach Versuchen von Stribeck*)

$$\frac{\delta}{2} = \frac{0,966}{10^4}\, d \left(\frac{P}{d^2}\right)^{0,72}$$

und die **Zähigkeit,** d. i. die Arbeit, die eine zwischen zwei gleichen Kugeln gedrückte Kugel bis zum ersten Sprung aufnimmt, in cm/kg für 1 ccm Kugelinhalt:

$$Z = \frac{0,77}{10^4} \left(\frac{P_k}{d^2}\right)^{1,72},$$

worin P_k die **Sprungbelastung** (in kg) ist.

Für guten Stahl ist die Sprungbelastung (in kg) $P_k = 550$ bis $700\, d^2$, entsprechend $p_{\max} = 136\,500$ bis $148\,000$ kg/qcm, die Bruchbelastung (in kg) $K = 3500$ bis $7000\, d^2$. Hiernach ergibt sich $Z = 4$ bis 6 cmkg für 1 ccm.

Für die Güte der Kugeln ist mafsgebend P_k oder Z sowie die Gröfse von p_m (oder $p_{\max}$) bei verschiedenen Belastungen; es ist der Gröfstwert von p_m zu bestimmen.

2. **Zulässige Belastung** der Kugeln nach C. Bach und Stribeck (in kg) $P = c\, d^2$, wobei, wenn d in cm,

für **Gufseisenkugeln** zwischen zwei ebenen Flächen c bis 2,5;

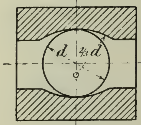
für **Stahlkugeln** auf ebenen, kegelförmigen oder zylindrischen Laufflächen

c bis 100 bei stark absetzendem Betriebe,
bis 50, höchstens 75 bei dauerndem Betriebe,

dsgl. in hohlzylindrischen Stahlrinnen von Kreisbogenform (Krümmungshalbmesser $r = {}^2/_3\, d$ (Abb. 175),

c bis 200 bei stark absetzendem Betriebe,
c bis 100, höchstens 150 bei dauerndem Betriebe.

Abb. 175.



Die gewöhnlich benutzte Formel $P = 150\, d^2$ entspricht im Falle der

*) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1901 S. 73, 332 u. 1701.

Abb. 175 einer gröfsten Druckbeanspruchung in der Mitte der Druckfläche

$$p_{max} \sim 20000 \text{ kg/qcm.*)}$$

Die Sprungbelastung ergibt für diesen Belastungsfall bei genügend hartem Stahl $p_{max} \sim 80000$.

Die angegebenen Werte c für Stahlkugeln setzen besonders gute Ausführung voraus; in gewöhnlichen Fällen nehme man nur etwa $^2/_3$ davon.

3. **Kugellager,** wenn sehr genau und aus bestem Stoff hergestellt, haben folgende **Vorzüge:**

1) Reibung ist fast unabhängig vom Schmiermittel, auch von dessen Verunreinigung durch Staub usw.; geringer Anlaufwiderstand. Die Reibungszahl, bezogen auf den Halbmesser des Zapfens, ist nach Versuchen der Deutschen Waffen- und Munitionsfabriken, Berlin, $\mu = 0{,}0011$, $0{,}0015$, $0{,}0018$, je nachdem die Belastung die zulässige ($= 150\,d^2$) oder die Hälfte oder $^1/_4$ davon ist. Die genannte Firma liefert Stahlkugeln von $^1/_8$ bis 4 Z. engl. (3,2 bis 101,6 mm) Durchm.

2) Das namentlich bei hohen Umlaufzahlen gefährliche Einlaufen entfällt ganz.

3) Kurze Lager.

4) Einreihige Lager gestatten mäfsige Bewegungen der Wellen, sind also unempfindlich gegen Durchbiegungen und Aufstellungsfehler.

Bei einem Laufringe mit i Kugeln beträgt nach Stribeck bei der Gesamtlast Q die gröfste Belastung einer Kugel:

$$P = \frac{5\,Q}{i},$$

falls $i = 10$ bis 20.

Abb. 176.

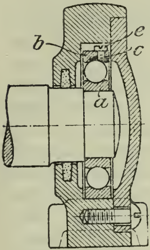
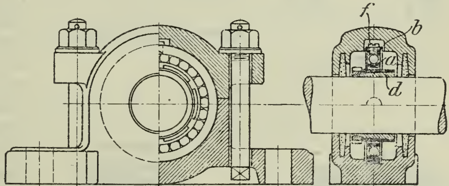


Abb. 177.



Normales Kugellager der Deutschen Waffen- und Munitionsfabriken für 50 mm Wellendurchmesser (Förderwagenlager und Stehlager) s. Abb. 176 u. 177.

Kugellager derselben Firma in Hänge-Anordnung s. Abb. 178; ein Stütz-Kugellager, z. B. für Drehbankspindellagerung**) zeigt Abb. 179 mit einer oder zwei Reihen von Kugeln, die auf ebenen

*) S. Glas. Ann. 1901 1. Juli S. 8. — Die Formeln für den Fall 1 (S. 776) ergeben $p_{max} = 88500$ bei $P = 150\,d^2$.

**) S. Zeitschr. f. Werkzeugmaschinen u. Werkzeuge 1908 S. 269 u. f. und 279 u. f.

Platten laufen. Die obere Platte dreht sich mit der Welle, die untere Platte steht fest. — Ein Stütz-Kugellager für kleinere Kräfte mit

Abb. 178.

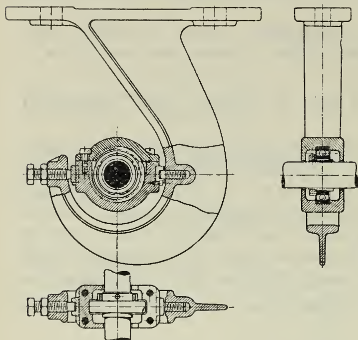
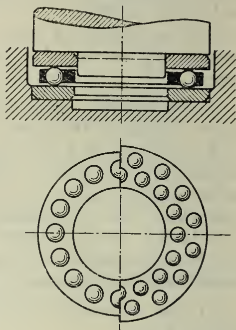


Abb. 179.



geprefsten Laufringen, die nach dem Pressen gehärtet und geschliffen werden und etwas federn, von der Maschinenfabrik Rheinland in Düsseldorf s. Abb. 180. Ein Achslager für Strafsenbahnwagen der Deutschen Waffen- und Munitionsfabriken zeigt die Abb. 181.*)

Abb. 180.

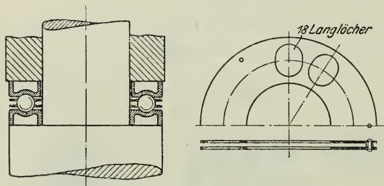
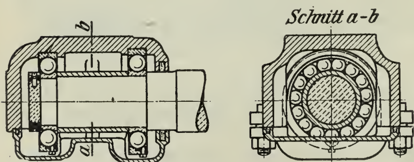


Abb. 181.



Bei Verwendung der Laufrinnen Abb. 175 überträgt das Kugellager ohne besondere Vorkehrungen achsiale Drücke bis zu $^1/_3$ des lotrechten Lagerdruckes. Gröfsere Achsialdrücke werden durch besondere Laufringe aufgenommen (vrgl. Kugellager bei Schnecken, S. 704).

6. Rollenlager.**) Bezeichnet

P die zu übertragende Kraft in kg,

---

*) S. auch Volk, Maschinenteile, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1766: Hängelager und Stehlager der Deutschen Waffen- und Munitionsfabriken; Oelkammer-Kugelstehlager von G. Polysius in Dessau und der Peniger Maschinenfabrik, sowie Z. d. V. d. I. 1908 S. 598.

**) Versuche über Rollenlager s. Stribeck, Z. d. V. d. I. 1902 S. 1463.

i die Anzahl der Rollen,
d den Durchmesser der Rollen (bei Kegelform den mittleren Durchmesser) in cm,
l die tragende Länge in cm

und ist eine solche Ausführung der Rollen anzunehmen, dafs sich eine gleichmäfsige Verteilung von P über die Länge l und die i Rollen erwarten läfst, so ist

$$P = c\,i\,l\,d.$$

Hierin ist insbesondere für Brücken die Zahl c, damit erhebliche Formänderungen nicht stattfinden, wie folgt zu wählen:

c bis 25 bei Rollen aus genügend hartem Gufseisen auf ebenen Platten von ebensolchem Gufseisen,
c bis 60 bei Rollen aus genügend hartem Stahl auf ebenen Platten von ebensolchem Stahl oder Stahlgufs.

Bei grofser Rollenlänge (etwa $l > 5\,d$) ist c kleiner zu wählen.

Neuerdings versucht man die Rollenlager*) auch für Triebwellen zu verwenden, namentlich für sehr langsam umlaufende, stark belastete Wellen. Bei sorgfältig hergestellten, gehärteten Stahlrollen auf ebensolchen Büchsen findet sich dann c bis 150. — Rollenlager für (amerikan.) Eisenbahnfahrzeuge zeigen $c = 20$.

Nach Versuchen im Franklin-Institut wird durch Rollenlager die Reibung um 40 bis 50 vH vermindert. Die beste Form der Rollen ist das aus einem Bande durch schraubenförmiges Zusammendrehen gebildete Rohr.

III. MASCHINENTEILE ZUM LASTHEBEN.

A. Seile, deren Rollen und Trommeln.

a. Hanfseile mit Zubehör.

1. Seile. Allgemeines über Hanfseile s. S. 733. Gebräuchliche Hanfseile zum Lastheben enthält die Tafel S. 780.

Es bezeichne

P die zulässige Belastung (Arbeitslast) des Seiles in kg,
d den Durchmesser des Seiles in cm,
D den Durchmesser der Rolle (oder Trommel), gemessen von Mitte bis Mitte Seil, in cm,
q das Gewicht des Seiles in kg/m.

Die Seile leiden beim Biegen um Scheiben oder beim Aufwickeln auf Trommeln umsomehr, je kleiner $D : d$ ist.

Man wählt bei Winden und Flaschenzügen für ungeteerte Seile im neuen Zustande:

$$P \lesseqgtr 80\,d^2 = 1000\,q, \text{ wenn } D \geqq 10\,d,$$
$$P \lesseqgtr 60\,d^2 = 750\,q, \text{ wenn } D = 7\,d \text{ bis } 10\,d.$$

Bei Seilen zum Fördern aus Bergwerken wählt man

$$P = 60\,d^2 \text{ bis } 80\,d^2, \text{ wobei } D \geqq 50\,d \text{ bis } 80\,d.$$

Ueber Arbeitsverhältnis durch Seilsteifigkeit und Gleiten s. S. 246 u. f.

*) Z. d. V. d. I. 1908 S. 599.

Runde Aufzug-Hanfseile

von Felten & Guilleaume in Cöln (Rhein).

Durchmesser d	Russischer Reinhanf		Reiner Schleifshanf		Badischer Schleifshanf		Durchmesser d	Russischer Reinhanf		Reiner Schleifshanf		Badischer Schleifshanf	
	q	P	q	P	q	P		q	P	q	P	q	P
mm	kg/m	kg	kg/m	kg	kg/m	kg	mm	kg/m	kg	kg/m	kg	kg/m	kg
13	0,13	130	0,14	145	0,14	165	65	2,8	2 694	2,9	2 984	2,9	3 563
16	0,20	200	0,21	230	0,21	251	70	3,3	2 885	3,5	3 221	3,5	3 846
18	0,24	254	0,25	290	0,25	330	75	3,8	3 160	3,9	3 587	3,9	4 101
20	0,30	314	0,31	350	0,31	393	80	4,3	3 328	4,5	4 020	4,5	4 460
23	0,38	416	0,39	470	0,39	519	85	4,8	3 757	5,0	4 395	5,0	4 890
26	0,50	531	0,51	600	0,51	663	90	5,4	4 133	5,6	4 848	5,6	5 405
29	0,65	660	0,67	740	0,67	825	95	6,1	4 665	6,3	5 400	6,3	5 932
33	0,78	855	0,80	960	0,80	1067	100	7,0	5 163	7,2	5 887	7,2	6 476
36	0,93	1017	0,96	1145	0,96	1271	110	8,3	6 056	8,5	6 886	8,5	7 598
39	1,10	1194	1,15	1340	1,15	1492	120	9,5	7 206	9,6	8 051	9,6	8 890
46	1,45	1661	1,50	1870	1,50	2055	130	11,3	8 300	11,5	9 286	11,5	10 103
52	1,90	2122	1,95	2390	1,95	2599	140	13,3	9 610	13,6	10 577	13,6	11 535
55	2,15	2226	2,25	2493	2,25	2783	150	15,0	10 810	15,3	11 700	15,3	12 805
60	2,50	2473	2,55	2755	2,55	3180							

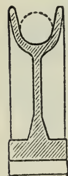
Die Bedeutung von d, q und P siehe S. 779. Nach Fabrikangaben entspricht P einem Achtel der Bruchbelastung, also achtfacher Sicherheit. Das Gewicht der Seile in geteertem Zustande ist etwa 12 vH gröfser als das in vorstehender Tafel für ungeteerte Seile angegebene.

Riemen aus gutem Kernleder gestatten für Aufzüge eine Belastung von $k_z = 35$ bis 40 kg/qcm.

Hanfgurte können bei 4 mm Dicke mit 70 bis 80, bei 6 mm Dicke mit 60 bis 70 kg/qcm belastet werden.

2. Rollen für Hanfseile. Ueber das kleinste Verhältnis $D:d$ s. o. Abb. 182 zeigt eine gewöhnliche, fest auf der Achse sitzende **Seilrolle;** ist sie lose, so ist die Nabe länger zu wählen. Der Umfang ist glatt ausgedreht, so dafs sich das Seil, ohne sich zu klemmen, einlegt. Zulässiger Flächendruck der gufseisernen Nabe oder der Zapfen kleiner als 60 bis 70 kg f. 1 qcm der Projektion der Lauffläche. — Seilscheiben für Hanfseile s. S. 734, Abb. 121 bis 124.

Abb. 182.



Seilreibungsrollen für Aufzüge, bei denen das eine Seilende den Fahrstuhl (vom Gewichte G_1 kg) sowie dessen gröfste Belastung (vom Gewichte Q kg), das andere Ende das Gegengewicht (G_2 kg) trägt, verlangen bei einem Umfange von der Form wie Abb. 182 mindestens $D = 32\,d$ bis $40\,d$, falls die Reibung zur Kraftübertragung genügen soll. Bei vorzüglichem Hanf kann dann bis $P = 100\,d^2$ gegangen werden.

Soll das Seil auf der Rolle nicht gleiten, so mufs nach S. 246 sein:

$$G_2 \leqq G_1 e^{\mu\pi} \quad \text{und} \quad G_1 + Q \leqq G_2 e^{\mu\pi},$$

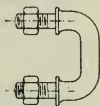
woraus
$$\frac{Q}{G_1} \overline{\gtrless} e^{2\mu\pi} - 1 \quad \text{und} \quad G_2 \overline{\gtrless} G_1 \sqrt{1 + \frac{Q}{G_1}},$$
d. i. mit $\mu = 0{,}2$: $Q \overline{\gtrless} 2{,}5\, G_1$ und $G_2 \overline{\gtrless} 1{,}87\, G_1$.

Meist liegt Q zwischen $1{,}5\, G_1$ und $2\, G_1$.

Den Seilreibungsrollen gibt man auch keilförmige Rillen, wie in Abb. 122 auf S. 734. Nimmt man dabei $2\beta = 30^0$, so lauten die vorstehenden Bedingungen:
$$Q \overline{\gtrless} 15\, G_1 \quad \text{und} \quad G_2 \overline{\gtrless} 4\, G_1.$$

3. Seiltrommeln erhalten Endflansche und glatten Umfang. Manteldicke mit Rücksicht auf die Herstellung $\geq 1{,}0$ bis $1{,}2$ cm, wenn nicht bei gröfserer Trommellänge die auftretende Biegungs- und Drehungsbeanspruchung stärkere Abmessungen erfordert. Die Trommellänge ergibt sich aus der aufzuwickelnden Seillänge und der Seildicke; zur Schonung der Seilbefestigung sollen, wenn möglich, einige Seilwindungen auf der Trommel verbleiben. Seilbefestigungsbügel entweder nach Abb. 183 angeschraubt oder auch angegossen.

Abb. 183.



Um die Trommelwelle nicht auf Drehung zu beanspruchen, verbindet man das treibende Stirnrad unmittelbar mit der vollen Stirnwand der Trommel durch Vorsprünge und Schrauben. Die andere Stirnwand wird zur Herausnahme des Gufskernes durchbrochen. — Die Seilablenkung sei zur Sicherung gleichmäfsiger Aufwicklung möglichst gering; erforderlichenfalls ist eine besondere Zuführungsrolle mit freier Verschiebbarkeit in Richtung der Trommelachse anzuordnen oder die Trommellänge durch mehrfaches Uebereinanderwickeln des Seiles zu beschränken.

Ueber Seilreibungstrommeln mit auf- und ablaufendem Seile s. unter Hebemaschinen.

b. Drahtseile mit Zubehör.

Allgemeines über Drahtseile s. S. 729 u. f.

1. Draht. Neuerdings wird fast ausschliefslich zäher Tiegelstahldraht („Patent-Gufsstahldraht") mit einer Zugfestigkeit $K_z = 12\,000$ bis 15 000 kg/qcm, bei gröfseren Förderlasten und Fördertiefen härterer mit $K_z = 15\,000$ bis 16 000 kg/qcm, im äufsersten Falle sehr zäher mit $K_z = 18\,000$ bis 20 000 kg/qcm benutzt. Die Abnahme der Dehnbarkeit mit zunehmendem K_z vermindert die Betriebsdauer und schliefst die Anwendung kleiner Seilscheiben aus.

Ist unter Beibehaltung der Bezeichnungen S. 731 S die auf das Seil in dem am stärksten beanspruchten Querschnitte wirkende Zugkraft in kg, so setzt sich die **Gesamtspannung** k_z (in kg/qcm) zusammen aus der Normalspannung σ_z und der Biegungsspannung σ_b; nimmt man für Stahldraht $E = 2\,150\,000$ kg/qcm, so mufs mit Rücksicht auf den Berichtigungsbeiwert $^3/_8$ (s. Fufsnote S. 732) sein:
$$\sigma_z + \sigma_b = \frac{S}{i \cdot {}^1/_4\, \pi\, \delta^2} + 800\,000\, \frac{\delta}{D} \overline{\gtrless} k_z.$$

Bei besonders biegsamen Seilen kann statt 800 000 der Wert 550 000 (Berichtigungsbeiwert $= {}^1/_4$) gesetzt werden.

Unter Voraussetzung einer zweckmäfsigen Seilkonstruktion ist höchstens zulässig für Seile aus Tiegelstahldraht bei Menschenförderung k_z bis 2500 kg/qcm und für Seile aus Tiegelstahldraht ohne Menschenförderung k_z bis 3500 kg/qcm, falls die Höchstlast nur selten und mit besonderer Vorsicht gehoben wird.

Wenn möglich, bleibe man jedoch mit der Gesamtspannung weit unter diesen Werten, die die sonst allgemein für zulässig erachteten Beanspruchungen (vrgl. S. 395) überschreiten, zumal wenn es sich nicht vermeiden läfst, dafs das Seil abwechselnd nach der einen und der anderen Seite aufgewickelt und gebogen wird. Zu berücksichtigen ist noch, dafs für S meist nur die statisch wirkende Zugbelastung des Seiles gesetzt, also deren Erhöhung beim Anheben (zur Massenbeschleunigung) vernachlässigt wird. — Um Förderseile möglichst lange den bergpolizeilichen Bestimmungen entsprechend betriebsicher zu erhalten, berechnet man sie in der Regel mit einer etwa achtfachen Sicherheit.

Ist Q das zu hebende Gewicht in kg, l die gröfste Länge des hängenden Seilstückes in m, q das Seilgewicht in kg/m, so ist bei einem prismatischen Seile mit i Drähten von δ cm Durchmesser:

$$S = Q + ql, \text{ dabei } q = 0{,}75\, i\delta^2 \text{ bis } 0{,}80\, i\delta^2.$$

2. Seilarten, nach Felten & Guilleaume-Lahmeyerwerke, A.-G.

Die **Bruchlast** B eines Seiles in kg ist rechnerisch gleich dem Metallquerschnitt $f = i \cdot \frac{1}{4}\pi\delta^2$, multipliziert mit der Zugfestigkeit K_z des Drahtes. Das wirkliche B ist nach Versuchen bis 10 vH kleiner als das rechnerische.

Beispiel. Ein 180-drähtiges rundes Förderseil von 3 mm Drahtdicke hat für $K_z = 12\,000$ kg/qcm, $B = 152\,700$ kg als Bruchlast. Mithin ist die Bruchlast des Seiles für $K_z = 16\,000$ kg/qcm $B = (0{,}9 \text{ bis } 1{,}0) \cdot (16\,000 : 12\,000) \cdot 152\,700 = 183\,240$ bis 203 600 kg.

1. **Runde Förderseile** (s. Tafel S. 784) erhalten $i = 36$ bis 222 Drähte von $\delta = 1$ bis 3 mm Dicke; die zweckmäfsigsten Drahtdicken liegen zwischen 2 und 3 mm. Womöglich $D \geqq 1000\,\delta$; nur gezwungen geht man unter $D = 1000\,\delta$ bis zum Grenzwerte $D = 500\,\delta$ herab, wenn gleichzeitig möglichst dicke Drähte und möglichst kleine Trommeldurchmesser durch die Anlage gefordert werden.

Bei gleicher Drahtdicke δ ist ferner der Trommeldurchmesser D mit der Drahtzahl i zu vergröfsern und womöglich $D \geqq 100\,d$, nur ausnahmsweise auf Kosten der Betriebdauer $D \geqq 70\,d$ unter Wahrung der vorstehenden Beziehung zwischen D und δ. Seildurchmesser $d = 9$ bis 65 mm.

2. **Flache Förderseile** oder **Bandseile** (s. Tafel S. 785) werden aus runden, nebeneinander gelegten Seilen hergestellt, die durch Nähen verbunden sind. Ihr Vorzug besteht in der gröfseren Biegsamkeit, verglichen mit runden Seilen von demselben Querschnitte. Der allgemeinen Verwendung flacher Seile steht u. a. ihre verhältnismäfsig geringere Dauer entgegen, eine Folge der ungleichen Dehnung und Abnutzung der einzelnen Seilstränge. Drahtdicke $\delta = 1$ bis 2 mm, $i = 144$ bis 320, Seilbreite = 44 bis 169 mm, Seildicke = 10 bis 24 mm.

3. **Kabelseile** (s. Tafel S. 785), sehr biegsam, mit $\delta = 1$ bis 2 mm, $i = 120$ bis 294, $d = 20$ bis 64 mm. Sie gestatten, bis $D = 400\,\delta$ herabzugehen bei Steigerung der Seilspannung k_z bis zu $\frac{1}{4} K_z$; doch sind diese Grenzwerte bei $\delta \geqq 1{,}6$ mm möglichst zu vermeiden. Die Gufsstahldrahtseile sind u. U. zu verzinken, wodurch die angegebenen Bruchlasten B um etwa 10 vH vermindert werden.

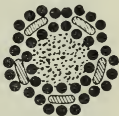
4. **Haspelseile** (s. Tafel S. 786) mit $\delta = 1$ bis 2 mm, $i = 24$ bis 42, $d = 7$ bis 20 mm. D mindestens $= 300\,\delta$, für Neuanlagen zu empfehlen $D \geq 500\,\delta$. Bei linksgeschlagenem Seile (wie üblich) mufs, damit bei freihängender Last das Seil sich nicht aufdreht, mit dem Aufwickeln des Seiles am linken Ende der Welle begonnen werden.

5. **Aufzug-, Flaschenzug- und Kranseile** (s. Tafeln S. 786 u. 787) werden für Menschenförderung mit zehnfacher, sonst mit sechsfacher Sicherheit berechnet. In den Tafeln der Aufzug- und Kranseile ist blanker Patent-Gufsstahldraht zugrunde gelegt; sollen die Seile aus verzinkten Drähten geliefert werden, so vermindern sich die angegebenen Bruchlasten B um 10 vH. In der Tafel für Flaschenzugseile (S. 787) ist, als am zweckmäfsigsten, verzinkter Patent-Gufsstahldraht mit $K_z = 14000$ kg/qcm vorgesehen.

Steuerseile zu Aufzügen werden gewöhnlich aus verzinktem Eisendraht in der Konstruktion: 6 Schenkel zu 5 Litzen zu 4 Drähten von 0,5 mm Durchmesser in einem Gesamtdurchmesser $d = 15$ mm angefertigt. Vielfach werden diese Seile auch (der gröfseren Handlichkeit wegen) in dreiteiliger Konstruktion aus mit Glanzgarn umsponnenen Litzen hergestellt.

6. **Flachlitzige Drahtseile,***) Abb. 184 (s. Tafel S. 788), mit einer Hanfseele und fünf elliptisch geformten Litzen aus Runddrähten mit flachem Kerndraht, haben gegen die gewöhnlichen Drahtseile mit runden Litzen den Vorzug gröfserer Berührungsfläche und geringeren Verschleifses. Sie werden (bei 5 . 9 oder 5 . 23 oder 5 . 28 Drähten) mit $d = 12$ bis 40 mm gefertigt.

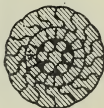
Abb. 184.



7. **Dreikantlitzenseile** (s. Tafel S. 789) bieten aufser dem kleinen Durchmesser und Gewicht gegenüber gewöhnlichen Seilen den Vorteil gröfserer Auflagerfläche und daher gleichmäfsigeren Verschleifses der Drähte; sie haben ferner geringere innere Reibung und sind daher erheblich haltbarer. — Festigkeit der Formdrähte $K_z = 9000$ kg/qcm, der Runddrähte $K_z = 13000$ bis 18000 kg/qcm in Abstufungen von 1000 kg/qcm. Seildurchmesser $d = 25$ bis 52 mm.

8. **Verschlossene Drahtseile,** Abb. 185 (s. Tafeln 10 u. 11 auf S. 789 u. 790), d. s. mittels besonderer Formdrähte hergestellte Spiralseile ohne Hanfeinlagen, allseitig rund und geschlossen, die gegen die Litzenseile folgende Vorteile haben: d ist kleiner für dasselbe S; das Gewicht des Seiles fällt geringer aus; gleichmäfsigerer Verschleifs der Deckdrähte und wegen der glatten Oberfläche ruhigerer Gang; die gut eingefetteten Drähte rosten wenig, daher Schutz der inneren Drähte selbst gegen sauere Grubenwässer; das Längen des Seiles ist verschwindend klein; bei etwaigen Drahtbrüchen, die stets bei den Deckdrähten auftreten und daher leicht zu beobachten sind, können die Drahtenden nicht heraustreten; Wegfall des Drehens bei freihängender Last.

Abb. 185.



Feindrähtige verschlossene Seile (S. 789) aus Patent-Gufsstahldraht dienen für Förderzwecke. Seildurchmesser $d = 12$ bis 40 mm, kleinster zulässiger Trommel- und

(Fortsetzung auf S. 791.)

*) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1898 S. 377.

Drahtseile von Felten & Guilleaume-Lahmeyerwerke in Mülheim (Rhein), Wien und Budapest.

1. Runde Förderseile.

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für $K_z = 12\,000$ kg/qcm kg	Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für $K_z = 12\,000$ kg/qcm kg
6 Litzen zu je 6 Drähten, 7 Hanfseelen	1,0	9	0,27	3 400	6 Litzen zu je 16 Drähten, 7 Hanfseelen	1,0	15	0,72	9 100
	1,4	13	0,53	6 650		1,4	20	1,40	17 730
	1,6	15	0,70	8 680		1,6	23	1,85	23 140
	1,8	17	0,88	10 970		1,8	26	2,30	29 250
	2,0	18	1,10	13 600		2,0	29	2,85	36 170
	2,2	20	1,30	16 400		2,2	32	3,45	43 780
	2,4	22	1,56	19 520		2,4	34	4,10	52 070
	2,6	24	1,85	22 930		2,6	37	4,85	61 170
	2,8	26	2,13	26 600		2,8	40	5,60	70 950
	3,0	28	2,44	30 540		3,0	43	6,45	81 440
6 Litzen zu 6 Drähten und 1 Hanfseele mit Kerndraht in jeder Litze	1,0	9	0,31	3 400	6 Litzen zu je 18 Drähten und 1 Hanfseele mit Kerndraht in jeder Litze	1,0	16	0,85	10 230
	1,4	13	0,62	6 650		1,4	22	1,68	19 950
	1,6	15	0,80	8 680		1,6	26	2,18	26 040
	1,8	17	1,02	10 970		1,8	29	2,76	32 900
	2,0	18	1,25	13 600		2,0	32	3,40	40 700
	2,2	20	1,52	16 400		2,2	35	4,12	49 240
	2,4	22	1,80	19 520		2,4	38	4,90	58 580
	2,6	24	2,12	22 930		2,6	41	5,75	68 820
	2,8	26	2,46	26 600		2,8	44	6,66	79 820
	3,0	28	2,82	30 540		3,0	47	7,65	91 630
6 Litzen zu je 7 Drähten, 7 Hanfseelen	1,0	10	0,33	3 980	6 Litzen zu je 27 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	19	1,20	15 360
	1,4	14	0,64	7 760		1,4	27	2,40	29 940
	1,6	16	0,83	10 130		1,6	30	3,09	39 070
	1,8	18	1,05	12 800		1,8	34	3,90	49 380
	2,0	20	1,30	15 820		2,0	38	4,90	61 030
	2,2	22	1,56	19 150		2,2	42	5,85	73 870
	2,4	24	1,86	22 780		2,4	45	7,00	87 860
	2,6	26	2,20	26 760		2,6	49	8,20	103 220
	2,8	28	2,53	31 040		2,8	54	9,50	119 740
	3,0	30	2,90	35 620		3,0	56	11,00	137 430
6 Litzen zu je 12 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	13	0,55	6 820	6 Litzen zu je 30 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	20	1,35	17 060
	1,4	18	1,05	13 300		1,4	29	2,65	33 260
	1,6	20	1,40	17 360		1,6	33	3,45	43 400
	1,8	23	1,75	21 940		1,8	37	4,35	54 860
	2,0	26	2,15	27 120		2,0	41	5,40	67 820
	2,2	28	2,60	32 830		2,2	45	6,50	82 080
	2,4	30	3,10	39 000		2,4	48	7,75	97 630
	2,6	32	3,65	45 870		2,6	52	9,10	114 700
	2,8	35	4,20	53 220		2,8	57	10,55	133 050
	3,0	38	4,85	61 080		3,0	60	12,10	152 700
6 Litzen zu je 14 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	14	0,65	7 960	6 Litzen zu je 36 Drähten und 1 Hanfseele mit Kerndraht in jeder Litze	1,0	22	1,65	20 470
	1,4	19	1,25	15 520		1,4	30	3,25	39 900
	1,6	22	1,60	20 250		1,6	35	4,25	52 100
	1,8	25	2,05	25 600		1,8	39	5,40	65 830
	2,0	27	2,55	31 640		2,0	44	6,65	81 380
	2,2	30	3,10	38 280		2,2	48	8,00	98 490
	2,4	32	3,65	45 560		2,4	52	9,54	117 150
	2,6	35	4,25	53 520		2,6	56	11,20	137 630
	2,8	38	5,00	62 090		2,8	60	13,00	159 660
	3,0	41	5,65	71 260		3,0	65	15,00	183 250

2. Flache Förderseile.

(Hanf in den Litzen.)

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seilbreite mm	Seildicke mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für K_z = 12 000 kg/qcm kg
6 Schenkel zu 4 Litzen zu 6 Drähten	1,0	44	10	1,15	13 650
	1,2	51	12	1,60	19 520
	1,4	60	14	2,20	26 600
	1,6	68	16	2,90	34 730
	1,8	77	18	3,70	43 880
6 Schenkel zu 4 Litzen zu 7 Drähten	1,2	55	13	1,90	22 770
	1,4	64	15	2,60	31 040
	1,6	73	17	3,40	40 500
	1,8	82	19	4,30	51 200
	2,0	91	21	5,30	63 300
6 Schenkel zu 4 Litzen zu 8 Drähten	1,2	60	14	2,20	26 030
	1,4	70	16	3,00	35 470
	1,6	80	18	3,90	46 300
	1,8	93	21	4,90	58 500
	2,0	104	24	6,10	72 330
8 Schenkel zu 4 Litzen zu 6 Drähten	1,2	67	12	2,15	26 030
	1,4	80	14	2,95	35 470
	1,6	90	16	3,85	46 300
	1,8	104	18	4,85	58 500
	2,0	115	20	6,05	72 330

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seilbreite mm	Seildicke mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für K_z = 12 000 kg/qcm kg
8 Schenkel zu 4 Litzen zu 7 Drähten	1,2	75	13	2,55	30 370
	1,4	85	15	3,45	41 400
	1,6	98	17	4,50	54 020
	1,8	110	19	5,70	68 280
	2,0	121	21	7,05	84 400
8 Schenkel zu 4 Litzen zu 8 Drähten	1,2	81	14	2,90	34 700
	1,4	95	16	3,95	47 300
	1,6	109	18	5,15	61 750
	1,8	120	21	6,50	78 000
	2,0	135	24	8,05	96 450
10 Schenkel zu 4 Litzen zu 7 Drähten	1,2	93	13	3,10	37 970
	1,4	107	15	4,30	51 740
	1,6	122	17	5,65	67 530
	1,8	138	19	7,10	85 340
	2,0	152	21	8,80	105 500
10 Schenkel zu 4 Litzen zu 8 Drähten	1,2	102	14	3,60	43 400
	1,4	119	16	4,95	59 140
	1,6	136	18	6,45	77 160
	1,8	152	21	8,15	97 500
	2,0	169	24	10,10	120 600

3. Kabelseile.

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für K_z = 12 000 kg/qcm kg
6 Schenkel zu 5 Litzen zu 4 Drähten, 7 Hanfseelen	1,0	20	0,95	11 380
	1,2	24	1,40	16 270
	1,4	28	1,90	22 170
	1,6	32	2,50	28 940
	1,8	36	3,10	36 570
	2.0	40	3,90	45 220
6 Schenkel zu 6 Litzen zu 4 Drähten, 7 Hanfseelen	1,0	22	1,15	13 650
	1,2	27	1,75	19 520
	1,4	32	2,30	26 600
	1,6	36	3,10	34 730
	1,8	40	3,80	43 880
	2.0	45	4,60	54 250
6 Schenkel zu 5 Litzen zu 7 Drähten, 7 Hanfseelen	1,0	25	1,65	19 000
	1,2	30	2,45	28 480
	1,4	35	3,30	38 800
	1,6	40	4,30	50 660
	1,8	45	5,50	64 000
	2,0	50	6,75	79 130

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für K_z = 12 000 kg/qcm kg
6 Schenkel zu 6 Litzen zu 7 Drähten, 7 Hanfseelen	1,0	28	2,10	23 830
	1,2	34	3,00	34 200
	1,4	40	4,10	46 560
	1,6	46	5,25	60 780
	1,8	51	6,75	76 800
	2,0	56	8,30	94 940
6 Schenkel zu 7 Litzen zu 7 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	28	2,50	27 860
	1,2	34	3,60	39 860
	1,4	40	4.90	54 320
	1,6	46	6,50	70 900
	1,8	51	8,30	89 600
	2.0	56	10,70	110 770
6 Schenkel zu 7 Litzen zu 7 Drähten, 7 Hanfseelen	1,0	32	2.60	27 860
	1,2	38	3,70	39 860
	1,4	45	5,00	54 320
	1,6	51	6,60	70 900
	1,8	57	8,40	89 600
	2,0	64	10.30	110 770

4. Haspelseile.

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für $K_z = 12\,000$ kg/qcm kg	Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für $K_z = 12\,000$ kg/qcm kg
6 Litzen zu 4 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	7	0,18	2 280	6 Litzen zu 6 Drähten, 7 Hanfseelen	1,0	9	0,27	3 400
	1,2	8,5	0,26	3 250		1,2	11	0,40	4 880
	1,4	10	0,35	4 440		1,4	13	0,53	6 650
	1,6	11	0,46	5 800		1,6	15	0,70	8 680
	1,8	12,5	0,58	7 320		1,8	17	0,88	10 970
	2,0	14	0,72	9 050		2,0	18	1,10	13 600
4 Litzen zu 7 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	7,5	0,22	2 650	6 Litzen zu 7 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	9	0,31	3 980
	1,2	9	0,30	3 800		1,2	11	0,45	5 700
	1,4	10	0,43	5 170		1,4	13	0,62	7 760
	1,6	12	0,56	6 750		1,6	15	0,80	10 130
	1,8	13	0,70	8 530		1,8	17	1,02	12 800
	2,0	15	0,87	10 550		2,0	18	1,25	15 820
5 Litzen zu 7 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	8	0,24	3 200	6 Litzen zu 7 Drähten, 7 Hanfseelen	1,0	10	0,33	3 980
	1,2	9,5	0,35	4 750		1,2	12	0,47	5 700
	1,4	11	0,48	6 470		1,4	14	0,64	7 760
	1,6	13	0,63	8 440		1,6	16	0,83	10 130
	1,8	14,5	0,80	10 670		1,8	18	1,05	12 800
	2,0	16	0,[illegible]7	13 200		2,0	20	1,30	15 820

5. Aufzugseile.

Drahtdicke mm	Kleinster Rollen-durchmesser mm	Konstruktion	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für $K_z = 12\,000$ kg/qcm kg	Konstruktion	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für $K_z = 12\,000$ kg/qcm kg
0,5	200	6 Litzen zu 7 Drähten, 1 Hanfseele	4,5	0,08	1 000	6 Litzen zu 12 Drähten, 1 Hanfseele	6	0,13	1 730
0,6	240		5,5	0,11	1 410		7,5	0,20	2 420
0,7	280		6,5	0,15	1 920		8,5	0,26	3 280
0,8	320		7	0,20	2 520		10	0,34	4 320
0,9	360		8	0,25	3 220		11	0,43	5 530
1,0	400		9	0,31	3 980		13	0,55	6 820
1,1	440		10	0,38	4 700		14	0,65	8 200
1,2	480		11	0,45	5 700		15	0,77	9 760
1,3	520		12	0,53	6 700		16	0,90	11 460
1,4	560		13	0,62	7 760		18	1,05	13 300
1,5	600		14	0,70	8 900		19	1,20	15 250
1,6	640		15	0,80	10 130		20	1,40	17 360

6. Flaschenzugseile.

Die **Bruchlast** B in kg gilt für verzinkten Patent-Gufsstahldraht mit $K_z = 14\,000$ kg/qcm.

Drahtdicke mm	Kleinster Rollendurchmesser mm	Konstruktion	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B kg	Konstruktion	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B kg	Konstruktion	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B kg
0,5	200	6 Litzen zu 12 Drähten, 7 Hanfseelen	8	0,15	1 720	6 Litzen zu 20 Drähten, 7 Hanfseelen	8,5	0,22	2 880	6 Litzen zu 24 Drähten, 7 Hanfseelen	10	0,26	3 450
0,6	240		9,5	0,20	2 450		10	0,30	4 080		11,5	0,38	4 900
0,7	280		11	0,26	3 310		12	0,43	5 500		13	0,53	6 620
0,8	350		12,5	0,38	4 300		13,5	0,55	7 200		15	0,70	8 600
0,9	400		14	0,48	5 500		15	0,70	9 240		17	0,90	11 000
1,0	450		16	0,55	6 800		17	0,90	11 400		19	1,10	13 600
1,1	500		17,5	0,70	8 200		19	1,05	13 680		21	1,30	16 400
1,2	550		19	0,80	9 750		20	1,30	16 300		22,5	1,55	19 500
0,5	200	6 Litzen zu 30 Drähten, 7 Hanfseelen	11	0,34	4 300	8 Litzen zu 12 Drähten, 9 Hanfseelen	9,5	0,20	2 300	8 Litzen zu 24 Drähten, 9 Hanfseelen	12	0,35	4 600
0,6	240		13	0,48	6 100		11,5	0,25	3 250		14	0,56	6 500
0,7	280		15,5	0,65	8 200		13	0,35	4 400		16,5	0,68	8 800
0,8	350		18	0,87	10 800		15	0,45	5 760		19	0,83	11 500
0,9	400		20	1,10	13 800		17	0,60	7 400		21	1,13	14 800
1,0	450		22	1,35	17 100		19	0,75	9 100		23,5	1,38	18 200
1,1	500		24	1,65	20 500		21	0,90	10 900		26	1,70	21 800
1,2	550		26	1,90	24 500		23	1,05	13 000		28,5	2,00	26 100

7. Kranseile.

Drahtdicke mm	Kleinster Rollendurchmesser mm	Konstruktion	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für $K_z = 12\,000$ kg/qcm kg	Drahtdicke mm	Kleinster Rollendurchmesser mm	Konstruktion	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für $K_z = 12\,000$ kg/qcm kg
0,5	200	6 Litzen zu 19 Drähten, 1 Hanfseele	8	0,21	2 730	0,5	220	6 Litzen zu 37 Drähten, 1 Hanfseele	11	0,40	5 300
0,6	240		9,5	0,31	3 830	0,6	260		13	0,60	7 460
0,7	280		11	0,41	5 200	0,7	300		15	0,80	10 100
0,8	320		12,5	0,54	6 840	0,8	340		17	1,10	13 300
0,9	360		14	0,69	8 750	0,9	380		20	1,35	17 000
1,0	400		16	0,85	10 800	1,0	420		22	1,65	21 000
1,1	440		17	1,03	13 000	1,1	460		24	2,00	25 300
1,2	480		19	1,22	15 450	1,2	500		26	2,40	30 100
1,3	520		20	1,44	18 200	1,3	540		28	2,80	35 400
1,4	560		22	1,68	21 060	1,4	580		30	3,25	41 000
1,5	600		23	1,91	24 200	1,5	620		32	3,75	47 100
1,6	640		26	2,18	27 500	1,6	660		35	4,25	53 500

8. Flachlitzige Drahtseile.

Die Ovaldrähte sind aus Stahl mit $K_z = 8500$, die Runddrähte aus Patent-Gufsstahl (Tiegelstahl) mit $K_z = 12\,000$ kg/qcm; für die Runddrähte kann, wenn nötig, K_z höher bemessen werden.

45 Drähte und 1 Hanfseele.

Querschnitt der Ovaldrähte = 25 bis 26 vH des Querschnittes der Runddrähte.

Durchmesser des Seiles mm	Dicke der Runddrähte mm	Querschnitt der Runddrähte qmm	Bruchlast B des Seiles kg	Gewicht des Seiles kg/m	Durchmesser des Seiles mm	Dicke der Runddrähte mm	Querschnitt der Runddrähte qmm	Bruchlast B des Seiles kg	Gewicht des Seiles kg/m
12	1,15	41,6	5 830	0,50	23	2,25	160,4	22 680	1,93
13	1,23	47,6	6 620	0,56	24	2,35	173,4	24 520	2,09
14	1,35	57,2	8 240	0,71	25	2,45	188,6	26 640	2,27
15	1,45	65,2	9 210	0,78	26	2,57	204,4	28 920	2,47
16	1,52	72,7	10 330	0,88	27	2,65	220,8	31 260	2,67
17	1,65	82,4	11 720	1,00	28	2,75	237,8	33 610	2,87
18	1,74	95,1	13 430	1,14	29	2,85	255,4	36 170	3,10
19	1,85	107,4	15 190	1,29	30	2,97	277,2	39 140	3,30
20	1,95	119,4	17 100	1,47	31	3,07	296,2	41 860	3,58
21	2,05	132,0	18 730	1,58	32	3,20	321,6	45 370	3,90
22	2,15	145,2	20 490	1,74	33	3,27	335,8	47 540	4,15

115 Drähte und 1 Hanfseele.

Querschnitt der Ovaldrähte = 9,5 vH des Querschnittes der Runddrähte.

12	0,96 bis 0,55	52,5	6 720	0,56	27	2,08 bis 1,19	247,9	31 750	2,62
13	1,05 ,, 0,60	63,2	8 100	0,67	28	2,17 ,, 1,23	268,8	34 470	2,85
14	1,12 ,, 0,64	71,8	9 200	0,77	29	2,25 ,, 1,27	288,4	36 930	3,05
15	1,20 ,, 0,68	81,9	10 520	0,87	30	2,33 ,, 1,32	309,8	39 670	3,30
17	1,29 ,, 0,73	94,9	12 160	1,00	31	2,41 ,, 1,37	331,9	42 510	3,50
18	1,37 ,, 0,76	106,1	13 580	1,12	32	2,49 ,, 1,41	353,8	45 310	3,75
19	1,45 ,, 0,82	120,0	15 370	1,27	33	2,56 ,, 1,46	373,0	47 680	3,95
20	1,52 ,, 0,88	131,3	16 810	1,39	34	2,65 ,, 1,50	400,9	51 340	4,2
21	1,60 ,, 0,90	146,4	18 760	1,55	35	2,74 ,, 1,55	427,2	54 700	4,5
22	1,69 ,, 0,95	164,1	20 940	1,75	36	2,82 ,, 1,60	454,3	58 130	4,8
23	1,77 ,, 1,00	178,7	22 890	1,90	37	2,90 ,, 1,64	479,8	61 410	5,1
24	1,85 ,, 1,00	191,1	24 500	2,05	38	2,98 ,, 1,69	507,2	64 910	5,4
25	1,93 ,, 1,09	212,1	27 110	2,25	39	3,06 ,, 1,73	534,0	68 380	5,7
26	2,00 ,, 1,14	228,9	29 290	2,42	40	3,14 ,, 1,78	562,7	72 070	6,0

140 Drähte und 1 Hanfseele.

Querschnitt der Ovaldrähte = 12,3 bis 14,5 vH des Querschnittes der Runddrähte.

12	0,72 bis 0,66	51,0	6 750	0,57	27	1,5[illegible] bis 1,42	242,2	31 740	2,6
14	0,78 ,, 0,72	59,6	7 800	0,65	28	1,62 ,, 1,49	261,0	34 200	2,8
15	0,85 ,, 0,77	68,2	8 900	0,74	29	1,70 ,, 1,55	282,1	36 850	3,0
16	0,90 ,, 0,83	81,0	10 600	0,88	30	1,75 ,, 1,60	302,9	39 630	3,3
17	0,95 ,, 0,88	90,8	11 990	1,00	31	1,80 ,, 1,65	320,9	42 070	3,5
18	1,01 ,, 0,94	103,4	13 560	1,14	32	1,87 ,, 1,71	343,3	45 090	3,8
19	1,08 ,, 0,99	116,0	15 190	1,26	33	1,95 ,, 1,78	369,0	48 280	4,0
20	1,15 ,, 1,05	131,0	17 140	1,42	34	1,99 ,, 1,82	391,6	51 340	4,2
21	1,21 ,, 1,10	144,2	18 870	1,58	35	2,05 ,, 1,87	411,6	54 100	4,5
22	1,27 ,, 1,16	153,8	20 150	1,68	36	2,10 ,, 1,93	437,5	57 280	4,8
23	1,33 ,, 1,21	174,7	22 810	1,90	37	2,18 ,, 1,99	469,5	61 410	5,1
24	1,40 ,, 1,27	193,0	25 170	2,10	38	2,25 ,, 2,05	499,5	65 420	5,5
25	1,44 ,, 1,32	206,0	26 980	2,25	39	2,30 ,, 2,10	522,3	68 310	5,7
26	1,51 ,, 1,38	225,9	29 550	2,45	40	2,36 ,, 2,15	549,4	71 980	6,1

Aufserdem **28-drähtige, flachlitzige Seile** mit 1 Hanfseele, Durchm. $d = 11$ bis 15 mm.

9. Dreikantlitzenseile.

Anzahl der Litzen = 6; Anzahl der Formdrähte in jeder Litze = 3; 1 Hanfseele im Seil. K_z der Formdrähte = 9000 kg/qcm.

Seil-durchmesser	Anzahl und Dicke der inneren Drähte	Anzahl und Dicke der äußeren Drähte	Querschnitt der sämtlichen Formdrähte	Querschnitt der sämtlichen Runddrähte	Seilgewicht	Bruchlast B der Runddrähte für K_z = 13000 kg/qcm	Bruchlast B der Runddrähte für K_z = 18000 kg/qcm
mm	mm	mm	qcm	qcm	kg/m	kg	kg
25	11 zu 1,1	11 zu 1,9	0,330	2,49	2,6	35 340	47 790
26,5	11 „ 1,15	11 „ 2,05	0,396	2,85	2,9	40 550	54 800
28,5	11 „ 1,25	11 „ 2,15	0,440	3,20	3,3	45 560	61 560
30	9 „ 1,41	12 „ 2,14	0,432	3,42	3,6	48 300	65 430
32	9 „ 1,63	12 „ 2,3	0,507	4,18	4,2	58 840	79 740
34	12 „ 1,55	14 „ 2,12	0,738	4,31	4,5	62 670	84 220
36	12 „ 1,7	14 „ 2,25	0,986	4,96	5,3	73 350	98 150
38	12 „ 1,77	14 „ 2,4	1,044	5,56	5,9	81 750	109 580
40	12 „ 1,84	14 „ 2,52	1,120	6,09	6,5	89 120	119 660
42	12 „ 1,92	14 „ 2,65	1,260	6,71	7,0	98 540	132 080
44	12 „ 2,0	14 „ 2,75	1,350	7,24	7,9	106 270	142 470
46	12 „ 2,16	15 „ 2,7	1,590	7,78	8,3	115 490	153 400
48	12 „ 2,25	15 „ 2,85	1,638	8,60	9,1	126 600	169 630
50	12 „ 2,44	16 „ 2,8	1,897	9,26	10,3	137 450	183 750
52	12 „ 2,5	16 „ 2,91	2,140	9,91	11,0	148 110	197 670

10. Feindrähtige verschlossene Drahtseile.

Seildurchm.	Seilgewicht	Bruchlast B für K_z = 12000 kg/qcm	Kleinster Rollendurchmesser	Seildurchm.	Seilgewicht	Bruchlast B für K_z = 12000 kg/qcm	Kleinster Rollendurchmesser	Seildurchm.	Seilgewicht	Bruchlast B für K_z = 12000 kg/qcm	Kleinster Rollendurchmesser
mm	kg/m	kg	m	mm	kg/m	kg	m	mm	kg/m	kg	m
12	0,85	11 000	1,50	22	2,74	38 800	2,75	32	5,81	85 300	4,00
13	0,95	13 100	1,50	23	2,85	42 000	2,75	33	6,17	88 300	4,00
14	1,10	15 200	2,00	24	3,10	45 200	3,00	34	6,55	92 200	4,25
15	1,25	17 300	2,00	25	3,40	48 300	3,00	35	6,75	98 500	4,25
16	1,40	20 400	2,00	26	3,70	54 900	3,25	36	7,00	104 800	4,50
17	1,60	23 300	2,25	27	4,00	58 700	3,25	37	7,60	116 200	4,50
18	1,85	26 200	2,25	28	4,30	62 500	3,50	38	8,15	120 700	4,75
19	2,00	27 400	2,25	29	4,65	66 400	3,50	39	8,70	125 200	4,75
20	2,20	31 100	2,50	30	5,10	73 500	3,75	40	9,30	129 700	5,00
21	2,40	35 000	2,50	31	5,46	79 400	3,75				

11. Grobdrähtige verschlossene Drahtseile.

Seildurchm.	Seilgewicht	Bruchlast B in kg für weichen Stahldraht mit K_z = 5500 bis 6000 kg/qcm	Bruchlast B in kg für Patent-Gußstahldraht mit K_z = 9000 bis 10 000 kg/qcm	Bruchlast B in kg für Patent-Gußstahldraht mit K_z = 12 000 kg/qcm	Seildurchm.	Seilgewicht	Bruchlast B in kg für weichen Stahldraht mit K_z = 5500 bis 6000 kg/qcm	Bruchlast B in kg für Patent-Gußstahldraht mit K_z = 9000 bis 10 000 kg/qcm	Bruchlast B in kg für Patent-Gußstahldraht mit K_z = 12 000 kg/qcm
mm	kg/m				mm	kg/m			
20	2,45	16 430	27 150	34 300	27	4,25	28 000	46 260	58 450
21	2,65	17 630	29 120	36 780	28	4,76	31 600	52 250	66 000
22	2,85	18 800	31 050	39 230	29	5,10	32 300	53 360	67 400
23	3,15	20 790	34 340	43 380	30	5,42	36 000	59 470	75 100
24	3,50	23 160	38 260	48 330	31	5,55	37 860	60 600	79 000
25	3,75	24 950	41 230	52 080	32	6,00	39 730	65 640	82 920
26	3,85	25 430	42 180	53 280	33	6,25	41 340	68 300	86 280

Seildurchm. mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B in kg für weichen Stahldraht mit K_z = 5500 bis 6000 kg/qcm	Bruchlast B in kg für Patent-Gufsstahldraht mit K_z = 9000 bis 10 000 kg/qcm	Bruchlast B in kg für Patent-Gufsstahldraht mit K_z = 12 000 kg/qcm	Seildurchm. mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B in kg für weichen Stahldraht mit K_z = 5500 bis 6000 kg/qcm	Bruchlast B in kg für Patent-Gufsstahldraht mit K_z = 9000 bis 10 000 kg/qcm	Bruchlast B in kg für Patent-Gufsstahldraht mit K_z = 12 000 kg/qcm
34	6,95	46 300	76 500	96 600	40	9,20	61 630	101 820	128 610
35	7,10	50 000	82 650	104 400	41	9,45	63 140	104 310	131 760
36	7,80	51 690	85 400	107 880	42	10,15	68 070	112 460	142 050
37	8,25	52 840	87 300	110 300	43	10,70	71 350	117 900	147 000
38	8,50	56 240	92 300	117 360	44	11,00	73 970	122 220	154 380
39	8,80	60 120	99 360	125 500	45	11,70	78 200	129 200	163 200

12. Litzenseile (Zugseile) für Luftseilbahnen.

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für K_z = 12 000 kg/qcm kg	Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Bruchlast B für K_z = 12 000 kg/qcm kg
6 Litzen zu 7 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	9	0,31	3 980	6 Litzen zu 12 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	13	0,55	6 820
	1,1	10	0,38	4 700		1,1	14	0,65	8 200
	1,2	11	0,45	5 700		1,2	15	0,77	9 760
	1,3	12	0,53	6 700		1,3	16	0,90	11 460
	1,4	13	0,62	7 760		1,4	18	1,05	13 300
	1,5	14	0,70	8 900		1,5	19	1,20	15 250
	1,6	15	0,80	10 130		1,6	20	1,40	17 360
	1,7	16	0,90	11 400		1,7	21	1,55	19 500
	1,8	17	1,02	12 800		1,8	23	1,75	21 940
	1,9	18	1,13	14 290		1,9	24	1,95	24 500
	2,0	19	1,25	15 820		2,0	26	2,15	27 120

13. Spiralseile (Tragseile) für Luftseilbahnen.

19-drähtige Spiralkonstruktion						19-drähtige Spiralkonstruktion					
Drahtdicke mm	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Gröfste Fabrikationslänge m	Bruchlast B in kg für weichen Stahldraht mit K_z = 5500 bis 6000 kg/qcm	Bruchlast B in kg für Patent-Gufsstahldraht mit K_z = 14 500 kg/qcm	Drahtdicke mm	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Gröfste Fabrikationslänge m	Bruchlast B in kg für weichen Stahldraht mit K_z = 5500 bis 6000 kg/qcm	Bruchlast B in kg für Patent-Gufsstahldraht mit K_z = 14 500 kg/qcm
3,0	15	1,13	600	7 390	19 470	5,0	25	3,13	300	20 520	54 100
3,2	16	1,28	600	8 400	22 150	5,2	26	3,40	280	22 190	58 520
3,4	17	1,45	600	9 480	25 000	5,4	27	3,65	250	23 940	.
3,6	18	1,62	580	10 640	28 000	5,6	28	4,00	240	25 740	.
3,8	19	1,83	520	11 850	31 200	5,8	29	4,25	225	27 600	.
4,0	20	2,00	470	13 130	34 650	6,0	30	4,55	210	29 540	.
4,2	21	2,21	430	14 480	38 150	6,2	31	4,80	195	31 540	.
4,4	22	2,42	390	15 900	41 900	6,4	32	5,15	180	33 610	.
4,6	23	2,65	350	17 370	45 790	6,6	33	5,50	170	35 760	.
4,8	24	2,90	320	18 920	49 870						

37-drähtige Spiralkonstruktion						37-drähtige Spiralkonstruktion					
Drahtdicke mm	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Gröfste Fabrikationslänge m	Bruchlast B in kg für weichen Stahldraht mit K_z = 5500 bis 6000 kg/qcm	Bruchlast B in kg für Patent-Gufsstahldraht mit K_z = 14 500 kg/qcm	Drahtdicke mm	Seildurchmesser mm	Seilgewicht kg/m	Gröfste Fabrikationslänge m	Bruchlast B in kg für weichen Stahldraht mit K_z = 5500 bis 6000 kg/qcm	Bruchlast B in kg für Patent-Gufsstahldraht mit K_z = 14 500 kg/qcm
3,85	27	3,65	490	23 680	62 350	5,00	35	6,10	280	39 960	105 270
4,00	28	3,90	430	25 560	67 400	5,14	36	6,45	270	42 200	111 200
4,14	29	4,20	420	27 380	72 100	5,28	37	6,85	260	44 540	117 400
4,28	30	4,50	390	29 280	77 150	5,42	38	7,20	250	47 280	·
4,42	31	4,80	370	31 200	82 200	5,57	39	7,60	230	49 580	·
4,57	32	5,20	350	33 370	88 000	5,71	40	8,00	220	52 000	·
4,71	33	5,45	320	35 440	93 400	5,85	41	8,40	210	54 600	·
4,85	34	5,75	310	37 590	99 000	6,00	42	8,80	200	57 500	·

(Fortsetzung von S. 783.)

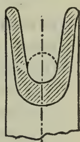
Scheibendurchmesser 1,5 bis 5,0 m. Die angegebenen Bruchlasten können, wenn erforderlich, um 10 vH erhöht werden.

Grobdrähtige verschlossene Seile (S. 789) aus weichem Stahl-Formdraht (K_z = 5500 bis 6000 kg/qcm) oder aus Patent-Gufsstahldraht, mit Durchmessern $d = 20$ bis 45 mm, finden für Schachtausführungen, Luftseilbahnen, Pumpengestänge, Fähren und Trajekte vorteilhaft Verwendung.

9. **Seile für Luftseilbahnen, Zugseile** (s. Tafel S. 790) und **Tragseile** (s. Tafel S. 790). Weiteres s. unter Drahtseilbahnen, Abschnitt Eisenbahnwesen.

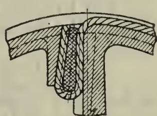
3. Rollen und Trommeln für runde Drahtseile. Näheres über ihren Durchmesser s. S. 780. Die **Seilrollen** erhalten eine Rille, die nach Abb. 186 auf eine Tiefe gleich dem 2,5- bis 3-fachen des Seildurchmessers so eingedreht wird, dafs das Seil mit möglichst geringem Spielraum, aber ohne jede Klemmung gebettet wird; keine Ausfütterung. Auslegerrollen erfordern einen weiteren Rillenquerschnitt, um das pendelnde Seil vor Durchscheuern an den Flanschenrändern zu schützen. Meist sind Schutzbügel, die das Ausspringen des Seiles aus der Rille verhindern, notwendig, und diese gestatten dann flachere Rillen. —

Abb. 186.



Auf **Seiltrommeln** lagert man das Seil in eine schraubenförmig eingedrehte Rille von kreisbogenförmigem Profil; Steigung etwa 2 mm gröfser als die Seildicke. Seilablenkung aus der Mittellage möglichst $\leqq 1:50$, d. h. die Achsenentfernung der Trommeln und Rollen betrage mindestens das 25- bis 30-fache der Trommellänge; erforderlichenfalls ist eine besondere, selbsttätig oder zwangläufig achsial verschiebbare Zuführungsrolle anzuordnen. Seilbefestigung s. S. 781 oder vermittels **V**-förmiger Klemmstücke und Druck-

Abb. 187.



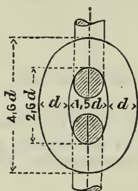
schrauben;*) zweckmäfsig ist auch Befestigung mittels Keileinlage, die sich durch den Seilzug selbsttätig festzieht (Abb. 187).

B. Ketten, deren Rollen und Trommeln.

a. Geschweifste Ketten mit Zubehör.**)

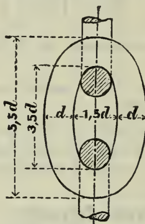
1. Ketten. Formen s. Abb. 188 bis 190. *d* in cm. Die kurzgliedrige Kette wird auf kleinen Rollen und Trommeln weniger auf Biegung beansprucht und ist beweglicher, jedoch schwerer und teurer als die beiden anderen. Der Steg erhöht die Bruchbelastung der Kette um durchschnittlich 20 vH; Stegketten finden vorzugsweise als Ankerketten Verwendung.

Abb. 188.
Kurzgliedrige Kette.



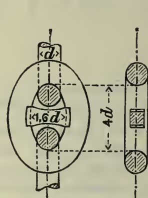
Gewicht: $q = 2{,}25\ d^2$ kg/m

Abb. 189.
Langgliedrige Kette.



$q = 1{,}92\ d^2$ kg/m

Abb. 190.
Stegkette.



$q = 1{,}98\ d^2$ kg/m.

Bei dickeren Ketten kommt die Seitenschweifse, bei dünneren die Kopfschweifse zur Anwendung; nach Harttung***) wird die Dauer der am Kopfe geschweifsten Ketten wesentlich erhöht, wenn beim Schmieden darauf geachtet wird, dafs an den Köpfen der Glieder die harten Schweifsstellen nur mit Schweifsstellen und die weichen gebogenen Enden nur unter sich in Berührung kommen.

Bei **kalibrierten** (adjustierten) Ketten mit genau übereinstimmenden Gliedern (für Hebezeuge, Kettenschiffahrt usw.) wird jedes einzelne Glied mittels Schablone nachgemessen und durch Nacharbeiten auf das richtige Mafs gebracht.

Die **Teilung** der Kette ist die innere lichte Länge *l* (Baulänge) der Glieder oder auch der Mittenabstand je zweier aufeinander folgenden Glieder; *l* und die lichte Gliedbreite *b* stehen, wie Abb. 188 bis 190 zeigen, nicht allgemein fest, sondern sind nach dem Verwendungszwecke der Kette und in den verschiedenen Ländern verschieden, so dafs bei Verwendung kalibrierter Ketten die genauen Abmessungen bei der jedesmaligen Bezugsquelle zu ermitteln sind, bevor die zugehörigen Daumenrollen konstruiert werden.

Zur Ermittlung der geringsten Bruchbelastung (äufsersten Zugkraft) P_2 (in kg) bzw. der geringsten Zugfestigkeit K_z (in kg/qcm)

---

*) S. C. Bach, Masch.-Elemente, 10. Aufl. 1908, S. 696 u. f.

**) Ueber nach dem Klatteschen Verfahren gewaltzte (ungeschweifste) Ketten s. Z. d. V. d. I. 1894 S. 944 und 1895 S. 1146.

***) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1891 S. 879.

werden drei oder fünf Glieder einem Kettenende entnommen und zerrissen. Die Probebelastung (d. h. die Ermittlung der geprüften Tragfähigkeit) P_1 (in kg) erfolgt auf der Wasserdruckpresse mit der ganzen Kette und bei längeren Ketten mit je 25 m Kettenlänge; nennenswerte Veränderungen darf die Kette hierbei nicht zeigen.

Je nach der Verwendung finden sich für Ketten folgende Angaben: k_z ist die zulässige Zugspannung (vrgl. hierzu auch die Angaben weiter unten) und p die Probebelastung in kg/qcm (ohne Rücksicht auf die zusätzliche Beanspruchung der Kettenglieder auf Biegung). k_z, p und K_z sind auf die Summe der beiden Querschnitte des Kettengliedes, also auf $f = 2 \cdot {}^1/_4 \pi d^2$ bezogen. Die Werte von p und K_z entsprechen den Vorschriften des Reichs-Marine-Amts.

Kettenart	Baulänge l	Lichte Gliedbreite b	Zuläss. Beanspruchung k_z kg/qcm	Probebelastung p kg/qcm	Zugfestigkeit K_z kg/qcm	Gewicht kg/m
Förderketten	3,5 d	1,5 d	318	1350	2400	1,92 d^2
Kran- u. Takelageketten	2,6 d	1,4 d	637	1350	2400	2,22 d^2
Feuerschiffketten . .	4,0 d	1,4 d	637	1350	2400	1,78 d^2
Tonnenketten	8,0 d	3,5 d	300	400	1800	1,62 d^2
Ankerketten mit Steg .	4,0 d	1,6 d	955	1800	2700	1,98 d^2

Das **Ketteneisen** ist zähes, weiches Schweifseisen mit einer Zugfestigkeit $K_z = 3500$ bis 3600 kg/qcm und einer Dehnung $\varphi = 12$ bis 20 vH (bei Rundstäben von 200 mm Zerreifslänge).

Kurzgliedrige Kran- und Schiffsketten ohne Steg.

Duisburger Maschinenb.-A.-G., vorm. Bechem & Keetman in Duisburg (Rhein)

Bemerkung. Wird in nachstehender Tafel die Ketteneisenstärke d in cm ausgedrückt, so ergibt sich: Zulässige Belastung $P = 1000\,d^2$; $k_z = 637$ kg/qcm. Geprüfte Tragfähigkeit $P_1 = 2250\,d^2$. Bruchbelastung $P_2 = 4500\,d^2$. Beanspruchter Querschnitt $f = 2 \cdot {}^1/_4 \pi d^2$. Kettengewicht (nach Angaben der Fabrik) etwa $q = 2,25\,d^2$. Auf das Verhältnis $q : P_1 : P_2$ ist zu achten.

Baulänge der Glieder etwa $l = 2,6\,d$; lichte Gliedbreite $b = 1,5\,d$, äufsere Breite 3,5 d. Die Ketten sind **nicht** adjustiert.

d mm	P kg	P_1 kg	P_2 kg	f qcm	q kg/m	d mm	P kg	P_1 kg	P_2 kg	f qcm	q kg/m
5	250	560	1120	0,39	0,58	20	4000	9000	18000	6,28	8,98
6	360	810	1620	0,57	0,81	21	4410	9920	19840	6,93	9,90
7	490	1100	2200	0,77	1,10	22	4840	10890	21780	7,60	10,87
8	640	1440	2880	1,01	1,44	23	5290	11900	23800	8,31	11,90
9	810	1820	3640	1,27	1,82	24	5760	12960	25920	9,05	12,94
10	1000	2250	4500	1,57	2,25	26	6760	15210	30420	10,62	15,18
11	1210	2720	5440	1,91	2,72	28	7840	17640	35280	12,32	17,61
12	1440	3240	6480	2,26	3,24	30	9000	20250	40500	14,14	20,22
13	1690	3800	7600	2,45	3,80	33	10890	24500	49000	17,11	24,46
14	1960	4410	8820	3,08	4,41	36	12960	29160	58320	20,36	29,11
15	2250	5060	10120	3,53	5,06	39	15210	34220	68440	23,89	34,16
16	2560	5760	11520	4,02	5,75	43	18490	41600	83200	29,04	41,53
17	2890	6500	13000	4,54	6,50	46	21160	47610	95220	33,24	47,53
18	3240	7290	14580	5,09	7,28	49	24010	54020	108040	37,71	53,82
19	3610	8120	16240	5,67	8,14	52	27040	60840	121680	42,47	60,73

Die **zulässige Belastung** P (in kg) einer neuen, aus vorzüglichem Eisen sorgfältig hergestellten kurzgliedrigen Kette (ohne Steg), deren Dicke d in cm und deren Rollen oder Trommeldurchmesser $D \geqq 20\,d$ ist, kann nach C. Bach angenommen werden zu:

$P = 1000\,d^2$ für wenig angestrengte Ketten ($k_z = 637$ kg/qcm),
$P \leqq 800\,d^2$ für häufiger benutzte Ketten ($k_z \leqq 509$ kg/qcm),
$P \leqq 500\,d^2$ für Dampfwindenketten ($k_z \leqq 318$ kg/qcm).

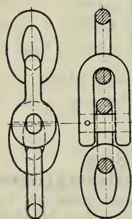
Neue kalibrierte (adjustierte) Ketten sind, um nachteilige Formänderung zu vermeiden und den guten Eingriff in die Zähne der Kettenräder zu erhalten, nur mit etwa $^5/_8$ der vorstehend angegebenen Kraft zu belasten.

Aeufserste Betriebsbelastung von kalibrierten Ketten.

$d =$ 4,5 ·	5	6	7	8	9	9,5	11	13	14,5	16	18	20	25	30 mm
$P =$ 125 ·	155	225	300	400	500	565	750	1050	1300	1600	2000	2500	3900	5600 kg.

Gebrauchte Ketten sind, entsprechend der Abnutzung und der Formänderung ihrer Glieder, geringer zu beanspruchen.

Abb. 191.



Richtungsänderungen im Kettenlaufe mit entgegengesetztem Biegungssinne der Kette an den Auflaufstellen der Rollen und Trommeln sind (wie bei allen Zugorganen) möglichst zu vermeiden; ihrem schädlichen Einflusse ist in jedem Falle durch entsprechende Verminderung der zulässigen Belastung zu begegnen.

Zur sofortigen Wiedervereinigung einer zerrissenen Kette dient das Kettenschlofs (Abb. 191), das so einzurichten ist, dafs es über Rollen und Trommeln ebenso ungehindert läuft wie ein gewöhnliches Kettenglied.

2. Rollen und Trommeln. Kettenrollen mit $D \geqq 20\,d$ und abgeschrägten Seiten s. Abb. 192; die Abschrägung (Doppelkegelform) vermindert die Biegungsbeanspruchung der Kettenglieder durch günstigere Unterstützung. Seitenränder nur bei unruhigem Kettenlauf oder stärkerer Ablenkung erforderlich; eine derartige Rolle für diagonal geführte Kettenglieder s. Abb. 193.

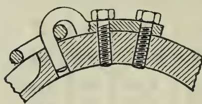
Abb. 192.



Abb. 193.



Abb. 194.

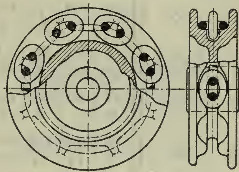


3. Kettentrommeln womöglich mit schraubenförmig eingegossener Rille nach Abb. 192, oder bei Zuführung diagonal gestellter Kettenglieder nach dem Rillenprofil der Abb. 193: Ganghöhe der Rillen-Schraubenlinie = Breite der Kettenlagerung + 0,3 bis 0,6 cm. $D \geqq 20\,d$; Mindeststärke des Trommelmantels etwa 1,2 cm (vrgl. hierzu S. 781). Trommellänge möglichst so, dafs Uebereinanderwicklungen vermieden werden. Befestigung der Kette am Trommelumfange nach Abb. 194, wobei auch eine Schraube genügt; zur Schonung der Befestigung sollen sich (wie bei Seilen) bei tiefster Laststellung noch immer eine bis zwei Kettenlagen auf der Trommel befinden.

4. Verzahnte Kettenräder für kalibrierte Ketten gestatten als Lastrollen eine weitgehende Beschränkung des Lastarmes und Verwendung beliebig grofser Kettenlängen bei geringstem Raumbedarf. Als Haspelräder ermöglichen sie Antrieb mit Handkette ($d = 5$ bis 10 mm) aus beliebiger Entfernung mit dem Vorteile gleichbleibender Richtung des Kettenzuges. Zug eines Arbeiters an der Handkette $\gtrless$ 30 kg.

Verzahntes Kettenrad mit acht Zähnen s. Abb. 195.

Abb. 195.



Ist l die Kettenteilung und z die Zähnezahl des Kettenrades, so ist dessen Teilkreishalbmesser

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{l}{\sin\frac{90^0}{z}}\right)^2 + \left(\frac{d}{\cos\frac{90^0}{z}}\right)^2}.$$

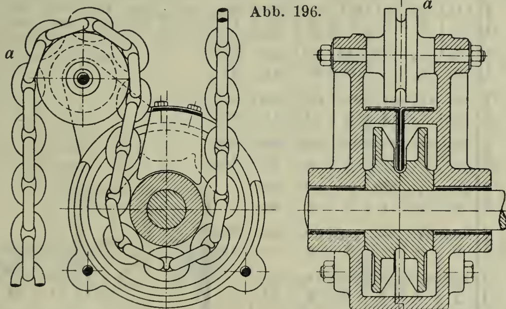
Für schwache Ketten und grofse Zähnezahlen (insbes. für Haspelräder mit Handkette), u. zw. schon für $d \leqq 1{,}6$ cm und $z \geqq 6$ darf ohne merkbaren Fehler gesetzt werden

$$R = \frac{l}{2\sin\frac{90^0}{z}}.$$

(S. die Tafel S. 796.)

Das ablaufende (spannungslose) Kettenstück ist durch eine Leitrolle a (Abb. 196) oder einen Führungsbügel derart abzulenken, dafs

Abb. 196.



die Kette die verzahnte Kettenrolle mindestens auf dem halben Umfang umschliefst; infolge der elastischen Dehnung klemmen sich die Kettenglieder leicht zwischen den Zähnen fest und müssen durch einen Abstreifer (Abb. 196) herausgedrängt werden.

b. Gelenkketten mit Zubehör.

Alle Gelenkketten müssen gut geschmiert werden; sie werden meist in Verbindung mit verzahnten Kettenrädern (oder Kettenachsen) be-

Kalibrierte Gliederketten und verzahnte Kettenräder.

Welter Elektrizitäts- und Hebezeug-Werke A.-G., Cöln-Zollstock.

Ketten-eisen-dicke d mm	Teilung l mm	Kettenräder Teilkreisdurchmesser $2r$ in mm (obere Zahl) Zähnezahl z (untere Zahl)														
4,5	16	62 7	108 10	153 15	173 17	257 25										
5	18,5	58 5	72 6	83 7	94 8	118 10	212 18	234 20	283 24	364 31	420 36					
6	18,5	72 6	83 7	94 8	107 9	118 10	130 11	142 12	187 16	200 17	212 18	234 20	260 22	284 26	331 28	353 30
6	20	76 6	166 13	178 14	204 16	254 20	280 22	357 28	484 38	548 43	636 50					
7	22,5	72 5	85 6	100 7	115 8	143 10	157 11	172 12	186 13	286 20	343 24	386 27	456 32	487 34	614 43	740 52
8	22,5	73 5	86 6	100 7	114 8	143 10	157 11	172 12	186 13	244 17	258 18	286 20	314 22	386 27	456 32	614 43
9	25	80 5	95 6	127 8	159 10	174 11	238 15	318 20	428 27	570 36						
9,5	31	100 5	120 6	140 7	160 8	198 10	196 11	238 12	318 16	338 17	360 18	388 20	411 21	436 22	534 27	592 30
11	30	97 5	114 6	134 7	153 8	192 10	214 11	223 12	264 14	286 15	382 20	401 21	422 22	456 24	575 30	680 36
13	36	115 5	137 6	161 7	184 8	207 9	230 10	253 11	275 12	299 13	322 14	344 15	458 20	480 21	500 22	552 24
14,5	42,5	162 6	214 8	268 10	320 12	374 14	404 15	850 32								
16	48	154 5	184 6	215 7	275 9	338 11	362 12	492 16	1101 36							
18	54	175 5	207 6	242 7	276 8	310 9	322 10	479 14								
20	62,5	200 5	240 6	280 7	320 8	360 9	800 20									
22	62,5	200 6	240 6	280 7	320 8	360 9	480 12	812 20								
25	72	236 5	277 6	322 7	368 8	414 9	565 12									
26	72	330 7														
28	72	366 8														
30	80	260 5	310 6	360 7	410 8											
30	91	170 3														
32	80	310 6	410 8													

d mm	l mm					
6	18,5	364 31	376 32	420 36	484 41	1002 85
7	22,5	850 60	944 66	1001 77		
8	22,5	740 52	850 60			
9,5	31	778 40				
11	30	1450 77				
13	36	714 32	836 37	1331 58		

Bemerkung. Die Teilung l der Kette ist die innere Baulänge der Glieder.

nutzt; manche Fabriken verwenden als Leitrollen glatte zylindrische Scheiben, auf die sich die Bolzen auflegen. Ist l die Baulänge der Gelenkkette und z die Zähnezahl des Kettenrades, so ist dessen Teilkreishalbmesser

$$r = \frac{l}{2 \sin (180^0 : z)}.$$

1. Gallsche Kette. Bolzen aus Stahl mit gedrehtem Zapfen, Laschen aus Stahl oder aus weichem, zähem Schweifseisen. Die Gallsche Gelenkkette von Zobel, Neubert & Co. Abb. 197 gewährt mit ihren in

Abb. 197.

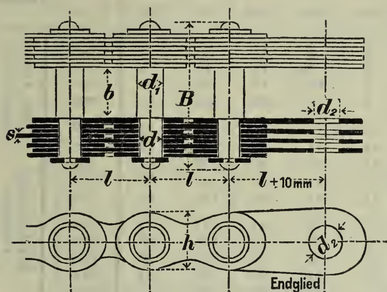


Abb. 198.

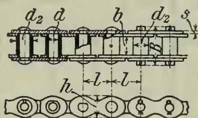
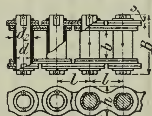


Abb. 199.



der Tafel S. 798 angegebenen Abmessungen und zulässigen Belastungen bei sorgfältiger Herstellung etwa 5 fache Sicherheit gegen Zerreifsen. Gröfste Kettengeschwindigkeit für Antriebzwecke etwa $v = 2{,}5$ m/sk; dabei ist nur $^1/_8$ der angegebenen Belastung zu wählen.

Die hierzu gehörigen **Kettenachsen** (Abb. 201) aus geschmiedetem Stahl und **Kettenräder** (Abb. 200) aus Gufseisen oder Stahlgufs erhalten seitliche Ränder, auf die sich die Laschenköpfe auflegen. Ausgeführte Zähnezahl $z = 8$ bis 80; das Kopfprofil der Zähne wird nach Abb. 200 und 201 durch Kreisbogen gebildet, die um die benachbarten Zapfenmittelpunkte beschrieben sind und so das freie Ein- und Ausschwingen der Kettenbolzen gestatten. Nabenlänge etwa

Abb. 200.

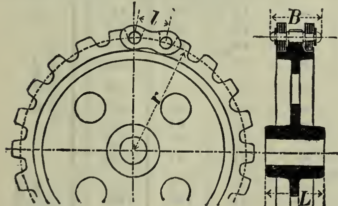
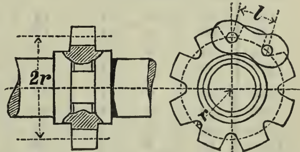


Abb. 201



$L = B + 0{,}14\, r$, wenn B die gröfste Breite der Kette (Abb. 197) und r der Teilkreishalbmesser (s. o.).

Die Gallsche Kette eignet sich (als Ersatz der gewöhnlichen adjustierten Gliederkette, zum Lastheben; für Triebwerk-

Gelenkketten

von Zobel, Neubert & Co. in Schmalkalden (Thüringen).

I. Gallsche Last-Gelenkketten.

P bedeutet die verbürgte zulässige Belastung in kg, *i* die Plattenzahl und *q* das Gewicht der Kette in kg/m; alles andere enthält Abb. 197.

P kg	l mm	i	s mm	h mm	d mm	d_1 mm	b mm	B mm	d_2 mm	q kg/m	Bemerkungen
100	15	2	1,5	12	4	5	12	23	6	0,7	Ohne Unterlagscheiben vernietet.
250	20	2	2	15	6	7,5	15	28	9	1,0	
500	25	2	3	18	8	10	18	38	12	2,0	
750	30	4	2	20	9	11	20	45	13	2,7	
1000	35	4	2	27	10	12	22	50	15	3,8	
1500	40	4	2,5	30	12	14	25	60	18	5,0	Mit Unterlagscheiben vernietet.
2000	45	4	3	35	14	17	30	67	21	7,1	
3000	50	6	3	38	17,5	22	35	90	26	11,1	
4000	55	6	4	40	21	24	40	110	32	16,5	
5000	60	6	4	46	23	26	45	118	34	19,0	
6000	65	6	4	53	24	28	45	125	36	24,0	
7500	70	8	4,5	53	26	32	50	150	40	31,5	
10000	80	8	4,5	65	30	34	60	165	45	34,0	
12500	85	8	5	70	31	35	65	180	47	44,8	
15000	90	8	5,5	75	34	38	70	195	50	51,1	Versplintet.
17500	100	8	6	80	36	40	75	208	54	58,1	
20000	110	8	6	85	38	43	80	215	56	74,4	
25000	120	8	6,5	100	40	45	90	235	60	83,3	
30000	130	8	7	106	45	50	100	255	65	100,0	

II. Zobelsche Treib-Gelenkketten.

P bedeutet die durch die Kette übertragbare Kraft in kg, *i* die Plattenzahl und *q* das Gewicht der Kette in kg/m; alles andere enthält Abb. 198.

P kg	l mm	i	s mm	h mm	d mm	d_2 mm	b mm	B mm	q kg/m	Bemerkungen
100	20	2	2	14	6	10	14	30	1,6	Vernietete Bolzen.
150	20	2	3	16	7,5	12	16	38	2,2	
200	25	2	3	21	9	14	18	40	2,5	
300	30	2	3,5	25	11	17	20	46	3,9	
400	35	2	4	27	12	18	22	50	4,1	
500	40	2	4	30	14	20	25	54	4,6	
750	45	2	5	35	16	22	30	64	6,7	
1000	50	2	6	38	18	26	35	72	9,0	
1500	55	4	4	40	20	28	45	97	13,0	
2000	60	4	5	46	24	32	50	113	14,0	Mit Scheiben versplintet.
2500	65	4	5	53	28	36	55	120	18,0	
3000	70	4	5	60	32	40	60	125	19,5	
4000	80	6	4,5	65	34	44	70	146	27,2	
5000	90	6	4,5	75	36	48	80	156	33,0	

zwecke eignet sich besser die in Abb. 198 und 199 dargestellte **Zobelsche Treibkette** aus Stahl (vrgl. Tafel S. 798). Diese Ketten lassen sich nur in gerader Gliederzahl ohne Ende verbinden. Die mit Scheiben versplinteten Ketten (nach Abb. 199) werden auf Wunsch mit hohlem Innenbolzen geliefert. Die kleinen Löcher in den Stahlhülsen dienen zur Schmierung.

Die kleineren Ketten (bis $l = 55$ mm) haben vernietete Bolzen und erhalten ein versplintetes Schlufsglied zum Verbinden der Kette ohne Ende. Kettenräder ähnlich wie Abb. 200 und 201. Zähnezahl > 7, gewöhnlich 10 bis 30.

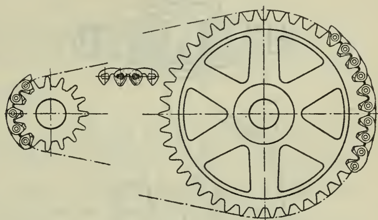
Gröfste Kettengeschwindigkeit für Antriebzwecke etwa $v = 3$ m/sk.

2. **Stotzsche Kette.** Die Treibketten der Elevatoren-Bauanstalt A. Stotz in Stuttgart erstreben tunlichste Beschränkung des Flächendruckes in den Gelenken, die Glieder sind aufserdem leicht zerlegbar und auswechselbar. Sie bestehen aus zähem, schmiedbarem Gufs; Bolzen aus Stahl. Es wird im übrigen auf die Preislisten der Firma verwiesen.*)

Bemerkung. Drahtseile stellen sich verhältnismäfsig am billigsten, ergeben den ruhigsten Gang und sind gegen Bruchgefahr im Vergleiche mit den geschweifsten Ketten sehr zuverlässig. Sie erfordern aber grofse Rollen und Trommeln und nutzen sich schnell ab. Ketten sind teurer, aber von gröfserer Dauer; am kostspieligsten sind kalibrierte Gliederketten und Gelenkketten, die als Lastketten vorzugsweise dann in Betracht kommen, wenn möglichst weitgehende Beschränkung des Trommelhalbmessers unter Anwendung von Kettenrädern gefordert wird.

3. Das **Renoldsche geräuschlose Zahnketten-Getriebe** (für elektrischen Antrieb von Pumpen, Werkzeugmaschinen, Ventilatoren usw.) wird gebaut von der Spezialfabrik für Zahnräder von Fried. Stolzenberg & Co., Berlin-Reinickendorf. Zahnräder und Zahnkette (Abb. 202) arbeiten derart miteinander, dafs, ungeachtet der im Betriebe unvermeidlichen Streckung der Kettenglieder die Berührung zwischen Kette und Radzahn dauernd erhalten bleibt. Ein stofsweises Abgleiten der Kette vom Zahn ist ausgeschlossen. Dehnt sich das Kettenglied, so nimmt es zwischen den Zähnen nur eine etwas höhere Lage ein.

Abb. 202.



Kettengeschwindigkeit möglichst nicht höher als 6,5 m/sk. Zähnezahlen zwischen 15 und 90, so dafs das gröfste Uebersetzungsverhältnis 6 : 1 ist. Abstand der Wellen nicht über 3 bis 3,5 m und nicht kleiner als 1,5 vom Durchmesser des grofsen Rades. Kette möglichst wagerecht. Die Räder führen die Kette entweder in der Mitte des Rades durch eine Rille, in welche die Kette mit Führungsgliedern eingreift oder durch Seitenscheiben. Die Mittenführung wird bevorzugt.

*) Vrgl. auch C. Bach, Masch.-Elemente, 10. Aufl. 1908 S. 706 u. f.

D. Haken und Oesen.

1. Die **Haken** werden gewöhnlich als einfache Haken nach Abb. 203 und nur für sehr grofse Lasten als Doppelhaken (Widderköpfe) nach Abb. 208, S. 802, ausgeführt.

Unter der Voraussetzung einer solchen Hakenform (Abb. 203), dafs der Krümmungshalbmesser der krummen Haken-Mittellinie daselbst $r = a + e_1$ gesetzt werden kann, ergibt sich für den gefährlichen Querschnitt AB die Tragkraft des Hakens (in kg) aus der Formel für σ auf S. 489:

$$P = k_z \frac{a}{e_1} \varkappa F.$$

Hierin bedeutet

F den Haken-Querschnitt AB in qcm,
k_z die zulässige Zugspannung des Stoffes in kg/qcm,
a den Maulhalbmesser in cm,
e_1 den Abstand des Querschnitt-Schwerpunktes von B (Abb. 203),
$\varkappa$ den auf S. 490 angegebenen Wert.

Abb. 203.

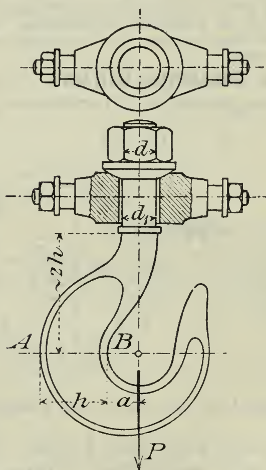
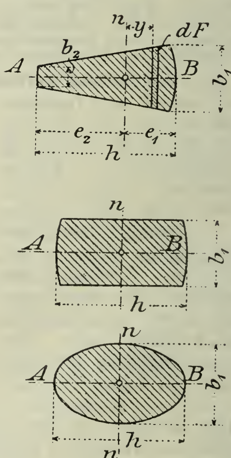


Abb. 204.



Zur Ermittlung der Querschnitt-Abmessungen h, b_1 und b_2 aus der gegebenen Hakenlast P schreibe man für die gebräuchlichen Querschnitte: Rechteck, Trapez und Ellipse, mit bezug auf Abb. 204

$$b_1 = \frac{P}{k_z\, a}\, C,$$

worin also

$$C = \frac{b_1\, e_1}{\varkappa F}$$

eine nur von der Form des Querschnittes abhängige Hülfsgröfse bedeutet, für die nachstehend eine Anzahl von Werten berechnet ist.

Die Berechnung des Hakens als geraden Stabes ergibt etwa um 40 bis 50 vH zu geringe Beanspruchungen.

Man nehme nun zunächst den Maulhalbmesser

bei Seilhaken $a = 0{,}75\,d$ bis $1\,d$ für Seile vom Durchmesser d,
bei Kettenhaken $a = d$ bis $1{,}5\,d$ für Ketten von der Eisendicke d,
wähle ferner das Verhältnis $h : a$ etwa $= 2$ bis 3,

beim Trapezquerschnitte dazu $\frac{b_1}{b_2} = \beta$, zweckmäfsig $\beta = \frac{h}{a} + 1$,

berechne die Hülfsgröfse C nach vorstehender Formel oder entnehme sie den folgenden Tafeln und bestimme darauf die gröfste Breite

$$b_1 = \frac{P}{k_z\,a}\,C.$$

Hülfsgröfse $C = \frac{b_1 e_1}{\varkappa F}$

zur Berechnung des gefährlichen Hakenquerschnittes.

1. Rechteck.

$h : a =$	1	1,5	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3	3,5	4
$C =$	12,59	7,25	5,76	5,39	5,07	4,79	4,53	4,31	4,10	3,92	3,22	2,75	2,41

2. Trapez. (Für $\beta = \frac{b_1}{b_2} = \frac{h}{a} + 1$)

$h : a =$	1	1,5	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,75	3	3,5	4
$C =$	15,0	8,96	7,25	6,85	6,42	6,05	5,77	5,48	5,25	5,06	4,55	4,18	3,59	3,28

3. Ellipse.

$h : a =$	1	1,5	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,75	3
$C =$	21,51	12,58	10,07	9,41	8,89	8,47	7,96	7,58	7,23	6,92	6,24	5,73

Bei Haken aus vorzüglichem, zähem Schweifseisen sei $k_z \leqq 1200$, bei solchen aus gewöhnlichem Schweifseisen $k_z \leqq 900$ kg/qcm.

Für den äufseren Gewindedurchmesser d in cm (s. Abb. 203) gilt $P \leqq 300\,d^2$ (vrgl. S. 669).

Bei vorhandener Unterlagscheibe (Abb. 203) empfiehlt es sich, $d_1 = d + 0{,}4$ cm zu wählen.

C. Bach empfiehlt die Hakenform Abb. 206, wobei im gefährlichen Querschnitt AB der Krümmungshalbmesser möglichst grofs gewählt ist und so die gröfste Beanspruchung herabgezogen wird.

Der Hakenschaft soll sich mit reichlichem Spielraum in der Aufhängung bewegen können. Hängt er in der stark belasteten losen Flasche eines mehrrolligen Flaschenzuges, so ist erforderlichenfalls durch doppelgelenkige Aufhängung des Querstückes die sonst infolge des unvermeidlichen Schiefziehens der Flasche auftretende Biegungsbeanspruchung des Hakenschaftes fernzuhalten oder wenigstens die obere Mündung der Bohrung des Querstückes kugelförmig auszufräsen und die Unterlagscheibe der Mutter dementsprechend auf der Unterfläche ebenfalls kugelförmig zu gestalten.

Beispiel eines vollständigen Hakengeschirres s. Abb. 205; das Belastungsgewicht zum Herabziehen des leeren Hakens enthält innen eine Feder zum Abfangen der Stöfse. In das obere Schekel wird das

Abb. 205.

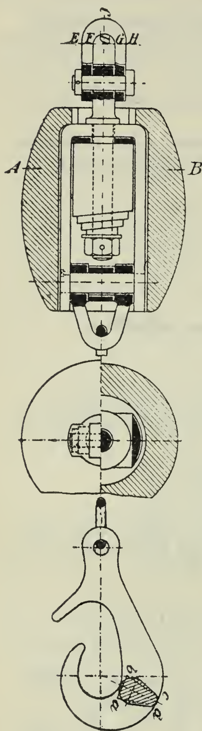


Abb. 206.

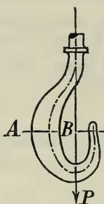


Abb. 207.

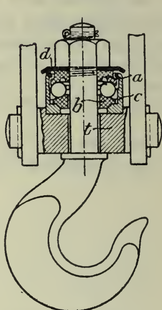


Abb. 208.

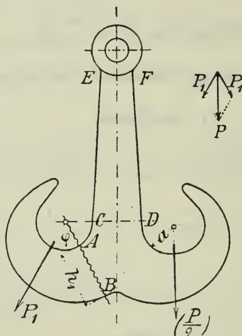
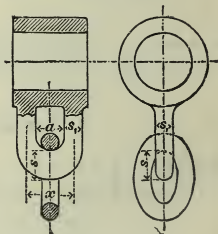


Abb. 209.



Drahtseil geschlungen; ein Kettenstück zwischen Federbügel und Lasthaken von ∼ 1 m Länge gestattet bequemes Erfassen der Last.

Haken mit Stützkugellager s. Abb. 207. Der in der Büchse c liegende Kupferring d verhindert das Herausspringen des Laufringes a aus c; unter der Schaftmutter liegt ein Schutzblech.

Das Querstück und dessen Zapfen in Abb. 203 sind auf Biegung zu berechnen, u. zw. die Zapfen für einen zulässigen Flächendruck $k \gtreqless 100$ kg/qcm.

Doppelhaken (s. Abb. 208) berechne man, sofern die Belastung durch zwei geneigte, symmetrisch angreifende Kräfte P_1, erfolgt, unter Verwendung der Gleichungen für den einfachen Haken, indem man etwa AB als gefährlichen Querschnitt auffafst und statt P die zu AB winkelrecht stehende Seitenkraft $P_1 \sin\varphi$ des schief angreifenden Lastzuges P_1 einführt, wo φ den Winkel zwischen P_1 und der Richtung von AB bedeutet:

$$b_1 = \frac{P_1 \sin\varphi}{k z\, a}\, C.$$

Wirkt dagegen auf jedes Hakenmaul die lotrechte Last $^1/_2\,P$ (Abb. 208 rechts), so ist statt $P_1 \sin\varphi$ die Seitenkraft von $^1/_2\,P$ winkelrecht zur Richtung des Querschnittes AB zu setzen.

Ist auch einseitige Belastung des Doppelhakens durch die halbe Last $^1/_2\,P$ möglich, so mufs in gleicher Weise der Querschnitt CD nachgerechnet werden:

$$b_1 = \frac{^1/_2\,P}{k_z\,a}\,C,$$

ebenso (P statt $^1/_2\,P$), wenn einseitige Belastung durch die volle Last P vorkommen kann.

2. Oesen, etwa nach Abb. 209, dienen zum Einhängen des anderen freien Ketten- oder Seilendes bei Flaschenzügen. Die Weite a folgt aus der Seil- oder Ketteneisendicke d. Bezeichnet P die gröfste Last, so ergibt sich nach Fall 5 S. 448, wenn der gefährliche Querschnitt eine Ellipse mit der Höhe s und der Dicke s_1 (in cm) ist:

$$^1/_8\,P x = W k_b \sim 0{,}1\, s_1 s^2\, k_b.$$

(x s. Abb. 209.)

Wird s_1 beliebig (z. B. $s_1 = d$) angenommen und für gewöhnliches Schweifseisen die zulässige Biegungsspannung $k_b = 900$ kg/qcm gewählt, so ergibt sich hieraus s.

IV. SPERR- UND BREMSWERKE.*)

A. Sperrwerke.

a. Klinkengesperre.

Am meisten gebräuchlich Sperräder mit äufserer Verzahnung (Abb. 211); aufserdem Sperräder mit innerer Verzahnung (Abb. 212); seltener, meist für kleinere Kräfte, mit seitlicher Verzahnung (Abb. 213).

Sperrzähne sind in erster Linie durch Biegungsbeanspruchung, erst in zweiter Linie durch Scherung gefährdet und dementsprechend zu berechnen.

Ist P der Umfangsdruck in kg,
b die Breite des Sperrades in cm,
e die Zahntiefe in cm,
k_b die zulässige Biegungsspannung für Gufseisen in kg/qcm, u. zw. $k_b \leqq 200$ oder 300, je nachdem Stofswirkungen zu berücksichtigen sind oder nicht,

*) Nach Ad. Ernst, Die Hebezeuge, 4. Aufl. 1903; Berlin, J. Springer.

so ist für einen beliebigen durch die Zahnfufsecke gehenden Querschnitt (Abb. 210):

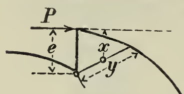


Abb. 210.

$$Px = W\sigma = \tfrac{1}{6}\, b y^2 \sigma, \quad \text{also} \quad \sigma = \frac{6\,Px}{b y^2} < k_b.$$

Mafsgebend ist der Querschnitt, bei dem $x : y^2$ den gröfsten Wert annimmt; bei den üblichen Zahnformen ergibt sich i. M. e oder b aus der Gleichung:

$$P = 0{,}25\; b e k_b.$$

Für Schmiedeisen, Stahlgufs oder Stahl wird k_b entsprechend höher, aber mit Rücksicht auf die Stofswirkungen etwas niedriger als bei Zahnrädern genommen.

Meist gibt man den Sperrädern 8 bis 12 Zähne, selten weniger, nur ausnahmsweise bis 20 oder mehr.

Damit die Sperrklinke leicht an der ebenen Eingriffläche der Zähne herabgleitet, mufs die ebene Eingriffläche der Klinke und des Zahnes mit der (in der Zahnspitze C auf dem Halbmesser $r = BC$ winkelrecht stehenden) Tangentialebene einen Winkel bilden, der gröfser ist als $90^0 +$ dem Reibungswinkel. Um dies zu erzielen, bestimme man den Eingriffpunkt C (Abb. 211) als Schnitt des Radumfanges mit dem Halbkreis über AB (B = Mittelpunkt des Rades) und wähle die Richtungen der einzelnen Eingriffflächen als Tangenten an einen Kreis um B mit $0{,}3\,r$ als Halbmesser.

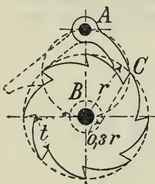


Abb. 211.

Die Klinke läfst man bis auf den Grund der Zahnlücke eingreifen; zuweilen wird sie als Sperrhaken ausgeführt.

Oft werden mehrere Klinken an einem Sperrade angewendet. Die Sperrzähne werden häufig, ähnlich wie bei Zahnrädern, durch Seitenscheiben gestützt und damit nicht unerheblich verstärkt. — Man kann auch zwei oder mehrere um einen entsprechenden Teil der Teilung gegeneinander versetzte Sperrkränze anordnen, um bei grofsen Teilungen den freien Gang bis zum Einfallen einer Klinke und damit die Stofswirkung herabzuziehen.

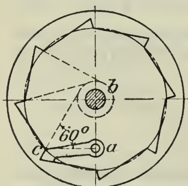
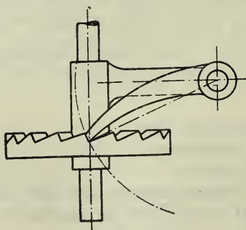


Abb. 212.


Abb. 213.

Bei Sperrädern mit innerer Verzahnung bestimmt man den Eingriffpunkt der Klinke durch eine Senkrechte im Klinkenzapfenmittelpunkt auf dem durch diesen gehenden Durchmesser. Der freie Schenkel eines hier angetragenen Winkels von 60^0 erzielt die Neigung für die Zahnflanken (Abb. 212).

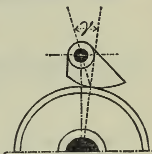
Sperräder mit seitlicher Verzahnung erhalten eine um 30^0 gegen die Ebene des Sperrades geneigte Klinke (Abb. 213).

b. Klemmgesperre.

Sie haben vor Klinkengesperren den Vorzug geräuschlosen Ganges, werden jedoch bei Windentriebwerken nur selten, häufiger als Schalt- und Sperrwerk bei Sägegattern verwendet.

Ist μ die Reibungszahl (vrgl. S. 228 u. 708), so gilt als Bedingung für die Klemmsperrung (Winkel γ s. Abb. 214):

Abb. 214.



$$\operatorname{tg} \gamma < \mu.$$

Für $\mu = 0{,}10$ bis $0{,}15$ wird hiernach γ höchstens 5^0 bis 8^0. Um diese kleinen Winkel und damit eine rückläufige Bewegung des Sperrrades zu vermeiden, benutzt man Keilnuteneingriff (vrgl. S. 708). Die Bedingung für die Klemmsperrung lautet alsdann bei einem halben Keilnutenwinkel α:

$$\operatorname{tg} \gamma < \frac{\mu}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha},$$

so dafs z. B. für $\mu = 0{,}10$ bis $0{,}15$ und $\alpha = 15^0$:

$$\gamma \sim 15^0 \text{ bis } 20^0.$$

B. Bremswerke.

Bremsscheiben sind möglichst auf der Antriebwelle, oder, wenn diese verschiebbar, auf der nächsten Vorgelegewelle anzuordnen. In den meisten Fällen genügt alsdann für gewöhnliche Winden (insbesondere bei Bandbremsen) ein Bremsscheibendurchmesser von 200 bis 400 mm. Es bezeichnet

K den Druck am Bremshebelgriffe in kg,

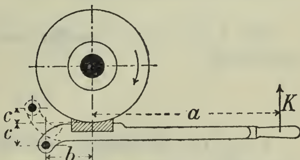
P die Bremskraft am Umfange der Bremsscheibe in kg,

μ die Reibungszahl für Holz auf Eisen (trocken) $< 0{,}5$, für Eisen auf Eisen $= 0{,}18$ bis $0{,}25$, mit wachsender Geschwindigkeit abnehmend.

a. Backenbremsen. (Abb. 215.)

$$K = P \frac{b}{a+b} \left(\frac{1}{\mu} \pm \frac{c}{b} \right).$$

Abb. 215.



Das —-Zeichen gilt für die gezeichnete Drehrichtung, das +-Zeichen für die entgegengesetzte; Abmessungen in gleichem Mafse.

Für $b : c = \mu$ wird bei rechtsumlaufender Bremsscheibe $K = 0$, d. h. die Bremse wird selbsttätig; man wähle jedoch stets das Verhältnis $b : c$ etwas gröfser als μ.

Für die punktiert gezeichnete Anordnung des Bremshebels wird $c = -c$, also

$$K = P \frac{b}{a+b} \left(\frac{1}{\mu} \mp \frac{c}{b} \right).$$

Alsdann findet bei links umlaufender Bremsscheibe für $\frac{b}{c} < \mu$ selbsttätige Bremsung statt.

Bei Anwendung des Keilnuteneingriffes ist statt μ zu setzen

$$\frac{\mu}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha},$$

wenn α den halben Keilnutenwinkel bezeichnet (vrgl. S. 708).

b. Kegelbremsen.

Sie werden als selbständige Bremsen nur selten, meist als Teile von Sicherheitskurbeln benutzt. Der Druck am Hebelgriff ist

$$K = P \frac{b}{a} \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\mu},$$

wenn (in gleichem Mafse) a den Hebelarm der Kraft K, b die Entfernung der Kegelachse von dem Drehpunkte des Hebels, aufserdem α ($= 10$ bis 15^0) den halben Spitzenwinkel des Kegels bedeutet.

c. Bandbremsen.

Aufser den vorstehenden Bezeichnungen bedeutet

e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen (s. S. 43),
α den Winkel des vom Bremsbande umspannten Bogens in Bogenmafs,
s die Dicke und b die Breite des Bremsbandes in cm,
k_z die zulässige Zugspannung des Bremsbandes in kg/qcm.

Erforderlich ist besonders zähes Flufseisen und Annahme kleiner Werte von k_z mit Rücksicht auf die Sprödigkeit des Flufseisens bei Temperaturen bis zu 300^0.

Für die Drehrichtung nach links (1 in Abb. 216) ist

die Bandspannkraft links $S_1 = P \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1}$, rechts $S_2 = P \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}$;

für die Drehrichtung nach rechts (2 in Abb. 216) ist

die Bandspannkraft links $S_1 = P \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}$, rechts $S_2 = P \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1}$.

Der Querschnitt des Bremsbandes folgt aus der gröfsten Bandspannkraft:

$$b s = \frac{P}{k_z} \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

s ist mit Rücksicht auf Abnutzung entsprechend zu vergröfsern; man wähle jedoch s höchstens 0,3 bis 0,4 cm und $b \gtreqless 8$ cm.

$e^{\mu\alpha}$ für $\mu = 0{,}18$ und für verschiedene Werte von $\alpha : 2\pi$ s. Tafel S. 247, lezte Spalte.

Häufig ist $\alpha : 2\pi = 0{,}7$; für diesen Wert und $\mu = 0{,}18$ wird

$$e^{\mu\alpha} = 2{,}21; \quad \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} = 0{,}83 \quad \text{und} \quad \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} = 1{,}83.$$

1. Einfache Bandbremse.

Für Abb. 216 ist

$$K = \frac{S_1 b_1}{a};$$

für Abb. 217 ist

$$K = \frac{S_2 b_2}{a}.$$

Abb. 216.

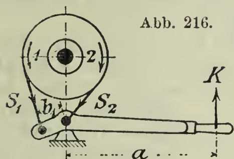
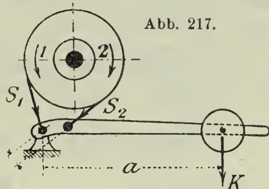


Abb. 217.



Die Bremskraft K fällt am kleinsten aus, wenn das weniger gespannte (ablaufende) Bandende am Hebel angreift (also Drehsinn 1 bei Abb. 216, Drehsinn 2 bei Abb. 217).

2. Differentialbremse (Abb. 218).

$$K = \frac{S_1 b_1 - S_2 b_2}{a} = \frac{P}{b} \frac{b_1 - b_2 e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

K läfst sich nach Belieben klein halten; die Bremswirkung wird dann aber sehr ungleichmäfsig.

Für $b_1 \overline{\overline{<}} b_2 e^{\mu\alpha}$ wird $K = 0$ oder negativ, d. h. die Bremse wirkt selbsttätig; man wähle jedoch stets b_1 etwas gröfser als $b_2 e^{\mu\alpha}$.

Für $\alpha : 2\pi = 0{,}7$ liefert $b_1 = 2{,}5\, b_2$ bis $3\, b_2$ brauchbare Werte. (Tafel für $e^{\mu\alpha}$ s. S. 247).

Abb. 218.

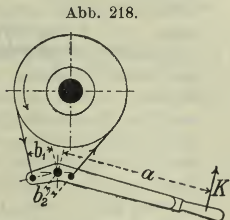
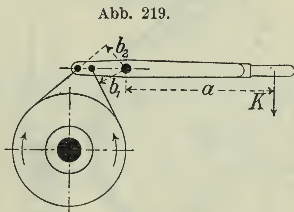


Abb. 219.



3. Bandbremse für wechselnde Umlaufrichtung (Abb. 219).

Wählt man bei **2.** $b_1 = b_2$, so wird für beide Drehrichtungen

$$K = \frac{P b_1}{a} \frac{e^{\mu\alpha} + 1}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

K ist hierbei im Verhältnis zu P sehr grofs (z. B. für $\alpha : 2\pi = 0{,}7$ und $\mu = 0{,}18$ ist $K = 2{,}65\, P \frac{b_1}{a}$, gegen $1{,}83\, P \frac{b_1}{a}$ bei Abb. 216); daher sind für diesen Fall Bandbremsen nicht günstiger als Backenbremsen; in den anderen Fällen sind sie wegen ihrer kräftigen Wirkung und ihrer gedrängten einfachen Form vorzuziehen.

d. Sperradbremsen und Sicherheitskurbeln.

1. Sperr- und Bremswerk vereinigt man meist zu einer **Sperradbremse,** bei der zur Lastsenkung nur die stets gespannte Bremse etwas gelüftet zu werden braucht.

Abb. 220 zeigt die Sperradbremse von E. Becker, Berlin; Abb. 221 die der Duisburger Maschinenbau-A.-G., vorm. Bechem & Keetman in Duisburg und Abb. 222 eine aus der Bremse von Henkel hervorgegangene Bauart von Gebr. Weismüller in Bockenheim bei Frankfurt, bei der die Sperrklinke während des Lasthebens selbsttätig ausgerückt und das Sperrwerk dadurch geräuschlos gemacht wird. Eine andere Bremse dieser Art ist die von der Duisburger Maschinenfabrik J. Jäger.*)

Abb. 220.
Sperradbremse von E. Becker.

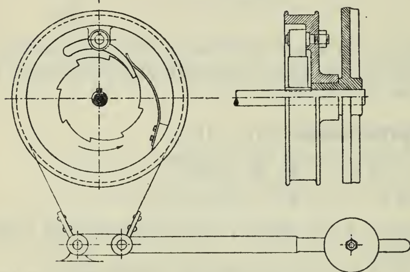
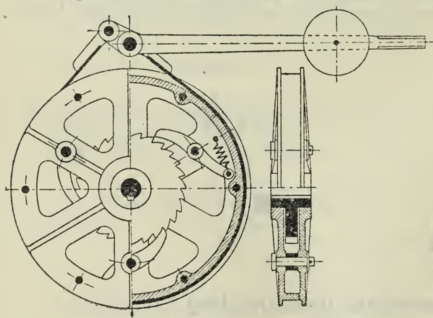


Abb. 221.
Sperradbremse von Bechem & Keetman.



2. Durch Einschalten einer Reibungskupplung zwischen Kurbel und Triebling, deren eine Hälfte durch ein Zahngesperre am Rücklauf gehindert wird, gelangt man zur Konstruktion von **Sicherheitskurbeln,** die beim Rücklauf der Winde stehen bleiben und den Lastniedergang selbsttätig hindern, bis durch eine Rückwärtsdrehung die Kupplung so weit gelöst wird, dafs sie nur noch als Bremse wirkt. Empfehlenswerte

*) Näheres s. Ad. Ernst, Die Hebezeuge, 4. Aufl.; Berlin 1903, J. Springer. Vrgl. auch Frölich, Maschinelle Einrichtungen für das Eisenhüttenwesen. Z. d. V. d. I. 1906 S. 1858 u. f.: Kupplungen mit Band- und Backenbremsen.

Sicherheitskurbeln sind u. a. die von Mégy, von Weidtman (Abb. 223), von E. Becker, von Gebr. Weismüller und von Gauhe, Gockel & Co.*)

Abb. 222.
Sperradbremse von Gebr. Weismüller.

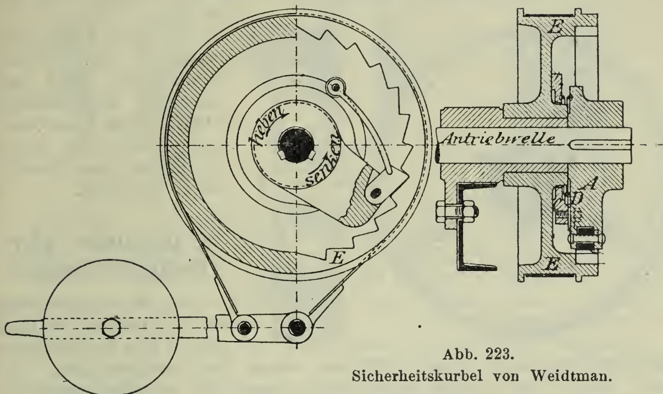
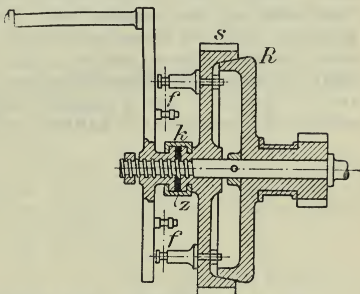


Abb. 223.
Sicherheitskurbel von Weidtman.



In Abb. 223 ist R die Reibungskupplung, s äufsere Sperrverzahnung, k Kupplungsschelle (zweiteilig), die den Reibungskegel mit der Kurbel zurückzieht. Sicherung des Kupplungsschlusses durch Spannfedern f, die selbsttätig die Sperrlage der Winde herbeiführen, wenn beim Lastsenken die Kurbel fahrlässigerweise losgelassen wird. z Zwischenscheibe zur dauernden Anspannung der Federn f.

e. Selbsttätige Bremsen.**)

1. Schleuderbremsen.

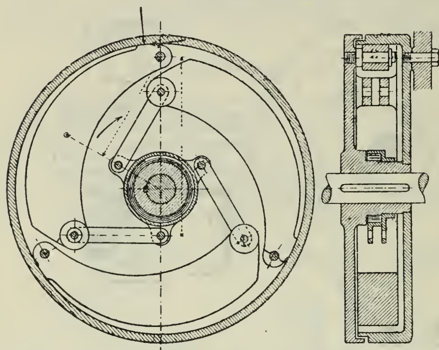
Wirken als Geschwindigkeitsregler für die sinkende Last. Man benutzt den Rücklauf des Windenräderwerks, um bewegliche Klötze oder belastete Hebel durch ihre Fliehkraft zum Ausschlage zu bringen und mit ihnen an einer ruhenden Scheibe einen Bremswiderstand zu erzeugen. Dieser ist für eine bestimmte Ausführung abhängig von der Umlaufzahl der Bremswelle. Die Senkgeschwindigkeit kann hierbei durch das Spannen oder Entspannen einer Feder nach Bedarf geregelt werden.

Bremse von E. Becker (s. Abb. 224) mit Bremsklötzen, die gegen den inneren Umfang einer festen Trommel drücken. Benutzt man

*) Näheres s. Ad. Ernst, Die Hebezeuge, 1. Aufl.; Berlin 1903, J. Springer.
**) Vrgl. Ad. Ernst, Kritik der neueren Senksperrbremsen, Z. d. V. d. I. 1001 S. 1081.

zum Antriebe eine durch den Lastrücklauf mit dem Triebwerk gekuppelte Sperradscheibe, so kann die Schleuderbremse während des Lastaufwindens völlig ausgeschaltet werden (Konsolwinde von E. Becker).

Abb. 224.
Schleuderbremse von E. Becker.



Bei der Schleuderbremse von Mohr (Mannheim) wird ein um eine festgehaltene Bremsscheibe geschlungenes Bremsband durch die beweglichen Bremsklötze gespannt.

2. Drucklager- oder Senksperrbremsen.

Der Widerstand, den die Last beim Anheben dem Windentriebwerk entgegensetzt, wird zum Schliefsen einer Reibungskupplung benutzt, derart, dafs deren eine Hälfte durch ein einseitig wirkendes Sperrwerk an der umgekehrten Drehrichtung gehindert, daher die gehobene Last frei schwebend festgehalten wird, wogegen das Senken einen äufseren Antrieb verlangt, der den Reibungswiderstand der nunmehr als Bremse wirkenden Kupplung überwindet. Drucklagerbremsen von E. Becker, der Peniger Maschinenfabrik und Eisengiefserei, sowie der Benrather Maschinenfabrik.

V. KOLBEN, KOLBENSTANGEN UND STOPFBÜCHSEN.

A. Kolben.

a. Tauchkolben (Plunger).

Dichtung (selbsttätig wirkend) mit Stulp aus Leder (in besonderen Prefsformen hergestellt) oder aus Gummi, z. B. für Prefspumpen (Abb. 225 mit 2 Schrauben, Abb. 226 mit 1 Schraube, dabei *a* Löcher zum Drehen); der eine Stulp wirkt beim Saugen, der andere beim Drücken. Für Wasserdruckpressen dient ein Stulp nach Abb. 227; er dichtet hier nur gegen inneren Ueberdruck. Anwendbar für alle,

besonders für hohe Drücke (bis 1000 at), bei reinem Wasser und bei Kolbengeschwindigkeiten < 1 m/sk. Bei unreinem Wasser oder grofsen Geschwindigkeiten sind Reibung und Verschleifs bedeutend.

Abb. 225.

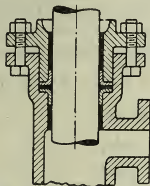


Abb. 226.

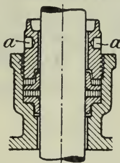
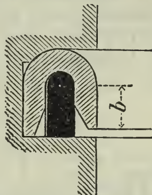


Abb. 227.



Besonders für stärkere Tauchkolben, für 4 at Druck und mehr haben sich statt der Lederdichtungen mit Talg sorgfältig eingefettete, rechteckig geflochtene Baumwollen-Packungen sehr gut bewährt, wenn die Packungshöhe mindestens das 6-fache der Dicke der Packungsschnur beträgt. Zuweilen genügt zur Führung und Dichtung ein Metallring, z. B. wenn der Kolben in zwei unmittelbar aneinanderstofsenden, nur durch eine Wand getrennten Zylindern arbeitet.

Labyrinthdichtung, wobei der Zylinder mehrere ringförmige Rinnen erhält, ist für Tauchkolben zwecklos.

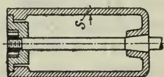
Stulp-Reibung. Bezeichnet für Leder- oder Gummistulpdichtung

b die Höhe der reibenden Stulpfläche in cm (Abb. 227),
p den Flüssigkeitsüberdruck in at,
μ die Zahl der gleitenden Reibung zwischen Kolbenfläche und Stulp,
D den Durchmesser des Kolbens in cm,
R den Reibungswiderstand in kg, der sich der Bewegung des Kolbens bei der Pressung p entgegensetzt,
R_0 den Reibungswiderstand in kg für $p = 0$, entstehend durch noch nicht eingelaufenen, anfänglich zu harten Stulp sowie durch die Reibung zwischen Kolben und Führungsbüchsen (bei lotrechter Stange ist $R_0 \sim 0$), so ist nach Gollner*)

$$R = R_0 + \pi D b p \mu.$$

Für b reicht 1,2 bis 2,0 cm aus; Lederdicke $s = 0{,}4$ bis 0,6 cm. Gummistulpen erhalten 1,0 cm Dicke. Für Kolben von 1,0 cm Dmr. sei $b = 0{,}5$ cm, wobei $s \sim 1$ bis 1,5 mm. R_0 ist zu schätzen oder durch Versuch zu bestimmen; ferner ist bei glatten Oberflächen und bei guter Fettung des Leders (für $p = 10$ bis 140 at) die Reibungszahl etwa $\mu = 0{,}07$ bis 0,08, bei ungünstigen Verhältnissen (rauher Kolben, schmutziges Wasser) erhöht sich μ bis auf 0,20. (Vrgl. jedoch die Angaben für R und μ für verschiedene Dichtungen S. 230.) Für Metalldichtung ist $\mu = 0{,}1$ zu setzen.

Abb. 228.



Ueber die Reibung von Baumwollen-Packungen u. drgl., die nur durch ihre eigene Elastizität dichten, s. S. 820.

*) Vrgl. C. Bach, Z. d. V. d. I. 1886 S. 155.

Die **Wandstärke** s hohler Tauchkolben (Abb. 228) wird nach **2.**, S. 505 berechnet, mit 0,2 bis 0,5 cm Zuschlag.

b. Scheibenkolben.

1. Scheibenkolben mit Hanfliderung für kaltes und warmes Wasser, feuchten Dampf von geringer Temperatur. Für Hubpumpen (Kondensatorpumpen) zeigt Abb. 229 einen durchbrochenen Scheibenkolben mit Gummiklappenventil, links Hanfliderung, rechts Metalliderung. Höhe der Packung $h = 4\sqrt{D}$, Packungsdicke $s = \sqrt{D}$, wenn h, s

Abb. 229.

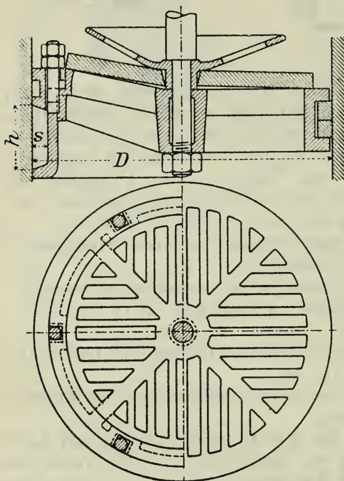


Abb. 231.

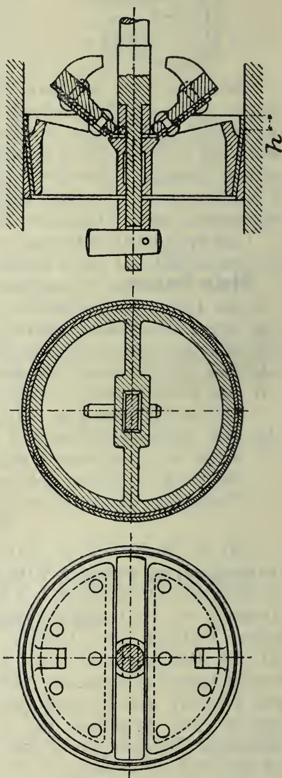
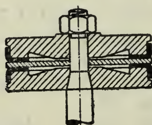


Abb. 230.



und D in **mm**. Bei einseitig ausgelaufenen Zylindern, die nicht ausgebohrt werden können, ist Hanfliderung der Metalliderung vorzuziehen.

Leinwand und Filz werden zuweilen als Streifen um den Kolben gelegt und durch ringförmigen Deckel mit Schrauben oder Keil zusammengedrückt. Harte Kautschukringe für sandiges Wasser.

2. Scheibenkolben mit Leder- oder Gummistulpdichtung (Abb. 230, für doppelt wirkende Wasserpumpen) für reines Wasser von weniger als 30° Temperatur und 5 at Druck. Dichtungshöhe $b = 1{,}2$ bis 2,0 cm, Lederdicke 0,3 bis 0,6 cm. Abb. 231 zeigt einen mit Lederstulpdichtung versehenen durchbrochenen Brunnen-Pumpenkolben mit Metallklappen. Der aus einem Lederstück bestehende Stulp wird durch einen Eisen- oder Kupferring mit Keilung gegen den Kolben gedrückt. Höhe der Liderung, je nach dem Durchmesser, $h = 0{,}8$ bis 1,5 cm; Lederdicke 0,3 bis 0,5 cm. Abdichtung nur bei Bewegung aufwärts.

Für Drücke bis 5600 at (Hubersche Presse)*) hat sich die Dichtung Abb. 232 bewährt; sie besteht abwechselnd aus Lagen von gutem Leder, an den Rändern zugeschärft, und aus harten Metallscheiben, deren Ränder ebenfalls scharf zugeschnitten sind; das Ganze durch Bodenstück und drei Schrauben zusammengehalten.

3. Scheibenkolben mit Holzliderung (Eichen, Pappel, Ahorn, durch Federn oder Kautschukringe an die Zylinderwand gedrückt) für Warmwasserpumpen der Kondensationsmaschinen (Krause, Corlifs) haben sich gut bewährt.**)

Abb. 232.

Abb. 233.

Abb. 234.

4. Scheibenkolben mit Metalliderung für höhere Temperaturen.

a) **Eingeschliffene Kolben** aus Bronze, in ebensolchen Zylindern laufend, für Pumpen, besonders Feuerspritzen (Abb. 233), Kondensatorpumpen u. drgl. Die Rinne auf Mitte Höhe dient zur Aufnahme von Schmiere oder Schmutz. Die Bildung des oberen Endes verhindert, dafs der Schmutz der Zylinderwand zwischen die Dichtflächen gelangt. Wird der Kolben undicht, so kann ein Lederstulp eingesetzt werden (s. Abb. 233 unten).

b) **Kolben mit metallenen Liderungsringen**, meist aus zähem, nicht zu weichem Gufseisen (aus Bronze nur bei Pumpen mit saurem

*) S. Z. d. V. d. I. 1901 S. 625.
**) S. C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 10. Aufl. 1908, S. 724.

Grubenwasser usw.), sind entweder selbstspannend mit gröfserem Durchmesser hergestellt, gespalten und, nachdem $a \sim 0{,}1\ D$ (Abb. 234) herausgeschnitten, auf den Zylinderdurchmesser D abgedreht. Deckung des Spaltes durch Ueberblattung oder durch ein besonderes Füllstück (Zunge). Die Spalten mehrerer Ringe werden gegeneinander versetzt.

Dicke der Ringe, die über die Stirnflächen des Kolbens in die Nuten gebracht werden,

$$s \gtreqless {}^1/_{30}\, D \text{ für gleich dicke Ringe,}$$
$$s \gtreqless {}^1/_{25}\, D \text{ für ungleich dicke Ringe,}$$

die an den freien Enden bis auf $0{,}7\ s$ abnehmen.

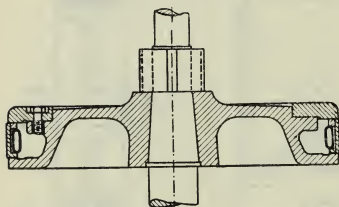
Höhe $h = 2s$, $a = 1{,}25h$ bis $1{,}5h$ oder $0{,}1\ D$.

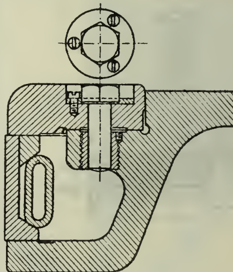
Ringe, die nach Abnahme eines besonderen Kolbendeckels aufgeschoben werden, erhalten $s = {}^1/_{20}\, D$ abnehmend bis $0{,}7\, s$, $h = s$ (stehende Maschinen) bis $1{,}5s$ (liegende Maschinen), $a = 0{,}075\ D$.*)

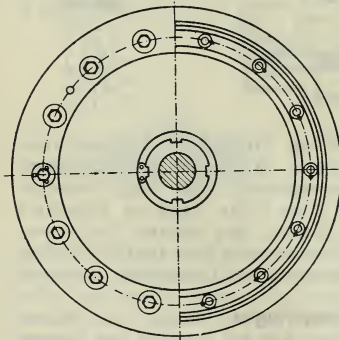
Oder es werden die Liderungsringe durch hintergelegte Spannringe gespannt gehalten, die die Dichtungsringe meistens in radialer und achsialer Richtung andrücken. In Abb. 237 (Kolben der Rheiner Maschinenfabrik) werden Doppelkegelfeder und Dichtungsringe durch Anziehen der Deckelschrauben gespannt; in Abb. 238 (Patent Zirn)

Abb. 235. Abb. 236.

Dampfkolben für stehende Maschinen.







werden die Ringe durch Keilstücke mittels wellenförmiger Feder in radialer und achsialer Richtung angedrückt, in Abb. 239 (Patent Cooper & Pattinson) durch eine entsprechend geformte Schraubenfeder.

Kolbenkörper entweder offen nach Abb. 234, (schwedischer Kolben), geschmiedet oder aus Stahlgufs, nach Abb. 235, 236 und 241 für stehende Dampfmaschinen, besonders Schiffsmaschinen; in Abb. 236 werden die Liderungsringe

*) Berechnung der Kolbenringe s. K. Rheinhardt, Z. d. V. d. I. 1901 S. 232.

und der dahinter gelegte Spannring (von ovalem Querschnitte) mittels eines Deckelringes gehalten, in Abb. 241 sind die selbstspannenden

Abb. 237.
(Rheiner Maschinenfabrik.)

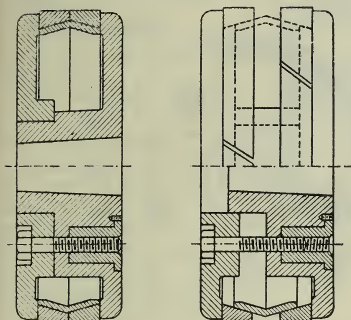


Abb. 238.
(Zirn.)

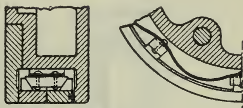
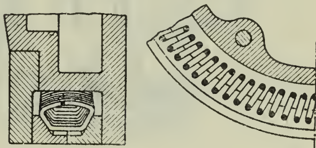


Abb. 239.
(Cooper und Pattinson.)



Dichtungsringe in einem abnehmbaren besonderen Winkelringe aus Gufseisen (zur leichten Erneuerung) untergebracht. Oder der Kolben-

Abb. 240.
Gebläsekolben von Riedler.

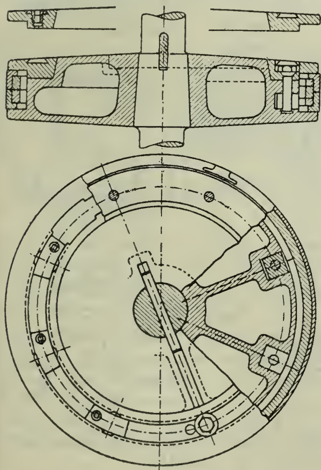
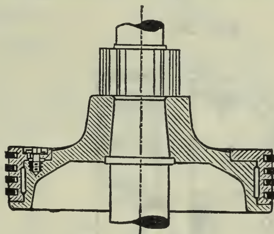


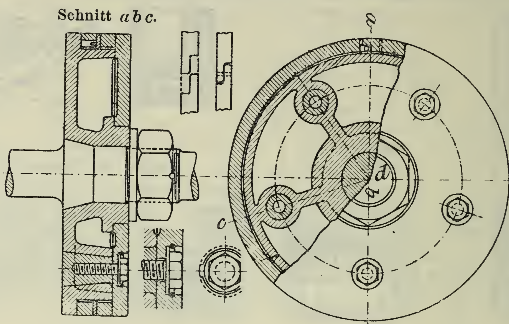
Abb. 241.
Dampfkolben für Schiffsmaschinen.



körper ist geschlossen: 1) aus einem Stücke (Abb. 240 und 243), mit Kernöffnungen in einer oder beiden Stirnflächen (Abb. 243) oder am Umfange oder in der Nabe, oder 2) geteilt (Abb. 237, 242 und 244), wobei meist durch Wegnahme des Deckels die Ringe freigelegt werden können. Die Muttern werden, um das Festrosten zu verhindern, aus Bronze hergestellt. (Abdrückschrauben vorsehen!). Vielfach (bei kleineren Kolben) benutzt man auch die Befestigungsschraube für die Kolbenstange zur

Verbindung der beiden ungefähr gleichgestalteten Kolbenhälften (Abb. 244, Kolben von Kiefselbach). Alle Schrauben sind gegen Lockerwerden zu sichern (vrgl. Abb. 236, 240 und 242).

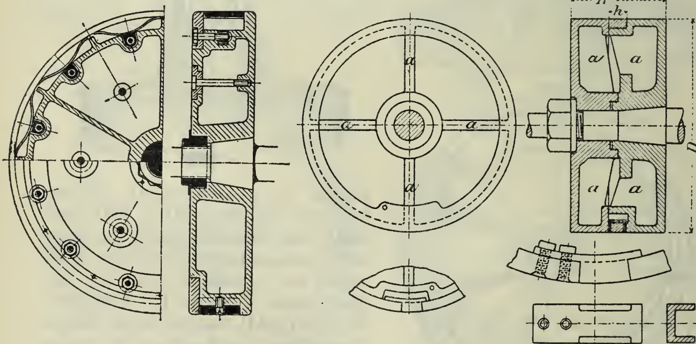
Abb. 242. Dampfkolben von G. Kuhn.



Für Abb. 244 ist $H = 0{,}35\,D + 4$ cm, die Ringdicke $s = 0{,}03\,D + 0{,}5$ cm,
$h = 2{,}6$ cm für $D = 15$ bis 29,
$3{,}0$ cm für $D = 31$ bis 52,
$3{,}6$ cm für $D = 55$ bis 70 cm.

Die Stopfbüchsen und Grundringe liegender Maschinen werden zweckmäfsig durch unmittelbar von der Zylinderwand **getragene Kolben**

Abb. 243. Abb. 244. (Kiefselbach.)

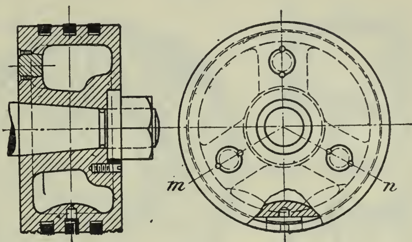


entlastet (vrgl. S. 817). Abb. 245 zeigt einen solchen Kolben der Dresdener Maschinenfabrik und Schiffswerft zu Dresden.

Dieser wird zunächst auf den Zylinderdurchmesser abgedreht, dann von unten nach oben um 0,5 mm aus dem Mittel verschoben und nochmals so abgedreht, dafs oben 1 mm Span genommen wird, während der Kolben von *m* bis *n* unberührt bleibt.

Dann liegt der Kolben von *m* bis *n* vollkommen im Zylinder auf. Zur Sicherung der Lage der Ringe ist der senkrechte Schenkel des winkelförmigen Schlosses der schrägen Teilfuge in dem Ringe etwas eingelassen und mit einem Zapfen versehen, der in eine Bohrung des Kolbenkörpers eingreift.

Abb. 245.

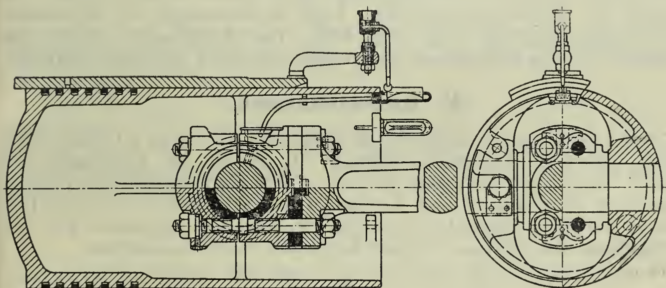


Schlittenkolben von L. Ziegler zu demselben Zweck.*)

Die Körper grofser Kolben sind auf Festigkeit nachzurechnen.**)

Befestigung der Kolben auf den Stangen erfolgt durch Kegel mit gesicherter Schraube oder Keil. Der Ansatzkegel der Stange wird in die Nabe eingeschliffen. Kegelwinkel $> 8^0$. Bessere Kolbenbefestigung mit zylindrischem, eingeschliffenem Stück und Kegel mit starker Neigung (30 bis 45^0). — Zuweilen werden Kolben, gestaltet wie Abb. 234, S. 813, mit der

Abb. 246.



Stange aus einem Stücke geschmiedet; dabei die Kolbenscheibe auch wohl in der Vorder- statt in der Mittellage.

Einen Kolben für einen liegenden Viertakt-Gasmotor (Deutz) nach Bach, 10. Aufl. 1908 zeigt Abb. 246. Der Kolben ist gleichzeitig Kreuzkopf und mufs schon aus diesem Grunde (aber auch wegen der gröfseren Zahl von Kolbenringen) länger werden. Der Kolben wird, weil er am Boden in unmittelbarer Berührung mit den heifsen Verbrennungsgasen steht, sich hier mehr ausdehnen als vorn und deshalb je nach dem Baustoff auf seinem hinteren Teil um 0,2 vH bis 0,5 vH schräg gedreht. Als Tragfläche ist demnach nur der

*) S. Haeder, Dampfmaschinen, 1896 S. 93.

**) S. O. Reymann, Festigkeit und Reibung der Dampfkolben, Z. d. V. d. I. 1893 S. 1084 u. 1896 S. 85.

zylindrische Teil, und zwar mit nicht mehr als 1 bis höchstens 1,5 kg/qcm Pressung zu rechnen. Der Zapfen, an dem die Schubstange anfafst, ist mit zylindrischen Enden in den warmen Kolbenkörper eingesetzt. Der Zapfen sitzt etwa auf der Mitte des vorderen, zylindrischen (tragenden) Kolbenteiles.

Abb. 247.

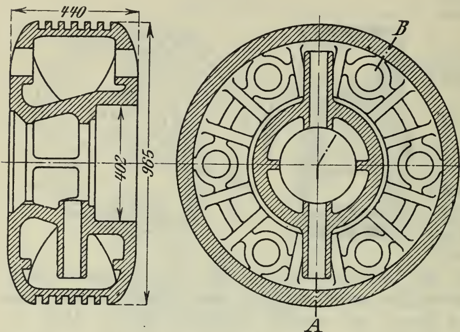


Abb. 247 zeigt einen wassergekühlten Kolben von 965 mm Durchmesser für eine Grofsgasmaschine*) der Vereinigten Maschinenfabrik Augsburg und Maschinenbaugesellschaft Nürnberg, A.-G. Der Kolben ist Stahlgufs und wiegt, wassergefüllt, 2100 kg. Auf dieses Gewicht ist die zum Zweck der Kühlwasserzuführung, hohle Kolbenstange zu berechnen. Die Wasserzuführung zeigt Abb. 250. Das Kühlwasser tritt in den unteren Teil des Kolbens ein und verläfst ihn durch die obere Oeffnung.

B. Kolbenstangen.

Die Kolbenstangen werden in der Regel auf Knickung beansprucht. Nach Fall 2, S. 414 wird, wenn P, J, E, $\mathfrak{S}$ die Bedeutung auf S. 838 haben und aufserdem (in cm) d den Durchmesser der vollen Stange, d_1 den inneren und d_2 den äufseren Durchmesser der hohlen Stange bedeutet, ferner l (in cm) die Stangenlänge, gemessen von der Mittelebene des Kolbens bis zur Achse des Kreuzkopfzapfens:

$$P \sim \frac{E}{2\,\mathfrak{S}}\,\frac{d^4}{l^2} \text{ oder: } P \sim \frac{E}{2\,\mathfrak{S}}\,\frac{d_2{}^4 - d_1{}^4}{l^2}.$$

Für **stehende Maschinen** setze man den Sicherheitsgrad $\mathfrak{S}$:

$\mathfrak{S} = 8$ bis 11, wenn die Belastung zwischen P und null schwankt,
$\mathfrak{S} = 15$ bis 22, wenn die Belastung zwischen $+P$ und $-P$ schwankt.

Ist der Kraftwechsel von Stöfsen begleitet, so sind für $\mathfrak{S}$ noch höhere Werte zu wählen.

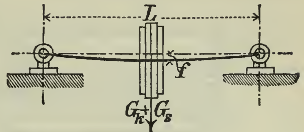
Für **liegende Maschinen** tritt eine Biegungsbeanspruchung durch das Stangen- und Kolbeneigengewicht hinzu. Für kleine und mittlere Maschinen mit leichten Kolben ist durch die vorstehenden Formeln mit $\mathfrak{S} = 11$ bis 22 dieser Einflufs genügend berücksichtigt.

---

*) Vrgl. Bonte, Fortschritte und Erfahrungen im Bau von Grofsgasmaschinen, Z. d. V. d. I. 1906 S. 1249 u. f. und Dr. H. Hoffmann, Kraftgewinnung und Kraftverwertung in Berg- und Hüttenwerken, Z. d. V. d. I. 1906 S. 1393 u. f. (Kolben S. 1527).

Bei grofsen Maschinen und Maschinen mit schweren Kolben ist die beiderseits durchgehende Kolbenstange (Abb. 248) als Träger auf **Biegung** zu berechnen. Hierbei darf die **Durchbiegung** die für zulässig erachtete Gröfse (1 bis 2 mm) nicht überschreiten. (Der Durchmesser des Kolbenkörpers ist dann mindestens um das 1,5- bis 2-fache der zugelassenen Durchbiegung kleiner zu wählen als der Durchmesser der Zylinderbohrung.)

Abb. 248.



Bezeichnet (Abb. 248)

L die Länge der Stange zwischen der Achse des Kreuzkopfes und der des Tragschuhes (Schlitten) in cm,

G_k das in der Mitte der Stange wirkende Kolbengewicht in kg,

G_s das Stangengewicht in kg,

f die Durchbiegung in der Mitte der Stange in cm,

J das Trägheitsmoment des Stangenquerschnittes in cm^4 (s. S. 434 u. f.),

so ist die **Durchbiegung**

$$f = \frac{L^3}{48} \frac{G_k + {}^5/_8\, G_s}{EJ}.$$

Dieser Wert f wird durch den Einflufs des Knickdruckes P u. Umst. nicht unerheblich vergröfsert (vrgl. **11.**, S. 482). Kolben aus geschmiedetem Stahl oder aus zähem Stahlgufs und hohle Kolbenstangen tragen durch ihr geringes Eigengewicht und das reichliche J zur Verminderung von f bei.

Soll die Durchbiegung verhindert werden, so mufs bei entsprechender Zylinderschmierung das Gewicht $G_k + {}^5/_8 G_s$ von dem genau (d. h. ohne Klemmung) in den Zylinder passenden Kolbenkörper aufgenommen werden. (**Getragene Kolben**, s. Abb. 245.) Alsdann sei der Flächendruck

$$k = \frac{G_k + {}^5/_8\, G_s}{\text{Tragfläche im Zylinder}} < 3 \text{ kg/qcm},$$

also nicht gröfser als zwischen Kreuzkopf und Gleitbahn, besser noch geringer (bis herunter auf 0,5 kg/qcm).

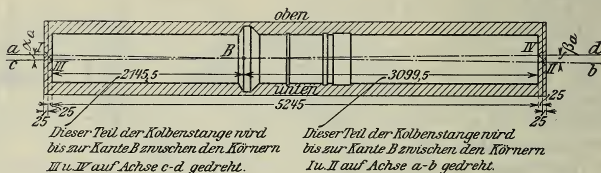
Bei den getragenen Kolben erzeugt die an Kolben und Stange exzentrisch angreifende Reibung erhebliche Beanspruchungen und Formänderungen der Stange und Klemmungen des Kolbens, weshalb reichlicher Stangenquerschnitt zu empfehlen ist.

Nach Kollmann erhält man eine im Betriebe gerade Kolbenstange, wenn man die vorher um die zu erwartende Durchbiegung f nach oben gekrümmte rohe Kolbenstange bei richtiger Auflagerung mit wagerechtem L und bei Belastung mit G_k am Kolbensitz auf der Drehbank mittels umlaufenden Stichelgehäuses abdreht.

Die Vereinigte Maschinenfabrik Augsburg und Maschinenbaugesellschaft Nürnberg A.-G. bearbeitet die Kolbenstangen (aus bestem Tiegelstahl) für die wassergekühlten Kolben (Abb. 247) ihrer Grofsgasmaschinen, wie aus Abb. 249 zu ersehen ist. Bei Belastung durch den wassergefüllten Kolben wird die Kolbenstange angenähert bis zur Geraden zwischen ihren beiden Stützpunkten durchgebogen.

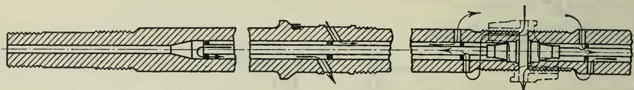
Die Zylinderlauffläche wird angenähert vollständig entlastet, und die Stopfbüchsen werden geschont.

Abb. 249.



Die Wasserführung zur Kühlung der Kolben durch die hohle Kolbenstange, in die ein Rohr eingesetzt ist, zeigt Abb. 250 nach der Ausführung der eben genannten Fabrik. Das Kühlwasser wird vom

Abb. 250.



Kreuzkopf aus oder von dem die Kolbenstange zwischen den in Tandemanordnung liegenden Zylindern tragenden Gleitschuh aus zugeführt.*)

C. Stopfbüchsen.

Stopfbüchsenreibung bei selbsttätiger Stulpdichtung wie Stulpreibung (s. unter Tauchkolben S. 811)

$$R = R_0 + \pi d b p \mu,$$

wo d der Stangendurchmesser ist; die übrigen Gröfsen s. S. 811.

Bei Packungen mit elastischen Stoffen gilt im allgemeinen gleichfalls vorstehende Formel, jedoch geht R auch bei dem Leergange ($p = 0$) nicht unter einen Wert R_a hinab, der in der Formel $R = R_0 + \pi d b p \mu$ dem Werte p_1 entspricht. R_a ist um so leichter und andauernder klein zu halten, je höher die Packung ist und je elastischer das Dichtungsmittel bleibt. Bei schlechter Packung oder bei unnötig scharf angezogener Stopfbüchse ist der Wert R_a gröfser als der Wert $R_0 + \pi d b p \mu$ bei dem gröfsten vorkommenden Betriebsdrucke p_{max} (oder es ist $p_1 > p_{max}$). Die Reibung ist alsdann unabhängig von dem Betriebsdrucke p.

Vorzugsweise wird Hanf, neuerdings auch Baumwollenschnur in Talg getränkt (bei kalten Flüssigkeiten) oder mit Talk behandelt (bei warmen dsgl.), ferner Leder, Asbest, Holz- und Metallringe als Dichtungsstoff benutzt. In neuester Zeit werden packungslose Stopfbüchsen benutzt, die sich gut bewährt haben.

---

*) Vrgl. Boute, Z. d. V. d. I. 1906 S. 1250.

Mit Bezug auf Abb. 251 (Hanf- oder Baumwollpackung), wenn alle Abmessungen in **cm**, kann etwa gewählt werden

$$s_1 = 0{,}65\sqrt{d} \text{ bis } 0{,}8\sqrt{d};\quad d_1 = d + 2\,s_1;\quad h \sim d_1;\quad h_{max} = 6\,s_1 \text{ bis } 8\,s_1.$$

Gegenüber Wasser darf h etwas kleiner, gegenüber Luft und Dampf etwas gröfser gewählt werden. Je höher die Packung, um so dauerhafter ist sie im Betrieb, und um so geringer ist die Reibungsarbeit. Die Packung dichtet nur gut, solange sie noch elastisch ist.

Bezeichnet i die **Anzahl der Stopfbüchsenschrauben,** δ ihren Durchmesser in cm, p den Flüssigkeitsüberdruck in kg/qcm, so folgt i aus (vrgl. S. 662 u. f.):

$$\tfrac{1}{4}\pi\,(d_1^2 - d^2)\,.\,3\,p = 120\,\delta^2\,i \text{ bis } 135\,\delta^2\,i.$$

Hierin ist p mindestens $= 3$ zu setzen; dabei soll für gewöhnlich $\delta \geqq 1{,}3$ cm sein.

Abb. 251.

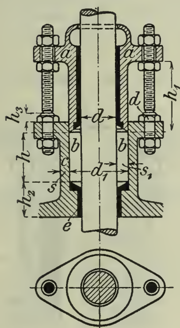


Abb. 252.

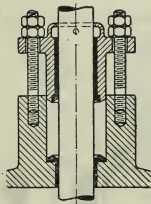
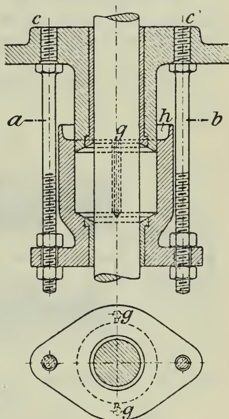


Abb. 253.



Für die Stopfbüchsen von Druckwassermaschinen setze man statt $3\,p$ den Wert $1{,}25\,p$ und statt des Wertes 120 bis 135 den Wert 216 bis 270. Die Brille wird am besten mit einer einzigen Mutter (Ueberwurfmutter) oder Schraube angezogen.

Grundbüchsenlänge: $h_2 \sim d$ bei liegenden und $h_{2max} = 3\,s_1$ bis $4\,s_1$ bei stehenden Kolbenstangen. Bei überhitztem Dampf oder bei Verbrennungsmotoren wird h_2 möglichst lang gewählt, um die Packung vor zu grofser Erwärmung zu schützen (vrgl. Abb. 258). Wandstärke 4 bis 12 mm. Aeufserer Durchmesser der **Brille** $= d_1 - 0{,}5$ bis 2 mm.

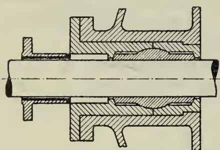
Abb. 251 und 252 stehende, Abb. 253 hängende Stopfbüchse (h Schmierrinne, g Schmierloch) mit Hanfpackung.

In Abb. 251 *a* Brille, *b* Packung, *c* Büchse, *e* Grundbüchse.

Stopfbüchsen können nur dann zum Tragen der Kolbenstange herangezogen werden, wenn die im Zylinderdeckel gelagerte Grundbüchse so lang gemacht wird, dafs die Pressung zwischen Stange

und Büchse klein genug bleibt und wenn zugleich diese Grundbüchse sich so einstellen kann, dafs sie der wechselnden Durchbiegung der Kolbenstange folgen kann (s. Abb. 254). Dabei ist die Grundbüchse in drei gleichachsigen Kugelflächen (in der Mitte und an beiden Enden) beweglich gelagert, gemäfs einem Patent der Märkischen Maschinenbauanstalt, vorm. Kamp & Co. in Wetter a. d. Ruhr.

Abb. 254.



Die hauptsächlich für Dampfmaschinen mit hohem Druck oder mit überhitztem Dampfe benutzten Stopfbüchsen mit **Metallliderung** (s. Abb. 255 bis 258) erfordern ununterbrochene, sorgfältige Schmierung; sie sind da nicht angebracht, wo infolge veränderlichen Stangenhubes stellenweise stärkere Abnutzung der Stange zu befürchten ist. Die Metalldichtung mufs gegen radiale Abnutzung besonders gesichert sein.

Die Stopfbüchse in Abb. 255 wird für die Kolben- und Schieberstangen der Lokomotiven der preufs. Staatsbahnen vielfach angewendet (für die vordere Stopfbüchse der Schieberstange stets Talkschnur-

Abb. 255. (Preufs. Staatsbahnen, Lokomotiven.)

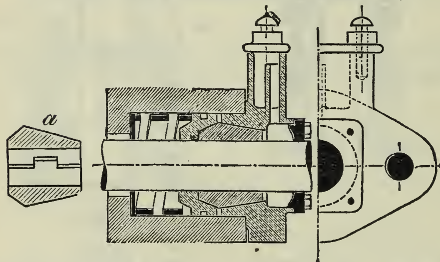


Abb. 256. (Howaldt.)

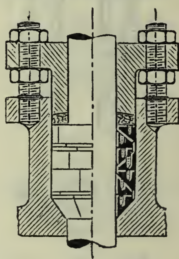
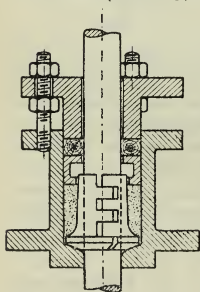


Abb. 257. (Schelling.)

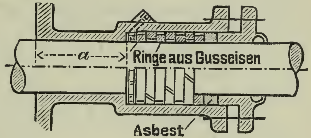


oder Asbestzopf-Liderung; Metalldichtung zu schwierig zentrisch an zuordnen), zweiteiliger Dichtungskegel aus Weifsmetall mit 15 vH Antimon, 20 vH Zinn, 65 vH Blei; Dichtfläche *a* geschabt; Oelraum zwischen Deckel und Dichtungskegl mit Saugfilz o. drgl. gefüllt. — Howaldtsche Stopfbüchse, Abb. 256, häufig bei Schiffsmaschinen mit hohem Dampfdruck; zum Einsetzen und Herausnehmen der einzelnen Ringhälften sind in diesen Löcher mit Gewinde vorgesehen; oben Ring aus elastischer Schnur; Nachteil: viele Stücke. Aehnlich ist die Gmindersche Metallstopfbüchse, wobei die zylindrischen Innen und Aufsenflächen der Ringe mit Ringnuten versehen sind. — Stopfbüchse von Schelling, Abb. 257, hat dreiteilige Büchse aus Weichkupfer, um diese noch

Hanfpackung zur Erzielung seitlicher Beweglichkeit; das Ganze durch zweiteiligen Metallring zusammengedrückt; bei der Deutschen Kriegsmarine vielfach verwendet.

Für Dampfmaschinen mit überhitztem Dampf (12 at Druck und 320° Ueberhitzungstemperatur) ist Anordnung in Abb. 258 zweckmäfsig. Alle Teile aus Gufseisen, ausgenommen die Asbestschicht unter der Brille. Die sechs Dichtungsringe abwechselnd mit 1 mm kleinerem und gröfserem Durchmesser als der Stangendurchmesser; dann schräg aufgeschnitten. *a* möglichst lang, damit die Packung nicht zu heifs wird.

Abb. 258.
Metalliderung für überhitzten Dampf.



G. Huhn benutzt zur Dichtung etwa 5 Hohlringe aus Weichmetall, die mit einem gegen hohe Temperaturen widerstandsfähigen Schmierstoff gefüllt sind; kleine Löcher an der Innenseite lassen diesen beim Anziehen der Brille an die Stange treten.

Die weitere Ausbildung der Stopfbüchsen mit Metalliderung,*) derart, dafs die Abdichtung durch seitliche Bewegung der Stange gestattende Metallteile (Ringe) erstrebt wird, ohne dafs die Büchse zum Tragen der Kolbenstange herangezogen wird, und ohne dafs die Dichtung durch achsiale Schrauben (s. Abb. 256) fest angeprefst wird, hat zu folgenden neueren Bauarten geführt:

1. Packung von Schwabe (neuerdings bis zu 290 mm Stangendurchmesser gebaut) von dem Ingenieur-Bureau für Maschinenbau von Dr. R. Proell in Dresden in verschiedenen Ausführungsformen für nassen Dampf, für überhitzen Dampf und für Verbrennungsmotoren ausgebildet. — Der Hauptteil der Packung ist ein dreiteiliger, gufseiserner Dichtungsring, der von einer schlauchartigen Schraubenfeder umschlungen ist. Die Fuge zwischen den Ringteilen ist schräg geschnitten und kaum von Papierstärke, so dafs von Ring zu Ring eine wirksame Drosselung des durchtretenden Dampfes erfolgt. Der

Abb. 259.

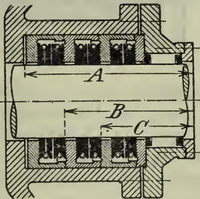
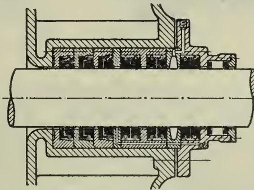


Abb. 260.



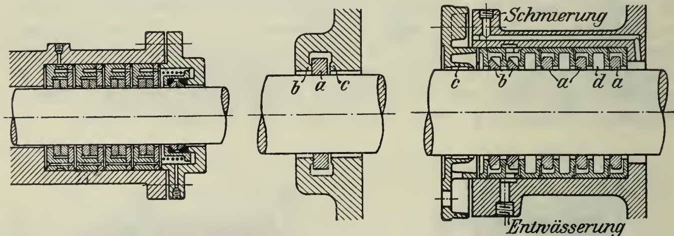
Dichtungsring ist bei den heutigen Ausführungen meistens paarweise in Kammern gelagert (Abb. 259). Je nach der Höhe des Dampf-

*) Vrgl. Strömungen in engen Spalten (Labyrinthdichtungen) von Dr. Ing. E. Becker, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1133.

druckes werden bis zu zehn Ringen verwendet. In Abb. 259 bedeutet A die Länge der Büchse für Hochdruck, B für Mitteldruck, C für Niederdruck. Der dem Dampf zunächst liegende Dichtungsring erhält Entlastungskanäle zur Vermeidung von Geräusch in der Packung. Zur Abdichtung des tiefsten Vakuums an Niederdruckzylindern genügt bei Stangen von 100 mm Durchmesser ein Ringpaar. — Für Gasmaschinen ist die Bauart nach Abb. 260 bestimmt. Die Büchse hat Druckschmierung, die zwischen der dritten und vierten Kammer, vom Zylinderraum ab gerechnet, mündet. Vor dem letzten Ringpaar liegt eine Expansionskammer zum Auffangen und Ableiten der z. B. bei Vorzündungen etwa bis hierher durchtretenden Gase. Die Stopfbüchse kann, wie z. B. auch die nach Abb. 264, wassergekühlt in den hohlen Deckel des Gasmaschinenzylinders eingesetzt werden.

2. Stopfbüchse nach Patent Paul H. Müller (Abb. 261), ausgeführt von der Firma A. L. G. Dehne in Halle a. d. S. — Die gröfseren, in eine Ausbohrung des Zylinderdeckels eingeschobenen und am Rande gegeneinander mit Kupferasbest abgedichteten Kammerringe umschliefsen je ein gufseisernes Ringpaar. Von den beiden auf die Stange aufgeschliffenen Ringen ist der dem Zylinder zugekehrte dreiteilig und wird durch zwei federnde Drahtringe zusammengehalten und leicht gegen die Stange gedrückt. Der zweite ungeteilte Ring gibt den Fugenschlufs für den dreiteiligen Ring, gegen den er achsial angeprefst wird. Die abdichtende Ringpaaren (1,2 bis 5 Paare) können sich innerhalb der Ringkammern radial frei bewegen. Eine Vorstopfbüchse aus Weifsmetallpackung dient in Sonderfällen zum Abstopfen des Kondenswassers.

Abb. 261. Abb. 262. Abb. 263.



3. Lentz-Metallabdichtung.*) — Die Grundlage dieser Stoffbüchse ist in Abb. 262 dargestellt. Auf der Stange sitzt der Dichtungsring a, vom Dampfdruck ventilartig abdichtend gegen die Querwand b gedrückt. Beim Uebertritt in die Ringkammer um a wird der Dampf in dem engen Spalt bei c stark gedrosselt. Wird während der Expansionsperiode die Spannung im Zylinder etwa kleiner als in der Kammer der Stopfbüchse, so würde sich der Ring nach Druckausgleich nach rechts bei c anlegen. In Abb. 263 ist eine Lentz-Stopfbüchse

*) Der Maschinenbauanstalt „Lentz" Metalldichtung, G. m. b. H., Berlin-Weifsensee.

mit fünf hintereinander geschalteten Dichtungsringen dargestellt. Dabei wird von Kammer zu Kammer der etwa hindurchtretende Dampf stark gedrosselt; zugleich werden die Ringe abdichtend nach links angeprefst. Während der Expansionsperiode im Zylinder können die Ringe, wenn Druckausgleich erfolgt ist, stufenweise durch Ueberdruck von links nach rechts verschoben werden. Der Spielraum der Ringe, die 15 bis 20 mm stark sind, ist ganz gering. In Abb. 263 wird die Büchse durch einen Deckel *c* festgehalten. Die Dichtungsringe *a* sitzen in Kammern *c* von **F**- bezw. **U**-Querschnitt. Die Kammerringe *c* sind dampfdicht aufeinander geschliffen und gegen den Körper der Stopfbüchse mit Kupferdraht abgedichtet. Zwischen den ersten vier Ringen, vom Zylinder aus gerechnet, sitzt je eine Expansionskammer *d*. Die vorderen Ringe *b* dienen als Abstopfringe für das Niederschlagwasser, das unten abgelassen wird. Oben wird durch eine Druckpumpe Oel zugeführt. Sämtliche Teile der Büchse, die gleich gut bei Sattdampf wie bei Heifsdampf bei stehenden wie bei liegenden Maschinen arbeitet, sind aus Gufseisen hergestellt.

Eine Stopfbüchse für Grofsgasmaschinen*) der Vereinigten Maschinenfabrik Augsburg und Maschinenbauanstalt Nürnberg A.-G. zeigt Abb. 264. Die mit Druckschmierung versehene

Abb. 264.

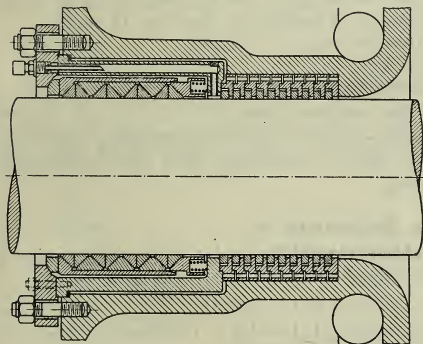
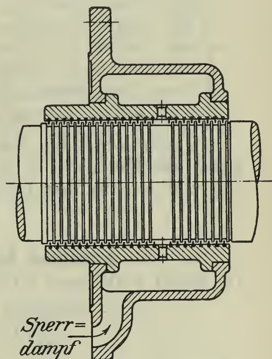


Abb. 265.



Büchse ist in den hohlen, wassergekühlten Zylinderdeckel so eingesetzt, dafs sie mit gekühlt wird. Sie besteht aus zwei Teilen: der nach dem Zylinderraum liegende hat Kolbenringdichtung, etwa wie in Abb. 258, der nach aufsen liegende Teil hat Metallpackung, ähnlich der Howaldtpackung (Abb. 256). Zwischen die beiden Teile ist eine Feder eingeschaltet, um die Längsausdehnung aufzunehmen. Abb. 265 ist eine Stopfbüchse der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft für umlaufende Wellen (Dampfturbinen). Sie läfst in der dargestellten

*) Vrgl. Bonte, Fortschritte u. Erfahrungen im Bau von Grofsgasmaschinen. Z. d. V. d. I. 1906 S. 1252. — Aehnliche Büchse: The Engineer, 24. Jan. 1908, S. 88.

Ausführung Längsverschiebungen zu; dagegen mufs die Welle gut zentriert sein. — Die Stopfbüchse, die mit Sperrdampf arbeitet, wird auch öfter so ausgeführt, dafs die Kämme in der Längsrichtung aneinanderliegen, während sie radial Spiel haben.

VI. KURBELTRIEB.

A. Bewegungsverhältnisse.

Es bezeichnet
r den Kurbelhalbmesser in m,
$s = 2r$ den Kolbenhub in m,
l die Schubstangenlänge in m,
$\lambda = r : l$ das Längenverhältnis, bei Dampfmaschinen meist $\lambda = 1/5$,*)
x den Kolbenweg, von der Totlage aus gemessen, in m,
α den zugehörigen Kurbelwinkel,
β den zugehörigen Ausschlagwinkel der Schubstange,
v die unveränderliche Geschwindigkeit des Kurbelzapfens in m/sk,
c die augenblickliche Kolben- (Kreuzkopf-) Geschw. in m/sk,
n die Anzahl der Kurbelumdrehungen i. d. Min.,
P die Kolbendruckkraft in kg,
T den Tangential-Kurbeldruck in kg.

Es ist $r \sin\alpha = l \sin\beta$ oder $\sin\beta = \lambda \sin\alpha$.

In den folgenden Formeln gilt $+$ für den Vorwärtsgang oder Hingang des Kolbens, d. h. für dessen Bewegung nach der Kurbelwelle hin, und $-$ für den Rückgang.

a. Kolbenweg x.

Bei dem **normalen Schubkurbelgetriebe** findet sich rechnerisch für einen beliebigen Kurbelwinkel α:

$$x = r(1 - \cos\alpha) \pm l(1 - \cos\beta)$$
$$= r(1 - \cos\alpha) \pm l\left[1 - \sqrt{1 - (\lambda \sin\alpha)^2}\right].$$

Angenähert ist $x = r(1 - \cos\alpha) \pm \frac{1}{2}\frac{r^2}{l}\sin^2\alpha$

$$= r\left(1 - \cos\alpha \pm \frac{1}{2}\lambda \sin^2\alpha\right).$$

Die Strecke $\overline{a\,a_1}$ (s. Abb. 266), das sogen. Fehlerglied, ergibt sich demnach angenähert zu $\overline{a\,a_1} = \frac{1}{2}\frac{(r\sin\alpha)^2}{l} = \frac{\overline{a\,K^2}}{2l}$.**)

*) Bei Lokomotiven ist λ gewöhnlich kleiner; vrgl. Abteil. II, Abschn. Eisenbahnwesen.

**) Ueber die Verwendung dieses Ausdruckes vrgl. Fränzel, Neuere Schiffsmaschinensteuerungen, Z. d. V. d. I. 1889 S. 985.

Für $\alpha = 90^0$ (Viertel-Kurbelumdrehung): $x = r + \frac{1}{2}\frac{r^2}{l}$.

Für $\alpha = 180^0$ (halbe Kurbelumdrehung): $x = 2r$.

Für $l = \infty$ ($\lambda = 0$) wird $x = r\,(1 - \cos\alpha)$; **Sinusversus-Bewegung** (Kurbelschleife; s. S. 856).

Der Kolbenweg (Abb. 266) wird zeichnerisch bestimmt,

wenn $l = \infty$: durch senkrechte Projektion Ka, also $x = K_0\,a$;

wenn $l < \infty$: durch Bogenprojektion Ka_1 mit dem Halbmesser l, also $x = K_0 a_1$.

Man umgeht die Unbequemlichkeit und praktische Ungenauigkeit, die mit dem wiederholten Beschreiben der Kreisbögen vom Halbmesser l verknüpft ist, indem man (nach Müller) zwei Kreisbögen

Abb. 266.

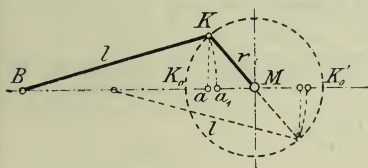
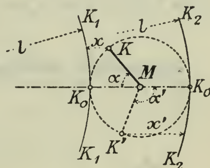


Abb. 267.



K_1 und K_2 vom Halbmesser l beschreibt, die den Kurbelkreis in den Totpunkten K_0, K_0' berühren, und indem man von den Punkten K, K' aus parallel zur Schubrichtung die Strecken $KK_1 = x$ abgreift (Abb. 267); oder nach Brix,*) indem man als Scheitel der Kurbelwinkel α nicht

Abb. 268.

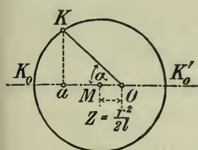
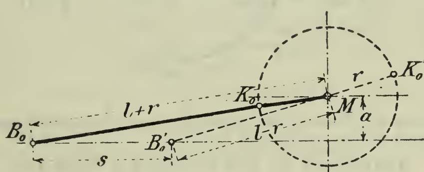


Abb. 269.



den Mittelpunkt M des Kurbelkreises, sondern einem um die Strecke $Z = \frac{r^2}{2l}$ von M aus im Sinne des Hinganges verschobenen Pol O wählt und nun winkelrecht projiziert (Abb. 268): $x = K_0 a$.

Geschränkte Schubkurbel: Der Kurbelmittelpunkt M liegt nicht in der Achse der Kurbelstange, sondern um a davon entfernt (Abb. 269).

*) S. F. A. Brix, Das bizentrische polare Exzenterschieberdiagramm, Z. d. V. d. I 1897 S. 431 u. f.

Dann liegen die Totpunkte K_0, K_0', entsprechend den Strecklagen der Schubstange und Kurbel, unsymmetrisch; der Hub $s > 2r$ ergibt sich aus

$$s = \sqrt{(l+r)^2 - a^2} - \sqrt{(l-r)^2 - a^2}.$$

Es ist z. B. für

$a = 0{,}5\,r$, $\lambda = 1/5$: $s = 2{,}01\,r$;

ferner für

$a = r$, $\lambda = 1/5$: $s = 2{,}04\,r$.

b. Kolbengeschwindigkeit *c*.

$$c = v\,\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\beta} = v\,\frac{\overline{MD}}{r} = v\,\frac{\xi}{r} \quad \text{(Abb. 270).}$$

c_{max} findet statt, wenn die Beschleunigung (s. unter **c.**) $p = 0$; die Bedingung dafür ist nach Schadwill

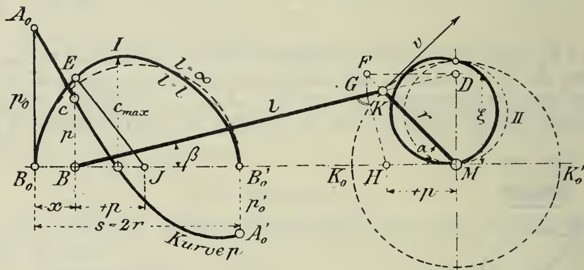
$$\left(\frac{z}{l}\right)^3 - 2\,(1-\lambda^2)\,\frac{z}{l} + (1-\lambda^2)^2 = 0,$$

worin z die Projektion von BM auf die Schubstange bezeichnet.

$$\text{(Bedingung } 1 - \lambda < \frac{z}{l} < 1 + \lambda\text{).}$$

Zeichnerische Darstellung von c (Abb. 270). Wählt man den Mafsstab für c so, dafs $v = r$, so wird $c = \xi$. Dann ergibt sich (für den Hingang) für c das Dia-

Abb. 270.



gramm I, wobei x die Abszissen, und das Polardiagramm II, wobei α die Polarwinkel und (x und α s. S. 826).

Angenähert ist $c = v \sin\alpha\,(1 \pm \lambda\cos\alpha)$.

Für $\alpha = 0$ und $\alpha = 180^0$ wird $\beta = 0$, $c = 0$;

für $\alpha + \beta = 90^0$ wird $c_{max} = \dfrac{v}{\cos\beta}$ und $\operatorname{tg}\beta = \lambda$;

für $\alpha = 90^0$ wird $c = v$.

Für $l = \infty$ wird $c = v\sin\alpha$ und $c_{max} = v$ für $\alpha = 90^0$.

Das Diagramm und das Polardiagramm von c für $l = \infty$ und mit $v = r$ werden Kreise (s. Abb. 270, punktiert).

Mittlere Kolbengeschwindigkeit $c_m = \dfrac{2\,sn}{60} = \dfrac{2\,rn}{30}$,

Kurbelzapfengeschwindigkeit $v = \frac{2\pi r n}{60} = \frac{\pi r n}{30}$, daher

$$v = \frac{\pi}{2} c_m = 1{,}571\ c_m; \quad c_m = \frac{2}{\pi} v = 0{,}673\ v.$$

Für $\lambda = 1/5$ wird $c_{max} = 1{,}02\ v = 1{,}6\ c_m$.*)

c. Kolbenbeschleunigung p.

Es ist

$$p = \frac{dc}{dt} = \frac{v^2}{r}\left(\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} + \lambda\frac{\cos^2\alpha}{\cos^3\beta}\right).$$

1) Nach Bour und Pröll ist p (genau) gleich der Subnormale BJ der Geschwindigkeitskurve $B_0 E B_0'$ (Abb. 270); dabei ist der Mafsstab von p so gewählt, dafs der Halbmesser r die Gröfse $\frac{v_2}{r}$ bedeutet;

2) Nach Mohr**) (Abb. 270) verlängere BK über K hinaus bis zum Schnitte D mit MD, senkrecht zu BM, ziehe DF parallel MB bis zum Schnitte F mit der verlängerten MK, ziehe FG parallel DM und GH senkrecht BK, so ist $MH = BJ = p$. Die positiven p liegen lings, die negativen p (Verzögerungen) rechts von M.

Durch Auftragen der gefundenen Werte von p erhält man das (genaue) Beschleunigungsdiagramm $A_0 A_0'$ (Kurve p).

Kolben-Beschleunigung in den **Totlagen** K_0 und K_0' der Kurbel:

$$p_0 = \frac{v^2}{r} 1 + \lambda) \quad \text{und} \quad p_0' = \frac{v^2}{r}(1-\lambda).$$

Angenähert ist

$$p = \frac{v^2}{r}(\cos\alpha \pm \lambda\cos 2\alpha).$$

$$p_{max} = \frac{v^2}{r}(1 \pm \lambda).$$

Trägt an diesem Werte von p zu den Kolbenstellungen als Ordinaten auf, Abb. 271, so liegen deren Endpunkte auf einer Parabel $A_0 A_0'$, die am einfachsten durch einhüllende Tangenten mit Hülfe der Tangenten in A_0 und A_0' (s. S. 106, Abb. 18) ermittelt wird; die Strecken Z_1 und Z_2 in Abb. 271 betragen:

Strecke:	für $\lambda = \frac{1}{3}$	$\lambda = \frac{1}{3{,}5}$	$\lambda = \frac{1}{4}$	$\lambda = \frac{1}{4{,}5}$	$\lambda = \frac{1}{5}$	$\lambda = \frac{1}{6}$
$Z_1 = \frac{(1+\lambda)^2}{1+4\lambda} r$	$\frac{16}{21} r$	$\frac{27}{35} r$	$\frac{25}{32} r$	$\frac{121}{153} r$	$\frac{4}{5} r$	$\frac{49}{60} r$
$Z_2 = \frac{(1-\lambda)^2}{1-4\lambda} r$	$-\frac{4}{3} r$	$-\frac{25}{7} r$	∞	$\frac{49}{9} r$	$\frac{16}{5} r$	$\frac{25}{12} r$

*) Ueber die Beachtung der Trägheit der Schubstange bei hoher Geschwindigkeit vrgl. Autenrieth, Z. d. V. d. I. 1885 S. 716 u. f. und 1896 S. 904.

**) Vrgl. Civil-Ingenieur 1879 S. 612. Die dort gegebene Konstruktion gilt allgemein für die geschränkte Schubkurbel (s. S. 827). — Eine andere Konstruktion hat Rittershaus, ebendas. S. 461 gegeben. Vrgl. ferner Z. d. V. d. I. 1883 S. 283 u. f.; 1895 S. 716 u. f.; 1896 S. 983 u. f.

Für den Rückgang ist die Beschleunigungskurve um 180^0 (um $B_0 B_0'$ als Achse) zu drehen.

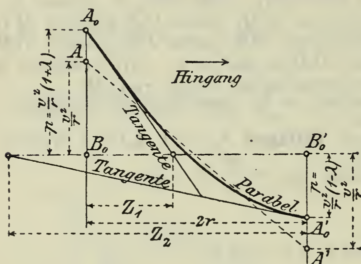
Für $l = \infty$ ($\lambda = 0$) wird in Abb. 270 die Kurve p eine Gerade, ebenso in Abb. 271 die Parabel zur Geraden AA' und $p_0 = p_0' = \frac{v^2}{r}$ die gröfste Beschleunigung bzw. gröfste Verzögerung.

d. Beschleunigungsdruck b.

Der Beschleunigungsdruck b, bezogen auf 1 qcm Kolbenfläche, der bei positivem p vom Dampfüberdrucke abzuziehen, bei negativem p dazu zu rechnen ist, ergibt sich aus

$$b = \frac{p}{g} q \text{ kg/qcm}, \left(= \frac{q\, v^2}{g\, r} \cdot \cos\alpha \pm \lambda \,.\, \cos 2\alpha \right) \text{ s. oben!}$$

Abb. 271.



worin q das im Kreuzkopfe vereinigt gedachte und auf 1 qcm der Kolbenfläche bezogene Gewicht (in kg) der hin- und hergehenden Maschinenteile und g die Beschleunigung durch die Schwere = 9,81 m/sk² bezeichnet.

Die Masse der zum Teil schwingenden, zum Teil umlaufenden Schubstange ist nur mit etwa $^2/_3$ ihres Betrages zu berücksichtigen.

Nach Radinger ist i. M. für liegende Dampfmaschinen

ohne Kondensation: $q = 0{,}28$ kg/qcm,
mit „ $q = 0{,}33$ „

(Vrgl. hierzu Abt. II, Dampfmaschinen, Wahl der Geschwindigkeit.)

b wird durch dasselbe Diagramm (Abb. 270, S. 828) wie p dargestellt, wenn man den Mafsstab so wählt, dafs

$$\frac{q}{g} \frac{v^2}{r} \text{ (kg)} = r \text{ (m)}.$$

In Abb. 271 bedeutet $A_0 A_0'$ die Linie für den Beschleunigungsdruck, wenn

$$B_0 A_0 = \frac{q}{g} \frac{v^2}{r} (1 + \lambda); \qquad B_0' A_0' = \frac{q}{g} \frac{v^2}{r} (1 - \lambda).$$

B. Kraft- und Arbeitsverhältnisse.

a. Kraftverhältnisse.

Normaldruck auf die Gleitbahn in kg: $N = P \operatorname{tg} \beta = S \sin \beta$;

für $\alpha + \beta = 90^0$: . . . . $N = P \frac{r}{l} = P \lambda$;

für $\alpha = 90^0$ $(\beta = \beta_{max})$:

$$N_{max} = P \operatorname{tg} \beta_{max} \sim P \sin \beta_{max} \sim P \frac{r}{l} \sim P\lambda.$$

Schubstangenkraft in kg: . . . . $S = \dfrac{P}{\cos\beta}$;

für $\alpha = 90^0$ $(\beta = \beta_{max})$: . . . $S_{max} = \dfrac{P}{\sqrt{1-\lambda^2}}$;

für $l = \infty$: . . . . $S = P.$

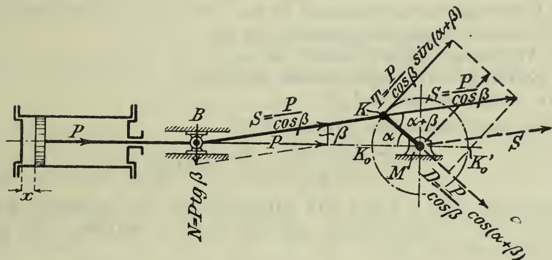
Tangential-Kurbeldruck in kg: . . $T = P \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$;

für $\alpha = 0$, $\alpha = 180^0$: . . . . . $T_0 = 0$;
für $\alpha = 90^0$ $(\beta = \beta_{max})$: . . . $T = P$;
für $\alpha + \beta = 90^0$: . . . . . . $T_{max} = S = P\sqrt{1+\lambda^2}$;
für $l = \infty$: . . . . $T = P \sin\alpha$.

(Diagramm vrgl. VIII. Regelnde Maschinenteile.)

Druck auf das Kurbellager. Zu dem Drucke D auf die Kurbel (Abb. 272) tritt die Schubkraft T; im Kurbellager ist daher der

Abb. 272.



Druck $\sqrt{D^2 + T^2} = S$ wirksam. Beim Hingange geht der Druck aus dem Lager hinaus, beim Rückgange in das Lager hinein.

b. Arbeitsverhältnisse.

Arbeit des Kolbendruckes: $Pc\,dt = Pv \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} dt$;

Arbeit des Tangential-Kurbeldruckes: $Tv\,dt = P \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} v\,dt$;

beide in der Zeit dt geleistete Arbeiten sind gleich grofs.

Ist P_m der mittlere Kolbendruck in kg und T_m der mittlere Tangential-Kurbeldruck in kg, so folgt aus

$$P_m 2r = T_m r \pi:$$

$$P_m = \frac{\pi}{2} T_m, \qquad T_m = \frac{2}{\pi} P_m \text{ oder } P_m c_m = T_m v.$$

c. Reibungsverhältnisse.

Angenommen P unveränderlich ($= P_m$ bezogen auf einen Kolbenhub). **Gesamtarbeit** (in mkg) während einer halben Umdrehung: $A = P\,2r$.

Ort der Reibung	Annähernde Reibungsarbeit mkg	Verhältnis der Reibungsarbeit zur Gesamtarbeit	Verhältnis der Reibungsarbeit zur Gesamtarbeit	unter Annahme von
Gleitbahn	$A_1 = \mu P \frac{r^2}{l} \frac{\pi}{2}$	$\frac{A_1}{A} = \frac{\mu\pi}{4} \frac{r}{l}$	$\frac{A_1}{A} = 0{,}009$	$\mu = 0{,}06$, $r : l = {}^1/_5$
Kreuzkopfzapfen	$A_2 = \mu P d_1 \beta_{max}$	$\frac{A_2}{A} = \frac{\mu \beta_{max}}{2} \frac{d_1}{r}$	$\frac{A_2}{A} = 0{,}001$	$\frac{d_1}{r} = 0{,}20$
Kurbelzapfen	$A_3 = \mu P \frac{\pi d}{2}$	$\frac{A_3}{A} = \frac{\mu\pi}{4} \frac{d}{r}$	$\frac{A_3}{A} = 0{,}012$	$\frac{d}{r} = 0{,}25$
Wellenzapfen	$A_4 = \mu P \frac{\pi D}{2}$	$\frac{A_4}{A} = \frac{\mu\pi}{4} \frac{D}{r}$	$\frac{A_4}{A} = 0{,}021$	$\frac{D}{r} = 0{,}45$

In vorstehender Zusammenstellung ist
d der Kurbelzapfendurchmesser in m,
d_1 der Kreuzkopfzapfendurchmesser in m,
D der Welllenzapfendurchmesser in m,
μ die Reibungszahl, angenommen $\mu = 0{,}06$,
$r : l = \lambda$, angenommen $= 1 : 5$.

Bei den angenommenen Werten wird

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{A} = 0{,}043,$$

mithin ergeben sich 4 bis 5 vH Arbeitsverlust im normalen Kurbeltriebe unter der Voraussetzung, dafs die Kraft P während des ganzen Hubes unveränderlich ist.

C. Kurbeln und Exzenter.

Berechnung des Kurbelzapfens vrgl. unter Zapfen, S. 740 u. f.

a. Kurbel. (Abb. 273 und 274.)

$d_1 = 2\,d$ für geschmiedete Kurbeln),
Anzug beiderseitig ${}^1/_{25}$ bis ${}^1/_{15}$, $l_1 = 1{,}5\,d$ bis $1{,}75\,d$, Keilhöhe i. M. $0{,}3\,l_1$ bis $0{,}4\,l_1$, Keilstärke $= 0{,}2\,d$ bis $0{,}25\,d$, Schraubendicke $= 0{,}5\,d$.
D_2 einige mm $< D_1$,
l je nach Genauigkeit der Ausführung:
$l \geq D_2$, wenn warm oder mittels Presse genau aufgezogen,
$l \geq 1{,}25\,D_2$, wenn aufgekeilt.

Bohrung bei D_2 bei warmem Aufziehen (für geschmiedete und für Stahlgufs-Kurbeln) um 2,5 bis 5 vT kleiner als D_2, bei Aufziehen mit

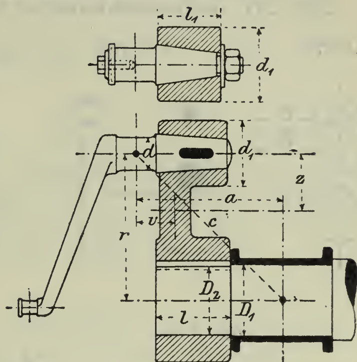
der Druckwasser-Presse wird das Wellenende im Verhältnis 1 : 1000 kegelförmig abgedreht.

Der Hebelarm a von Kurbelzapfenmitte bis annähernd Lagermitte sei möglichst klein.

Wandstärke der Nabe $= 0{,}4\,D_2 + 1$ cm.

Kurbelarm. Für den im Abstande z von der Kurbelzapfenachse gelegenen Armquerschnitt $b\,h$, wobei b die achsiale, h die tangentiale Abmessung des Armes bedeutet, rufen folgende Kräfte Beanspruchungen hervor (vrgl. Abb. 273 und 274):

Abb. 273 und 274.



von der Normalkraft D herrührend:
die Normalkraft D und das Biegungsmoment $M_2 = D v$;

von der Schubkraft T herrührend:
die Schubkraft T, das Biegungsmoment $M_1 = T z$ und
das Drehmoment $M_d = T v$.

Die Normalkraft D und die Schubkraft T können vernachlässigt werden. Die Momente M_1, M_2 und M_d sind nach Mafsgabe der Formeln auf S. 488 unter 3) zusammenzusetzen, und es sind die gröfsten Beanspruchungen des Querschnittes $b\,h$ in der dort angegebenen Weise zu ermitteln. Bei den gebräuchlichen Verhältnissen ist meistens die Beanspruchung in der Totstellung mafsgebend, umsomehr als die plötzliche Aenderung in der Richtung der Kräfte für die Totstellung die Wahl einer besonders niedrigen zulässigen Spannung erfordert. Hier ist das Biegungsmoment $M_b = P v$ und die Zug- bzw. Druckkraft $= P$, mithin mufs

$$\frac{M_b}{{}^1/_6\, b^2 h} + \frac{P}{b\,h} \overline{\gtrless} k_b \quad \text{oder} \quad P\left(v + \frac{b}{6}\right) \overline{\gtrless} k_b \frac{b^2 h}{6},$$

woraus sich h nach Annahme von b berechnen läfst.

Der **Wellenzapfen** mit dem Durchmesser D_1 wird für das durch den gröfsten Kolbendruck P hervorgerufene Biegungsmoment $M = P a$ und das durch den gröfsten Tangentialdruck T erzeugte Drehmoment $M_d = T r$ nach S. 488 unter 1) berechnet.

Für Ueberschlagsrechnungen kann hierbei das Drehmoment M_d vernachlässigt werden, wenn in dem Biegungsmomente M für den Hebelarm statt a der Abstand c von Mitte Kurbelzapfen bis Mitte Wellenzapfen gesetzt wird.

Beispiele von Kurbeln.

Abb. 275, geschmiedete Stirnkurbel,
Abb. 276, geschmiedete Stirnkurbel mit Gegengewicht,
Abb. 277, Gufskurbelscheibe mit Gegengewicht.

Abb. 275

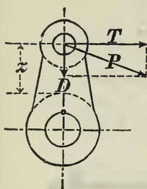


Abb. 276.

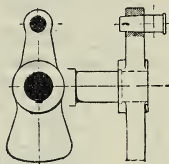


Abb. 277.

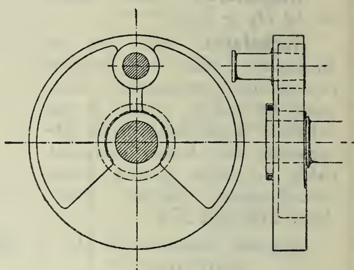


Abb. 278.

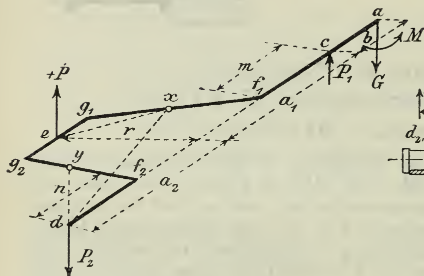
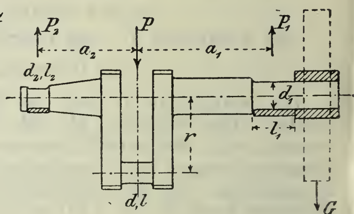


Abb. 279.



b. Kurbelkröpfung. (Abb. 279.)*)

Die wagerechte Kurbelwelle $a c f_1 g_1 e g_2 f_2 d$ (Abb. 278) werde beansprucht:

in e durch die lotrechte Kraft $\pm P$, deren Moment $M = Pr$ durch die in a sitzende Schwung-Riemenscheibe abgeleitet wird,

in a durch das lotrechte Gewicht G der Riemenscheibe.

Lager der Welle in c und d.

Die wagerechte Seitenkraft zu P (durch die Schubstange) sowie der Riemenzug in a werden vernachlässigt.

Lagerdruck in c: $P_1 = G \frac{b + a_1 + a_2}{a_1 + a_2} - P \frac{a_2}{a_1 + a_2}$ nach oben,

in d: $P_2 = G \frac{b}{a_1 + a_2} + P \frac{a_1}{a_1 + a_2}$ nach unten.

*) Zeichnerische Ermittlung der Beanspruchungen der einfachen und doppelten Kurbelkröpfung (Krummachse) für verschiedene Fälle s. F. Reuleaux, Der Konstrukteur, 4. Aufl., S. 423 u. f.; Braunschweig 1882/89, F. Vieweg & Sohn.

Beanspruchung der Querschnitte durch ein Biegungsmoment M_b und ein Drehmoment M_d, die nach S. 487 zusammenzusetzen sind.

Querschnitt c:

$$M_b = G\,b, \qquad M_d = P\,r.$$

Querschnitt f_1 der Welle:

$$M_b = G\,(m + b) - P_1 m;$$
$$M_d = P\,r.$$

Querschnitt f_2 der Welle:

$$M_b = P_2 n; \qquad M_d = 0.$$

Querschnitt x (beliebig): die Kräftepaare $P\,.\,e\,x$ und $P_2\,.\,d\,x$ sind in je zwei Seitenpaare in der Ebene des Querschnitts und senkrecht dazu zu zerlegen. Die Summe der ersteren ergibt M_d, die der letzteren M_b. (Berechnung des rechteckigen Querschnitts s. S. 488.)

Querschnitt y (beliebig): Mit dem Kräftepaar $P_2\,.\,d\,y$ ist zu verfahren wie vorher.

Querschnit e: $M_b = P_2\,a_2$, $\qquad M_d = P_2\,r$.

Die Untersuchung ist für beide Richtungen der gröfsten lotrechten Kraft P anzustellen; die gröfseren Momente sind mafsgebend.

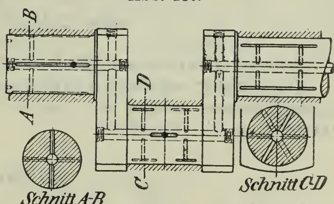
Länge des Zapfens e nach S. 741 für P mit $w = 37\,500$, des Zapfens c für P_1 mit $w = 15\,000$ zu bestimmen. Der Stirnzapfen d ist für P_2 unter den nämlichen Annahmen wie bei c zu berechnen. Dabei ist die Gröfse des Flächendruckes p nach S. 742 zu prüfen.

Für andere Belastungsfälle und Arten der Kraftableitung ist die Berechnung der Kurbelkröpfung in ähnlicher Weise durchzuführen, wie vorstehend angegeben.

Für Ableitung der Kraft gleichmäfsig nach beiden Seiten des Krummzapfens d, l, also für $a_1 = a_2 = a$ und $d_2 = d_1$ ergibt sich (in Abb. 279) bei

$\frac{r}{a} =$	0,4	0,6	0,8	1,0
$\frac{d_2}{d} =$	1,055	1,105	1,158	1,210

Abb. 280.



Eine **Kurbelwelle** mit Druckschmierung von innen (für eine Grofsgasmaschine der Vereinigten Maschinenfabrik Augsburg und Maschinenbaugesellschaft Nürnberg) zeigt Abb. 280.

c. Handkurbel.

Kurbelhalbmesser = 35 bis 40 cm. Kurbelwelle über dem Stande des Arbeiters 0,90 bis 1,20, besser 1,00 bis 1,05 m. Die gröfseren Zahlen (Abb. 281) gelten für zweimännige, die kleineren (eingeklammerten) für einmännige Kurbeln. Durchmesser des drehbaren Holzgriffes oder Gasrohres 40 bis 50 mm, Stift hierzu 26 (17) mm. Durchmesser der Handkurbelwelle 40 (30) mm; Nabenlänge 60 (45) mm. Kurbeldruck eines Arbeiters im Mittel 10 bis 15 kg, vorübergehend

bis 20 kg. Umfangsgeschwindigkeit 0,5 bis 1,0 m/sk. — Ueber Sicherheitskurbeln s. S. 808.

Abb. 281.

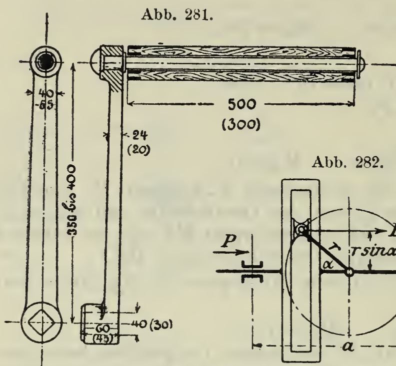


Abb. 282.

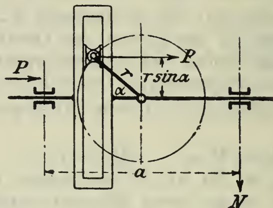
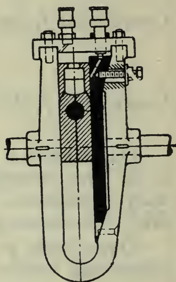


Abb. 283.



d. Kurbelschleife. (Abb. 282.)

Kolbenweg $x = r\,(1 - \cos\alpha)$,

Führungsdruck $N = \dfrac{Pr \sin\alpha}{a}$ (sehr grofs),

Arbeitsverlust bei einer Umdrehung

$$A_r = 2\,P\mu\,\frac{r^2}{a}\,\pi + 4\,P\mu r,$$

Arbeitsverlust $A_r = 0{,}20$ bis $0{,}30$ der Gesamtarbeit A (sehr grofs). Ausführung bei kleinen Maschinen, besonders unmittelbar wirkenden Dampfpumpen, wegen der kleinen Baulänge. Kurbelschleife mit Stellvorrichtung s. Abb. 283.

e. Exzenter.

Die Breite b (in cm), d. h. die Länge des Zapfens, an dessen Stelle das Exzenter getreten ist, mufs bei mittleren Verhältnissen der Beziehung

$$b \geqq \frac{Pn}{w}$$

genügen (vrgl. Gleichung IV, S. 742), wenn darin

P den in der Mittelebene des Exzenters wirkenden mittleren Druck in kg,

n die minutliche Umlaufzahl des Exzenters,

w eine Erfahrungszahl bedeutet, die um so gröfser ist, je kleiner die Reibungszahl und je bedeutender unter sonst gleichen Verhältnissen die ableitbare Wärmemenge ist. Im Mittel sei

$w = 10\,000$ für Flufseisen oder Stahl (für den Bügel) auf Gufseisen (für das Exzenter),

$w = 20\,000$ für Weifsmetall (Futter der Exzenterbügel) auf Gufseisen.

Für Lokomotiven, deren Exzenter starkem Luftzug ausgesetzt sind, kann w höher gewählt werden. — Ist weiterhin

d der Durchmesser des Exzenters in cm (s. Abb. 284),

D der Durchmesser der Welle in cm,

s die kleinste Nabenstärke des Exzenters in cm,

x die Stärke des äufseren Randes in cm, entsprechend der Schulterhöhe eines Zapfens vom Durchmesser D_0 (s. f. S. und S. 741),

ϱ die Exzentrizität in cm, so gilt die Beziehung:

$$d = D + 2\,s + 2\,x + 2\,\varrho.$$

Ist D_0 die Wellenstärke (in cm), die dem zu übertragenden Drehmomente $Md = Pr = 0{,}2\,kd\,D_0^3$ (vrgl. S. 471) entspricht, so kann für gufseiserne Exzenter gewählt werden:

$$s = 0{,}2\,(D_0 + {}^1\!/_2\,D) + 0{,}5 \text{ cm bis } 0{,}25\,(D_0 + {}^1\!/_2\,D) + 0{,}5 \text{ cm}.$$

Exzenter aus Flufseisen oder Stahl erhalten eine um 20 bis 30 vH geringere Nabenstärke s.

Arbeit des Exzenterdruckes P (in cmkg) für 1 Umdrehung: $A = P\,4\,\varrho$,

Arbeitsverlust durch Exzenterreibung „ „ $A_1 = P\mu_1\,\pi\,d$,

„ „ Wellenreibung „ „ $A_2 = P\mu_2\,\pi D$,

Wirkungsgrad $\eta = \dfrac{A}{A + A_1 + A_2} = \dfrac{1}{1 + \mu_1 \dfrac{\pi}{4}\dfrac{d}{\varrho} + \mu_2 \dfrac{\pi}{4}\dfrac{D}{\varrho}}$.

Beispiel. $\varrho = 60$ mm, $D = 200$ mm, $d = 400$ mm, $\mu_2 = \mu_1 = 0{,}06$ ergibt $\eta = 0{,}68$.

Nutenkeile für die Befestigung der Exzenter auf ihren Wellen sind nach der Tafel S. 660 zu wählen. Mit Rücksicht auf gerades Aufkeilen sind lange Naben zu empfehlen. Für Steuerungen neuerdings verstellbare Befestigung mittels gezahnter Feder oder besonderen, in die Welle eingelassenen Zahnsegmentes.

Abb. 284.

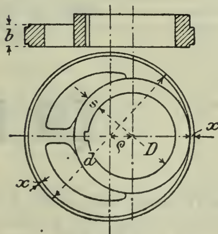
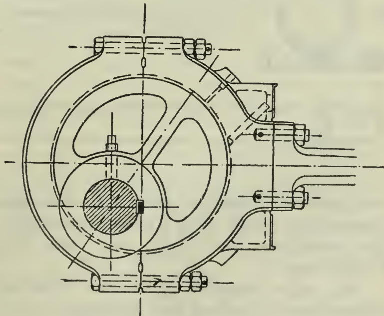


Abb. 285.



Beispiele von Exzentern s. Abb. 284 u. 285. Exzenterscheiben auf Kurbel-

wellen (bei Zweizylindermaschinen, oder wenn die Welle an der Stelle, wo das Exzenter sitzt, schwächer ist) macht man zweiteilig, um vorheriges Aufpressen der Kurbeln zu ermöglichen.

Exzenterstangen sind wie Schubstangen (s. u.) zu berechnen; man benutze die entsprechenden Gleichungen mit $\mathfrak{S} = 40$; gleichzeitig mufs die gröfste, durch Eigengewicht und Stangenkraft erzeugte Druckspannung bei Schmiedeisen < 300, bei Gufseisen oder Bronze < 150 kg/qcm sein; der Einflufs der Durchbiegung der Stange ist dabei erforderlichenfalls zu berücksichtigen.

D. Schubstangen.

a. Schaft der Schubstangen.

Es bezeichnet im folgenden

P die gröfste Stangenkraft in kg
L die Länge der Stange von Mitte bis Mitte Zapfen in cm,
J das kleinste äquatoriale Trägheitsmoment des Stangenquerschnittes in der Mitte in cm^4,
E den Elastizitätsmodul des Baustoffes der Stange in kg/qcm,
$\mathfrak{S}$ den Sicherheitsgrad gegen Knicken (vrgl. S. 414),
r den Kurbelhalbmesser in cm und n die Umlaufzahl i. d. Min.

1. Stangen für kleine und mittlere Geschwindigkeiten.

1. **Stange mit Kreisquerschnitt** (vom Durchmesser d_m in der Mitte).

$$P = \frac{\pi^2}{\mathfrak{S}} E \frac{J}{L^2} \sim 40\,000 \frac{d_m{}^4}{L^2} \quad \text{(vrgl. Fall 2, S. 414)},$$

wenn $\mathfrak{S} = 25$, $E = 2\,000\,000$ kg/qcm gesetzt wird.

Nach dem Kurbelzapfen hin nimmt der Stangendurchmesser bis $0{,}8\,d_m$, nach dem Kreuzkopfzapfen hin bis $0{,}7\,d_m$ oder $0{,}75\,d_m$ ab.

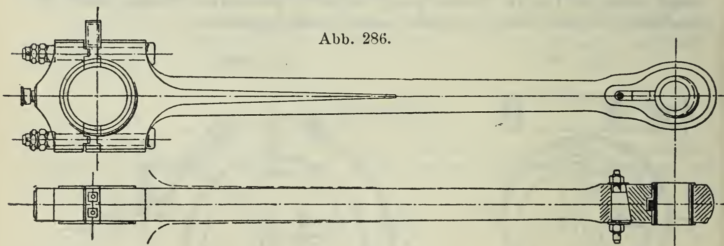


Abb. 286.

Bei grofsem Kurbelzapfen (z. B. bei gekröpften Wellen) läfst man den Querschnitt nach dem Kurbelzapfenkopfe der Schubstange hin wachsen (im Verhältnis bis 1 : 1,3), oder man hilft sich, wie in Abb. 286, durch Abflachung.

Bei sehr langsam gehenden Maschinen wähle man $\mathfrak{S}$ bis 33; bei stofsweisem Wechsel der Richtung von P (möglich z. B. bei Pumpen) sei $\mathfrak{S}$ etwa 40 bis 60 und mehr.

2. **Stange mit rechteckigem Querschnitte** (von der Breite b cm und der Höhe $h = 1{,}75\,b$ bis $2\,b$ cm in der Mitte).

$$P = \frac{\pi^2}{\mathfrak{S}} E \frac{1}{12} \frac{b^3 h}{L^2},$$

woraus mit $\mathfrak{S} = 15$, $h = 1{,}8\,b$, $E = 2\,000\,000$ kg/qcm:

$$P = 200\,000 \frac{b^4}{L^2} \text{ für } \textbf{Schmiedeisen,}$$

und mit $\mathfrak{S} = 15$, $h = 1{,}5\,b$, $E = 120\,000$ kg/qcm.

$$P = 10\,000 \frac{b^4}{L^2} \text{ für } \textbf{Holz.}$$

Höhen an den Köpfen $= 1{,}2\,h$ und $0{,}8\,h$; Breite b unveränderlich.

2. Stangen für grofse Geschwindigkeiten.

Beispiele solcher Stangen sind die **Lokomotivschubstangen** (vrgl. Abteil. II, Abschn. Eisenbahnwesen). Unter Voraussetzung rechteckigen Querschnittes von der Breite b und der Höhe h cm ergibt sich bei $\mathfrak{S} = {}^{20}/_3$ bis ${}^{10}/_3$, $h = 2\,b$, $E = 2\,000\,000$ kg/qcm:

$$P = 500\,000 \frac{b^4}{L^2} \text{ bis } 1\,000\,000 \frac{b^4}{L^2}.$$

Der Umstand, dafs sich bei raschem Wechsel von Zug und Druck Formänderungen nicht ausbilden können, unterstützt die in der Wahl des Wertes von $\mathfrak{S}$ liegende Absicht, die Stangen wegen der störenden Lokomotivbewegungen möglichst leicht zu halten. Um möglichst geringes Gewicht zu erzielen, gibt man den Stangen durch seitliches Ausfräsen auch wohl I-förmigen Querschnitt.

Bei den **Lokomotivkuppelstangen** ist anzunehmen, dafs die Schubstangenkraft auf die gekuppelten Achsen gleichmäfsig verteilt wird; in dem gröfseren Werte von $\mathfrak{S}$ ($= {}^{20}/_3$) liegt genügende Sicherheit gegen die Gefahr des Gleitens eines der gekuppelten Räder.

Für Schub- und Kuppelstangen ist festzuhalten, dafs

$$\frac{P}{b\,h} = \frac{1}{30} \left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{L^2 r}{h} \leqq k_b,$$

worin im Falle vollständigen Wechsels der Spannungen zu setzen ist: bei gewöhnlichem Schweifs- oder Flufseisen $k_b = 300$, bei vorzüglichem Schweifs- oder Flufseisen $k_b = 400$, bei gutem Flufsstahl $k_b = 500$ kg/qcm.

Die Beanspruchung einer prismatischen Stange durch die **Trägheitskräfte** im Augenblicke des gröfsten Ausschlages ist nach C. Bach nahezu die eines Trägers auf zwei Stützen von der Stützweite L, der durch die Dreiecklast ${}^1/_2\,q\,L$ [gemäfs Fall 12, S. 483] belastet ist. Die Last im Kreuzkopfe A ist $= 0$, die Last im Kurbelzapfen f. 1 cm Stangenlänge $q = \frac{f\gamma}{g}\frac{v^2}{r}$, worin f der Stangenquerschnitt, γ das Gewicht der Raumeinheit ist; v, r, g s. S. 826. Die ganze Belastung ist daher gleich der halben Fliehkraft der im Kurbelzapfen vereinigt gedachten Stangenmasse.*)

*) Vrgl. hierzu Autenrieth, Z. d. V. d. I. 1895 S. 716; Land, dsgl. 1896 S. 904.

b. Köpfe der Schubstangen.

Der den **Kurbelzapfen** umschliefsende Kopf ist entweder geschlossen — Nachstellung*) durch Druckschraube (Abb. 287) oder durch Keil (Abb. 288, 289 und 294 — oder offen — lagerartig (Abb. 293 und 296) oder als Kappenkopf (Abb. 297). — Je nach der Anordnung des **Kreuzkopfes** ist der dazu gehörige Stangenkopf lagerartig (Abb. 290, 291 und 296) oder gabelförmig und den Bolzen tragend (Abb. 294 und 297) oder gegabelt und lagerartig (Abb. 296 oben). Die Nachstellvorrichtungen zweier

Abb. 287.

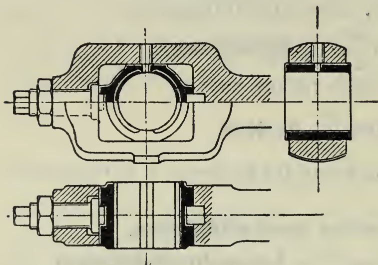


Abb. 288.

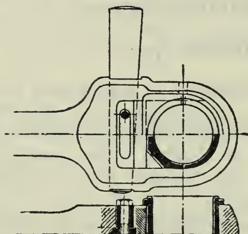


Abb. 289.

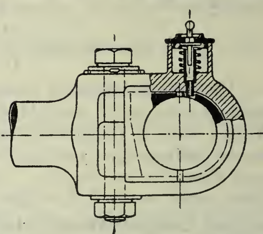


Abb. 290.

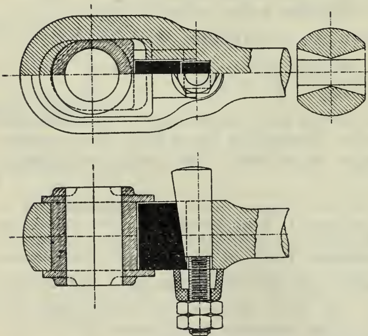
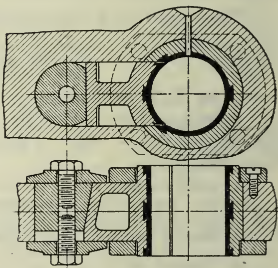


Abb. 291.



*) S. auch Volk, Maschinenteile. Z. d. V. d. I. 1908 S. 492 ff.

Köpfe einer Stange sollten stets so angeordnet werden, dafs die Stangenlänge L von Mitte zu Mitte Zapfen unverändert bleibt; diese Bedingung wird selbst von Bauarten hervorragender Fabriken nicht

Abb. 292.

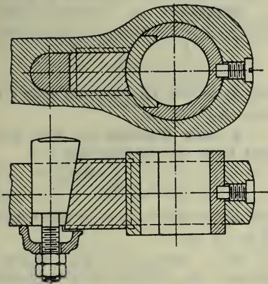


Abb. 293.

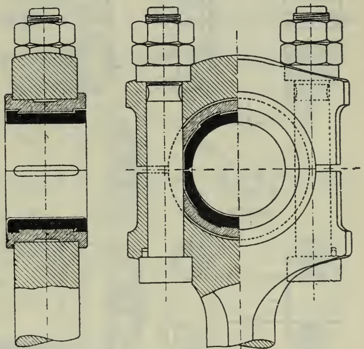


Abb. 294.

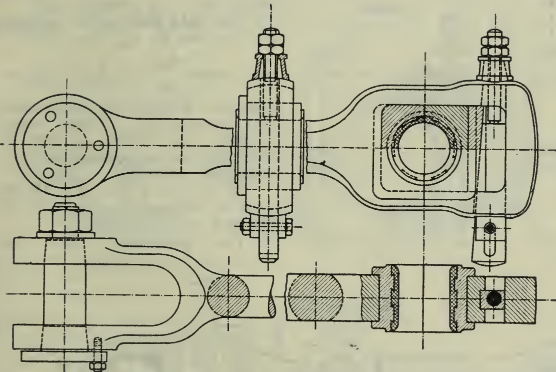
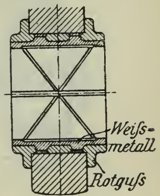


Abb. 295.



immer erfüllt (vrgl. die Schubstange einer Schiffsmaschine Abb. 296, sowie die zusammengehörigen Köpfe einer Sulzer-Maschine Abb. 293 und 302, S. 844).

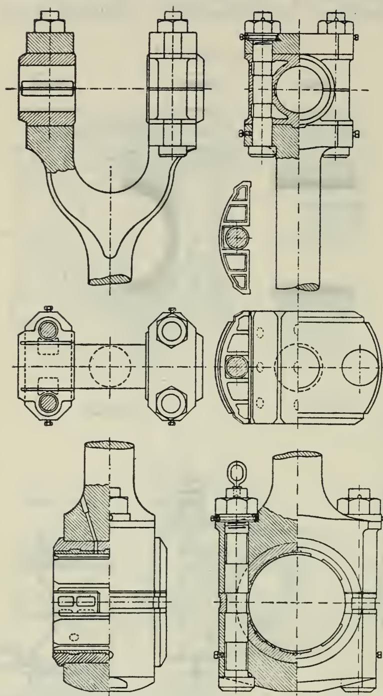
Die Befestigung des Weifsmetallfutters mit der Schale ist möglichst sicher zu wählen, damit das Futter beim Hämmern nicht abplatzt (Abb. 295).

Beispiel der Berechnung der Köpfe einer Schubstange, Abb. 297.

$P = 7800$ kg; $n = 40$; $L = 250$ cm.

Kurbelzapfen (Flufsstahl): nach S. 740 u. f.; $k_b = 500$ kg/qcm und $k = 60$ kg/qcm wird $d = 10$ cm, $l = 13$ cm (danach $b = 11{,}6$ cm).

Abb. 296.



Kreuzkopfzapfen (Flufsstahl): für $k = 80$ kg/qcm, $l_1 = 1{,}5\,d_1$ wird $d_1 \sim 8$ cm, $l_1 = 12$ cm.

Keildicke: $s_3 = \frac{1}{4}\,h \sim 3$ cm.

Aus $s_3\,s_4\,k = 0{,}5\,P$ folgt für $k = 450$ kg/qcm Auflagerdruck zwischen Keil und Bügel $s_4 = 3$ cm.

Bügeldicke s_5 (Schweifseisen) läfst sich für Biegung ermitteln aus

$$\frac{P}{2}\,x = k_b\,\frac{b\,s_5^2}{6}$$

mit $k_b = 600$ kg/qcm und $x = 4{,}4$ cm: $s_5 = 3{,}8$ cm.

Mittlere Keilhöhe s_6 (für alle drei Keile gleich) folgt aus

$$\frac{1}{3}\,\frac{P}{2}\,x = k_b\,\frac{s_3\,s_6^2}{6},$$

mit $k_b = 1000$ kg/qcm (Flufsstahl): $s_6 = 3{,}4$ cm.

Die Tangente des halben Winkels an der Spitze des Keiles wird bei Sicherung durch eine Schraube zweckmäfsig gleich 1 : 20 gewählt, so dafs die Nachstellbarkeit von 0,8 cm eine Verschiebung des Keiles um 8 cm erfordert.

Der **linke Kopf** wird, nachdem die Schaftstärke d_m aus

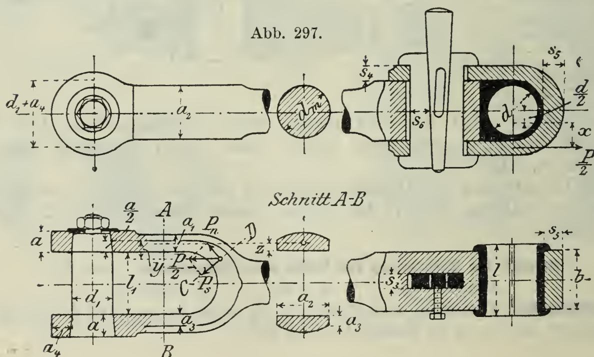
$$P = 40\,000\,\frac{d_m^4}{L^2} \text{ zu } d_m = 10{,}5 \text{ cm}$$

ermittelt worden ist. entworfen, also Breiten und Stärken angenommen und alsdann auf die Zulässigkeit der angenommenen Abmessungen geprüft;

z. B. $a_1 = 4$ cm, $a = 4{,}6$ cm, $a_2 = 10$ cm gewählt, $a_3 = 2{,}7$ cm ermittelt.

Der Querschnitt AB wird durch die abwechselnd als Zug

Abb. 297.



und als Druck auftretende Kraft $\frac{1}{2}P$ und durch das Biegungsmoment $\frac{1}{2}P(\frac{1}{2}a - z)$ beansprucht, worin z den Schwerpunktabstand des Querschnittes (in cm) bedeutet.

Z. B. für die mittlere Höhe des Querschnittes = 3,3 cm und

$$\frac{a}{2} - z = \frac{4,6}{2} - \frac{3,3}{2} = 0,65 \text{ cm}$$

ergibt die erstere Beanspruchung die Normalspannung $\sigma_1 = \frac{3900}{10 \cdot 3,3} = 118$ kg/qcm,

die letztere die gröfste Biegungsspannung $\sigma_2 = \frac{3900 \cdot 0,65}{\frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 3,3^2} = 140$ kg/qcm.

Gröfste Gesamtspannung $118 + 140 = 258$ kg/qcm, während für Schweifseisen 300 kg/qcm (Belastungsweise III, S. 405) noch zulässig ist.

Wählt man deshalb $a_1 = 3,6$ cm, $a = 4,2$ cm, $a_2 = 10$ cm, so erhält man

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 135 + 180 = 315 \text{ kg/qcm},$$

was noch zulässig ist.

Der Querschnitt CD wird beansprucht durch die zu vernachlässigende Schubkraft P_s, die Normalkraft P_n und das Biegungsmoment $\frac{1}{2}Py$. Für den vorliegenden Fall ist $P_n = 2250$ kg, $y = 3,6$ cm, $\frac{1}{2}Py = 3900 \cdot 3,6$,

und demnach $\sigma_1 + \sigma_2 = 331$ kg/qcm, was statthaft ist.

a_4 folgt aus $\frac{P}{2}\frac{d_1 + a_4}{8} = k_b \frac{a a_4^2}{6}$

mit $k_b = 600$ kg/qcm: $a_4 = 3,7$ cm.

E. Kreuzköpfe.*)

Die früher fast ausschliefslich benutzte Anordnung, dafs der gabelförmige Kreuzkopf den Bolzen trägt (Abb. 298, 299 und 300), wird

Abb. 298.

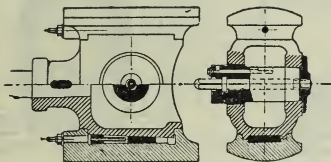
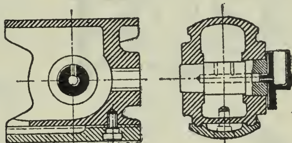
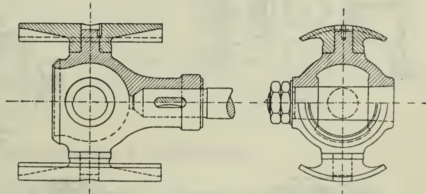


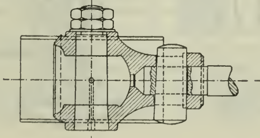
Abb. 299.



mehr und mehr durch die umgekehrte Anordnung verdrängt: der Kreuzkopf ist lagerartig (Abb. 301 und 302) und die Schubstange gegabelt. Für Schiffsmaschinen gebräuchlich Abb. 303, wozu der gegabelte Schubstangenkopf Abb. 296 oben, gehört, für Schnelläufer

Abb. 300.

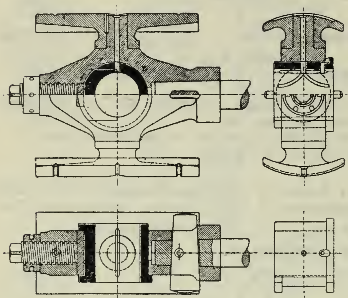




*) S. auch Volk, Maschinenteile (Kreuzköpfe und Kreuzkopfbolzen) Z. d. V. d. I. 1908 S. 488 ff.

häufig Kolbenstange und Kreuzkopf aus einem Stücke (Abb. 302, Kreuzkopf für eine stehende Dampfmaschine).

Abb. 301.



In Abb. 300 ist das Stangenende besser verjüngt mit 1 : 6 Anzug anzuordnen.

Bei Abb. 300 tritt durch elastische Formänderung des Lagerdeckels leicht einseitige Belastung der Schrauben und damit deren Bruch ein, falls

Abb. 302.

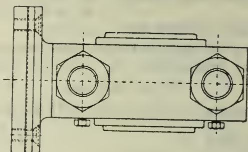
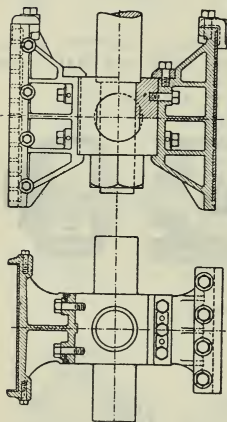


Abb. 303.



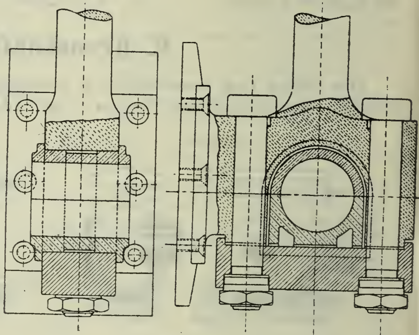


Abb. 305.

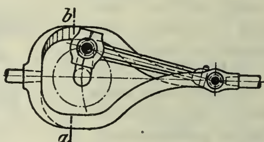


Abb. 304.

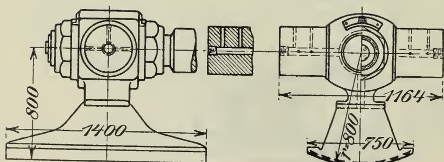
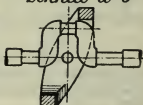


Abb. 306.



nicht zähes Eisen (Nieteisen) und eine geringe Beanspruchung durch die Stangenkraft ($k < 600$ kg/qcm) gewählt ist; dabei ist die Durchbiegung des Deckels durch reichliche Höhe möglichst herabzuziehen.

Abb. 304 zeigt den Kreuzkopf einer Grofsgasmaschine der Vereinigten Maschinenfabrik Augsburg und Maschinenbaugesellschaft Nürnberg.

Der Druck in den Gleitflächen feststehender Maschinen soll, damit das Nachstellen tunlichst selten erforderlich ist, bei Geschwindigkeiten von 2 bis 2,5 m/sk, 2 [bis höchstens 3] kg/qcm nicht überschreiten. Die Gleitbahn ist so stark auszuführen und so zu unterstützen, dafs schädliche Durchbiegungen nicht eintreten können (s. II. Abteil., Dampfmaschinen).

Kleinsches Verbindungsstück (Abb. 305 und 306) zur Verbindung zweier gleichachsigen Kolbenstangen zwischen der Kurbel. Die beiden langen Schenkel liegen in zwei so weit gegeneinander versetzten Ebenen, dafs der Stangenkopf dazwischen schwingen kann. Geringere Weite des Verbindungsbügels und damit geringerer Abstand der Zylinderachse von der Maschinengrundplatte, als bei der Kurbelschleife.

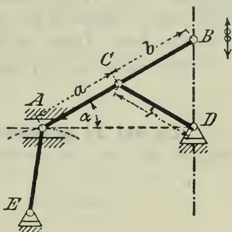
F. Gelenkgeradführungen.*)

a. Ellipsenlenker.

Hierbei bezeichne (Abb. 307 bis 311):

AB den Hauptlenker,
α dessen halben Ausschlagwinkel,
CD den Gegenlenker,
C dessen Angriffpunkt,
D dessen Festpunkt,
B den gerade zu führenden Punkt.

Abb. 307.



1. Der Evanssche Lenker (Abb. 307).

Winkel $ADB = 90^0$, $a = b = r$. Wird nun A auf AD gerade geführt, so erhält man den genauen Ellipsenlenker; führt man aber A auf einem Kreisbogen, dessen Halbmesser EA ist, so hat man den angenäherten Evansschen Lenker. Je gröfser man EA und je kleiner man den Winkel α wählt, desto genauer wird dieser Lenker. Es sei $\alpha < 20^0$ und $EA \geqq BD$.

2. Der angenäherte Ellipsenlenker.

Nach der Lage von C in bezug auf A und B unterscheidet man drei Arten.

*) Ausführlicheres s. Kinematisches Skizzenbuch, nach Vorträgen v. F. Reuleaux bearbeitet und herausgegeben vom akadem. Verein „Hütte“, W. Ernst & Sohn, Berlin 1880/1892. — Vrgl. ferner Rittershaus, Gelenkgeradführungen, Z. d. V d. I. 1877 S. 217 (fünfpunktige Geradführungen); R. Müller, Zeitschr. f. Mathem. u. Physik, Bd. 43, S. 36 (angenäherte Geradführung mit Hülfe eines ebenen Gelenkvierecks).

Erste Art: Der Punkt C liegt zwischen A und B (Abb. 308).
Zweite Art: Der Punkt C liegt über B hinaus (Abb. 309).
Dritte Art: Der Punkt C liegt über A hinaus (Abb. 310).

Bei allen drei Lenkern kann die gerade Bahn des Punktes A durch eine kreisbogenförmige ersetzt werden.

Abb. 308.

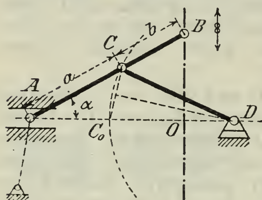
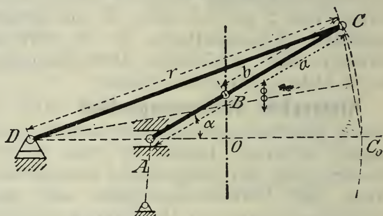


Abb. 309.



Die Lenker der dritten Art geben die gröfste Abweichung des Punktes B von der geradlinigen Bahn.

Ermittlung des Gegenlenkers.

1. **Es sei C gegeben, und D werde gesucht** (Abb. 308 bis 310). Zeichne den Hauptlenker in seiner äufsersten Lage, mache $OC_0 = BC = b$, ziehe C_0C und errichte in der Mitte dieser Linie eine Winkelrechte. Diese schneidet die Wagerechte OAC_0 in D.

Wählt man α sehr klein, so wird angenähert:

$$r : a = a : b.$$

2. **Es sei D gegeben, und C werde gesucht** (Abb. 311). Verlängere in der äufsersten Stellung des Hauptlenkers die Linie AB

Abb. 310.

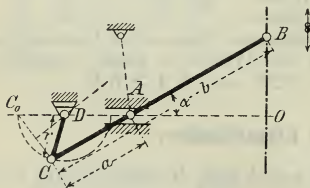
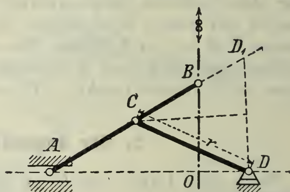


Abb. 311.



um $BD_1 = OD$ und ziehe D_1D. Die Winkelrechte in der Mitte dieser Linie gibt auf dem Hauptlenker den Punkt C. Bei der zweiten und dritten Lenkerart (Abb. 309 und 310) trage man $BD_1 = OD$ von B über A hinaus ab.

b. Robertscher Dreiecklenker (Abb. 312).

Man nehme

$$CC_1 = DD_1 = r;$$

$$\frac{r}{h} = 0,584; \qquad \frac{b}{h} = 0,593; \qquad \frac{c}{h} = 1,112.$$

Abb. 312

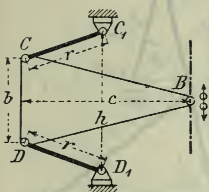
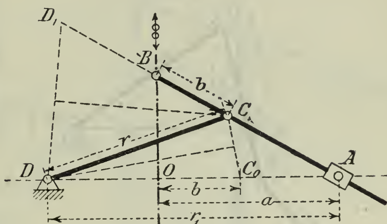


Abb. 313.



c. Konchoidenlenker (Abb. 313).

Konchoide s. S. 115.

Es sei AB der Hauptlenker, CD der Gegenlenker, C dessen Angriffpunkt und D dessen Festpunkt.

Je nachdem der Punkt C zwischen A und B oder über B oder über A hinaus liegt, hat man den Konchoidenlenker erster, zweiter oder dritter Art (wie unter **2.**, S. 846).

Der **Gegenlenker** wird wie der angenäherte Ellipsenlenker ermittelt (vrgl. S. 846).

Der Lenker zweiter Art liefert, wenn man $r = r_1$ macht, eine zwar kurze, aber sehr gute Geradführung.

d. Lemniskoidenlenker (Abb. 314 und 315).

Im folgenden bezeichnen

a und a_1 die Längen der Gegenlenker,
d und d_1 die entsprechenden Abschnitte der Koppel,
φ und φ_1 die halben Schwingungswinkel der Gegenlenker,
s die Hubhöhe $= 2\,a \sin\varphi = 2\,a_1 \sin\varphi_1$,
c die Projektion der Verbindungslinie der Festpunkte M und M_1 auf die Hubrichtung xy,
e und e_1 die Pfeilhöhen der von den Endpunkten C und D der Gegenlenker beschriebenen Bogen, u. zw.

$$e = a\,(1 - \cos\varphi) \quad \text{und} \quad e_1 = a_1\,(1 - \cos\varphi_1).$$

Die Hubrichtung xy des gerade geführten Punktes B halbiert die Pfeilhöhen e und e_1.

1. Gegeben der Lenker a, sein Festpunkt M, die Koppelabschnitte d und d_1 und der gerade zu führende Punkt B; gesucht die Länge a_1 des Gegenlenkers und dessen Festpunkt M_1.

Da φ bekannt ist, sind s und e bestimmbar. Man zeichne den Lenker a in seiner äufsersten Stellung MC und in dieser Stellung die Koppel so, dafs der Punkt B auf xy, der Halbierungslinie der

Abb. 314.

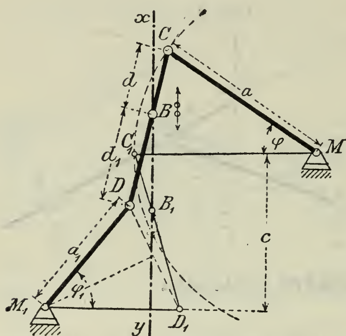
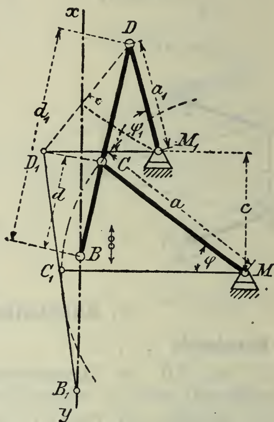


Abb. 315.



Pfeilhöhe des von C beschriebenen Bogens, zu liegen kommt, und stelle den Endpunkt der Koppel D fest.

Man suche dann die Lage D_1 des Endpunktes der Koppel bei der mittleren Lage des Lenkers a_1 (der um C_1, die Mittellage von C, mit $CD = d_1 + d$ beschriebene Bogen schneidet die im Abstande $^1/_2 s$ von D gezogene Parallele mit MC_1 in D_1) und verbinde D mit D_1. Die Winkelrechte in der Mitte der Linie DD_1 gibt auf der durch D_1 mit C_1M gezogenen Parallelen den gesuchten Festpunkt M_1 und somit auch die gesuchte Länge a_1 des Lenkers M_1D an.

2. Gegeben die beiden Lenker a und a_1, ihr Abstand c in paralleler Lage und die Hubhöhe s; gesucht die Lage des gerade zu führenden Punktes B und die Festpunkte M und M_1.

Man ermittle φ, φ_1, e und e_1 und lege a und a_1 winkelrecht zur Hubrichtung xy und im Abstande c so, dafs e und e_1 halbiert werden; dann sind M und M_1 die Festpunkte. In der äufsersten Lage schneidet CD die Hubrichtung xy in B; dieser Punkt ist der gerade geführte Punkt.

Gute Führungen erhält man, wenn man macht (Abb. 314):

$$a = a_1 \geqq {}^3/_2 s, \quad \varphi = \varphi_1 \lesseqgtr 19^1/_2{}^0, \quad e = e_1 \lesseqgtr {}^1/_{26} s, \quad d = d_1 \geqq {}^2/_7 s.$$

e. Tschibyscheffscher Lenker (Abb. 316).

Die gerade Bahn soll den Bogen, den der Punkt C beschreibt, berühren.

Es sei $b = e =$ dem halben Hube von B,
$CE = DF = 0{,}618\,a$,
$d = c = 0{,}809\,a$.

Der Punkt D soll in die gerade Bahn fallen.

Abb. 316.

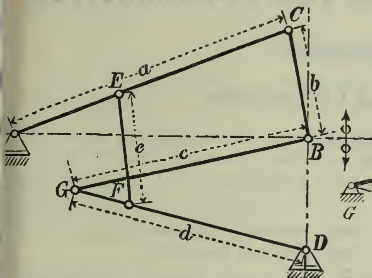
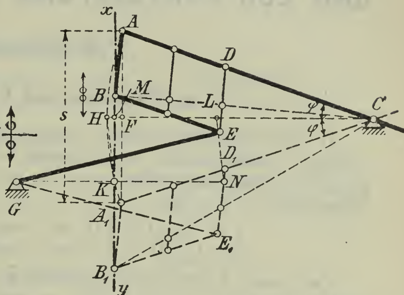


Abb. 317.



f. Wattsches Parallelogramm (Abb. 317).

Es ist C der Drehpunkt des ersten Gegenlenkers (Schwinghebels); ACA_1 der Schwingungswinkel 2φ; die Sehne AA_1 gleich dem gegebenen Hube s $(= BB_1)$; $HM = MF$ die Hälften der Pfeilhöhe HF; xy parallel AA_1 durch M; $AB = HK = A_1B_1 =$ der beliebig (zweckmäfsig $= 0{,}5\,s$) anzunehmenden Länge der Hängeschiene (Schere) und $AD = HL = A_1D_1 =$ der gegebenen Seite des Parallelogramms. Man vervollständige nun durch die Verbindungsstange BE und die Hängeschiene DE das Parallelogramm $ABED$, entsprechend die Parallelogramme $HKNL$ und $A_1B_1E_1D_1$, dann ist der Mittelpunkt G des durch E, N und E_1, gehenden Kreises der Drehpunkt des zweiten Gegenlenkers, $GE = GN = GE_1$ dessen Länge, und jeder Punkt der Geraden BC ist gerade geführt.

Man wähle die Länge $CA = 1{,}5\,s$ bis $2\,s$. Macht man wie gewöhnlich $AD = CD$, so ergibt sich der Punkt K als Drehpunkt des zweiten Gegenlenkers, dessen Länge dann $KE = AD = CD$ ist.

VII. MASCHINENTEILE ZUR AUFNAHME UND ZUR FORTLEITUNG VON FLÜSSIGKEITEN.

A. Zylinder.

a. Pumpen- und Prefszylinder.

1. Sind nur Rücksichten auf Herstellung, Fortschaffung und Aufstellung mafsgebend, so erhalten nicht auszubohrende gufseiserne **Pumpenzylinder** vom inneren Durchmesser D (in cm) eine Wandstärke s (in cm):

$$s = {}^1/_{50}\,D + 1{,}0 \text{ cm, wenn stehend gegossen,}$$
$$s = {}^1/_{40}\,D + 1{,}2 \text{ cm, wenn liegend gegossen.}$$

Der innere Flüssigkeitsüberdruck p_i (in kg/qcm) erfordert eine Wandstärke, die nach **1.** auf S. 502 zu bestimmen ist; wegen der Möglichkeit des Kernverlegens ist die so gefundene Wandstärke s noch um 0,3 bis 0,6 cm zu vergröfsern. In Hinsicht auf etwaige Stofswirkungen, Temperaturunterschiede usw. wähle man für gewöhnliches Gufseisen die zulässige Zugspannung k_z womöglich < 200 kg/qcm. Der gröfsere Wert der auf beide vorstehenden Arten berechneten Wandstärke ist mafsgebend.

Auszubohrende gufseiserne Pumpenzylinder, die die genaue zylindrische Form beim Ausbohren erlangen und im Betriebe beibehalten müssen, und die überdies ein ein- oder zweimaliges Ausbohren nach eingetretener Abnutzung gestatten sollen, erhalten eine um etwa 0,3 bis 0,5 cm gröfsere Wandstärke als nicht auszubohrende Zylinder. Die nach S. 502 **1.** gefundene Wandstärke ist um 0,8 bis 1,6 cm zu vergröfsern. Für Stahlgufs (bei hohem Drucke) sei $k_z \gtreqless 500$ kg/qcm, dabei $s \geqq 1{,}5$ cm.

2. Prefszylinder*) sind nach **1.** auf S. 502 zu berechnen, wobei man für k_z die folgenden Werte zulassen mufs:

für Gufseisen**) und Bronze . . .	$k_z =$ 300 bis 600	kg/qcm,
„ Phosphorbronze	$k_z =$ 500 „ 1000	„
„ Stahlgufs	$k_z =$ 1000 „ 2000	„
„ Schweifseisen***)	$k_z =$ 900 „ 1800	„ .

---

*) Ueber die Berechnung der durch aufgezogene Ringe verstärkten Rohre (Ringgeschütze) s. C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 10. Aufl. 1908 S. 846.

**) Die Schwierigkeit der Herstellung dichter gufseiserner Prefszylinder wächst mit der Wandstärke. Durch wiederholtes Umschmelzen der Masseln und Ausgiefsen zu Platten, auch u. Umst. durch Zusatz von Schweifseisen im Kupolofen (Stirlingmetall), erzielt man ein Gufseisen, für das $k_z = 500$ bis 750 kg/qcm noch zulässig erscheint. Bei der Formgebung ist auf sanfte Ueberführung der Linien zu achten.

***) Herstellung aus Quadrateisen vorausgesetzt, das schraubenförmig um einen Zylinder gewunden und in der Achsenrichtung zusammengeschweifst wird.

Den oberen Grenzwerten von k_z nähere man sich nur gezwungen; für Stahlgufs-Zylinder empfiehlt sich, k_z so zu wählen, wie das liefernde Werk es gewährleistet.

Für den Fall, dafs durch den Prefskolben ein bestimmter Druck P (in kg) auszuüben ist, wird der äufsere Halbmesser r_a (vrgl. S. 502 **1.**) zu einem Kleinstwerte für $p_i = 0{,}36\,k_z$, u. zw.:

$$r_{a\,\min} = 1{,}5\,r_i \quad \text{oder} \quad s_{\min} = 0{,}5\,r_i.$$

b. Dampfzylinder.

Für D cm lichten Durchmesser kann die Wandstärke s des Dampfzylinders bei liegenden Maschinen bestimmt werden aus

$$s = {}^1/_{50}\,D + 1{,}3 \text{ cm für stehend gegossene Zylinder,}$$
$$s = {}^1/_{40}\,D + 1{,}5 \text{ cm für liegend gegossene Zylinder;}$$

bei stehenden Maschinen kann s um 10 bis 20 vH schwächer sein. Weiteres über Dampfzylinder s. Abt. II, Kraftmaschinen, unter „Teile der Dampfmaschinen“.

B. Rohre.

Die **Rohrweite** D, d. h. der lichte Durchmesser einer Rohrleitung, ist so zu bemessen, dafs die Geschwindigkeit des durchströmenden Körpers und seine Reibungswiderstände innerhalb gegebener Grenzen bleiben. — Für gröfsere Leitungen ist das vorteilhafteste D derart zu ermitteln, dafs Zinsen und Tilgung der (mit D wachsenden) Anlagekosten und die (mit wachsendem D abnehmenden) Betriebskosten zusammen möglichst klein sind.*)

Ausgleichvorrichtungen. Bei langen Rohrleitungen in geringer Tiefenlage und bei Leitungen für warme Flüssigkeiten oder Dämpfe ist auf die bei den verschiedenen Temperaturen eintretenden Längenänderungen Rücksicht zu nehmen, u. zw. durch starke, elastische Dichtungsscheiben aus Gummi oder Asbestpappe, besser aber durch das Einschalten elastischer Federrohre (s. S. 864) oder Wellrohre oder entlasteter Dehnungsrohre (A. L. G. Dehne, Halle a. S.). Gewöhnliche Stopfbüchsenrohre sind hierfür nicht ratsam, da sie sich auf die Dauer nicht dicht halten lassen. Auch Gelenkflansche werden benutzt.**) Neuerdings Einschaltung kurzer, in Kugelgelenken endigender Querrohre; beide Gelenke sind entlastet (F. Seiffert & Co., A.-G., Berlin SO).

Die achsial wirkenden Kräfte sind bei Aenderungen der Richtung der Rohrachse zu beachten (durch Verankerungen usw.).

a. Gufseiserne Rohre.

1. Wandstärke. 1. Bei geringem Drucke verlangen Rücksichten auf Herstellung, Fortschaffung und Verlegung sowie auf die zusätzlichen Beanspruchungen durch äufsere Kräfte, z. B. bei Erdleitungen durch ungleichmäfsige Auflagerung, Bodensenkungen usw., meist eine gröfsere Wandstärke, als die Rechnung nach **1.** auf S. 502 liefert. Besser

(Fortsetzung auf S. 858.)

*) Vrgl. P. Willner und R. Mehmke, Z. d. V. d. I. 1890 S. 103, 150 u. 1008.

**) Vrgl. M. Westphal, Z. d. V. d. I. 1904 S. 588; hier findet sich eine Kritik der wichtigsten Ausgleichvorrichtungen.

Deutsche Rohr-Normalien für gufseiserne

Gemeinschaftlich aufgestellt von dem Vereine deutscher Ingenieure und

Lichter Durchmesser D	Normale Wandstärke s	Aeufserer Rohrdurchmesser D_1	Gewicht eines glatten Rohrstückes von 1 m Länge	**Muffenrohre** (Abb. 318)								
				Weite der Dichtungsfuge f	Innere Muffenweite D_2	Aeufserer Muffendurchm. D_3	Innere Muffentiefe t	Dichtungstiefe $t' = t - 1{,}5\,s$	Uebliche Nutzlänge L	Gewicht der Muffe	Gewicht eines Rohres von vorstehender Nutzlänge	Gewicht für 1 m Rohr bei vorstehender Nutzlänge
mm	mm	mm	kg	mm	mm	mm	mm	mm	m	kg	kg	kg
40	8	56	8,75	7	70	116	74	62	2	2,68	20,18	10,09
50	8	66	10,57	7,5	81	127	77	65	2	3,14	24,28	12,14
60	8,5	77	13,26	7,5	92	140	80	67	2	3,89	30,41	15,21
70	8,5	87	15,20	7,5	102	150	82	69	3	4,35	49,95	16,65
80	9	98	18,24	7,5	113	163	84	70	3	5,09	59,81	19,94
90	9	108	20,29	7,5	123	173	86	72	3	5,70	66,57	22,19
100	9	118	22,34	7,5	133	183	88	74	3	6,20	73,22	24,41
125	9,5	144	29,10	7,5	159	211	91	77	3	7,64	94,94	31,65
150	10	170	36,44	7,5	185	239	94	79	3	9,89	119,21	39,74
175	10,5	196	44,36	7,5	211	267	97	81	3	12,00	145,08	48,36
200	11	222	52,86	8	238	296	100	83	3	14,41	172,99	57,66
225	11,5	248	61,95	8	264	324	100	83	3	16,89	202,71	67,57
250	12	274	71,61	8,5	291	353	103	84	4	19,61	306,05	76,51
275	12,5	300	81,85	8,5	317	381	103	84	4	22,51	349,91	87,48
300	13	326	92,68	8,5	343	409	105	85	4	25,78	396,50	99,13
325	13,5	352	104,08	8,5	369	437	105	85	4	28,83	445,15	111,29
350	14	378	116,07	8,5	395	465	107	86	4	32,23	496,51	124,13
375	14	403	124,04	9	421	491	107	86	4	34,27	530,43	132,61
400	14,5	429	136,89	9,5	448	520	110	88	4	39,15	586,71	146,68
425	14,5	454	145,15	9,5	473	545	110	88	4	41,26	621,82	155,46
450	15	480	158,87	9,5	499	573	112	89	4	44,90	680,38	170,10
475	15,5	506	173,17	9,5	525	601	112	89	4	48,97	741,65	185,51
500	16	532	188,04	10	552	630	115	91	4	54,48	806,64	201,66
550	16,5	583	212,90	10	603	683	117	92	4	62,34	913,94	228,49
600	17	634	238,90	10,5	655	737	120	94	4	71,15	1026,75	256,69
650	18	686	273,86	10,5	707	793	122	95	4	83,10	1178,54	294,64
700	19	738	311,15	11	760	850	125	96	4	98,04	1342,64	335,66
750	20	790	350,76	11	812	906	127	97	4	111,29	1514,33	378,58
800	21	842	392,69	12	866	964	130	98	4	129,27	1700,03	425,01
900	22,5	945	472,76	12,5	970	1074	135	101	4	160,17	2051,21	512,80
1000	24	1048	559,76	13	1074	1184	140	104	4	195,99	2435,03	608,76
1100	26	1152	666,81	13	1178	1296	145	106	4	243,76	2911,00	727,75
1200	28	1256	783,15	13	1282	1408	150	108	4	294,50	3427,10	856,78

Die normalen Wandstärken s gelten für Rohre, die einem Betriebsdrucke von 10 at und einem Probedrucke von höchstens 20 at ausgesetzt sind und vor allem Wasserleitungszwecken dienen. Für gewöhnliche Druckverhältnisse von Wasserleitungen (4 bis 7 at) ist eine Verminderung der Wandstärken zulässig, ebenso für Leitungen, in denen nur ein geringer Druck herrscht (Gas-, Wind-, Kanalisationsleitungen usw.). Für Dampfleitungen, die gröfseren Temperaturunterschieden und dadurch entstehenden Spannungen, sowie für Leitungen, die unter besonderen Verhältnissen schädlichen äufseren Einflüssen ausgesetzt sind, empfiehlt es sich, die Wandstärken entsprechend zu erhöhen.

Der äufsere Durchmesser des Rohres (D_1) ist feststehend; Aenderungen der Wandstärke sind also nur auf den lichten Durchmesser des Rohres (D) von Einflufs. Als unabänderlich normal gilt ferner die innere Muffenform, die Art des Anschlusses an das Rohr und die Fugenweite (Bleifuge) f.

Aus Gründen der Herstellung sind bei geraden Normalrohren Abweichungen von den durch Rechnung ermittelten Gewichten um höchstens ± 3 vH zu gestatten. In den Gewichtberechnungen ist das spezifische Gewicht des Gufseisens = 7,25 gesetzt

Muffen- und Flanschenrohre (1882).

dem Vereine deutscher Gas- und Wasserfachmänner.

Flanschenrohre (Abb. 319)

Flansch Durchmesser D' mm	Flansch Dicke s_1 mm	Dichtungsleiste Breite b mm	Dichtungsleiste Höhe h mm	Lochkreis-Durchmesser D'' mm	Schrauben Anzahl	Schrauben Stärke d mm	Schrauben Stärke d engl. Z.	Schrauben Länge l mm	Durchmesser des Schraubenloches d_0 mm	Uebliche Baulänge L m	Gewicht des Flansches kg	Gewicht eines Rohres bei vorstehender Baulänge kg	Gewicht f. 1 m Rohr bei vorstehender Baulänge kg	Lichter Durchmesser D mm
140	18	25	3	110	4	12,7	1/2	70	15	2	1,89	21,28	10,64	40
160	18	25	3	125	4	15,9	5/8	75	18	2	2,41	25,96	12,98	50
175	19	25	3	135	4	15,9	5/8	75	18	2	2,96	32,44	16,22	60
185	19	25	3	145	4	15,9	5/8	75	18	3	3,21	52,02	17,34	70
200	20	25	3	160	4	15,9	5/8	75	18	3	3,84	62,40	20,80	80
215	20	25	3	170	4	15,9	5/8	75	18	3	4,37	69,61	23,20	90
230	20	28	3	180	4	19,0	3/4	85	21	3	4,96	76,94	25,65	100
260	21	28	3	210	4	19,0	3/4	85	21	3	6,26	99,82	33,27	125
290	22	28	3	240	6	19,0	3/4	85	21	3	7,69	124,70	41,57	150
320	22	30	3	270	6	19,0	3/4	85	21	3	8,96	151,00	50,33	175
350	23	30	3	300	6	19,0	3/4	85	21	3	10,71	180,00	60,00	200
370	23	30	3	320	6	19,0	3/4	85	21	3	11,02	207,89	69,30	225
400	24	30	3	350	8	19,0	3/4	100	21	3	12,98	240,79	80,26	250
425	25	30	3	375	8	19,0	3/4	100	21	3	14,41	274,37	91,46	275
450	25	30	3	400	8	19,0	3/4	100	21	3	15,32	308,68	102,89	300
490	26	35	4	435	10	22,2	7/8	105	25	3	19,48	351,20	117,07	325
520	26	35	4	465	10	22,2	7/8	105	25	3	21,29	390,79	130,26	350
550	27	35	4	495	10	22,2	7/8	105	25	3	24,29	420,70	140,23	375
575	27	35	4	520	10	22,2	7/8	105	25	3	25,44	461,55	153,85	400
600	28	35	4	545	12	22,2	7/8	105	25	3	27,64	490,73	163,58	425
630	28	35	4	570	12	22,2	7/8	105	25	3	29,89	536,39	178,80	450
655	29	40	4	600	12	22,2	7/8	105	25	3	32,41	584,33	194,78	475
680	30	40	4	625	12	22,2	7/8	105	25	3	34,69	633,50	211,17	500
740	33	40	5	675	14	25,4	1	120	28,5	3	44,28	727,26	242,42	550
790	33	40	5	725	16	25,4	1	120	28,5	3	47,41	811,52	270,51	600
840	33	40	5	775	18	25,4	1	120	28,5	3	50,13	921,84	307,28	650
900	33	40	5	830	18	25,4	1	120	28,5	3	56,50	1046,45	348,82	700
950	33	40	5	880	20	25,4	1	120	28,5	3	59,81	1171,90	390,63	750

Abb. 318.

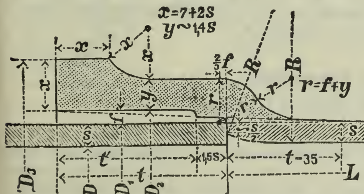
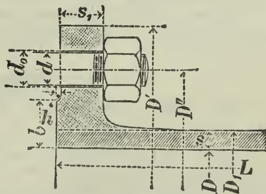


Abb. 319.



worden. — Für die Anordnung der Schraubenlöcher bei den Flanschenrohren gilt die Regel, dafs die lotrechte Ebene durch die Rohrachse Symmetrieebene für die Löcher ist und kein Schraubenloch enthält.

L, die **übliche Nutzlänge der Muffenrohre** und **übliche Baulänge der Flanschenrohre**, wird von verschiedenen Fabriken für manche Rohre um 0,5 m und 1,0 m gröfser ausgeführt, so dafs bei Bestellungen eine vorhergehende Vereinbarung mit dem Lieferanten geboten erscheint.

Normale Formstücke und Baulänge der Absperrschieber für gufseiserne Rohrleitungen (1882).

Gemeinschaftlich aufgestellt von dem Vereine deutscher Ingenieure und dem Vereine deutscher Gas- und Wasserfachmänner.

A- und B-Stücke (Abb. 320 und 321).

$a = 0{,}2\,D + 0{,}5\,d + 100$ mm,
$l = 0{,}1\,d + 120$ mm,
$r = 0{,}05\,d + 40$ mm,
t = Muffentiefe des Abzweiges für d als lichten Durchmesser.

D Durchmesser des Hauptrohres mm	d Durchmesser des Abzweiges mm	L Nutzlänge m
40 bis 100	40 bis 100	0,80
125 „ 325	40 „ 325	1,00
350 „ 500	40 „ 300	1,00
	325 „ 500	1,25
550 „ 750	40 „ 250	1,00
	275 „ 500	1,25
	550 „ 750	1,50

E-Stücke (Abb. 324).

$L = 300$ mm; zulässig für $D \geqq 40$ mm.

F-Stücke (Abb. 325).

$L = 600$ mm für $D =$ 40 bis 475 mm,
$L = 800$ mm für $D =$ 500 bis 750 mm.

J-Stücke (Abb. 328).

$R = 250$ mm für $D = 40$ bis 90 mm,
$R = D + 150$ mm für $D \geqq 100$ mm,
$m = D + 200$ mm für $D = 40$ bis 375 mm,
$m = 600$ mm für $D \geqq 400$ mm.

C-Stücke (Abb. 322).

$a = 0{,}1\,D + 0{,}7\,d + 80$ mm,
$c = 0{,}1\,D + 80$ mm,
$l = 0{,}75\,a$ und $r = d$.

D Durchmesser des Hauptrohres mm	d Durchmesser des Abzweiges mm	L Nutzlänge m
40 bis 100	40 bis 100	0,80
125 „ 275	40 „ 275	1,00
300 „ 425	40 „ 250	1,00
	275 „ 425	1,25
450 „ 600	40 „ 250	1,00
	275 „ 425	1,25
	450 „ 600	1,50
650 „ 750	40 „ 250	1,00
	275 „ 425	1,25
	450 „ 600	1,50
	650 „ 750	1,75

K-Stücke (Abb. 329).

$R = 10\,D$; zulässig für $D \geqq 40$ mm.

L-Stücke (Abb. 327).

$R = 5\,D$; zulässig für $D \geqq 300$ mm

R-Stücke (Abb. 326).

Uebergangsrohre. $L = 1{,}0$ m.

Ü-Stücke (Abb. 323).

Ueberschieber. $L = 4\,t$, wenn t die D entsprechende Muffentiefe.

Aufser den **A**-, **B**- und **C**-Stücken sind **AA**-, **BB**- und **CC**-Stücke mit zwei gegenüberliegenden Abzweigen erhältlich; die Abmessungen sind dieselben wie bei den einfachen Stücken.

Flanschen-Formstücke.

Für Abb. 331 bis 334 ist $L = D + 100$ mm,
für Abb. 333 aufserdem $l = \frac{1}{2}(D + d) + 100$ mm,

Die Bezeichnung der einzelnen Formstücke erfolgt in der über den Abb. 320 bis 329 (als Beispiel) angedeuteten Weise, wobei die Art (der Name) des Formstückes und der lichte Durchmesser D des Rohres in mm angegeben werden, ferner unter einem Bruchstriche bei Abzweigrohren der lichte Durchmesser des Abzweiges und bei Krümmern die Anzahl der Stücke für den Quadranten (also $90:\alpha$); $\alpha = 45$, 30 $22\frac{1}{2}$ und 15^0.

Bei der Berechnung der Gewichte von Formstücken (mit einem spezifischen Gewichte des Gußeisens = 7,25) ist dem Gewichte, das den normalen Abmessungen entspricht, ein Zuschlag von 15 vH, bei Krümmern ein solcher von 20 vH zu geben. — Die Abzweigstücke, deren Abzweig einen lichten Durchmesser von 400 mm und mehr besitzt, sind von 2 at Betriebsdruck an sowohl in ihren Wandungen, als auch, wenn nötig, durch Rippen zu verstärken.

Sämtliche Formstücke über 750 mm Durchmesser werden nicht als normale Formstücke betrachtet.

Abb. 320. A $\frac{300}{150}$

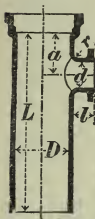


Abb. 321. B $\frac{300}{150}$

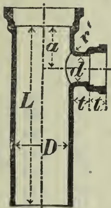


Abb. 322. C $\frac{300}{150}$

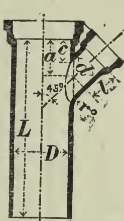


Abb. 323. Ü 300



Abb. 324. E 300.

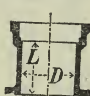


Abb. 325. F 300

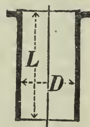


Abb. 326. R $\frac{300}{200}$

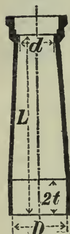


Abb. 327. L $\frac{300}{3}$

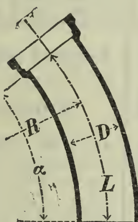


Abb. 328. J 300

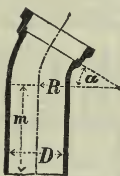


Abb. 329. K $\frac{300}{6}$

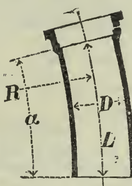


Abb. 330. Flanschen-Deckel.

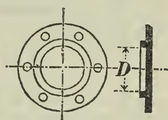


Abb. 331.

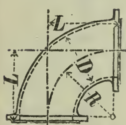


Abb. 332.

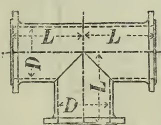


Abb. 333.

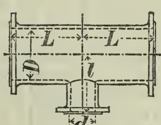
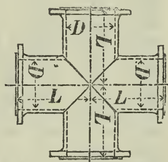


Abb. 334.



Flanschen-Formstücke.

Die **Baulänge** L **der Absperrschieber** beträgt für

Flanschenschieber . . . . $L = D + 200$ mm,
Muffenschieber m. unmittelb. eingetrieb. Ringen $L = 0{,}7\,D + 100$ mm,
Muffenschieber mit eingebleiten Sitzringen . . $L = D - 2t + 250$ mm.

Gewichte gußeiserner Rohr-Formstücke in kg.

Friedrich Wilhelms-Hütte in Mülheim (Ruhr).

D	A-Stücke (Abb. 320) d (in mm) =							B-Stücke (Abb. 321) d (in mm) =						
mm	D	80	100	150	200	300	400	D	80	100	150	200	300	400
40	14	.	.	.	.	.	.	14	.	.	.	.	.	.
50	19	.	.	.	.	.	.	19	.	.	.	.	.	.
60	22	.	.	.	.	.	.	22	.	.	.	.	.	.
70	27	.	.	.	.	.	.	27	.	.	.	.	.	.
80	30	30	.	.	.	.	.	31	31	.	.	.	.	.
90	33	32	.	.	.	.	.	34	33	.	.	.	.	.
100	37	35	37	.	.	.	.	38	36	38	.	.	.	.
125	54	49	51	.	.	.	.	55	50	52	.	.	.	.
150	68	59	63	68	.	.	.	70	60	64	70	.	.	.
175	88	79	81	84	.	.	.	90	80	82	86	.	.	.
200	97	88	90	91	97	.	.	100	89	91	94	100	.	.
225	106	95	97	100	104	.	.	110	96	98	102	107	.	.
250	125	111	113	116	121	.	.	130	112	114	118	124	.	.
275	144	126	128	131	136	.	.	150	127	129	133	139	.	.
300	162	146	148	152	155	162	.	170	147	149	154	158	170	.
350	241	174	178	182	187	199	.	250	175	179	184	190	207	.
400	299	210	212	216	222	234	299	310	211	213	218	225	242	310
450	348	240	243	248	255	268	340	354	246	249	254	260	276	346
500	414	284	288	293	300	312	388	416	287	290	295	301	320	396
550	562	327	330	337	346	426	452	582	328	331	340	350	437	468
600	630	367	370	377	386	473	500	658	368	371	380	390	485	516

D	C-Stücke (Abb. 322) d (in mm) =						Ü-Stücke (Abb. 323)	E-Stücke (Abb. 324)	F-Stücke (Abb. 325)	K-Stücke (Abb. 329) Winkel α =			
mm	D	80	100	150	200	300	kg	kg	kg	45°	30°	22,5°	15°
40	16	.	.	.	.	.	7	9	8	7	6	.	.
50	21	.	.	.	.	.	8	11	10	9	7	.	.
60	25	.	.	.	.	.	10	13	12	13	9	.	.
70	31	.	.	.	.	.	12	15	14	16	13	.	.
80	37	37	.	.	.	.	14	17	16	21	16	14	.
90	40	39	.	.	.	.	17	19	18	25	18	16	.
100	48	42	48	.	.	.	19	21	20	30	22	18	.
125	65	57	60	.	.	.	24	26	26	45	33	28	.
150	82	69	72	82	.	.	31	32	32	66	48	39	.
175	106	88	91	101	.	.	38	39	40	94	66	53	.
200	119	95	98	108	119	.	45	47	48	.	87	70	.
225	132	102	105	115	126	.	53	55	54	.	112	90	.
250	152	115	118	128	139	.	62	62	63	.	142	113	83
275	178	133	136	146	157	.	71	70	71	.	176	140	.
300	229	149	152	162	173	229	82	78	80	.	215	170	123
325	255	164	167	177	188	245	91	85	90	.	.	202	.
350	282	179	182	192	203	261	103	95	100	.	.	240	173
375	310	199	202	212	223	281	114	104	110	.	.	272	.
400	354	218	221	231	242	309	125	116	120	.	.	.	230
425	371	229	232	243	256	330	135	126	130	.	.	.	.
450	457	250	253	263	276	355	146	138	140	.	.	407	290
475	500	270	273	284	297	380	157	152	150	.	.	.	.
500	550	294	297	307	320	410	175	167	212	.	.	.	376

Gewichte gußeiserner Rohr-Formstücke in kg.

Friedrich Wilhelms-Hütte in Mülheim (Ruhr).

D	R-Stücke (Abb. 326) Lichter Durchmesser *d* des Muffenendes in mm																
mm	50	60	70	80	90	100	125	150	175	200	225	250	275	300	350	400	450
60	16	.	.	.	.	.	.	.		.	.		.	.	.	.	.
70	19	20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
80	21	22	24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
90	23	25	27	28	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
100	24	26	30	32	34	.	.	.	.	.	.		.	.	.	.	.
125	27	29	32	35	37	40	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
150	34	35	38	40	43	45	50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
175	41	43	45	47	49	51	56	62	.	.	.	.	.	.	.	.	.
200	.	49	52	54	56	58	63	69	71	.	.	.	.	.	.	.	.
225	.	.	58	61	62	64	69	75	80	82	.	.		.	.	.	.
250	.	.	66	68	70	72	77	82	88	90	93	.	.	.	.	.	.
275	.	.	.	76	77	79	84	90	96	102	104	105	.	.	.	.	.
300	.	.	.	82	84	86	91	97	103	110	118	124	126	.	.	.	.
325	.	.	.	.	94	96	100	106	112	119	126	134	136	137	.	.	.
350	.	.	.	.	.	103	108	114	120	127	134	141	146	150	.	.	.
375	.	.	.	.	.	.	118	124	130	136	142	148	154	162	167	.	.
400	.	.	.	.	.	.	.	130	136	142	148	157	163	172	176	.	.
425	.	.	.	.	.	.	.	.	145	154	160	166	174	184	190	198	.
450	.	.	.	.	.	.	.	.	.	166	172	178	185	194	204	212	.
475	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	184	190	196	204	218	224	232
500	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	208	215	232	238	245
550	.		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	260	270	280

Flanschen-Formstücke.

(Abb. 330 bis 334, S. 855.)

Lichter Durchm. *D* mm	Flanschen-Durchmesser mm	Flanschen-Deckel kg	Flanschen-Krümmer kg	Flanschen-T-Stücke kg	Flanschen-+-Stücke kg	Lichter Durchm. *D* mm	Flanschen-Durchmesser mm	Flanschen-Deckel kg	Flanschen-Krümmer kg	Flanschen-T-Stücke kg	Flanschen-+-Stücke kg
40	140	2,5	7	10	13	**225**	370	21	65	88	117
50	160	3	8	13	17	**250**	400	25	80	110	147
60	175	3,5	10	15	20	**275**	425	29	95	135	180
70	185	4	13	19	25	**300**	450	33	110	165	205
80	200	4,5	15	21	28	**325**	490	39	130	190	255
90	215	5	18	25	33	**350**	520	45	150	220	295
100	230	6	20	29	39	**375**	550	50	175	255	340
125	260	8	26	40	53	**400**	575	54	200	290	390
150	290	10	35	52	69	**425**	600	60	226	328	436
175	320	13	45	64	85	**450**	630	66	255	370	490
200	350	17	55	76	102	**475**	655	70	.	.	.

setze man die Wandstärke s gufseiserner Leitungsrohre vom lichten Durchmesser D cm

$$s = {}^1/_{60}\,D + 0{,}7 \text{ cm für stehend gegossene Rohre,}$$
$$s = {}^1/_{50}\,D + 0{,}9 \text{ cm für liegend gegossene Rohre,}$$

sofern der Betriebsdruck 10 at, der Prüfungsdruck 20 at nicht überschreitet und erhebliche Temperaturunterschiede in der Leitung nicht stattfinden. Dampfrohre sowie Leitungen, die besonders schädigenden Einflüssen ausgesetzt sind, verlangen von etwa $D = 10$ cm an meist eine Vergröfserung der vorstehenden Werte von s um 12,5 bis 25 vH. Rohre mit kleinem innerem Ueberdrucke (z. B. Gas- und Windrohre) können schwächer gehalten werden.

Deutsche Rohr-Normalien von 1882 für gufseiserne Muffen- und Flanschenrohre s. S. 852 bis 857. In Abb. 318 (S. 853) und 319 (S. 853) sind die Querschnittsteile, die für die Angaben des Muffen- bzw. Flanschgewichtes in der Tafel S. 852 u. 853 mafsgebend sind, doppelt schraffiert. Der Anschlufs des Flansches an die Rohrwandung (s. Abb. 319) nimmt etwa von der Stärke d bis auf s mit der Neigung 1 : 5 ab; das Anschlufsgewicht ist im Flanschgewicht mit enthalten. Um nicht die ganze Stirnfläche des Flansches bearbeiten zu müssen, gibt man diesem eine Arbeitsleiste (Dichtungsleiste).

Die Beanspruchung der Flanschenschrauben, wie die Normalien (S. 853) sie gestatten, ist bei den gröfseren lichten Weiten für einen Betriebsdruck von 10 at (mit $k_z = 700$ kg/qcm) zu hoch, was bei einer Steigerung des Druckes zu beachten ist.

Biegeversuche, auf der Friedrich Wilhelms-Hütte in Mülheim (Ruhr) mit normalen Muffenrohren (s. S. 852), nach dem Belastungsfalle Nr. 2 S. 446 angestellt, ergaben bei $l = 2{,}62$ m Freilänge die folgenden Grenzwerte der Bruchbelastung P:

$D =$ 80 mm	$P =$ 1400 bis 1770 kg	$D =$ 175 mm	$P =$ 7 350 bis 9 200 kg
100 „	2060 „ 2780 „	200 „	10 140 „ 13 280 „
125 „	2930 „ 4120 „		

2. Bei hohem Drucke (z. B. für Druckwasserleitungen) wird die Wandstärke der Rohre nach **1.** auf S. 502 ermittelt und hierzu bei stehendem Gufs 0,7 cm zugeschlagen; dabei ist p_i (in at) der gröfste Betriebsüberdruck und $k_z = 200$ kg/qcm. Bei liegendem Gufs ist ein gröfserer Zuschlag als 0,7 cm erforderlich.

Ueber gufseiserne Dampfrohre für hohen Druck s. die Normalien von 1900 S. 868 u. f. — Die Friedrich Wilhelms-Hütte in Mülheim (Ruhr) berechnet dabei die Wandstärke s nach der Formel $s = 0{,}00238\,p\,D + 0{,}86$ cm, worin p den Druck in at bedeutet.

2. Schutz gegen Rostbildung für die gufseisernen Wasser- und Gasleitungsrohre meist durch heifsen Asphalt bzw. Teer; die geputzten und auf etwa 100 bis 150° erwärmten (vorher geprefsten) Rohre werden darin eingetaucht und längere Zeit belassen. Nach einem anderen Verfahren wird der Asphaltlack mittels Haarbürsten auf die erwärmten Rohre aufgetragen, wobei das Muffeninnere und die Aufsenfläche des Rohrendes (die bei dem ersten Verfahren vor dem Eintauchen mit Kalkmilch angestrichen werden) unmittelbar frei bleiben.

3. Dichtungsmittel der Muffenrohre für Gas- und Wasserleitungen: ein mit Teer getränkter Hanfstrick und ein (durch vorgelegten Tonring ermöglichter) stetiger Bleieingufs; Strick und Blei werden mit Hammer und Setzeisen verstemmt. — Bei Flanschenrohren werden, u. zw. in Form von Scheibenringen, Gummi (mit Einlagen von feinem Drahtgeflecht, Hanf usw.), Blei, Pappe mit Mennige, Asbestpappe usw., bei Dampfleitungen auch wohl profilierte Kupferringe (auch Lechlersche Kupferringe mit Asbesteinlage) verwendet.

Muffenverbindungen. Normale Verbindung s. Abb. 318. Bewegliche Verbindung (R. Böcking & Co.) für Dükerrohrleitungen (Abb. 335); Muffe und Flanschring mit Blei ausgegossen und verstemmt. Kobersche Verbindung (Abb. 336) für Druckluftleitungen ermöglicht Bewegungen der Rohrstücke bei Wärmeänderungen.

Abb 335.

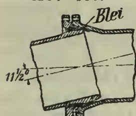


Abb. 336.



Abb. 337.

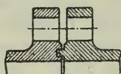


Abb. 338.

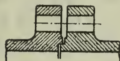
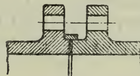


Abb. 339.



Flanschverbindungen. Normale Verbindung s. Abb. 319. Verbindungen, die ein Entweichen der Dichtung nach aufsen verhindern, s. Abb. 337, 338 u. 339.

4. Besondere Leitsätze und **Normalien für Flanschen und Formstücke zu Heizungszwecken** sind im Jahre 1902 von dem Verbande Deutscher Zentralheizungs-Industrieller (Berlin SW 47, Yorkstrafse 83) herausgegeben worden. Betriebsdruck 5 at bei Füllung mit kaltem Wasser, 3 at bei solcher mit heifsem Wasser oder Dampf.

5. Normalien für gufseiserne Abflufsrohre für Hausentwässerungen, aufgestellt von dem Verbande Deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine im Jahre 1902; Muffenrohre von 50, 70, 100, 125, 150 und 200 mm lichtem Durchmesser.

Erlafs des preufsischen Ministers der öffentl. Arbeiten vom 20. November 1905: Diese Normalien sind nicht in allen Fällen annehmbar. Bis auf weiteres ist daher gufseisernen Abflufsrohren mit folgenden Abmessungen der Vorzug zu geben:

Rohrweite $D =$	mm	50	70	100	125	150	200
Rohrlänge $L =$	m	2	2	2 u. 3	2 u. 3	2 u. 3	2 u. 3
Wandstärke s mindestens	mm	5	5	6	6	6	6
Muffentiefe einschl. Zentrierring	„	65	70	75	75	80	90
Muffenstärke	„	6	7	7	8	8	8
Stärke der Dichtungsfuge	„	6	6	6	7	7	7

Die Rohrlängen von 3 m sind hauptsächlich bei Erdleitungen zu verwenden. Für die Dichtungsfuge genügt zylindrische Form.

b. Schmiedeiserne Rohre.

1. Genietete Rohre für grofse Weiten oder bei grofsen äufseren Kräften (Wind- und Lüftungsleitungen usw.). Ueber Berechnung der

Blechdicke s, Herstellung usw. s. S. 502, 503, 672 u. f. Auf die Gröfse von s sind aufser dem Betriebsdrucke u. U. Rostbildung oder sonstige Abnutzung oder auch äufsere Kräfte von Einflufs.

Verbindung der Leitungsrohre durch aufgenietete Winkeleisen-Flansche, nach deren Nietteilung sich die Schraubenteilung richtet.

2. Gelötete Rohre (hart gelötet) zu Dampfheizungen.

3. Geschweifste Rohre mit stumpfer Schweifsnaht (Gasrohre) oder, besser, mit übereinander gelappter Schweifsnaht (Siede- oder Kesselrohre) hergestellt. Je nach dem Verwendungszwecke zu Leitungen für Flüssigkeiten, Gas, Luft, Dampf, zu Heizungs-, Lüftungs- und Kondensationsanlagen usw. bleiben die Rohre entweder roh, oder sie werden asphaltiert, mit Mennige oder Oelfarbe gestrichen, verzinnt.

Rohre für höheren Innendruck werden mittels Schrauben und loser oder fester Flansche verbunden; dabei können die losen Flansche sitzen 1. hinter umgebördelten Rohrenden, 2. hinter aufgeschweifsten Bunden, die in- oder übereinander greifen oder glatt sind; 3. benutzt man feste (vernietete oder aufgelötete) schmiedeiserne Winkelflansche (s. S. 869 u. f.). Geschweifste Rohre von 0,5 m und mehr Weite erhalten häufig Muffenverbindung (s. d. D. R.-P. Nr. 30 757 des Blechwalzwerks Schulz Knaudt, A.-G. in Essen [Ruhr]; dieses Werk fertigt geschweifste Dampfkessel-Feuerrohre von $D = 0{,}4$ bis 2,0 m Durchmesser in Blechdicken von 8 bis 40 mm; Längen bis 10 m, Gewichte bis 5000 kg).

Geschweifste Rohre von W. Fitzner, Laurahütte (O.-S.) in folgenden gangbaren Abmessungen bis zu 12 m Länge:

Durchmesser 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550 mm, 4 bis 10 mm stark.
Durchmesser 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 1000 mm, 6 bis 12 mm stark.

Abb. 340.

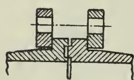


Abb. 341.

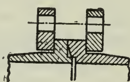


Abb. 342.



Auch andere Abmessungen sowie Längen bis zu 22 m erhältlich. Geschweifste Krümmer. Flanschverbindungen s. Abb. 340, 341 u. 342, oder mit losen sogen. Sicherheitsflanschen, auch mit angeschweifsten Winkelflanschen. Auch werden flufseiserne Muffenrohre angefertigt.

Gasrohre (stumpf geschweifst, für Gas- und Wasserleitungen), mit Gewinde (s. S. 668) und Muffe. Für Wasserleitungen verzinkt, ebenso wie die Verbindungsstücke (Fittings), die auch aus schmiedbarem Gufs gefertigt werden. Uebliche Abmessungen der Gasrohre enthält die folgende Tafel, worin D die lichte Weite (in Z. engl.), s die Wandstärke in mm, g das Rohrgewicht in kg/m. Das auf S. 668 angegebene Gasrohrgewinde setzt eine um etwa 1 mm gröfsere Wandstärke s voraus, mithin auch gröfseres Gewicht.

$D =$	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1	1 1/4	1 1/2	1 3/4	2	2 1/4	2 1/2	2 3/4	3	3 1/2	4
$s =$	1,9	2,1	2,3	2,7	3	3	3,3	3,3	3,7	3,9	4	4,3	4,5	4,7	4,8	5	5,3	5,3
$g =$	0,4	0,57	0,87	1,15	1,50	1,72	2,25	2,44	3,4	4,2	4,6	5,8	6,8	7,7	8,9	10	11,5	13,5

Rohre für hohen Druck, für Manometer, Wasserdruckpressen usw.:

Innerer Durchmesser in engl. Z.	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	1	1 1/4	1 1/2	1 3/4	2
„ „ „ mm	6	10	13	16	19	25	32	38	44	51
Rohrgewicht bei 1/4 engl. Z. Wandstärke in kg/m	2,05	2,5	2,9	3,4	3,9	4,9	6,0	7,0	7,8	9,0

Dampfrohre für hohen Druck s. folgende Tafel sowie deren vom Vereine deutscher Ingenieure (1900) aufgestellte Normalien auf S. 868 u. f.

Ueberlappt geschweifste Rohre (Heiz- und Siederohre)

von Balcke, Tellering & Cie., A.-G. in Benrath.

Zulässiger Betriebsüberdruck bis 15 at.

Aeufserer Durchmesser engl. Z.	Aeufserer Durchmesser mm	Gewöhnliche Wandstärke mm	Rohrgewicht ausschl. Flansche kg/m	Aeufserer Durchmesser engl. Z.	Aeufserer Durchmesser mm	Gewöhnliche Wandstärke mm	Rohrgewicht ausschl. Flansche kg/m
1 1/2	38,1	2 1/4	1,97	5 1/4	133,4	4	12,65
1 5/8	41,3	2 1/4	2,17	5 1/2	139,7	4 1/2	14,90
1 3/4	44,4	2 1/4	2,32	5 3/4	146,1	4 1/2	15,55
1 7/8	47,6	2 1/4	2,49	6	152,4	4 1/2	16,20
2	50,8	2 1/2	2,97	6 1/4	158,8	4 1/2	17,00
2 1/8	54,0	2 1/2	3,15	6 1/2	165,1	4 1/2	17,65
2 1/4	57,1	2 3/4	3,65	6 3/4	171,5	4 1/2	18,31
2 3/8	60,3	3	4,20	7	177,8	4 1/2	19,08
2 1/2	63,5	3	4,45	7 1/2	190,5	5 1/2	24,93
2 3/4	69,8	3	4,90	8	203,2	5 1/2	26,60
3	76,2	3	5,35	8 1/2	215,9	6 1/2	33,20
3 1/4	82,5	3 1/4	6,35	9	228,6	6 1/2	35,30
3 1/2	88,9	3 1/4	6,78	9 1/2	241,3	6 1/2	37,20
3 3/4	95,2	3 1/4	7,30	10	254,0	6 1/2	39,50
4	101,6	3 3/4	9,01	10 1/2	266,7	7	44,50
4 1/4	108,0	3 3/4	9,36	11	279,4	7 1/2	49,60
4 1/2	114,3	3 3/4	10,10	11 1/2	292,1	7 1/2	52,10
4 3/4	120,7	4	11,46	12	304,8	7 1/2	54,70
5	127,0	4	12,03				

Die Wandstärken (bei Verwendung als **Dampfkesselrohre**) auch 1/4 bis 7 mm gröfser, bei äufserem Durchmesser bis 1 7/8″, 1/4 bis 10 mm gröfser bei gröfserem Durchmesser mit oder ohne Flanschen und Stutzen.

Uebliche Länge 4 bis reichlich 5 m. Für gröfsere Längen tritt ein Preisaufschlag ein. Bei Längen von weniger als 4 m ist die erforderliche gröfsere Anzahl der Flansche besonders zu bezahlen. Für **Heizzwecke** und für **Dampfleitungen** mit geringem Innendrucke, von etwa 4 engl. Z. Aufsendurchmesser an, auch kleinere Wandstärken. Die Rohre werden auf Wunsch an den Enden erweitert oder verengt oder mit angelöteten Kupferstutzen versehen.

Aufserdem geschweifste Rohre über 300 mm i. L. bis zu den gröfsten Weiten und bis zu 40 mm Wandstärke und 15 m Länge, mit und ohne Flanschen und Stutzen.

Nahtlose längsgerippte Rohre der Duisburger Eisen- und Stahlwerke zu Duisburg (Rhein). Diese sogen. „nahtlosen Patent-Stahlrohre mit Längsrippen“ aus zähem Martineisen ($K_z = 4000$ bis 5000 kg/qcm, $\varphi = 20$ bis 30 vH) werden in lichten Weiten von 105 bis 225 mm mit 4 bis 10 mm Wandstärke und in Längen von 6 bis 10 m geliefert; sie haben zwei gegenüberliegende (u. Umst. lotrecht zu verlegende) Längsrippen von 25 mm Höhe und von einer Dicke gleich der doppelten

Wandstärke. Probedruck 15 bis 35 at, je nach der Wandstärke. Verwendbar aufser zu allen Leitungen auch als Säulen, Schiffsdeckstützen, Telegraphen- und Telephonstangen, Licht- und Strommasten usw. Verbindungen s. S. 860 unter 1. bis 3.

Spiralgeschweifste Rohre der Rheinischen Metallwaren- und Maschinenfabrik zu Düsseldorf-Derendorf. Aus bestem Schweifseisen von $K_z = 3000$ bis 3600 kg/qcm. Besonders widerstandsfähig und nachgiebig. Baulänge normal 10 m, über 10 m und unter 3 m Preisaufschläge. Asphaltiert, verzinkt, gestrichen (Mennige, Oelfarbe), oder mit Juteumwicklung und Goudronanstrich geliefert. Verbindung auf eine der auf S. 860 unter 1. bis 3. angegebenen Arten, auch mit Gufseisenflanschen oder mit aufgenieteten Bunden und losen Flanschen, endlich mit angewalzter Muffe.

Aeufserer Durchmesser mm	Wandstärke mm	Zulässiger Betriebsdruck at	Probedruck at	Gewicht von 1 m Rohr ohne Flansch kg
157	3	28	40	12,5
	3,5	30	45	15,0
182	3	25	35	14,5
	3,5	30	45	17,1
208	3	22	33	16,5
	3,5	26	39	19,2
233	3	19	28	18,4
	3,5	23	34	21,6
	4	26	38	24,8
259	3	17	25	20,3
	3,5	20	30	24,0
	4	23	35	27,7
311	3,5	18	27	29,0
	4	20	30	33,3
	5	24	34	42,0
362	3,5	15	23	33,5
	4	17	25	38,5
	5	21	29	48,0

Aeufserer Durchmesser mm	Wandstärke mm	Zulässiger Betriebsdruck at	Probedruck at	Gewicht von 1 m Rohr ohne Flansch kg
416	3,5	13	18	38,8
	4	15	22	44,3
	5	18	27	54,7
467	3,5	11	17	43,5
	4	13	19	49,8
	5	16	24	62,0
	6	19	27	75,0
517	3,5	10	15	48,2
	4	12	18	55,0
	5	15	23	68,8
	6	18	26	80,0
571	3,5	9,5	14,5	53,3
	4	11	17	60,9
	5	13	20	76,0
	6	15	22	91,0
622	3,5	8,5	13	58,0
	4	10	15	66,5
	5	12,5	18,5	83,0
	6	15	22	100,0

Brunnen- und Bohrrohre (von Balcke, Tellering & Cie., A.-G. in Benrath) mit langem Gewinde und tonnenförmigen Muffen, gewöhnlich verzinkt. Uebliche Längen 3 bis 5,5 m. Der äufsere Rohrdurchmesser bei den verschiedenen Wandstärken unverändert, nur die lichte Weite wird mit zunehmender Wandstärke kleiner. Uebliche Aufsendurchmesser sind 33, 42, 48, 51,5, 59, 69, 76, 82 und 89 mm; Wandstärken 4, 4,5, 5, 6 und 7 mm.

c. Nahtlose Stahlrohre (Mannesmannrohre)
der Deutsch-Oesterreichischen Mannesmannröhren-Werke in Düsseldorf.

1. Nahtlose **Kessel- und Leitungsrohre,** den Angaben der Tafel auf S. 861 entsprechend. Uebliche Längen 4 bis 6 m, Probedruck 50 at. Verbindung mittels loser Flanschringe — dabei Rohrenden

gebördelt oder mit glatten oder ineinandergedrehten festen Bunden versehen — oder mittels fester Flansche.

Für Wasserrohrkessel, Lokomotiven usw. aufserdem nahtlose **Präzisions-Stahlrohre,** innen und aufsen glatt gezogen, von $1^1/_4$ bis $8^1/_2$ Z. engl. (32 bis 216 mm). Aufsendurchmesser bei 1 bis 8 mm Wandstärke; hierbei sind die üblichen Abweichungen der Mafse durch Kalibrieren möglichst herabgezogen.

Abb. 343.



Für **Hochdruckleitungen** dient die Doppelbördel-Flanschverbindung (D. R. P. Nr. 87 026), Abb. 343, wobei die beiden Doppelbördel eine Ringnut bilden, worin eingeprefst ein Guttapercha- oder Gummiring liegt, der durch einen übergreifenden Kupferring (von kreuzförmigem Querschnitt) am Ausweichen verhindert wird. Bei sehr hohen Drucken verstärkter Doppelbördel.

2. Mannesmann-Muffenstahlrohre, als Ersatz für die weniger widerstandsfähigen gufseisernen Muffenrohre. Fabrikationslänge bis 8 m. Probedruck 70 at. Gegen Verrosten durch Heifsasphaltierung und Umhüllung mit geteerter Jute geschützt. Die nachstehenden Bezeichnungen D, D_2, f und t enthält Abb. 318, S. 853.

Lichte Weite D . mm	40	50	60	70	75	80	90	100	125	150	175	200	225	250
Wandstärke s . mm	3	3	3	3,25	3,5	3,5	3,75	4	4	4,5	5	5,5	6,5	7,5
Muffenweite D_2 . „	60	71	81	91,5	97	102	113	123	148	174	200	227	254	282
Stärke der Dichtungsfuge f . „	7	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	8	8	8,5
Muffentiefe t . . „	81	85	88	90	91	92	94	97	100	103	106	110	110	113
Gewicht f. 1 m. kg	3,85	4,9	5,5	6,5	7,8	8,6	10,5	11,6	14	19	25,5	30	40	53

3. Mannesmann-Brunnen- und Bohrrohre nach Angabe von S. 862.

d. Kupfer-, Bronze- und Messingrohre.

Sie werden hart gelötet (also mit Naht) in Längen bis etwa 4 m oder gezogen (ohne Naht) in Längen von 0,3 bis 7 m in den Handel gebracht, u. zw. Kupfer- und Bronzerohre in Weiten $D = 3$ bis 380 mm mit Wandstärken $s = 1$ bis 10 mm, Messingrohre in äufseren Durchmessern $D' = 5$ bis 180 mm mit Wandstärken $s = 0{,}5$ bis 5 mm (s. die Tafeln auf S. 865 u. 866). Nahtlose Kupferrohre mit $D = 3$ bis 2500 mm und $s = 0{,}5$ bis 15 mm liefert Elmores Metall-A.-G. in Schladern (Sieg). Für Verzinnen der Rohre innen oder aufsen oder innen und aufsen tritt ein Preiszuschlag ein. Die Rohre kommen hart gezogen zur Ablieferung, werden auf Verlangen jedoch auch ausgeglüht geliefert, ohne Preisaufschlag.

Bei gebogenen Kupferrohren mit kleinem D sei der Halbmesser der gekrümmten Mittellinie $R = 2\,D$ bis $3\,D$; für gröfsere Werte von D sei $R = 4\,D$ bis $5\,D$.

Nach den Bestimmungen der Kaiserlich Deutschen Marine*) sind gelötete Rohre für höhere Dampfspannungen auszuschliefsen; zu verwenden sind entweder gezogene oder aus Kupferblech hergestellte, mit Doppellaschen zusammengenietete Rohre. $k_z \leq 200$ kg/qcm. Bei umwickelten Rohren ist die Festigkeit der Umwicklung aufser Rechnung zu lassen. Im weiteren gelten die Bestimmungen der Normalien des Vereins deutscher Ingenieure, S. 868 u. f.

Kupferne **Trompetenrohre** und kupferne **Schlangen** s. S. 867.

*) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1895 S. 780 u. f.; ferner Hamburger Normen 1905, 9. Aufl., Boysen & Maasch, Hamburg.

Kupferne Federrohre, Knierohre, T- und +-Stücke
von F. G. Rühmkorff & Co. in Hannover-Herrenhausen.

Sämtliche Rohre sind bei 10 at probiert und bis zu 5 at verwendbar; höherer Arbeitsdruck bedingt gröfsere Wandstärke.

Lichter Durchmesser D	Kupferne Federrohre							Kupferne Knierohre		
	Wandstärke f. 5 at Arbtsdr.	Für eine Längenausdehnung von 50 mm			Für eine Längenausdehnung von 100 mm			Wandstärke für 5 at Arbeitsdruck mm		
		Annäh. Kupfer-Gewicht	Abstand von Flansch zu Flansch	Ganze Höhe	Annäh. Kupfer-Gewicht	Abstand von Flansch zu Flansch	Ganze Höhe	2,5	3,0	3,5
mm	mm	kg	mm	mm	kg	mm	mm	Annäherndes Kupfergewicht in kg		
40	2,5	6,5	500	590	7	500	675	1,2	1,4	1,7
50	„	8	525	625	9,5	550	730	1,6	1,8	2,1
60	„	10	550	660	11,5	600	800	1,9	2,2	2,6
70	„	12,5	600	700	15	650	850	2,3	2,5	3,2
80	„	15	650	745	18	700	915	2,8	3,2	3,8
90	3,0	21	700	775	25,5	750	980	3,2	3,6	4,2
100	„	25	750	870	31	800	1140	4	5	5,5
125	„	36	800	970	43	900	1285	5,9	6,6	7,3
150	3,5	57	900	1090	74	1000	1440	8	9	10
175	„	70	950	1160	94	1100	1620	10	11,3	12,3
200	„	86,5	1100	1240	120	1200	1750	12,5	14	15,3
225	4,0	117	1150	1330	165	1300	1925	14,8	16,5	18,3
250	„	144	1250	1500	200	1400	2100	18	20	22
275	„	160	1350	1600	245	1500	2250	20,5	23,1	25,5
300	„	180	1350	1700	292,5	1600	2400	24	26,5	29,5

Die **Federrohre** müssen bei ihrem Einsetzen in eine eiserne Leitung um ein drittel der berechneten Längenausdehnung (1,2 mm/m auf 100° Temperaturunterschied) auseinandergespannt eingeschaltet werden. **Bei Mangel an Raum** für Federrohre empfehlen sich Wellrohre.

Lichter Durchmesser D	Kupferne T-Stücke					Lichter Durchmesser D	Kupferne T-Stücke				
	Wandstärke mm						Wandstärke mm				
	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5		2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
mm	Annäherndes Kupfergewicht eines Stückes in kg					mm	Annäherndes Kupfergewicht eines Stückes in kg				
40	2,5	3	3,6	4,4	5	125	9,5	12,4	14,9	17,9	21,5
50	3	3,6	4,4	5	6	150	11,6	14	16,8	20	24
60	3,6	4,3	5	6	6,8	175	14,5	17,4	20,9	25	30
70	4,4	5	6	6,8	8,2	200	18,5	22	26,2	31	37,2
80	5	6	6,8	8	9,6	225	22	26,4	31,5	37,6	45
90	6	6,8	8	9,6	11,6	250	26,5	31,8	37,2	44,6	53,5
100	6,8	8,2	9,9	11,9	14,3						

Lichter Durchmesser D	Kupferne +-Stücke					Lichter Durchmesser D	Kupferne +-Stücke				
	Wandstärke mm						Wandstärke mm				
	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5		2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
mm	Annäherndes Kupfergewicht eines Stückes in kg					mm	Annäherndes Kupfergewicht eines Stückes in kg				
40	3,4	4,2	4,8	5,4	6,8	125	12,5	15	18,5	24	30
50	4	4,8	5,4	6,8	8,2	150	15,5	19,6	24	30	35
60	4,8	5,4	6,8	8,2	9,4	175	20,8	25	30	35	42
70	5,4	6,8	8,2	9,4	11	200	25	30	35	42	49
80	6,8	8,2	9,4	11	13	225	30	36	42	49	56
90	8,2	9,4	11	13	17,5	250	35	42	49	56	63
100	9,4	11	13	17,5	24						

Kupferne Trompetenrohre und kupferne **Schlangen** s. S. 867.

Bei den (um 90⁰ gebogenen) **Knierohren,** den **T-** und **+-Stücken** ist, wie bei den normalen gufseisernen Flanschen-Formstücken (s. Abb. 331, 332 und 334, S. 855), $L = D + 100$ mm, wenn D den lichten Rohrdurchmesser bedeutet. Durchmesser D' und Lochkreis-Durchmesser D'' der **schmiedeisernen Flansche** wie in Tafel S. 853.

Gezogene Kupfer-, Bronze- und Messingrohre ohne Naht.

Kupfer- und Messingwerk von C. Heckmann in Duisburg-Hochfeld.

1. Kupfer- und Bronze-Rohre.

Gewicht in kg/m.

(1 cbm Metall wiegt 9000 kg.)

Innerer Durchm. mm	Wandstärke in mm 1	$1^1/_2$	2	$2^1/_2$	3	$3^1/_2$	4	5
3	0,11	0,19	0,28	0,39	0,51	0,64	.	.
4	0,14	0,23	0,34	0,46	0,59	0,74	.	.
5	0,17	0,28	0,40	0,53	0,68	0,84	1,02	.
6	0,20	0,32	0,45	0,60	0,76	0,94	1,13	1,55
8	0,25	0,40	0,56	0,74	0,93	1,14	1,36	1,84
10	0,31	0,49	0,68	0,88	1,10	1,34	1,58	2,12
12	0,37	0,57	0,79	1,02	1,27	1,53	1,81	2,40
13	0,40	0,61	0,85	1,07	1,36	1,63	1,92	2,54
15	0,45	0,70	0,96	1,24	1,53	1,83	2,15	2,83
16	0,48	0,74	1,02	1,31	1,61	1,93	2,26	2,97
18	0,54	0,83	1,13	1,45	1,78	2,13	2,49	3,25
20	0,59	0,91	1,24	1,59	1,95	2,33	2,71	3,53
22	0,65	1,00	1,36	1,73	2,12	2,52	2,94	3,82
25	0,73	1,12	1,53	1,94	2,37	2,82	3,28	4,24
28	0,82	1,25	1,70	2,16	2,63	3,12	3,62	4,66
30	0,88	1,34	1,81	2,30	2,80	3,31	3,84	4,95
32	0,93	1,42	1,93	2,44	2,97	3,51	4,07	5,23
35	1,02	1,55	2,09	2,65	3,22	3,81	4,41	5,66
38	1,10	1,67	2,26	2,86	3,48	4,11	4,75	6,08
40	1,16	1,76	2,37	3,00	3,65	4,30	4,98	6,36
45	1,30	1,97	2,66	3,36	4,07	4,80	5,54	7,07
50	1,44	2,18	2,94	3,71	4,50	5,29	6,11	7,77
55	1,58	2,40	3,22	4,06	4,92	5,79	6,67	8,48
60	1,72	2,61	3,51	4,42	5,34	6,28	7,24	9,19
65	1,87	2,82	3,79	4,77	5,77	6,78	7,80	9,90
70	2,01	3,03	4,07	5,12	6,19	7,27	8,37	10,60
75	2,15	3,24	4,35	5,48	6,62	7,77	8,93	11,31
80	2,29	3,46	4,64	5,83	7,04	8,26	9,50	12,02
85	2,43	3,67	4,92	6,18	7,46	8,76	10,07	12,73
90	2,57	3,88	5,20	6,54	7,89	9,25	10,63	13,43
95	2,71	4,09	5,48	6,89	8,31	9,75	11,20	14,14
00	2,86	4,30	5,77	7,24	8,74	10,24	11,76	14,84
05	.	4,52	6,05	7,60	9,16	10,74	12,33	15,55
10	.	4,73	6,33	7,95	9,59	11,23	12,89	16,26
15	.	4,94	6,61	8,30	10,01	11,73	13,46	16,97
20	.	5,15	6,90	8,66	10,44	12,22	14,02	17,67
25	.	5,36	7,17	9,01	10,86	12,72	14,59	18,37
30	.	5,58	7,46	9,36	11,28	13,21	15,15	19,08

Innerer Durchm. mm	Wandstärke in mm 3	$3^1/_2$	4	5	6	7	8
135	11,71	13,73	15,76	19,82	23,92	28,15	32,35
140	12,13	14,20	16,29	20,59	24,77	29,11	33,47
145	12,56	14,70	16,85	21,21	25,61	30,09	34,61
150	12,98	15,19	17,41	21,91	26,46	31,08	35,73
155	13,39	15,68	17,98	22,61	27,31	32,06	36,86
160	13,82	16,18	18,55	23,33	28,16	33,06	38,01
165	14,25	16,68	19,11	24,03	29,01	34,03	39,12
170	14,67	17,17	19,67	24,74	29,85	35,03	40,26
175	15,09	17,67	20,24	25,53	30,71	36,02	41,34
180	15,53	18,16	20,81	26,15	31,55	37,01	42,53
185	15,93	18,65	21,36	26,85	32,40	38,04	43,63
190	16,37	19,15	21,94	27,57	33,25	39,09	44,78
195	16,77	19,64	22,49	28,27	34,10	40,02	45,90
200	17,22	20,14	23,08	28,98	34,95	40,97	47,05
205	17,63	20,64	23,63	29,68	35,80	41,95	48,16
210	18,06	21,13	24,20	30,39	36,65	42,95	49,31
215	18,49	21,63	24,75	31,09	37,49	43,93	50,43
220	18,92	22,13	25,34	31,82	38,34	44,93	51,58
225	19,33	22,62	25,89	32,52	39,18	45,91	52,68
230	19,76	23,11	26,46	33,22	40,03	46,91	53,83

	4	5	6	7	8	9	10
240	27,59	34,63	41,73	48,89	56,08	63,36	70,69
250	28,72	36,05	43,43	50,87	58,34	65,91	73,52
260	29,85	37,46	45,13	52,85	60,60	68,45	76,34
270	30,98	38,87	46,82	54,83	62,87	70,99	79,16
280	32,11	40,28	48,52	56,81	65,12	73,55	82,00
290	33,25	41,70	50,21	58,79	67,38	76,09	84,83
300	34,38	43,11	51,91	60,76	69,66	78,63	87,65
310	.	44,53	53,61	62,74	71,93	81,17	90,48
320	.	45,95	55,31	64,72	74,19	83,72	93,30
330	.	47,36	57,00	66,70	76,45	86,27	96,13
340	.	48,77	58,70	68,68	78,72	88,81	98,96
350	.	50,19	60,39	70,66	80,98	91,36	101,79
360	.	51,60	62,09	72,64	83,24	93,96	104,61
870	.	53,01	63,79	74,62	85,50	96,44	107,44
380	.	54,43	65,48	76,60	87,76	98,99	110,28

Innere Durchm. von 200 bis 230 mm auch mit 9 und 10 mm Wandstärke.

2. Messingrohre.

Gewicht in kg/m.

(1 cbm Messing wiegt 8500 kg.)

Aeußerer Durchm. mm	Wandstärke in mm																
	1/2	3/4	1	1 1/4	1 1/2	1 3/4	2	2 1/4	2 1/2	2 3/4	3	3 1/4	3 1/2	3 3/4	4	4 1/2	5
5	0,06	0,08	0,11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	0,07	0,10	0,13	0,16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	0,10	0,15	0,19	0,22	0,26	0,29	0,32	0,34	.	.	.	.	.	.	.	.	
10	0,13	0,19	0,24	0,29	0,34	0,39	0,43	0,47	0,50	0,53	.	.	.	.	.	.	
12	0,15	0,22	0,29	0,36	0,42	0,48	0,53	0,59	0,63	0,68	0,72	.	.	.	.	.	.
13	0,17	0,24	0,32	0,39	0,46	0,53	0,59	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,89	.	.	.	.
14	0,18	0,26	0,35	0,42	0,50	0,57	0,64	0,70	0,77	0,83	0,88	0,93	0,98	.	.	.	
15	0,19	0,28	0,37	0,46	0,54	0,62	0,69	0,77	0,83	0,90	0,96	1,02	1,07	1,13	1,17	.	
16	0,21	0,30	0,40	0,49	0,58	0,67	0,75	0,83	0,90	0,97	1,04	1,11	1,16	1,23	1,28	1,38	1,47
18	0,23	0,35	0,45	0,56	0,66	0,76	0,85	0,95	1,03	1,12	1,20	1,28	1,35	1,43	1,50	1,62	1,73
20	0,26	0,39	0,51	0,62	0,74	0,85	0,96	1,07	1,17	1,27	1,36	1,45	1,54	1,63	1,71	1,86	2,00
22	0,29	0,43	0,56	0,69	0,82	0,95	1,07	1,19	1,30	1,41	1,52	1,63	1,73	1,83	1,92	2,10	2,27
24	0,31	0,47	0,61	0,76	0,90	1,04	1,17	1,31	1,43	1,56	1,68	1,80	1,92	2,03	2,14	2,34	2,54
25	0,33	0,49	0,64	0,79	0,94	1,09	1,23	1,37	1,50	1,63	1,76	1,89	2,01	2,13	2,24	2,46	2,67
26	0,34	0,51	0,67	0,83	0,98	1,13	1,28	1,43	1,57	1,71	1,84	1,97	2,10	2,23	2,35	2,58	2,80
28	0,37	0,55	0,72	0,89	1,06	1,23	1,39	1,55	1,70	1,85	2,00	2,15	2,29	2,43	2,56	2,82	3,07
30	0,39	0,59	0,77	0,96	1,14	1,32	1,50	1,67	1,84	2,00	2,16	2,32	2,48	2,63	2,78	3,06	3,34
32	0,42	0,63	0,83	1,03	1,22	1,41	1,60	1,79	1,97	2,15	2,32	2,49	2,66	2,83	2,99	3,30	3,60
35	0,46	0,69	0,91	1,13	1,34	1,55	1,76	1,97	2,17	2,37	2,56	2,75	2,94	3,13	3,31	3,66	4,01
38	0,50	0,75	0,99	1,23	1,46	1,69	1,92	2,15	2,37	2,59	2,80	3,02	3,22	3,43	3,63	4,03	4,41
40	0,53	0,79	1,04	1,29	1,54	1,79	2,03	2,27	2,50	2,73	2,96	3,19	3,41	3,63	3,84	4,27	4,67
42	0,56	0,83	1,09	1,36	1,62	1,88	2,14	2,39	2,64	2,88	3,12	3,36	3,60	3,83	4,06	4,51	4,94
45	0,60	0,89	1,17	1,46	1,74	2,02	2,30	2.57	2,84	3,10	3,36	3,62	3,88	4,13	4,38	4,87	5,34
48	0,64	0,95	1,25	1,56	1,86	2,16	2,46	2,75	3,04	3,32	3,60	3,88	4,15	4,43	4,70	5,23	5,74
50	0,66	0,99	1,31	1,63	1,94	2,25	2,56	2,87	3,17	3,47	3,76	4,06	4,35	4,63	4,91	5,47	6,01
52	0,69	1,03	1,36	1,69	2,02	2,35	2,67	2,99	3,30	3,62	3,92	4,23	4,53	4,83	5,13	5,71	6,27
55	0,73	1,09	1,44	1,79	2,14	2,49	2,83	3,17	3,50	3,83	4,16	4,49	4,81	5,13	5,44	6,06	6,67
58	0,76	1,15	1,52	1,89	2,26	2,63	2,99	3,35	3,71	4,06	4,41	4,75	5,09	5,43	5,76	6,42	7,07
60	0,79	1,19	1,58	1,96	2,34	2,72	3,10	3,47	3,84	4,20	4,57	4,92	5,28	5,63	5,98	6,66	7,34
65	0,85	1,29	1,71	2,13	2,54	2,95	3,36	3,77	4,17	4,57	4,97	5,36	5,75	6,13	6,51	7,26	8,01
70	0,92	1,39	1,84	2,29	2,74	3,19	3,63	4,07	4,51	4,94	5,37	5,79	6,21	6,63	7,04	7,87	8,67
75	0,98	1,49	1,97	2,46	2,94	3,42	3,90	4,37	4,84	5,30	5,77	6,23	6,68	7,13	7,58	8,47	9,34
80	1,06	1,59	2,11	2,63	3,14	3,65	4,16	4,67	5,17	5,67	6,17	6,66	7,15	7,63	8,11	9,07	10,01
85	.	.	2,24	2,79	3,34	3,89	4,43	4,97	5,51	6,04	6,57	7,09	7,61	8,13	8,65	9,67	10,68
90	.	.	2,38	2,96	3,54	4,12	4,70	5,27	5,84	6,41	6,97	7,53	8,08	8,63	9,18	10,27	11,34
95	.	.	.	.	3,74	4,36	4,96	5,57	6,17	6,77	7,37	7,96	8,55	9,13	9,71	10,87	12,01
100	.	.	.	.	3,94	4,60	5,23	5,87	6,50	7,14	7,77	8,39	9,01	9,63	10,25	11,47	12,68
105	.	.	.	.	4,14	4,83	5,50	6,17	6,84	7,51	8,17	8,83	9,48	10,14	10,78	12,07	13,35
110	.	.	.	.	4,34	5,07	5,77	6,47	7,18	7,88	8,57	9,26	9,95	10,64	11,32	12,68	14,02
115	.	.	.	.	4,55	5,29	6,04	6,77	7,52	8,24	8,97	9,70	10,42	11,14	11,85	13,27	14,69
120	.	.	.	.	4,77	5,53	6,30	7,07	7,84	8,61	9,37	10,13	10,88	11,64	12,38	13,88	15,36
125	.	:	.	.	.	.	6,57	7,37	8,18	8,98	9,77	10,56	11,35	12,14	12,92	14,48	16,02
130	.	.	.	.	.		6,83	7,67	8,51	9,34	10,17	10,99	11,82	12,64	13,46	15,08	16,68
135	.	.	.	.	.	.	7,10	.	8,84	.	10,57	.	12,29	.	13,99	.	17,36
140	.	.	.	.	.	.	7,37	.	9,18	.	10,97	.	12,76	.	14,53	.	18,02
145	.	.	.	.	.	.	7,64	.	9,51	.	11,37	.	13,22	.	15,06	.	18,69
150	.	.	.	.	.	.	7,90	.	9,85	.	11,78	.	13,69	.	15,59	.	19,36
155	.	.	.	.	.	.	8,17	.	10,18	.	12,18	.	14,16	.	16,13	.	20,03
160	.	.	.	.	.	.	8,44	.	10,51	.	12,58	.	14,63	.	16,66	.	20,69
165	.	.	.	.	.	.	.	.	10,85	.	12,98	.	15,10	.	17,20		21,36
170	.	.	.	.	.	.	.	.	11,19	.	13,38	.	15,56	.	17,73	.	22,03
175	.	.	.	.	.	.	.	.	11,52	.	13,78	.	16,03	.	18,27	.	22,70
180	.	.	.	.	.	.	.	.	11,85	.	14,18	.	16,50	.	18,80	.	23,37

Kupferne Trompetenrohre.*)

Lichter Durchmesser	Wandstärke	Für eine Längenausdehnung von 50 mm		Für eine Längenausdehnung von 100 mm	
		Kupfergewicht	Abstand v. Flansch zu Flansch	Kupfergewicht	Abstand v. Flansch zu Flansch
mm	mm	kg	mm	kg	mm
40	2,5	7	500	7,5	500
50	"	9	525	10	550
60	"	10,5	550	11,5	600
70	"	14	600	16	650
80	"	17	650	19	700
90	3,0	26	700	28,5	750
100	"	28,5	750	33,5	800
125	"	38,5	800	47	900

Kupferne Schlangen.*)
Gewicht in kg/qm.

Wandstärke	Lichter Durchmesser in mm							
mm	40	50	60	70	80	90	100	125
2,0	20	20	20	20	20	20	20	20
2,5	25	25	25	25	25	25	25	25
3,0	30	30	30	30	30	30	30	30

3. Biegsame Messingrohre ohne Naht.

Deutsche Waffen- und Munitionsfabriken in Karlsruhe.

Aus nahtlos gezogenen Rohren, in die schraubenförmig verlaufende Wulste eingewalzt werden, in Messing und Tombak hergestellt, u. zw. in Längen von 2,8 bis 4,0 m. Querschnitt der Wulste s. Abb. 344.

Abb. 344.



Durch Umhüllung mit galvanisiertem Flachstahlgeflecht, das die Biegsamkeit der Rohre nicht vermindert, kann der in der folgenden Tafel angegebene Betriebsdruck auf das 3- bis 4-fache erhöht werden. Die Längsfederung der Rohre bei zwangsweiser Führung beträgt 50 mm/m für Rohre mit 15 mm und mehr lichtem Durchmesser. Aufser zur Fortleitung von Luft, Gas, Dampf und Flüssigkeiten sind die biegsamen Messingrohre auch als Dehnungsrohre benutzbar.

Verbindung mittels Muffen, in denen das Rohr entweder mit Weichlot vergossen oder verschraubt wird.

Durchmesser lichter	Durchmesser äufserer	Wandstärke	Betriebsdruck	Gewicht f. 1 m	Durchmesser lichter	Durchmesser äufserer	Wandstärke	Betriebsdruck	Gewicht f. 1 m
mm	mm	mm	at	kg	mm	mm	mm	at	kg
6	10,3	0,3	35	0,11	30	51,5	0,8	7	1,70
8	13	0,3	30	0,143	35	58,5	0,8	7	2,00
10	19,2	0,5	22	0,36	40	62,6	0,8	6	2,29
12	22,2	0,5	20	0,41	45	68,2	0,8	6	2,46
15	28,5	0,6	18	0,54	50	73	0,8	5	2,65
20	36,5	0,6	12	0,81	60	86	0,8	5	3,25
25	42,2	0,7	9	1,10	70	96	0,8	5	3,70
25	42,6	0,9	11	1,44	80	107	1,0	5	4,90

*) Von F. G. Rühmkorff & Co. in Hannover-Herrenhausen.

e. Normalien zu Rohrleitungen für Dampf von hoher Spannung,

aufgestellt vom Vereine deutscher Ingenieure 1900.*)

1. Geltungsbereich nach Rohrdurchmesser und Dampfdruck; Prüfungsdruck.

Die Normalien gelten für innere Rohrdurchmesser von 30 bis 400 mm und für einen inneren Betriebsüberdruck von 8 bis 20 at; für Rohre von mehr als 300 mm Durchmesser ist aufserdem eine Zahlenreihe der Abmessungen für 15 at Ueberdruck aufgestellt.

Die Einzelstücke sind bei gewöhnlicher Temperatur mit dem zweifachen höchsten Betriebsdrucke zu prüfen; dabei sind die Rohre, während sie unter Druck stehen, mit dem Hammer abzuklopfen. Es empfiehlt sich, auch die fertigen Rohrleitungen zu prüfen, u. zw. nach den für Dampfkessel geltenden Vorschriften.

Für die Rohrdurchmesser sind die Zahlen der Normalien für gufseiserne Flanschrohre (s. S. 853) beibehalten worden; für Rohre, deren Durchmesser zwischen zwei in jenen Normalien angegebenen Stufen liegt, sollen die Mafse der höheren Stufe gewählt werden.

2. Druckfläche der Flanschverbindungen.

Die den Festigkeitsberechnungen zugrunde gelegte Druckfläche der Flanschverbindungen ist gleich der Kreisfläche, die sich bis zur Aufsenkante der Dichtungsringfläche erstreckt.

3. Baustoffe.

α) **Gufseisen** darf bis 8 at Druck zu Rohren, Formstücken und Ventilkörpern für alle Durchmesser,

von 8 bis 13 at zu Ventilkörpern und Formstücken für alle Durchmesser, zu Rohren nur bis 150 mm Durchmesser,

von 13 bis 20 at überhaupt nicht verwendet werden, mit Ausnahme von Ventilen bis 50 mm Durchmesser.

Das Gufseisen mufs mindestens eine Biegungsfestigkeit $K_b = 2500$ kg/qcm bei 18 mm Durchbiegung besitzen, beide gemessen an quadratischen Stäben (mit Gufshaut und 30 mm Seitenlänge des Querschnittes), deren freie Auflagerlänge 1 m beträgt.

β) **Bronze**. Für Ventilkörper und Formstücke ist Bronze zulässig, vorausgesetzt, dafs die Bronze eine Zugfestigkeit von mindestens $K_z = 2000$ kg/qcm bei mindestens $\varphi = 15$ vH Dehnung besitzt.

Da die **Streckgrenze** der Bronze (aus 87 Cu, 8,7 Sn, 4,3 Zn oder aus 91 Cu, 5 Sn, 4 Zn bestehend) $\sigma_f = 900$ kg/qcm beträgt, so ist — bei gewöhnlicher Temperatur — für die Arbeitsbelastung (= halbe Probebelastung) $k_z \gtreqless 450$, nur ausnahmsweise bis 500 kg/qcm zu wählen.

γ) **Kupfer** soll eine Festigkeit von mindestens $K_z = 2100$ kg/qcm bei mindestens $\varphi = 35$ vH Dehnung besitzen. (Vorschrift der Kaiserl. Marine.)

δ) **Schweifseisen, Flufseisen, Stahlgufs.** Aus Schweifseisen oder Flufseisen können angefertigt werden: die Schrauben; aus Schweifseisen, Flufseisen oder Stahlgufs: die Flansche; aus Schweifseisen oder Flufseisen: die Rohrwandungen, sofern sie nicht aus Kupfer bestehen sollen. Die Ventile werden aus Stahlgufs, die Formstücke aus Stahlgufs oder Schweifseisen hergestellt, sofern nicht Bronze gewählt wird oder nach dem unter 3α) Gesagten Gufseisen zulässig ist.

Die Zahlen der Festigkeit und der Dehnung sollen betragen:

für Schweifseisen:	in der Längsrichtung	$K_z \geqq 3400$ kg/qcm,	$\varphi \geqq 12$ vH;
	in der Querrichtung	$K_z \geqq 3200$ kg/qcm,	$\varphi \geqq 8$ vH;
für Flufseisen:		$K_z \geqq 4500$ kg/qcm,	$\varphi \geqq 22$ vH;
für Stahlgufs:		$K_z \geqq 3800$ kg/qcm,	$\varphi \geqq 20$ vH.

Die Probestäbe sind den Rohren zu entnehmen.

*) Zu beziehen von der Geschäftstelle des V. d. I. Berlin NW 7, Charlottenstr. 43.

4. Schrauben.

Die Beanspruchung bei 20 at Arbeitsdruck soll im Schraubenkern betragen:

bei Schrauben von $^5/_8$ Z. engl. Durchmesser höchstens $k_z = 240$ kg/qcm,
" " " $^3/_4$ " " " " " $= 310$ "
" " " $^7/_8$ " " " " " $= 335$ "
" " " 1 " " " " " $= 415$ "
" " " $1^1/_8$ " " " " " $= 445$ "

Die Anzahl der Schrauben soll gerade sein. In der Symmetrieebene der Ventile sollen keine Schrauben sitzen.

Für Schrauben von	$^5/_8$,	$^3/_4$,	$^7/_8$,	1,	$1^1/_8$ Z. engl. Durchmesser
erhalten die Schraubenlöcher	17,	21,	24,	28,	32 mm Durchmesser.

5. Rohrwandungen.

Die Rohrwandungen dürfen nur bis zu den nachstehend angegebenen Grenzen aus Gufseisen bestehen; sonst aus Schweifseisen, aus geschweifstem oder gezogenem Flufseisen oder aus Kupfer.

α) **Gufseisen.** Bis 8 at ist Gufseisen für die Rohrwandungen bei allen Durchmessern, von 8 bis 13 at nur bis 150 mm Durchmesser zulässig, von 13 bis 20 at ist es nicht mehr zulässig (s. S. 868).

β) **Schweifseisen, Flufseisen** sollen in den Rohrwandungen bei den weitesten Rohren von 400 mm lichtem Durchmesser durch den inneren Druck höchstens mit $k_z = 400$ kg/qcm beansprucht werden.

Die Wanddicken s (in mm) in der Tafel S. 870 sind bis $D = 200$ mm lichtem Durchmesser nach der Formel $s = \frac{p\,D}{700} + 1$ berechnet, wo p den höchsten Betriebsdruck in at bezeichnet; von da an nimmt die Beanspruchung des Eisens allmählich zu, bis die Wanddicke für Rohre von 400 mm lichtem Durchmesser der Formel $s = \frac{p\,D}{800}$ entspricht.

Stumpfgeschweifste Rohre (sogen. Gasrohre) sollen nicht verwendet werden, sondern nur nahtlose oder überlappt geschweifste.

γ) **Kupfer.** Für die Wandungen kupferner Rohre sind die Bestimmungen der Kaiserlichen Marine (vrgl. S. 863) mafsgebend. Hiernach ist, wenn s und D in mm, p in at:

$$s = \frac{p\,D}{400} + 1{,}5 \text{ für Rohre bis 100 mm Durchmesser,}$$

$$s = \frac{p\,D}{400} \text{ für Rohre von 125 mm Durchmesser und darüber.}$$

Kupferne Rohre von 125 mm lichtem Durchmesser und darüber für Dampf von mehr als 8 at sind mit verzinktem Stahldrahttau so zu umwickeln, dafs die Tauspiralen sich berühren, und dafs bei dem Bruche des Taues in einer Spirale die anliegenden anderen Tauspiralen nicht lose werden; für die Dicke des Taues gelten folgende Mafse:

Lichte Rohrweite in mm	125—150	155—200	205—250	255—300	305 —350	355—400
Umfang des Drahttaues in cm .	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0

Die Umwicklung ist mit einem guten Anstrich von Leinölfirnis zu versehen. — Wenn möglich, sind gezogene Rohre zu verwenden.

6. Flansche.

α. Flansch- und Bundköpfe für lose Flanschen.

Die Verbindung der Flanschen mit den Rohren mittels Lötung allein ist nur für Rohre bis zu 50 mm lichtem Durchmesser zulässig; bei Rohren über 50 mm Durchmesser mufs die Sicherung der Flanschköpfe gegen Abschieben von den Rohren durch Schweifsen oder Nieten, durch Aufrollen, mittels Gewindes oder durch Umbördeln erzielt werden.

Bei Kupferrohren sind die Flansch- und Bundköpfe in Bronze auszuführen.

Für überhitzten Dampf sind Verbindungen, die nur mittels Lötung hergestellt sind, nicht zulässig.

(Fortsetzung auf S. 873.)

Maſse für Normalien zu Rohrleitungen für Dampf

Lichter Durchmesser des Rohres	Wanddicke[1]) des Rohres bei Ausführung in Schweiſs- oder Fluſseisen: im Rohrschaft	Wanddicke: am Bordring	Wanddicke: Kupfer[2])	Wanddicke: am Hals des Ventils bei Ausführung in Bronze	Flanschdurchmesser	Lochkreisdurchmesser	Dichtung mit Nut und Feder: innerer Durchmesser der Nut	Breite der Nut[3])	Tiefe der Nut	Durchmesser der Dichtungsschnur bei dreieckiger Nut	Dichtung mit Linsen: äuſserer Durchmesser der Linse	Halbmesser der Wölbung	Breite der Dichtungsfläche	Dicke der Linse	Schrauben[4]): Gesamtdruck auf die Schrauben berechnet für $C + 2a$	Durchmesser	Anzahl	Durchmesser des Schraubenloches
D	s	s_1	s_2	s_3	A	B	C	a	b		E	R	c	d				
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	kg	Zoll engl.		mm
I. Rohrleitungen von																		
30	2,25	2,25	3	8	125	95	48	8	4	5	55	50	4	10	643	1/2	6	14
40	2,25	2,25	3,5	9	140	110	60	8	4	5	68	60	4	12	907	1/2	6	14
50	2,5	2,5	4	10	160	125	72	8	4	5	80	70	5	12	1216	5/8	6	17
60	3	3	4,5	11	175	135	84	8	4	5	93	85	5	14	1571	5/8	6	17
70	3	3	5	12	185	145	94	8	4	5	106	100	5	14	1900	5/8	6	17
80	3,5	3,5	5,5	13	200	160	105	8	4	5	120	115	6	16	2300	3/4	6	21
90	4	4	6	14	220	180	116	8	4	5	134	135	6	16	2737	3/4	6	21
100	4	4	6,5	15	240	190	128	11	5	7	148	155	7	18	3534	3/4	6	21
125[5])	5	5	6,5	16	270	220	154	11	5	7	176	180	7	20	4866	3/4	8	21
150[5])	5,5	5,5	7,5	18	300	250	182	11	5	7	207	210	8	20	6537	7/8	8	24
175	6	12	9	20	330	280	212	11	5	7	238	240	8	22	8600	7/8	10	24
200	7	14	10	22	360	310	242	11	5	7	269	270	8	22	10948	7/8	12	24
225	7	14	11,5	24	390	340	272	14	5	8	300	305	10	24	14137	1	12	28
250	8	16	12,5	26	420	370	300	14	5	8	330	340	10	24	16900	1	12	28
275	8	16	14	28	450	400	330	14	5	8	360	385	10	26	20130	1	14	28
300	9	18	15	30	480	430	360	14	5	8	390	430	10	26	23648	1	16	28
325	9	18	16,5	32	520	465	390	14	5	8	420	475	12	28	27445	1 1/8	16	32
350	10	20	17,5	34	550	495	420	14	5	8	450	520	12	28	31526	1 1/8	16	32
375	10	20	19	36	580	525	450	14	5	8	480	565	12	30	35890	1 1/8	18	32
400	10	20	20	38	605	550	476	14	5	8	510	610	12	30	39900	1 1/8	20	32
II. Rohrleitungen von																		
325	8	16	12,5	26	495	445	376	14	5	8	405	415	10	24	19230	1	14	28
350	8	16	14	28	525	475	406	14	5	8	435	460	10	26	22190	1	16	28
375	9	18	15	30	555	505	436	14	5	8	465	505	10	26	25369	1	18	28
400	9	18	16	32	585	535	465	14	5	8	505	550	12	28	28633	1	20	28

[1]) Diese Maſse gelten nur für Rohre von Schweiſseisen bzw. Fluſseisen oder Kupfer. Bei guſseisernen Rohren (s. Bestg. 3, a) sind die Wanddicken und Flanschen der deutschen Rohrnormalien entsprechend zu verstärken und zu ändern.

[2]) Die angegebenen Wanddicken für Kupferrohre beziehen sich auf 20 (I) und 15 (II) at Ueberdruck; bei geringerem Druck sind die Wanddicken nach den auf S. 869 angegebenen Formeln zu bestimmen.

[3]) Die Feder ist stets 1 mm schmaler als die Nut.

[4]) Die Auſsenmaſse der Muttern entsprechen den Vorschriften der Kaiserlichen

von hoher Spannung, aufgestellt vom Vereine deutscher Ingenieure 1900.

äufserer Durchmesser A mm	Flansche: loser Flansch – innerer Durchmesser F mm	loser Flansch – Höhe e mm	Bordring – äufserer Durchmesser G mm	Bordring – Höhe des aufgeschweifsten Bordes f mm	fester Flansch und Bordring – Höhe aus Stahlgufs g mm	$g_1 = g - b$ mm	fester Flansch und Bordring – Höhe aus Bronze h mm	$h_1 = h - b$ mm	Flansch am Ventil aus Bronze $h_v = h + b$ mm	f. Linsendichtung – Höhe des Ansatzes auf dem Flansche h_2 mm	f. Linsendichtung – Tiefe der inneren Eindrehung i mm	Hals für Rohre aus Schweifseisen oder Flufseisen: geschraubt oder eingerollt – Höhe des Halsansatzes k mm	Dicke des Halsansatzes m mm	Dicke des Halsansatzes m_1 mm	Tiefe der Einrollung t mm	genietet und gelötet – Höhe des Halsansatzes n mm	Länge der Aussparung o mm	Breite und Länge der Abschrägung l mm	genietet und verstemmt – Höhe des Halsansatzes p mm
8 bis 20 at Ueberdruck.																			
125	60	16	75	16	16	12	16	12	20	8	7	18	8	.	1	.	.	.	.
140	75	17	90	18	18	14	18	14	22	9	9	20	8	.	1	.	.	.	.
160	85	18	100	20	20	16	20	16	24	10	9	22	9	.	1	.	.	.	.
175	90	19	110	21	21	17	21	17	25	12	11	24	9	.	1	.	.	.	.
185	100	20	120	22	22	18	22	18	26	12	11	25	10	.	1	.	.	.	.
200	115	22	135	23	23	19	23	19	27	13	12	26	10	.	1	.	.	.	.
220	125	23	150	24	24	20	24	20	28	13	13	27	11	.	1,5	.	.	.	.
240	140	24	160	26	26	21	26	21	31	14	14	28	11	.	1,5	.	.	.	.
270	170	28	190	28	28	23	28	23	33	14	15	32	12	13	1,5	.	.	.	.
300	195	32	220	30	29	24	30	25	35	14	16	42	12	14	2	42	37	6	67
330	225	37	250	31	30	25	32	27	37	15	17	45	13	15	2	45	40	7	75
360	255	40	280	32	31	26	34	29	39	15	18	47	14	16	2	47	42	8	82
390	285	42	310	34	32	27	36	31	41	16	19	50	15	17	.	50	45	9	84
420	315	45	340	36	33	28	38	33	43	17	21	52	16	18	.	52	47	10	86
450	340	48	370	37	34	29	40	35	45	18	22	52	16	18	.	52	47	11	86
480	370	50	400	38	35	30	42	37	47	18	23	55	16	18	.	55	50	12	88
520	405	52	430	39	36	31	44	39	49	18	25	55	17	19	.	55	50	13	88
550	435	55	460	40	37	32	46	41	51	19	27	58	17	19	.	58	53	13	95
580	465	58	490	41	38	33	48	43	53	19	28	58	18	20	.	58	53	14	95
605	490	60	515	42	40	35	48	43	53	20	29	60	18	20	.	60	55	14	103
8 bis 15 at Ueberdruck.																			
495	390	45	415	36	33	28	38	33	43	17	21	52	16	18	.	52	47	10	86
525	415	48	445	38	34	29	40	35	45	17	22	52	16	18	.	52	47	11	86
555	445	50	475	38	35	30	40	35	45	17	23	55	16	18	.	55	50	12	88
585	480	52	505	40	36	31	42	37	47	18	25	55	17	19	.	55	50	13	88

Marine für englische und den Beschlüssen des Vereines deutscher Ingenieure für metrische Schraubenmafse.

5) Die Flanschverbindungen der Kupferrohre von 125 und 150 mm lichtem Durchmesser sind in den Abbildungen nicht dargestellt; der Unterschied gegenüber den Rohren von 175 mm lichtem Durchmesser und darüber besteht darin, dafs die Flanschverbindungen der Rohre von 125 und 150 mm lichtem Durchmesser nur eine Reihe von Nieten haben. Alle Mafse dieser Flanschverbindungen sind der vorstehenden Tafel zu entnehmen.

Mafse für Normalien zu Rohrleitungen für Dampf von hoher Spannung,

aufgestellt vom Vereine deutscher Ingenieure 1900.

(Fortsetzung von S. 870 und 871.)

Lichter Durchmesser des Rohres	Niete f. Rohre a. Schweifseisen oder Flufseisen						Hals für Rohre aus Kupfer					Niete für Rohre aus Kupfer				Umbördelung des Kupferrohres		Baulänge des Ventils
	Durchmesser	Abstand von der Aufsenkante des Halses		Abstand von der Innenkante des Rohres	Anzahl der Niete in einer Reihe bei einfacher Nietung	Anzahl der Niete in einer Reihe bei doppelter Nietung	Höhe des Halsansatzes	Dicke des Halsansatzes		Länge der Ausssparung	Breite und Länge der Abschrägung	Durchmesser	Abstand von der Aufsenkante des Halses		Anzahl der Niete in einer Reihe	Breite	Tiefe	L[1]) = $2D + 150$
D	q	r	r_1	u			k_1	v	v_1	o_1	l	q_1	w	w_1		x	y	
mm	mm	mm	mm	mm			mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm		mm	mm	mm
I. Rohrleitungen von 8 bis 20 at Ueberdruck.																		
30	.	.	.	.	.	.	14	7	.	14	5	.	.	.	.	3	3	210
40	.	.	.		.	.	14	8	.	15	5,5	.	.	.	.	3	3,5	230
50	.	.	.	.	.	.	14	8	.	15	5,5	.	.	.	.	3,5	3,5	250
60	.	.	.	.	.	.	14	8	.	15	6	.	.	.	.	3,5	4	270
70	.	.	.	.	.	.	15	8	.	16	6	.	.	.	.	4	4	290
80	.	.	.	.	.	.	15	9	.	16	6	.	.	.	.	4	4,5	310
90	.	.	.	.	.	.	16	9	.	16	6	.	.	.	.	4	4,5	330
100	.	.	.	.	.	.	17	9	.	16	6	.	.	.	.	4.5	5	350
125	.	.	.	.	.	.	42	9	10	.	6	11	17	.	8	4.5	5,5	400
150	13	23	45	28	10	7	42	9	10	.	6	11	17	.	10	5	6	450
175	14	24	48	30	11	8	71	10	12	.	7	12	19	40	8	5,5	7	500
200	15	25	53	32	12	9	75	11	13	.	8	13	21	43	9	6	8	550
225	16	26	55	35	14	10	79	12	14	.	9	14	23	47	10	7	9	600
250	17	27	58	36	15	12	81	13	15	.	10	15	25	51	12	8	10	650
275	17	27	58	36	16	13	83	14	16	.	11	16	27	55	13	9	11	700
300	18	28	60	38	17	14	88	15	17	.	12	17	29	58	14	10	12	750
325	18	28	60	38	18	15	94	16	18	.	13	18	31	63	15	11	13	800
350	19	30	64	40	19	16	100	17	19	.	13	18	31	63	16	11	14	850
375	19	30	64	40	20	17	105	18	20	.	14	20	33	68	17	12	15	900
400	20	32	67	44	21	18	109	18	20	.	14	20	33	68	18	12	15	950
II. Rohrleitungen von 8 bis 15 at Ueberdruck.																		
325	17	27	58	36	18	15	81	13	15	.	10	15	25	51	15	8	10	800
350	17	27	58	36	19	16	83	14	16	.	11	16	27	55	16	9	11	850
375	18	28	60	38	20	17	88	15	17	.	12	17	29	58	17	10	12	900
400	18	28	60	38	21	18	94	16	18	.	13	18	31	63	18	11	13	950

[1]) Unter Baulänge L des Ventils ist das Mafs verstanden, das sich von Mitte zu Mitte Ventil ohne Rücksicht auf die Dichtung ergibt, wenn zwei gleiche Ventile aneinander gefügt werden.

β. Flansch- und Schraubenkreisdurchmesser.

Bis zu 80 mm lichtem Durchmesser stimmen die Flansch- und Schraubenkreisdurchmesser mit den Maſsen der guſseisernen Flanschrohre für geringen Druck überein; über 80 mm Durchmesser hinaus sind sie gröſser.

γ. Dichtung.

Bei Anwendung von glatten Flanschen sind solche Dichtungsringe zu wählen, die durch hohen Dampfdruck nicht herausgedrückt werden können.

Werden solche Flansche angewendet, die einander zentrieren, so ist der eine Flansch mit einem vorstehenden Rande, der andere mit einer entsprechenden Eindrehung zu versehen. Bei Ventilgehäusen soll der Flansch auf der Seite des einströmenden Dampfes die Nut, der auf der anderen Seite die Feder enthalten. Wo das Bedürfnis vorliegt, einen Bindflansch einziehen zu können, soll der vorspringende Teil des Zentrierringes fortfallen.

Die in die Normalien aufgenommenen Dichtungen sind entweder metallisch oder weich.

Flanschverbindungen für 175 mm lichten Durchmesser.

In den Abb. 345 bis 350 bedeutet einfache Strichelung Schweiſs- oder Fluſseisen, kreuzweise Strichelung Stahlguſs oder Fluſseisen, punktierte Strichelung Kupfer, einfache und punktierte Strichelung Bronze.

Abb. 345.

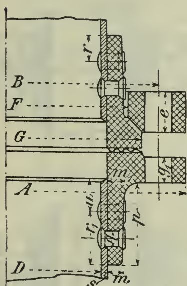


Abb. 346.

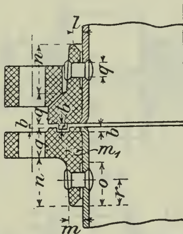


Abb. 347.

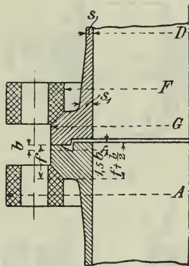


Abb. 348.

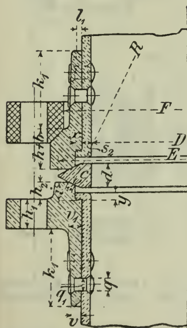


Abb. 349.

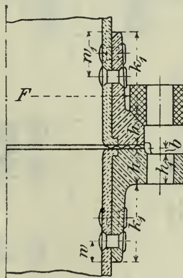
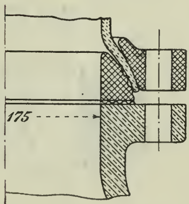


Abb. 350.
Flanschverbindung von Gebr. Sulzer.



Von metallischen Dichtungen sind der gewellte Kupferring zwischen glatten Flanschen und die metallene Linse mit geschliffenen Kugelflächen benutzt. Die letztere Anordnung gestattet Richtungsänderungen in der Rohrleitung und ist, weil jedes Dichtungsmittel fortfällt, die zuverlässigste, wenn auch teuerste Dichtung.

Von weichen Dichtungen erscheint die durch runde Schnur in Dreiecknute mit Zentrierring besonders empfehlenswert. Die Packung ist eingeschlossen und wird durch den Dampfdruck in den keilförmigen Winkel hineingedrückt. Beim Anziehen des Flansches wird Metall auf Metall gedrückt, sodafs der Flansch — und mit ihm das Rohr — nicht schief gezogen werden kann. Ein einmal angezogener Flansch hält für alle Drücke dicht. Die runde oder auch mit anderem Querschnitt versehene Dichtungsschnur läfst sich über den Zentrierring hinüberziehen und wird durch ihre Spannung festgehalten; infolgedessen lassen sich die Flansche in jeder Stellung, auch wenn der Ring an einem wagerecht gestellten oder nach unten gerichteten Flansch sitzt, zusammenbringen, ohne dafs der Ring abfällt. Der vorstehende Rand zentriert die Rohre. Der Spielraum in der inneren Fuge gestattet (bei einer etwa zu stark gewählten Packung) dem Ueberschufs, herauszudringen.

Die Dichtung mit rechteckiger Nut und Feder hält die Packung eingeschlossen und zentriert die Rohre. Um das Zusammenschrauben der Flansche zu erleichtern, mufs die Nut etwas weiter sein als die Feder. Die Höhen beider sind gleich, damit an der Gröfse der Fuge die Stärke der Dichtung erkennbar ist.

Flanschverbindungen für 70 mm lichten Durchmesser.

Abb. 351, 354 bis 358 haben bei derselben Dichtung verschiedene Flanschverbindungen, Abb. 351, 352 und 353 haben bei derselben Flanschverbindung verschiedene

Abb. 351.

Abb. 352.

Abb. 353.

Abb. 354.

Abb. 355.

Abb. 356.

Abb. 357.

Abb. 358.

Dichtungen. Die Dichtungen in Abb. 352 und 353 können auch mit den Flanschverbindungen in Abb. 354 bis 358 kombiniert werden, sodafs im ganzen 18 Anordnungen möglich sind.

In den Abb. 351 bis 358 bedeutet einfache Strichelung Schweifs- oder Flufseisen, kreuzweise Strichelung Stahlgufs oder Flufseisen, punktierte Strichelung Kupfer, einfache und punktierte Strichelung Bronze.

f. Blei- und Zinnrohre,

Handelsbureau der königl. sächsischen Hüttenwerke zu Freiberg i. Sachsen.

1. Weich- und Hartbleirohre.*)

Die Rohre mit den Wandstärken 1,5, 2,5, 3,5, 4.5 5,5, 5,5 und 7,5 mm sind weggelassen.

Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck für Weichbleirohr at	Zulässiger innerer Druck für Hartbleirohr at	1 Bund (Ring, Stange) wiegt etwa kg
3	1	0,14	150	16	—	
	2	0,35	60	33	—	
4	2	0,40	50	25	—	20
	3	0,70	30	37	—	
5	2	0,50	40	20	—	
	3	0,90	23	30	—	
6	2	0,60	44	16	32	
	3	1,00	27	25	50	
7	2	0,70	38	14	28	27
	3	1,00	26,5	21	42	
8	2	0,8	33	12	24	26
	3	1,2	40	19	38	50
9	2	0,8	31	11	22	25
	3	1,3	38	16	32	50
10	2	0,9	55	10	20	50
	3	1,5	50	15	30	75
	4	2,0	37	20	40	
11	2	0,9	55	9	18	50
	3	1,5	50	13	26	75
	4	2,1	36	18	36	
12	2	1,0	50	8	16	50
	3	1,6	47	12	24	
	4	2,3	32	16	32	75
	5	3,0	25	20	40	
13	2	1,1	46	7	14	50
	3	1,7	43	11	22	
	4	2,4	31	15	30	75
	5	3,2	23	19	38	
14	2	1,2	63	7	14	
	3	1,8	40	10,5	21	75
	4	2,6	28	14	28	
	5	3,5	21	17,5	35	
15	2	1,2	62	6	12	
	3	1,9	38	10	20	72
	4	2,7	100	13	26	90
	5	3,6	75	16	32	135 / 270
16	2	1,3	56	6	12	
	3	2,1	34	9	18	72
	4	2,8	95	12	24	90
	5	3,7	72	15	30	135 / 270

Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck für Weichbleirohr at	Zulässiger innerer Druck für Hartbleirohr at	1 Bund (Ring, Stange) wiegt etwa kg
17	2	1,4	52	7	14	72
	3	2,2	33	9	18	90
	4	3,0	90	11	22	135
	5	3,9	69	14	28	270
18	2	1,4	50	5,5	11	72
	3	2,3	32	8	16	
	4	3,1	87	11	22	90
	5	4,1	65	14	28	135
	6	5,1	53	17	34	270
19	2	1,5	48	5	10	72
	3	2,4	30	8	16	
	4	3,3	80	10	20	90
	5	4,3	62	13	26	135
	6	5,3	50	16	32	270
20	2	1,6	45	5	10	72
	3	2,4	30	7	14	
	4	3,4	80	10	20	90
	5	4,5	60	12	24	135
	6	5,6	48	15	30	270
21	2	1,6	45	4,75	9,5	72
	3	2,6	27	7	14	
	4	3,6	75	9	18	90
	5	4,6	58	12	24	135
	6	5,8	46	14	28	270
22	2	1,7	42	4,5	9	72
	3	2,7	27	7	14	
	4	3,7	72	9	18	90
	5	4,8	56	11	22	135
	6	6,0	45	13	26	270
23	2	1,8	40	4,5	9	72
	3	2,8	96	6,5	13	90
	4	3,8	70	8	16	135
	5	5,0	54	10	20	270
	6	6,2	43	13	26	
24	2	1,9	37	4	8	70
	3	3,0	90	6	12	
	4	4,0	67	8	16	90
	5	5,2	51	10	20	135
	6	6,4	42	12	24	270
	7	7,8	34	14,5	29	
	8	9,2	29	16	32	

*) S. die Bemerkungen S. 880.

Lichter Durchmesser	Wandstärke	Gewicht von 1 m Rohr	Größte Länge eines gepreßten Rohres	Zulässiger innerer Druck für Weichbleirohr	Zulässiger innerer Druck für Hartbleirohr	1 Bund (Ring, Stange) wiegt etwa
mm	mm	kg	m	at	at	kg
25	2	1,9	37	4	8	70
	3	3,0	90	6	12	
	4	4,1	65	8	16	
	5	5,4	50	10	20	90
	6	6,6	40	12	24	135
	7	8,0	33	14	28	270
	8	9,5	28	16	32	
26	2	2,0	35	4	7,5	70
	3	3,1	87	5,5	11	90
	4	4,3	62	7	14	135
	5	5,6	48	9	18	270
	6	6,9	39	11	22	
27	2	2,1	3,1*	3,75	7	6,5
	3	3,2	84	5	10	90
	4	4,4	60	7	14	135
	5	5,7	47	9	18	270
	6	7,1	38	11	22	
28	2	2,1	3,1*	3,5	7	6,5
	3	3,3	80	5	10	90
	4	4,5	60	7	14	135
	5	5,9	45	9	18	270
	6	7,2	37	10	20	
29	2	2,2	3,1*	3,25	6,5	6,8
	3	3,4	79	5	10	90
	4	4,7	57	7	14	135
	5	6,1	44	8	16	270
	6	7,5	36	10	20	
30	2	2,3	3,1*	3,25	6,5	7,1
	3	3,6	75	5	10	90
	4	4,9	55	6,5	13	130
	5	6,3	42	8	16	270
	6	7,7	35	10	20	
31	2	2,4	3,1*	3	6	7,5
	3	3,7	72	4,5	9	90
	4	5,0	54	6	12	130
	5	6,4	42	8	16	265
	6	7,9	34	9,5	19	
32	2	2,5	3,1*	3	6	7,8
	3	3,8	70	4,5	9	85
	4	5,1	50	6	12	130
	5	6,6	40	8	16	265
	6	8,1	32	9	18	
33	2	2,5	3,1*	3	6	7,8
	3	3,9	65	4,5	9	85
	4	5,5	47	6	12	130
	5	6,8	37	7,5	15	260
	6	8,3	30	8,5	17	

Lichter Durchmesser	Wandstärke	Gewicht von 1 m Rohr	Größte Länge eines gepreßten Rohres	Zulässiger innerer Druck für Weichbleirohr	Zulässiger innerer Druck für Hartbleirohr	1 Bund (Ring, Stange) wiegt etwa
mm	mm	kg	m	at	at	kg
34	2	2,6	3,1*	2,5	5	8,0
	3	4,0	62	4	8	85
	4	5,4	46	5,75	11,5	125
	5	6,9	36	7	14	250
	6	8,5	29	8,5	17	
35	2	2,7	3,1*	2,75	5,5	8,4
	3	4,1	60	4	8	
	4	5,6	44	5,5	11	85
	5	7,2	34	7	14	125
	6	8,8	28	8,5	17	250
	7	10,5	23	10	20	
	8	12,3	20	11	22	
36	2	2,7	3,1*	2,75	5,5	8,4
	3	4,2	60	4	8	85
	4	5,7	43	5,5	11	125
	5	7,3	34	7	14	250
	6	9,0	27	8	16	
37	2	2,8	3,1*	2,5	5	8,7
	3	4,3	58	4	8	
	4	5,9	42	5,25	10,5	85
	5	7,5	33	6,75	13,5	125
	6	9,2	27	8	16	250
	7	11	22	9	18	
	8	12,8	19	10	20	
38	2	2,8	3,1*	2,5	5	8,7
	3	4,4	56	4	8	85
	4	6,0	40	5	10	125
	5	7,7	32	6,5	13	250
	6	9,2	27	8	16	
39	2	2,9	3,1*	2,25	4,5	9,0
	3	4,5	55	3,75	7,5	85
	4	6,2	40	5	10	125
	5	7,9	30	6	12	250
	6	9,6	25	7	14	
40	2	3,0	3,1*	2,5	5	9,3
	3	4,6	50	3,5	7	80
	4	6,3	38	5	10	120
	5	8,0	30	6	12	240
	6	9,8	24	7,5	15	
41	2	3,1	3,1*	·	4,5	9,6
	3	4,7	50	3,5	7	80
	4	6,4	37	4,5	9	120
	5	8,2	29	6	12	240
	6	10,1	23	7	14	
42	2	3,2	3,1*		4,5	9,9
	3	4,8	50	3,5	7	80
	4	6,6	36	4,5	9	120
	5	8,4	28	6	12	240
	6	10,3	23	7	14	

Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Gröfste Länge eines geprefsten Rohres m	Zulässiger innerer Druck für Weichbleirohr at	Zulässiger innerer Druck für Hartbleirohr at	1 Bund (Ring, Stange) wiegt etwa kg
44	2	3,3	3,1*	·	4,5	10,2
	3	5,0	48	·	6,5	
	4	6,9	34	4,5	9	80
	5	8,7	27	5,5	11	120
	6	10,8	22	7	14	240
	7	12,7	18	8	16	
45	2	3,4	3,1*	·	4	10,5
	3	5,2	46	·	6	
	4	7,0	34	4,25	8,5	80
	5	8,9	26	5,5	11	120
	6	11,0	21	7	14	240
	7	13,0	18	7,75	15,5	
46	2	3,5	3,1*	·	4	11,0
	3	5,3	44	·	6,5	
	4	7,3	32	4	8	80
	5	9,1	26	5	10	120
	6	11,1	21	6,5	13	240
	7	13,2	18	7,5	15	
48	2	3,6	3,1*	·	4	11,2
	3	5,5	42	·	6	
	4	7,4	32	4	8	80
	5	9,4	25	5	10	120
	6	11,5	20	6	12	240
	7	13,7	17	7	14	
50	2	3,7	3,1*	·	4	11,5
	3	5,7	42	3	6	
	4	7,7	30	4	8	
	5	9,8	24	5	10	80
	6	12,0	20	6	12	120
	7	14,2	16	7	14	240
	8	16,0	15	8	16	
	10	19,6	12	10	20	
52	2	3,9	3,1*	·	3,5	12,0
	3	5,9	3,1*	·	5,5	18,3
	4	8,0	30	3,5	7	
	5	10,2	23	4,5	9	80
	6	12,4	19	5,5	11	120
	7	14,7	16	6,5	13	235
	8	17,0	14	7,5	15	
53	2	3,9	3,1*	·	3,5	12,0
	3	6,0	3,1*	·	5,5	18,6
	4	8,2	29	3,75	7,5	
	5	10,4	23	4,5	9	80
	6	12,6	18	5,5	11	120
	7	14,9	16	6,5	13	235
	8	17,4	13	7,5	15	
54	2	4,0	3,1*	·	3,5	12,4
	3	6,0	3,1*	·	5,5	18,6

Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Gröfste Länge eines geprefsten Rohres m	Zulässiger innerer Druck für Weichbleirohr at	Zulässiger innerer Druck für Hartbleirohr at	1 Bund (Ring, Stange) wiegt etwa kg
54	4	8,3	28	3,5	7	
	5	10,4	23	4,5	9	80
	6	12,8	18	5,5	11	120
	7	15,2	15	6,5	13	235
	8	17,7	13	7,25	14,5	
	8,5	19,0	12	7,5	15	
55	3	6,2	3,1*	·	5	19,2
	4	8,4	28	3,5	7	
	5	10,7	22	4,5	9	80
	6	13,0	18	5,5	11	120
	7	15,4	15	6,25	12,5	235
	8	17,9	13	7,25	14,5	
	9	20,5	11	8	16	
56	2	4,1	3,1*	·	3,5	12,7
	3	6,3	3,1*	·	5	19,5
	4	8,5	27	3,5	7	
	5	10,9	21	4,5	9	80
	6	13,3	17	5,25	10,5	120
	7	15,7	15	6	12	230
	8,5	19,5	12	7,5	15	
59	2	4,3	3,1*	·	3	13,3
	3	6,6	3,1*	·	5	20,5
	4	9,0	25	3,5	7	
	5	11,4	20	4,25	8,5	
	6	14,1	16	5	10	
	7	16,7	14	6	12	120
	8	19,1	12	6,5	13	230
	8,5	20,4	11	7	14	
	9	21,8	10	7,5	15	
	9,5	23,2	10	8	16	
	10	24,5	9	8,5	17	
60	3	6,7	3,1*	·	5	20,8
	4	9,1	25	3,25	6,5	
	5	11,6	20	4	8	
	8	19,4	12	6,5	13	120
	8,5	20,8	11	7	14	230
	9	22,1	10	7,5	15	
	9,5	23,5	9,5	8	16	
	10	24,9	9	8,25	16,5	
65	3	7,3	3,1*	·	4,5	22,6
	4	9,8	23	3	6	
	5	12,5	18	3,5	7	
	6	15,2	15	4,5	9	
	7	17,9	13	5,25	10,5	115
	7,5	19,4	11	5,75	11,5	230
	8,5	22,2	10	6,5	13	
	9	23,6	9	6,75	13,5	
	10	26,7	8	7,5	15	

Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck für Weichbleirohr at	Zulässiger innerer Druck für Hartbleirohr at	1 Bund (Ring, Stange) wiegt etwa kg
68	4	10,8	20	2,75	5,5	
	5	13,0	17	3,5	7	110
	6	15,9	14	4,5	9	220
	7	18,6	12	5	10	
	8,5	22,7	10	6	12	
	10	27,7	5,0*	7	14	138
70	4	10,6	20	2,75	5,5	110
	5	13,4	16	3,5	7	220
	6	16,2	14	4	8	
	9	25,3	5,0*	6	12	126
75	4	11,2	19	2,5	5	110
	5	14,2	15	3	6	220
	9,5	28,6	5,0*	6	12	143
80	4	12,0	5,0*	2,5	5	60
	5	15,1	5,0*	3	6	75,5
	7	21,6	5,0*	4	8	108
	8	25,2	5,0*	5	10	126
	9,5	30,3	5,0*	5,5	11	151
85	7	22,9	5,0*	4	8	114
	8	26,5	5,0*	4,5	9	132
	9	30,0	5,0*	5	10	150
	10,5	35,7	5,0*	6	12	178
90	8	27,9	5,0*	4	8	140
	9	32,0	5,0*	4,5	9	160
	9,5	33,6	5,0*	5	10	168
	10,5	37,9	5,0*	5,5	11	190
	11,5	41,5	5,0*	6	12	208
95	4	14,6	5,0*	2	4	73
	7	25,4	5,0*	3,5	7,5	127
	8	28,8	5,0*	4	8	144
	9	33,9	5,0*	4,5	9	170
	10	37,4	5,0*	5	10	187
100	3	11,0	3,1*	1,3	3,0	34
	4	14,8	5,0*	2	4	74
	5	18,8	5,0*	2,5	5	94
	9	35,0	5,0*	4,5	9	175
	9,5	37,0	5,0*	4,75	9,5	185
105	3	11,5	3,1*	1,25	2,5	36
	4	15,5	5,0*	1,75	3,5	77
	5	20,4	5,0*	2,3	4,7	102
	7	26,5	5,0*	3,3	6,6	132,5
	10,5	43,2	4,0*	5	10	173
110	3	12,7	3,1*	1,2	2,4	39
	4	16,7	5,0*	1,7	3,5	83,5
	5	20,6	5,0*	2	4	103
	8	34,4	5,0*	3,6	7	172
	8,5	35,9	5,0*	3,75	7,5	180
	10	42,8	4,0*	4,5	9	171
115	3	13,5	3,1*	1,1	2,2	42
	6	25,9	5,0*	2,5	5	130
	8,5	37,3	5,0*	3·7	7,4	186
	10	44,5	4,0*	4,3	8,6	178
120	5	23,2	5,0*	2	4	116
	6	27,0	5,0*	2,5	5	135
	9	41,3	4,0*	3,7	7,5	165
	10	46,4	4,0*	4	8	186
125	5	23,1	5,0*	2	4	116
	8,5	39,4	5,0*	3,4	6,5	197
	10,5	50,6	4,0*	4	8	202
130	4	19,0	5,0*	1,5	3	95
	5	24,1	5,0*	1,75	3,5	120
	6	29,1	5,0*	2,3	4,6	145
	7	34,2	5,0*	2,5	5	171
	8	39,3	4,0*	3	6	157
	10	50,0	3,5*	3,8	7,6	175
135	9,5	48,9	3,5*	3,5	7	171
140	3	31,5	3,1*	·	2	47
	5	02,5	5,0*	1,5	3	125
	7	03,7	5,0*	2,5	5	185
	10	65,3	3,5*	3,5	7	187
	11	35,9	3,5*	3,8	7,6	208
150	5	27,6	5,0*	1,5	3	138
	6	33,4	4,0*	1,8	3,6	134
	8	45,1	4,0*	2,5	5	180
	10	57,1	3,5*	3,3	6,6	200
160	3	17,5	3,1*	·	1,5	54
	5	30,7	4,0*	1,5	3	123
180	3	19,9	3,1*	·	1,5	62
	5	33,8	4,0*	1,4	2,8	135
	13	89,3	2,0*	3:5	7	179
	15	104,4	2,0*	4,1	8,2	209
200	5	35,9	3,5*	1,2	2,4	125
	7	51,7	3,5*	1,7	3,4	180
	10	74,9	2,0*	2,5	5	150
225	5	40,9	3,5*	1,1	2,2	143
	10	83,6	2,0*	2,2	4,4	167
	17,5	151,2	1,5*	3,8	7,6	227
250	5	45,5	3,5*	1	2	157
	10	92,5	2,0*	2	4	185
	17,5	166,5	1,5*	3,5	7	250
275	5	49,8	3,5*	1	2	174
	10	101,3	2,0*	2	4	203
	17,5	182,0	1,5*	3	6	273
300	5	54,1	3,5*	0,8	1,6	189
	10	110,3	2,0*	1,6	3,2	221

2. Zinnrohre.*)

Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck at	Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck at	Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck at
4	2,0	0,30	55	60	15	1,5	0,55	29,0	12	27	3,0	2,05	19,5	13,0
5	1,5	0,25	66	36	15	2,0	0,80	20,0	16	28	2,0	1,40	28,5	8,0
5	2,0	0,35	47	48	15	3,0	1,25	12,5	24	28	3,0	2,15	18,5	12,5
6	1,5	0,30	55	30	16	1,5	0,60	26,5	11	29	2,0	1,40	28,5	8,0
6	2,0	0,35	47	40	16	2,0	0,85	18,5	15	29	3,0	2,20	18,0	12,0
7	1,5	0,30	55	25	16	3,0	1,30	12,0	22	30	2,0	1,45	27,5	8,0
7	2,0	0,40	41	34	17	1,5	0,65	24,5	10	30	3,0	2,30	17,0	12,0
8	1,5	0,35	47	22	17	2,0	0,90	17,5	14	32	2,0	1,55	23,0	7,5
8	2,0	0,45	36	30	17	3,0	1,40	11,0	21	32	3,0	2,40	15,0	11,0
8	2,5	0,60	27	37	18	1,5	0,70	22,5	10	35	2,0	1,70	21,0	6,5
9	1,5	0,35	47	20	18	2,0	0,90	17,5	13	35	3,0	2,60	13,8	10,0
9	2,0	0,50	33	26	18	3,0	1,45	27,5	20	36	2,0	1,75	20,5	6,5
9	2,5	0,65	25	33	19	2,0	1,00	16,0	12	36	3,0	2,70	13,3	10,0
10	1,5	0,40	41	18	19	3,0	1,50	26,5	19	38	2,0	1,85	19,0	6,0
10	2,0	0,55	30	24	20	2,0	1,00	40,0	12	38	3,0	2,80	12,8	9,0
10	2,5	0,70	23,5	30	20	3,0	1,60	25,0	18	40	2,0	1,95	18,5	6,0
10	3,0	0,90	18,0	36	21	2,0	1,05	38,0	11	40	3,0	2,95	12,2	9,0
11	1,5	0,45	36,5	16	21	3,0	1,65	24,0	17	41	2,0	2,00	18,0	5,5
11	2,0	0,60	27,5	21	22	2,0	1,10	36,0	10	41	3,0	3,05	11,8	8,5
11	2,5	0,80	20,5	27	22	3,0	1,70	23,5	17	42	2,0	2,00	18,0	5,5
11	3,0	0,95	17,0	32	23	2,0	1,15	34,5	10	42	3,0	3,10	11,6	8,5
12	1,5	0,45	36,5	15	23	3,0	1,80	22,0	15,5	44	2,0	2,10	17,0	5,0
12	2,0	0,65	25,0	20	24	2,0	1,20	33,0	10	44	3,0	3,25	11,0	8,0
12	2,5	0,85	19,0	25	24	3,0	1,85	21,5	15	46	2,0	2,20	16,0	5,0
12	3,0	1,05	15,0	30	25	2,0	1,25	32,0	9	46	3,0	3,40	10,5	7,5
13	1,5	0,50	33,0	13	25	3,0	1,95	20,5	14	48	2,0	2,30	15,5	5,0
13	2,0	0,70	23,5	18	26	2,0	1,30	30,5	9	48	3,0	3,50	10,3	7,5
13	2,5	0,90	18,0	23	26	3,0	2,00	20,0	13,5	50	2,0	2,40	15,0	4,5
13	3,0	1,10	14,5	27	27	2,0	1,35	29,5	8,5	50	3,0	3,65	9,8	7,0

3. Zinnrohre mit Bleimantel (Mantelrohre).*)

Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck at	Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck at	Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck at
10	4,0	2,0	12,5	20	21	4,5	4,1	14,6	10	29	4,5	5,4	12,0	7,0
11	4,0	2,1	11,9	18	21	5,0	4,6	13,0	12	29	5,0	6,1	10,6	8,0
12	4,0	2,3	10,8	16	22	4,5	4,2	14,2	10	29	5,5	6,8	9,5	9,0
13	4,0	2,4	20,0	15	22	5,0	4,8	12,5	11	30	4,5	5,5	11,8	7,0
13	4,5	2,8	17,0	17	23	4,5	4,4	13,5	9	30	5,0	6,3	10,3	8,0
13	5,0	3,2	18,7	19	23	5,0	5,0	12,0	10	30	5,5	7,0	9,2	9,0
15	4,5	3,1	19,3	15	24	4,5	4,6	13,0	9	30	6,0	7,7	8,4	10,0
15	5,0	3,6	16,6	16	24	5,0	5,2	11,5	10	30	6,5	8,4	7,7	10,5
16	4,5	3,3	18,2	14	25	4,5	4,7	12,7	9	32	5,0	6,6	9,6	8,0
16	5,0	3,7	16,2	15	25	5,0	5,4	11,1	10	32	5,5	7,4	8,6	8,0
17	4,5	3,4	17,6	13	25	5,5	6,0	10,0	11	32	6,0	8,1	7,9	9,0
17	5,0	3,9	15,3	14	25	5,75	6,3	9,5	11,5	35	5,0	7,2	8,7	7,0
18	4,5	3,6	16,6	12	26	4,5	4,9	13,4	8	35	5,5	8,0	7,8	8,0
18	5,0	4,1	14,6	14	26	5,5	6,2	10,6	10	36	5,0	7,3	8,6	7,0
19	4,5	3,8	15,7	12	27	4,5	5,1	12,7	8	36	5,5	8,1	7,7	7,5
19	5,0	4,3	13,9	13	27	5,5	6,4	10,1	10	38	5,0	7,7	8,1	6,5
20	4,5	3,9	15,3	11	28	4,5	5,2	12,5	8	38	5,5	8,5	7,4	7,0
20	5,0	4,5	13,3	12	28	5,0	5,9	11,0	9	40	5,0	8,0	7,7	6,0
20	5,25	4,7	12,7	13	28	5,5	6,6	9,8	9,5	40	5,5	8,9	6,9	7,0

*) S. die Bemerkungen S. 880.

Bemerkungen zu den Tafeln S. 875 bis 879.

Die mit einem Stern (*) bezeichneten Rohrsorten werden, da sie sich beim Aufwickeln breit drücken, in Stangen geschnitten und, wo angängig, in Stroh, sonst aber in Lattenverschlägen oder Kisten versandt.

Sämtliche Bleirohrsorten werden 1) unverzinnt, 2) innen (durch Schwefelnatrium) geschwefelt, 3) innen und aufsen verzinnt und 4) innen oder aufsen verzinnt geliefert, ausschl. der Rohre von 3, 4, 5, 6 und 7 mm lichtem Durchmesser, die nur unverzinnt oder aufsen verzinnt hergestellt werden.

Hartbleirohre aus Weichblei mit einem Zusatz von 10 vH oder 15 vH Antimonblei haben gröfsere Elastizität bei Temperaturwechsel als Weichbleirohre und sind für Dampfleitungen diesen vorzuziehen. Der Antimongehalt beträgt 1 bis 2 oder 2 bis 3 vH.

Zinnrohre werden aufser in den S. 879 verzeichneten gangbarsten Sorten noch bis zu 60 mm lichtem Durchmesser geliefert.

Zinnrohre mit Bleimantel (Mantelrohre) haben 0,5 mm Zinnstärke. Das Mantelrohr wird nur in vollen Prefslängen abgegeben.

Der angegebene **zulässige innere Druck** bezieht sich nur auf mittlere Temperaturen bis 30°; er ist nach der Formel II auf S. 503 berechnet, wobei, entsprechend 5- bis 6-facher Sicherheit gegen Bruch (vrgl. S. 396 bis 399), für Hartblei $k_z = 50$ kg/qcm, für Weichblei $k_z = 35$ kg/qcm und für Zinn $k_z = 60$ kg/qcm gesetzt wird.

Abweichungen von den in den Tafeln vorhandenen **Gewichtangaben** bis zu ± 5 vH bleiben vorbehalten.

Die unverzinnten und die innen geschwefelten **Bleirohre** können bis zu den angegebenen gröfsten Längen in einem Stück ohne Naht oder Lötstelle geprefst werden; in der Regel werden jedoch Teillängen zu den angeführten Bundgewichten geliefert. Wird vom Besteller das Bundgewicht nicht vorgeschrieben, so werden nur Bunde bis zu 140 kg abgegeben. — Bei innen oder aufsen, sowie bei innen und aufsen verzinnten Rohren beträgt das Höchstgewicht eines Bundes dagegen nur 75 kg.

g. Normalien für Abflufsrohre aus Blei oder Steinzeug.

Runderlafs des preufsischen Ministers der öffentl. Arbeiten vom 20. November 1905.*)

Der Verband deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine hat Normalien für Abflufsrohre aufgestellt, die, soweit sie Bleirohre und Steinzeugrohre betreffen, fortan bei den von der preufsischen Staatsbauverwaltung auszuführenden Bauten zu beachten sind.

Hiernach sind die nachstehenden Bezeichnungen einheitlich zu wählen:

a) Ableitungen für liegende Leitungen, sogen. Gefällsleitungen, Sohlleitungen usw.; sie werden in Hauptleitungen und Nebenleitungen geteilt;

b) Fallrohre für senkrecht herabkommende Leitungen; sie werden in Hauptfallrohre und Nebenfallrohre geteilt;

c) Schrägleitungen für alle Leitungen, die an der Wand geschleift werden;

d) Knierohre für Rohre in Bogenform mit Halbmessern von 2 Rohrdurchmessern;

e) Bogenrohre für Rohre in Bogenform mit gröfseren Halbmessern, als unter d) angegeben;

f) Hülfsluftleitung statt sekundärer Ventilation;

g) Fufsbogen statt Fufskrümmer;

h) Verbindungen statt Abzweigungen;

i) Bogenverbindungen statt Pfeifenköpfe;

k) Sprungrohre statt Etagenbogen, S-Stücke usw.;

l) Uebergangsrohre statt Reduktionen, Sprung usw.;

m) Uebermuffen statt Ueberschieber.

Bleiabflufsrohre erhalten folgende Durchmesser, Wandstärken und Gewichte:

Lichter Durchmesser	mm	25	30	40	50
Wandstärke	mm	3,0	3,5	4,0	4,0
Gewicht für 1 m	kg	3,0	4,2	6,3	7,7

Steinzeugrohre erhalten folgende Abmessungen:

Lichter Durchmesser	cm	10	12,5	15	20
Kleinste zulässige Wandstärke	cm	1,5	1,6	1,7	1,9

dabei die Baulänge der geraden Rohre 60 und 100 cm und die Muffentiefe 6 bis 7 cm.

Die Innenfläche der Muffe und das Schwanzende des Rohres werden auf 5 cm Länge mit mindestens 5 Riefen versehen.

*) S. Zentralblatt der Bauverwaltung 1905 S. 613.

Die Dichtungstärke an der vorderen Muffenwand soll 1,5 cm betragen und darf bis zum Muffenboden sich bis auf 1,2 cm vermindern.

Für die Bogenrohre gelten folgende Abmessungen:

bei 15⁰ Zentriwinkel 200 cm Halbmesser und 52 cm Baulänge,
„ 30⁰ „ 100 „ „ „ 52 „ „
„ 45⁰ „ 60 „ „ „ 47 „ „

Für besondere Fälle (senkrechte Anschlüsse) sind Knierohre mit 90⁰ Zentriwinkel und mit einem Halbmesser gleich ungefähr dem Zweifachen des Rohrdurchmessers zu verwenden; diese Knierohre dürfen jedoch in liegenden Leitungen nicht verwendet werden.

Die Uebergangsrohre sind auf 60 cm Baulänge bemessen und vermitteln, mit Ausnahme des Ueberganges von 10 auf 15 cm, nur den Uebergang von einem Rohrdurchmesser auf den nächstfolgenden Durchmesser.

Die Verbindungsrohre sind auf 60 cm Baulänge bemessen. Der Anschluſsstutzen bildet mit dem Hauptrohr einen Winkel von 60⁰. Anschlüsse unter anderen Winkeln sowie Doppelverbindungen sind ausgeschlossen.

h. Seilrohre und Metallschläuche.

1. **Seilrohre.** Um ein Bleirohr ist eine Lage asphaltierten Hanfgarnes und dann eine Armierung aus verschlossenen Fassondrähten gelegt. Die Armierung ist zum Schutze gegen Rosten von einer dickeren Lage asphaltierten Hanfes umgeben und um das Ganze verzinkter Eisendraht gewickelt. Verbindung durch Muffen, die auf der Auſsenseite der Drahtumwicklung festgeschraubt sind; Lederpackung und Schraubenverbindung. Für Wasser- und Petroleumleitungen durch Flüsse, Seen und Moräste geeignet.

Seilrohre von Felten & Guilleaume-Lahmeyerwerke in Mülheim (Rhein), Wien und Budapest.

Zulässiger Betriebsdruck 5 at					Zulässiger Betriebsdruck 10 at				
Lichter Durchmesser mm	Wandstärke des Bleirohres mm	Aeuſserer Durchmesser mm	Gewicht des Seilrohres kg/m	Gröſste Fabrikationslänge m	Lichter Durchmesser mm	Wandstärke des Bleirohres mm	Aeuſserer Durchmesser mm	Gewicht des Seilrohres kg/m	Gröſste Fabrikationslänge m
15	1,50	32	3,5	1000	15	1,5	32	3,5	1000
20	1,50	39	4,5	875	20	2,0	40	5,0	875
25	1,75	46	6,0	750	25	2,5	47	6,75	750
30	2,00	52	7,5	625	30	3,0	54	9,0	625
35	2,25	58	9,0	525	35	3,5	61	11,5	525
40	2,50	64	10,5	425	40	4,0	67	13,5	425
45	2,75	70	14	350	45	4,5	75	18,0	350
50	3,00	77	16	300	50	5,0	81	20,5	300
55	3,25	83	18	250	55	5,5	88	23,75	250
60	3,50	88	20	225	60	6,0	93	27,0	225
65	3,75	94	23	200	65	6,5	99	31,0	200

2. **Metallschläuche.** Ein Metallband (aus Stahl oder Kupferbronze) geeigneter Querschnittform (z. B. ⌐⌙) ist schraubenförmig aufgerollt, sodaſs die Ränder beweglich ineinander oder übereinander greifen.

Die entstehenden Rinnen sind mit Dichtungsstoff (Gummi, Asbest usw.) ausgefüllt. Verwendung zu beweglichen Leitungen allerart, auch als Schutz für solche; ferner zum Ausgleich der Wärmeausdehnung bei Dampfleitungen. Ueber Abmessungen s. z. B. die Preislisten der Metallschlauchfabrik Pforzheim vorm. Hch. Witzenmann. — **Doppelschläuche** aus zwei ineinander steckenden Metallschläuchen mit entgegengesetzt gerichteten Windungen bleiben dicht bei allen Bewegungen.

C. Ventile.

a. Hubventile.

Selbsttätige Teller- und Kegel-Hubventile (bei Pumpen, Gebläsen, Kompressoren usw.) erfordern zuverlässige **Ventilführung,** wobei die Gleitflächen, um Abnutzung und seitliche Ablenkung zu vermeiden, genügend grofs und die Reibungswiderstände behufs leichten Spieles möglichst gering sein müssen. Kugelventile sind wegen mangelhafter Führung nur für untergeordnete Zwecke oder für unreine und schlammige Flüssigkeiten zu empfehlen. — Richtige Führung wird unterstützt durch möglichst tiefe Lage des Ventil-Schwerpunktes und durch so tiefe Lage des Ventilkastens, dafs der Flüssigkeitsstrom innerhalb des Ventilkastens von dessen Achse nicht abgelenkt wird.

Das Ventil ist nicht schwerer als nötig zu machen; das spezifisch schwerere Ventil ist das bessere. Für Pumpen mit grofser Hubzahl ist die Ventilmasse tunlichst zu vermindern und das Fehlende an Belastung durch Federn zu ersetzen.

Dichtungsfläche. Entweder sind Sitz und Ventil metallisch, oder das Ventil ist elastisch gelidert (Leder, Hartgummi, Vulkanfiber usw.). Die Dichtungsfläche ist nach Möglichkeit klein zu halten, jedoch mufs die Abdichtung gesichert sein. Die Breite der Dichtungsfläche wird mit Rücksicht auf den zulässigen Flächendruck k (in kg/qcm) allgemein bestimmt aus:

$$Vp = Sk,$$

worin V die obere Druckfläche des Ventils in qcm,
S die Dichtungsfläche (Sitzfläche) des Ventils in qcm,
p den Flüssigkeitsdruck auf das Ventil in kg/qcm bezeichnet.

Gröfste zulässige Auflagerdrücke k (bei stofsfreiem Gange):

für Rotgufs	bis	150 kg/qcm,
„ Phosphorbronze . .	„	200 „ ,
„ Gufseisen	„	80 „ ,
„ Gummi und Leder .	„	30 „ .*)

Für gewöhnliche, aufgeschliffene Pumpen-Metallventile genügt eine Breite der Sitzfläche

$$b = 0{,}8\sqrt{d},$$

wo d den lichten Durchmesser der Ventilsitzöffnung in mm bezeichnet.

Bei reinem Wasser und sofern man sicher ist, dafs das Ventil sich ruhig aufsetzt, genügt eine geringere Breite b.

*) Nach Riedler bei sicherer Ventilführung und ruhiger Berührung des Sitzes bis 85 kg/qcm bei Leder, 200 kg/qcm bei Hartgummi.

Nicht spielende Ventile (Sicherheitsventile) erhalten etwa 1,5 bis 2,5 mm Sitzbreite.

Tellerventile mit Leder erhalten

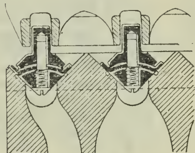
$$b = 1{,}25\sqrt{d}.$$

Die **Gehäuseweite** d_2 ergibt sich, wenn im Gehäuse dieselbe Durchflufsgeschwindigkeit wie im Sitze bestehen soll, aus

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 + d^2}.$$

Um auch für grofse Ventildrücke elastische Dichtung verwenden zu können, **entlastet** man die Dichtung nach O. Fernis (Abb. 359) dadurch, dafs man die (metallische) Druckfläche von der eigentlichen Dichtungsfläche (Leder) trennt (Flüssigkeitsdruck p statt des Flächendruckes k).*)

Abb. 359.
Mehrfaches Ringventil von O. Fernis.



Bedeutet f den freien Durchgangquerschnitt des Ventils in qcm und u den (kleinsten) freien Durchgangsumfang des Ventils in cm, so ergibt sich der **Ventilhub** h in cm bei einsitzigem Ventil, wenn dieselbe Durchflufsgeschwindigkeit wie im Sitze bestehen soll, aus der Gleichung

$$f = uh.$$

Für den Kreisquerschnitt vom Durchmesser d mufs, wenn der Durchflufs-Ringquerschnitt $\pi d h$ beim einfachen Tellerventil (Abb. 362 u. 363) gleich dem Kreisquerschnitt $\frac{\pi d^2}{4}$ werden soll, der Hub $h = \frac{d}{4}$ werden; wegen der hydraulischen Widerstände wähle man jedoch h etwas gröfser als $0{,}25\,d$. Für ein Ventil mit unterer Führung durch i Rippen, die aufsen die Breite s, innen die Breite s_1 haben, ist $\mu = \pi d - i s$ und $f = \frac{\pi d^2}{4} - i s_1 \frac{d}{2}$ zu setzen.

Bei Ventilen nach Abb. 364 u. 365 ist zu beachten, dafs die Kanalweite x (s. Abb. 360) beim Ventilhub h nur beträgt:

$$x = h \cos \alpha,$$

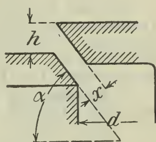
mit dem normalen Kegelwinkel $\alpha = 45^0$ (s. Abb. 360) wird also

$$x = 0{,}7\,h,$$

für $h = 0{,}25\,d$ ist somit

$$\mathbf{x = 0{,}175\,d.}$$

Abb. 360.



Will man die Kanalweite $x = 0{,}25\,d$ herstellen, so mufs demnach der Hub des Ventils werden (statt $0{,}25\,d$):

$$\mathbf{h = \frac{d}{2{,}8} = 0{,}357\,d.}$$

*) S. Z. d. V. d. I. 1887 S. 557.

Bei **Kolbenpumpen** mufs der **Schlufs** des Ventils genau im Hubwechsel stattfinden, damit Stöfse durch plötzliche Beschleunigung oder Verzögerung der Flüssigkeitsmassen vermieden werden; daher ist unter Abweichung von vorstehender Regel bei Kolbenpumpen der Ventilhub h um so kleiner zu machen, je gröfser die Kolbengeschwindigkeit ist und je rascher der Hubwechsel erfolgt.

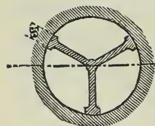
Der freie Ventilhub h ist ferner abhängig von der **wirksamen Ventilbelastung** P, d. h. von dem Gewichte des Ventils, vermindert um den Auftrieb des Ventils innerhalb der Flüssigkeit (vrgl. S. 251) und vermehrt um den etwa vorhandenen Federdruck.

Unter sonst gleichen Umständen bleibt nach C. Bach der rechtzeitige Ventilschlufs einer Pumpe erhalten, wenn die Ventilbelastung P proportional der geförderten Flüssigkeitsmenge und der minutlichen Umdrehungszahl genommen wird. Bezeichnet

P die wirksame Ventilbelastung, die das gehobene Ventil gegen das strömende Wasser im Gleichgewichte hält, in kg,
d den Durchmesser der Ventilsitzöffnung in m,
$f = \frac{1}{4}\pi d^2$ den Querschnitt der Ventilsitzöffnung in qm,
v die Geschwindigkeit, mit der das Wasser durch den Querschnitt f der Ventilsitzöffnung fliefst, in m/sk,
ζ die Widerstandszahl des Ventils, entsprechend den gesamten durch letzteres verursachten hydraulischen Bewegungswiderständen (vrgl. S. 279),
α, β, γ, λ und μ Erfahrungswerte,
g die Beschleunigung durch die Schwere = 9,81 m/sk²,
i die Anzahl der Rippen im Falle der Abb. 363,
s die Breite dieser Führungsrippen (s. Abb. 361), gemessen auf dem Umfange πd, in m,
$b = \frac{1}{2}(d_1 - d)$ die radiale Breite der Dichtungsfläche in m (s. Abb. 362 bis 366),
h die Hubhöhe des Ventils in m,

so ist nach C. Bach*) je nach der Ventilform

Abb. 361.



$$1)\quad P = 1000 f \frac{v^2}{2g}\left[\lambda + \left(\frac{d}{4\mu h}\right)^2\right],$$

$$2)\quad P = 1000 f \frac{v^2}{2g}\left[\lambda + \left(\frac{f}{\mu(\pi d - is)h}\right)^2\right],$$

$$3)\quad \zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d}{h}\right)^2,$$

$$4)\quad \zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d^2}{(\pi d - is)h}\right)^2,$$

$$5)\quad \zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d}{h}\right) + \gamma\left(\frac{d}{h}\right)^2.$$

Für die in Abb. 362 bis 366 dargestellten fünf Ventilformen hat man unter der Voraussetzung, dafs $\frac{1}{4}\pi(d_2^2 - d_1^2) = 1{,}8 \cdot \frac{1}{4}\pi d^2 = 1{,}8 f$, d. h., dafs der ringförmige Querschnitt zwischen Ventilteller und Gehäusewandung um 80 vH gröfser als die Ventilsitzöffnung ist, zur Berechnung des Ventilgewichtes und des Druckhöhenverlustes, den ein gegebenes Ventil verursacht:

I. **Für Abb.** 362 (Tellerventil ohne untere Führung),**) wenn $b = 0{,}10\,d$ bis $0{,}25\,d$ und $h = 0{,}10\,d$ bis $0{,}25\,d$:

---

*) S. C. Bach, Versuche über Ventilbelastung und Ventilwiderstand, Berlin 1884, J. Springer. Ferner C. Bach, Versuche zur Klarstellung der Bewegung selbsttätiger Pumpenventile, Stuttgart 1887; ferner auch Z. d. V. d. I. 1886 S. 421, 475, 801, 1036 u. 1058; 1887 S. 41 u. 61. — Vrgl. weiter J. Tobell, Pumpen- und Gebläseventile, Z. d. V. d. I. 1889 S. 25 (und S. 1150); 1890 S. 325. — M. Westphal, Gröfsenbestimmung von Pumpenventilen, Z. d. V. d. I. 1893 S. 381. — Zusammenfassung in Bach, Maschinenelemente 10. Aufl. 1908 S. 925 ff.

**) Berechnung solcher Ventile für Pumpen mit Kurbelantrieb s. Berg, Z. d. V. d. I. 1904 S. 1093, 1186.

Formel 1) mit $\lambda = 2{,}5 + 19 \dfrac{b - 0{,}1\,d}{d}$ und $\mu = 0{,}60$ bis $0{,}62$;

Formel 3) mit $\alpha = 0{,}55 + 4 \dfrac{b - 0{,}1\,d}{d}$ und $\beta = 0{,}16$ bis $0{,}15$.

Die ersten Werte von μ und β gelten bei breiter, die zweiten bei schmaler Dichtungsfläche.

Abb. 362.

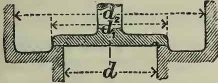


Abb. 363.

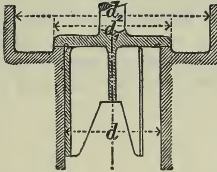


Abb. 364.

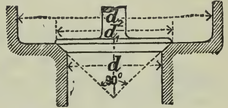


Abb. 365.

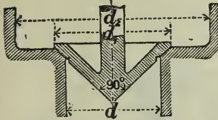
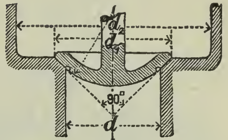


Abb. 366.



II. **Für Abb.** 363 (Tellerventil mit unterer Führung), wenn $b = 0{,}10\,d$ bis $0{,}25\,d$ und $h = 0{,}125\,d$ bis $0{,}25\,d$:

Formel 2) mit λ und $\mu = 10$ vH kleiner als bei I;

Formel 4) mit α um 0,8 bis 1,6 gröfser als bei I und $\beta = 1{,}75$ bis $1{,}70$.

III. **Für Abb.** 364 (Kegelventil mit ebener Unterfläche), wenn $b = 0{,}1\,d$ und $h = 0{,}10\,d$ bis $0{,}15\,d$:

Formel 1) mit $\lambda = -1{,}05$ und $\mu = 0{,}89$;

Formel 5) mit $\alpha = 2{,}60$, $\beta = -0{,}80$ und $\gamma = 0{,}14$.

IV. **Für Abb.** 365 (Kegelventil mit kugelförmiger Unterfläche), wenn $h = 0{,}125\,d$ bis $0{,}25\,d$:

Formel 1) mit $\lambda = 0{,}38$ und $\mu = 0{,}68$;

Formel 3) mit $\alpha = 0{,}60$ und $\beta = 0{,}15$.

V. **Für Abb.** 366 (Kegelventil mit kegelförmiger Unterfläche), wenn $h = 0{,}10\,d$ bis $0{,}25\,d$:

Formel 1) mit $\lambda = 0{,}96$ und $\mu = 1{,}15$;

Formel 5) mit $\alpha = 2{,}70$, $\beta = -0{,}80$ und $\lambda = 0{,}14$.

Abb. 367.

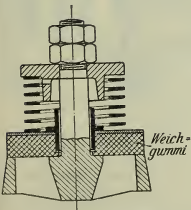


Abb. 368.

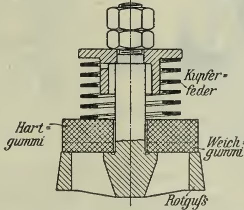
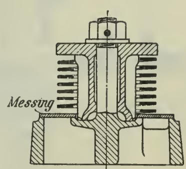


Abb. 369.



Die Abb. 367 bis 369 zeigen neuere Ausführungen von kleinen Teller- und Ringventilen, davon die ersten beiden mit weicher, die dritte mit harter Dichtung, die einzeln oder gruppenweise angeordnet von A. Borsig, Tegel angewendet werden.

Kugelventile werden als Vollkugeln aus Bronze (Abb. 370) oder nur mit kugelförmiger Sitzfläche ausgeführt; gröfsere Kugeln aus Kautschuk mit Kern aus Blei oder Eisen; besonders für unreine Flüssigkeiten. Zur Vermeidung des Festklemmens sei $\beta < 45^0$. Dann ergibt sich

$$d_k \sin\beta = d + b;$$

für mittlere Verhältnisse und bei $\beta = 45^0$ wird hieraus

$$d_k = 1{,}2 \text{ bis } 1{,}6\, d.$$

Hubhöhe h wie beim Kegelventil ohne untere Führung.

Der **Umfang** u (in m) eines Ventils folgt unter Zugrundelegung einer bestimmten mittleren Wassergeschwindigkeit v (in m/sk) zwischen Ventil und Sitz ($v = 1{,}0$ bis 2,5 m/sk bei Kolbenpumpen,

Abb. 370.

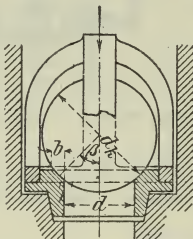


Abb. 371.

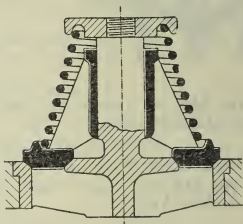


Abb. 372.

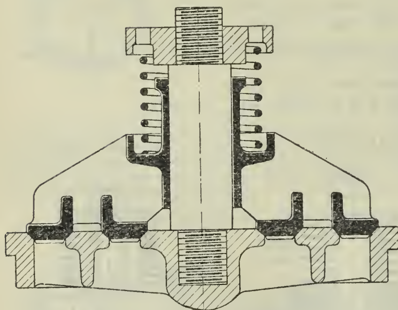
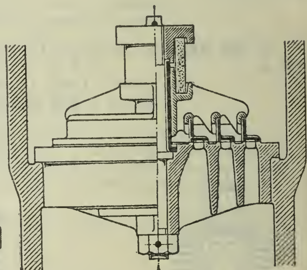


Abb. 373.



u. zw. nimmt man für Saugventile die kleineren, für Druckventile die gröfseren Werte) aus der gewählten Hubhöhe h des Ventils (in m), der mittleren Kolbengeschwindigkeit c_m (in m/sk) und der Kolbenfläche F (in qm) nach

$$u h v = F c_m.$$

Der sich aus dem kleinen Ventilhube h ergebende grofse Ventilumfang u wird durch folgende **Anordnungen** erreicht:

a) Mehrsitzige Ventile.

1. **Ringventile.** Abb. 371 zeigt ein einfaches, Abb. 372 ein doppeltes, die Abb. 373 bis 375 mehrfache Ringventile.*) Die Abb. 374 u. 375 sind neuere Konstruktionen von A. Borsig. Bei Abb. 374 besteht der Sitz aus Gufseisen, das mit Rotgufs armiert ist; das Ventil nach Abb. 375 hat vielfach bei Wasserwerkspumpmaschinen und bei Wasserhaltungen für mäfsige Tiefe Verwendung gefunden. Es dichtet mit Hartgummi auf Rotgufs ab.

Eine neuere Art von Ringventilen, die besonders bei **Gebläsen** vielfach angewendet werden („Lenkerventile" nach **Hoerbiger**),**)

Abb. 374.

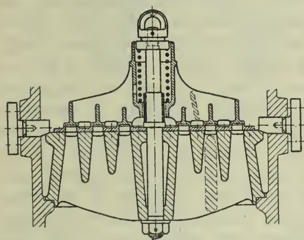


Abb. 375.

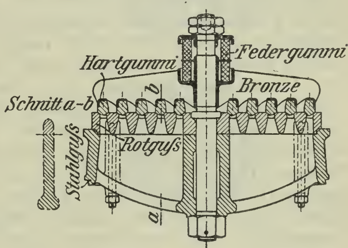


Abb. 376.

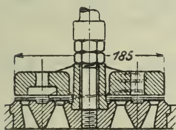
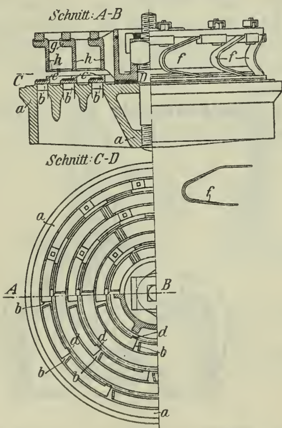


Abb. 377.



*) Bei Abb. 373 sind die Ringe zur Erleichterung der Dichtung für sich beweglich.
**) Z. d. V. d. I. 1901 S. 218 ff. Hochofengebläsemaschine mit Lenkerventilen und ebenda 1903 S. 477 ff. Verbundkompressor mit Lenkerventilen.

zeigt Abb. 376 in einer Ausführungsform. Die Ventile werden mit mehreren Ringen ineinander und auch übereinander ausgeführt. Die abdichtenden Ventilringe bestehen aus einer 3 mm starken Stahlscheibe, gegen die sich mit kleinem Zwischenraum eine 1,5 mm starke Scheibe aus Phosphorbronze legt. Dieser Zwischenraum füllt sich im Betriebe mit Oel und dient dann als Puffer zum Abfangen des Schlages bei der Eröffnung des Ventils. Die Ringe sind am Ventilfänger an nur 0,7 mm starken Lenkern aus Uhrfederstahl aufgehängt.

Ein von der Sächsischen Maschinenfabrik vorm. Rich. Hartmann in Chemnitz gebautes Ringventil (ebenfalls Lenkerventil) ist in Abb. 377 dargestellt. Die Ventilringe liegen ohne feste Führung und ohne feste Verbindung mit den Lenkern frei auf den Sitzen. Die Abb. 377 zeigt eine Ausführungsform mit doppelt gekrümmten Federn *f*. Diese doppelte Krümmung der Federn hat gegenüber einer einfachen (Schrauben-) Feder den Vorteil, dafs ein Ausweichen des freien Federendes beim Zusammendrücken vermieden wird. Bei diesen rückwärts gebogenen Federn macht das freie Ende eine genau senkrechte Bewegung, wodurch auch bei grofsem Hube richtige Führung der Ventilringe gesichert ist. Die auf dem Ventilsitz *a* liegenden Ventilringe *b* sind mit seitlich übergreifenden Rändern *c* versehen, unter die sich seitliche Ansätze *d* der in der Aufsicht nach der Krümmung der Ventilringe gebogenen Federn *f* schieben. Diese Federn sind am oberen Ende in den Federhalter *g* fest derart eingespannt, dafs die inneren Kanten der seitlichen Ansätze *d* in einem Kreis liegen, der dem inneren Umfang der Eindrehung der Ventilringe entspricht. Die Ventilringe werden dann in jeder Lage von den unteren Enden der Federn geführt, ohne dafs bei der Bewegung der Ringe eine Reibung an festen Führungsflächen entsteht.

Zur Begrenzung des Hubes der Ventilringe sind die ringförmigen Versteifungsrippen *h* des Federhalters *g* so weit nach unten gezogen, dafs die Ränder der Ventilringe sich gegen deren Unterkanten legen können.

2. **Glockenventile** mit übereinanderliegenden, ebenen oder kegelörmigen Sitzflächen (Abb. 378 u. 379).

Abb. 378.

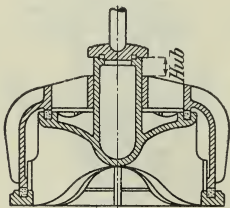
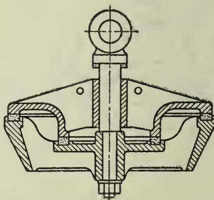


Abb. 379.



3. **Stufenventile** mit Ringen von verschiedenem (Abb. 380) oder von gleichem Durchmesser (Abb. 381 u. 382). Das Stufenventil (Abb. 381) von A. Borsig ist für grofse Förderhöhen (über 400 m) bei Wasser-

haltungen bestimmt. Die weiche Dichtung ist durch Metallringe geschützt.

Zu den mehrsitzigen Ventilen gehört auch das eigenartige Ventil nach Abb. 383, das ebenso zu den Stufenventilen wie zu den Ring-

Abb. 380.

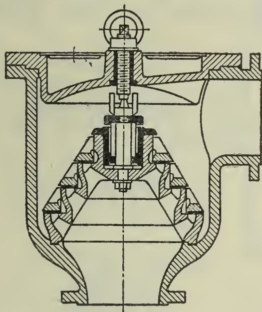
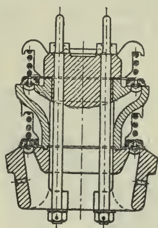


Abb. 381.



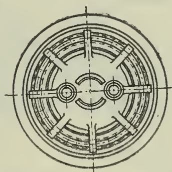


Abb. 382.

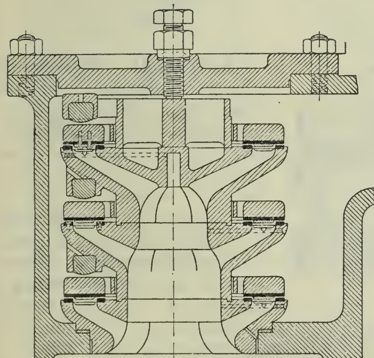
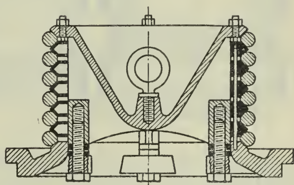


Abb. 383.



ventilen gerechnet werden kann. Es besteht aus mehreren (4 bis 8) Gummiringen, die gegen doppelkegelige Metallringe abdichten. Es wird gebaut von Gebr. Körting A.-G., Körtingsdorf bei Hannover und ist für schnellaufende Pumpen, auch zur Förderung von unreinem, sandhaltigem Wasser geeignet.

b) Gruppenventile.

Sie bestehen aus mehreren einsitzigen Ventilen oder besser aus mehreren einfachen (leichten und federbelasteten) Ringventilen (z. B.

nach Abb. 377 bis 379). Besonders für Massenherstellung von Pumpen sind Gruppenventile den gleichachsig angeordneten Ringventilen überlegen, da wenige Sorten von Einzelventilen für alle Pumpengröfsen genügen (Abb. 384).

Federbelastung des Ventils (im Wasser nur Rohr-Gummifedern oder gehärtete Messingfedern zu benutzen) ist zur Erzielung schnellen Ventilschlusses der reinen Gewichtbelastung unbedingt vorzuziehen und wird jetzt auch meist angewandt.

Abb. 384.

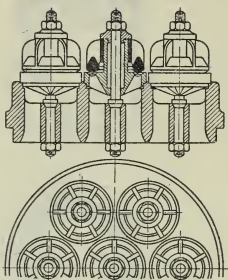


Abb. 385.

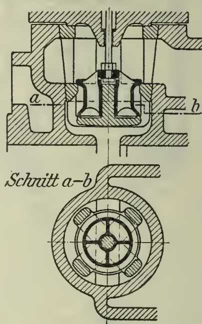
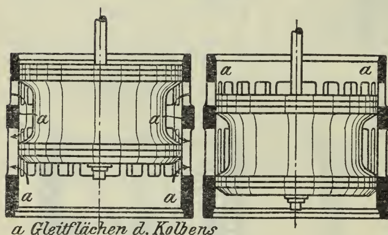


Abb. 386.



a Gleitflächen d. Kolbens

Gesteuerte Hubventile (für raschlaufende Pumpen usw.) öffnen sich selbsttätig und bleiben nahezu während des ganzen Kolbenhubes offen; kurz vor dem Hubwechsel werden sie durch die Steuerung **zwangläufig** bis nahe an den Ventilsitz bewegt und erreichen diesen wieder durch den Flüssigkeitsdruck. Es empfehlen sich einfache Teller- oder Ringventile mit Stiftführung.*) Gesteuertes Einlafsventil (Doppelsitzventil) für Dampfmaschinen s. Abb. 385. — Als Ersatz für diese Doppelsitzventile werden neuerdings von der Sächsischen Maschinenfabrik vorm. Rich. Hartmann A.-G. in Chemnitz mit Vorteil Kolbenventile (Bauart van den Kerchove) mit breiten selbstspannenden Liderungsringen verwendet (s. Abb. 386).

b. Klappenventile.

Abb. 387 u. 388 zeigen als Lederklappen ausgebildete Fufsventile mit Kasten und anschliefsendem Korbe für die Saugleitung einer Pumpe. In Abb. 387 Gelenk aus Metall, in Abb. 388 ein solches aus Leder.

*) Weiteres s. Z. d. V. d. I. 1890 S. 537, sowie A. Riedler, Schnellbetrieb, Berlin 1899.

Die Gröfse der Klappenventile hängt ab von der Form der Sitzöffnung, die sich für eine bestimmte Durchflufsgeschwindigkeit der Flüssigkeit mit Rücksicht auf die Verengungen durch Rippen und Schrauben, sowie auf die Kontraktion bestimmt. Bei Gummiklappen betragen die Verengungen durch die Gitterstäbe etwa 0,3 bis 0,5 der Sitzöffnung. Der Kontraktionswert ist für kreisförmige Oeffnung etwa 0,9, für rechteckige 0,8.

Abb. 387.

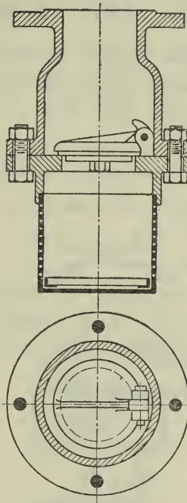
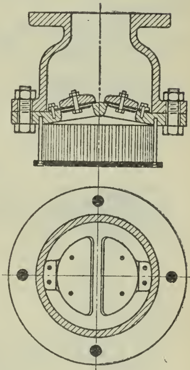


Abb. 388.



Der Hub h hängt von der Art der Gelenkigkeit und von der Grundrifsform der Klappe ab.

Für den **rechteckigen** Kanalquerschnitt von der Breite a und der Länge c beträgt, wenn die Bewegung um eine zu c parallele Achse erfolgt, der Querschnitt, durch den bei geöffneter Klappe, entsprechend dem Drehwinkel β, die Flüssigkeit entweichen kann, nahezu

$$h\,(c + a \cos \beta);$$

die durch die Klappe mit der Geschwindigkeit v (in m/sk) strömende Flüssigkeitsmenge Q (in cbm/sk) ergibt sich mit Rücksicht auf die Kontraktion zu

$$Q = \alpha h\,(c + a \cos \beta)\,v,$$

worin $h = a \sin \beta$ und der Wert $\alpha = 0{,}85$ bis $0{,}9$. v ist zweckmäfsig gleich der Geschwindigkeit anzunehmen, mit der die Flüssigkeit durch den freien Kanalquerschnitt ac strömt. Für $a = c$ folgt angenähert $\beta = 30^0$.

Für den **kreisförmigen** Kanalquerschnitt vom Durchmesser d und für die Bewegung um eine kurze Achse am Umfange (Abb. 387) ist angenähert

$$Q = \frac{\pi d}{4}\,(1 + \cos \beta)\,hv = \frac{\pi}{4}\,d^2 v.$$

Da $h = d \sin \beta$, so folgt auch hier nahezu $\beta = 30^0$.

Für **Gummiklappen,** die sich um eine kreisförmige Kante drehen (Abb. 389), ist die Durchgangsfläche der Mantel eines Kegelstumpfes von den Durchmessern d und $d - 2\,h \sin \beta$ und der Kegelkante h. Mithin ist

$$Q = \alpha \pi h\,(d - h \sin \beta)\,v,$$

wobei angenähert

$$h = {}^1/_2\,(d - d_i) \sin \beta,$$

wenn d_i der Durchmesser des inneren zylindrischen Teiles des Klappensitzes ist. Es genügt auch hier meist, $\beta = 30^0$ oder $h = 0{,}25\,d$ zu nehmen.

Als Ersatz für solche Gummiklappen werden nach Gutermuth federnde Stahl- oder Bronzeplatten verwendet, die ebenso, wie die Gummiklappen, Ventilkörper und Feder in einem Stück vereinen und ebenfalls kleine Masse und leichtes Spiel haben. Diese federnden Klappen (s. Abb. 390) werden in verschiedenen Ausführungsformen (Gruppenanordnungen) bei Pumpen und besonders auch bei **Kompressoren** verwendet. Abb. 390a zeigt die Gutermuthklappe mit einer Ventilöffnung, die den Flüssigkeitsstrom in Richtung der geöffneten Klappe leitet; hierbei sind die Klappen in ein seitlich herausnehmbares, eingeschliffenes zylindrisches Gehäuse (A) zwischen Saugwindkessel (C) und Druckwindkessel (D) eine Pumpe eingebaut.

Abb. 389.

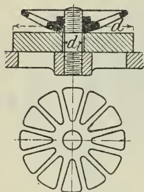
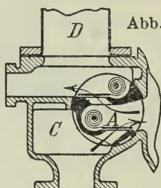
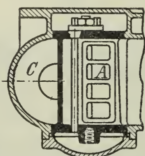


Abb. 390.



Abb. 390 a.





c. Absperrventile.

1. Berechnung der Absperrventile.

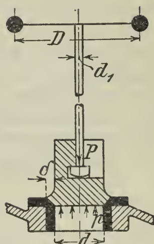
Es bezeichne

P die erforderliche Kraft in kg,
p den Druck der Flüssigkeit in kg/qcm,
p_0 die Dichtungskraft in kg/qcm (50 bis 80 at üblich),
D den Handraddurchmesser in cm ($D = 1{,}5\,d$ bis 10 cm üblich),
d die lichte Weite des Ventils in cm,
d_1 den Kerndurchmesser der Spindel in cm,
δ die Breite der Projektion der Dichtungsfläche,
α den Steigungswinkel des Gewindes,
ϱ den Reibungswinkel.

Es ist (vrgl. Abb. 391) $P = \frac{\pi d^2}{4} p + d \pi \delta p_0$ (das zweite Glied ist die Dichtungskraft).

Die Spindel wird beansprucht auf Knickung und Verdrehung.

Abb. 391.



$P = \frac{\pi d_1^2}{4} k_d$ $k_d \sim 400$ bis 500 kg/qcm Stahl,
$k_d \sim 200$ „ 300 „ Messing,

$P = \text{Handkraft} \cdot \frac{D}{d_1} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \varrho)}$,

Handkraft eines Arbeiters:

$D = 10{,}0$ cm · Handkraft ~ 10 kg,
$D = 50{,}0$ „ · „ ~ 50 „ .

2. Konstruktion der Absperrventile.

Kleine Ventile ganz aus Rotgufs, gröfsere aus Gufseisen mit Rotgufssitz (dieser konisch eingezogen oder eingewalzt). Bei Ventilen für

Abb. 392.

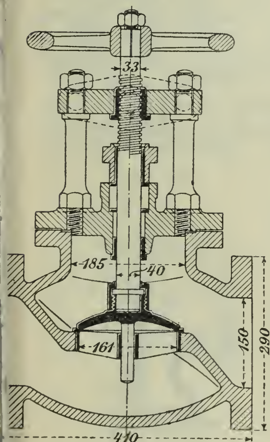


Abb. 393.

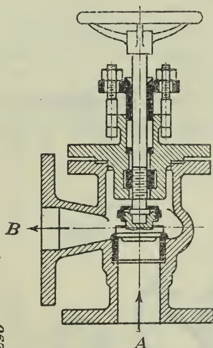
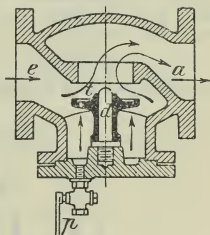


Abb. 394.



überhitzten Dampf Rotgufs und Kupfer der höheren Temperaturen wegen unbrauchbar, da sie brüchig werden und der dem Gufseisen gegenüber verschiedene Ausdehnungskoeffizient bei den höheren Temperaturen mehr zur Geltung kommt. Daher für überhitzten Dampf als Sitz Nickelringe, in schwalbenschwanzförmige Nuten eingehämmert, verwendet; aufserdem bei Heifsdampf-Ventilen Führungsrippen oben, um nicht dem Frischdampf direkt ausgesetzt zu sein; besser Hohlzylinder als Führung, um gleichartige Ausdehnung zu sichern.

Absperrventil für gerade Rohrleitung, Mutter aufsenliegend (Abb. 392) nach einer Ausführung von Dreyer, Rosenkranz & Droop, Hannover (Bruchventil); Absperrventil für eine Aenderung der Rohrrichtung um 90^0 (sogen. Eckventil) mit innenliegender Mutter (Abb. 393). Beide Ventile sowohl für Dampf wie für Wasser benutzbar; Stromrichtung von A nach B (Abb. 393), d. h. gegen die Unterfläche des Ventils, mit Rücksicht auf die Verbindung zwischen Spindel und Ventil und die Verpackung der Stopfbüchse unter Druck. Im Falle der Abb. 393 soll das Spindelgewinde nicht in den Packungsraum der Stopfbüchse treten können. Bei der Ausführung nach Abb. 392 ist das Gewinde gegen die chemischen und mechanischen Einflüsse der Flüssigkeit geschützt. Dieser Vorteil bedingt aber gröfsere Bauhöhe.

Die Art der Verbindung zwischen Spindel und Ventil soll stets dem letzteren eine gewisse Beweglichkeit ermöglichen. — Flügelführung des Ventils verursacht Querschnittverengung und bei gröfserer Stromgeschwindigkeit Erzitterungen, die eine rasche und ungleichmäfsige Abnutzung der Dichtungs- und Führungsflächen veranlassen.

Soll bei Rohrbrüchen von Dampfleitungen zur Verhütung von Unfällen die Leitung schnell geschlossen werden, so empfiehlt sich die Anwendung von **Rohrbruch-** oder **Selbstschlufsventilen,***) die sich bei plötzlichem Druckunterschiede vor und hinter dem Ventile selbsttätig schliefsen. Abb. 394 Selbstschlufsventil von Dreyer, Rosenkranz & Droop. Der auf dem Dorn d geführte Ventilteller t wird, sobald bei a infolge Rohrbruches Entlastung eintritt, durch die Saugwirkung in a und durch die Expansion des Dampfkissens unter t an den Sitz gedrückt und hier so lange festgehalten, bis die Leitung vom Kessel abgesperrt und der Druck bei e gefallen ist. p ist ein Hülfshahn.

Durch Doppelsitz entlastete **Absperrventile** zeigen Abb. 395 (Glockenventil) und 396 (Rohrventil); die gröfsere Entlastung entsteht bei ihnen

Abb. 395.

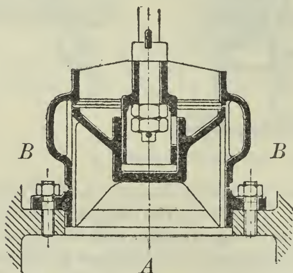
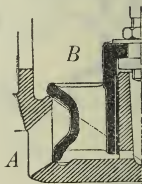


Abb. 396.



für die Stromrichtung von A nach B. Sind gröfsere Wärmeunterschiede im Ventilkörper zu erwarten, so müssen entweder Ventil und Sitz aus

*) Vrgl. die ausführliche Bearbeitung dieser Art von Ventilen von Köhler, Heft 34 der Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom V. d. I.

demselben Metalle bestehen, oder es müssen sich die verlängerten Querschnittlinien der beiden Sitzflächen (wie in Abb. 396) in der Ventilachse schneiden.

d. Absperrschieber (s. Abb. 397).

Herstellung der Dichtflächen (an beiden Seiten des Schiebers anzubringen) schwieriger als bei Ventilen. Neigung der Kegelflächen 1 : 8 bis 1 : 15. Dichtungsflächen möglichst nicht Gufseisen, sondern in Nuten eingehämmerte Bronze; bei überhitztem Dampf Nickel oder Nickellegierungen. — Gerade Anpressung der Dichtflächen nach Abb. 398 besser, wenn auch die Bauart umständlicher wird als Abb. 399.

Abb. 397.

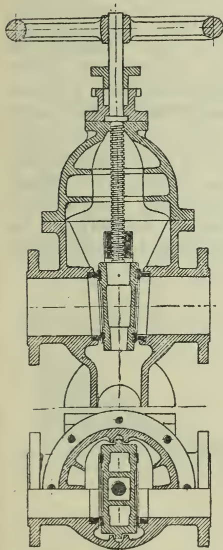


Abb. 398 und 399.

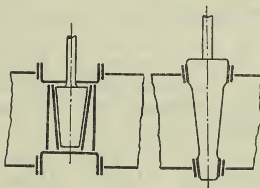


Abb. 400.
Zweiwegehahn.

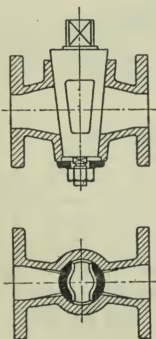
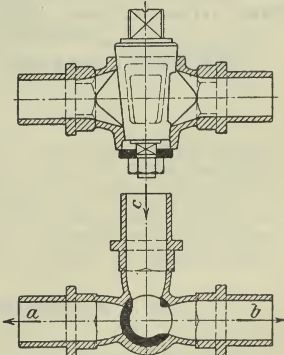


Abb. 401.
Dreiwegehahn.



e. Absperrhähne.

Die Hähne (s. Abb. 400) werden wie die Absperrschieber durch die beim Anziehen einer Schraubenmutter ausgeübte Achsialkraft (wie in Abb. 400 oder 401) oder selbsttätig durch den Flüssigkeitsdruck oder auch durch Federdruck abgedichtet. Neigung der Kegelseite gegen die Achse 1 : 8 bis 1 : 15.

Zwei- und Dreiwegehähne, die besonders für saure und alkalische Flüssigkeiten geeignet sind,*) der Maschinen- und Armaturenfabrik Gebr. Reuling in Mannheim (Abb. 402 u. 403). — Gehäuse

Abb. 402.

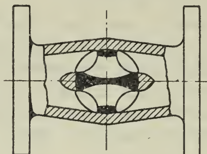
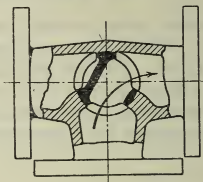


Abb. 403.



und Kegel bestehen aus besonders zusammengesetztem Gufseisen, für Sonderzwecke aus Aluminium, Phosphorbronze o. drgl. Infolge der Bauart der Hähne kommen die Flüssigkeiten nur mit der sehr widerstandsfähigen Gufshaut, nicht aber mit den eingeschliffenen Flächen, die sowohl bei offenem wie bei geschlossenem Hahn gedeckt sind, in Berührung.

Hähne mit Asbestfutter und zylindrischem Küken von Dreyer, Rosenkranz & Droop. Dabei berührt das Küken die Metallflächen des Gehäuses, ohne zu schleifen; Abdichtung durch einen über und einen unter der Hahnbohrung liegenden Asbestring, die beide durch vier achsiale Asbeststreifen in schwalbenschwanzförmigen Nuten verbunden sind.

*) S. Z. d. V. d. I. 1908 S. 599.

VIII. REGELNDE MASCHINENTEILE.

A. Schwungräder für Kraftmaschinen.

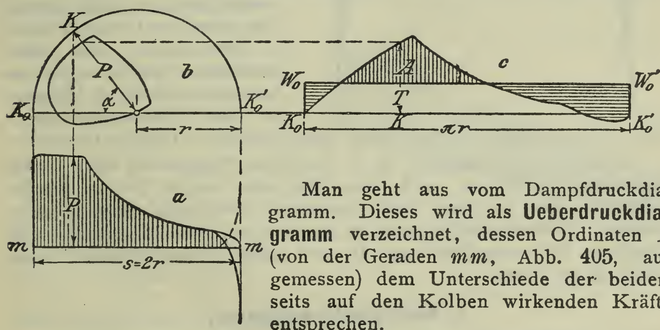
a. Bestimmung des Arbeitsüberschusses.

Zur Ermittlung des bei jeder halben Kurbelumdrehung vom Schwungrade aufzunehmenden **Arbeitsüberschusses** sind die Tangentialdruck-Diagramme für Kraft und Widerstand, auf den Kurbelzapfen bezogen, aufzuzeichnen.

1. Einzylindermaschinen.

1. **Der Widerstand wirkt tangential an der Kurbelwelle,** z. B. die Kraft wird durch Riemen, Seil oder Zahnrad abgeleitet; der Tangentialwiderstand sei dabei unveränderlich.

Abb. 404.



Man geht aus vom Dampfdruckdiagramm. Dieses wird als **Ueberdruckdiagramm** verzeichnet, dessen Ordinaten P (von der Geraden mm, Abb. 405, aus gemessen) dem Unterschiede der beiderseits auf den Kolben wirkenden Kräfte entsprechen.

Für $l = \infty$ sind die **Tangential-Kurbeldrücke** (s. S. 831)

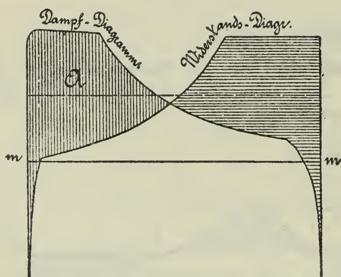
$$T = P \sin \alpha.$$

Bei zeichnerischer Ermittlung werden die P auf den entsprechenden Lagen der Kurbel (P, α als Polar-Koordinaten) aufgetragen (Abb. 404b) und die Tangential-Kurbeldrücke T nach Ausstreckung des Halbkreises $K_0 K K_0'$ mit seiner Teilung durch Projizieren (in Abb. 404c) ermittelt. Für endliche Werte von l s. S. 831 und Abb. 272. (Wegen der Berücksichtigung des Beschleunigungsdruckes der bewegten Massen s. S. 899 unter **3.**)

Auf derselben Grundlinie wie das Tangentialdruck-Diagramm der Kraft ist das Diagramm des **Tangentialwiderstandes** zu verzeichnen (Abb. 404 c). Dieses ist für die vorstehend genannten Beispiele ein Rechteck $W_0 W_0' K_0' K_0$, dessen Höhe, da die Arbeit des Dampfdruckes und die des Widerstandes gleich grofs sind, am einfachsten aus der Flächengleichheit beider Diagramme bestimmt wird. Die lotrecht gestrichelte Fläche (für den Beharrungszustand gleich der Summe der wagerecht gestrichelten Flächen) gibt den Arbeitsüberschufs A. Der Arbeitsmafsstab ergibt sich aus dem Längenmafsstabe (Länge des Dampfdiagramms = Kolbenhub) und dem Kräftemafsstabe (Ordinaten des Dampfdiagramms = Kolbenkräfte).

2. **Der Widerstand wirkt an der Kolbenstange.** Beispiel: Gebläse- und Pumpmaschinen mit unmittelbarem Antriebe. Im Gebläse- oder Pumpen-Ueberdruck-Diagramm sind die Ordinaten durch Multiplikation mit dem Verhältnis der Kolbenflächen auf den Dampfzylinder zurückzuführen; dann ist durch Vergröfserung der Ordinaten im Verhältnis $N_i : N_e$ die Fläche des Widerstandsdiagramms der Fläche des Dampfdiagramms gleich zu machen. Dampf- und Widerstandsdiagramm sind hierauf über derselben Grundlinie mm zu verzeichnen. Die überschiefsende Fläche ergibt den Arbeitsüberschufs A. Beispiel für eine Gebläsemaschine s. Abb. 405 (für eine Pumpe würde die gestrichelte Linie gelten).

Abb. 405.



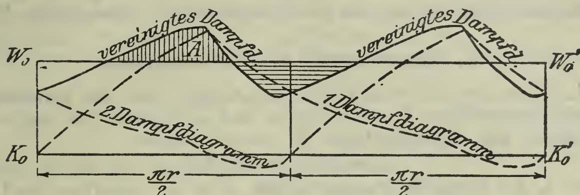
3. In anderen Fällen (z. B. wenn eine Pumpe von einer Kurbel angetrieben wird) ist nach dem Verfahren unter 1. das Dampfdiagramm und das (mit den vorstehend erwähnten Gröfsen multiplizierte) Widerstandsdiagramm in das entsprechende Tangentialdruckdiagramm zu verwandeln und die bei diesen überschiefsende Fläche gleich A zu setzen.

2. Mehrzylindermaschinen.

Die Tangentialdruckdiagramme (oder auch die Kolbendruckdiagramme, wenn der Widerstand an der Kolbenstange wirkt und die Kurbeln 0° oder 180° einschliefsen) sind für die verschiedenen Zylinder unter Berücksichtigung des zwischen den Kurbeln liegenden Winkels gegeneinander versetzt zu vereinigen, indem die zu gleicher Zeit wirkenden Kräfte oder Widerstände addiert werden. Das sich hieraus ergebende vereinigte Diagramm der Kräfte und das Diagramm der Widerstände werden auf derselben Grundlinie $K_0 K_0'$ verzeichnet. Die gröfste überschiefsende Fläche A, bei mehr als vier Schnittpunkten der Kraftlinie mit der Widerstandslinie die gröfste algebraische Summe

der aufeinander folgenden überschiefsenden Flächen, ist der weiteren Rechnung zugrunde zu legen. Beispiel für eine Zwillings-Antriebmaschine mit unter 90° versetzten Kurbeln s. Abb. 406. Bei ver-

Abb. 406.

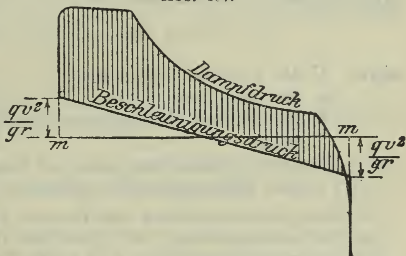


schiedener Gröfse der Dampfzylinder sind vorher die Diagramme auf einen der Zylinder zu beziehen.

3. Raschlaufende Maschinen.

In den Dampfdruckdiagrammen für **rasch laufende Maschinen** oder für solche **mit grofsen Massen** mufs bei Ermittlung der Kurbelzapfendrücke noch der von der Kolbenkraft abzuziehende oder zu dieser hinzuzufügende **Beschleunigungs- und Verzögerungsdruck** b berücksichtigt werden. Dies kann bei Annahme unendlicher Länge der Schubstange ($l = \infty$) in der Weise geschehen, dafs die untere Begrenzung, statt durch die wagerechte Gerade, durch die in Abb. 407 angegebene schräge Gerade (vrgl. S. 830) gebildet wird, oder unter Berücksichtigung der endlichen Stangenlänge l durch eine Parabel nach Abb. 271, S. 830; Gröfse des Beschleunigungsdruckes in kg/qcm s. S. 830.

Abb. 407.



Bedingungen für den ruhigen Gang einer Dampfmaschine: Der Druckwechsel im Triebwerke mufs kurz vor dem Hubwechsel erfolgen; der Kompressions-Enddruck mufs den Verzögerungs-Enddruck der Triebwerkmassen überwiegen; die Rückwirkung der Triebwerkmassen auf den Maschinenrahmen ist durch Gegengewichte möglichst aufzuheben.

Theoretisch sind die Ausgleichmassen an der Kurbel so grofs zu machen, dafs ihre Fliehkraft gleich dem gröfsten Beschleunigungsdrucke der Triebwerkmassen ist.

Ausgeführte Gegengewichte sind in der Regel kleiner, als theoretisch erforderlich, weil sie schwer unterzubringen sind. Bei stehenden

Maschinen sollen umlaufende Ausgleichmassen wegen der störenden Massenwirkung im wagerechten Sinne nicht angewandt werden.

Beste Massenausgleichung im Triebwerke selbst ist zu erreichen bei liegenden und stehenden Zweizylindermaschinen durch Anordnung der Kurbeln unter 180° und möglichste Annäherung der Zylindermitten zur Verminderung des Drehmomentes der Massenkräfte.*)

b. Abmessungen des Schwungrades.

1. Wenn das Schwungrad nur die Aufgabe hat, die **periodischen Arbeitsüberschüsse** A aufzunehmen und abzugeben, so ergibt sich die **Masse des Schwungringes** M aus der Formel

$$A = J\omega^2 \delta_s = M V^2 \delta_s ,$$

worin δ_s den **Ungleichförmigkeitsgrad**, d. h. das Verhältnis des Unterschiedes der gröfsten und kleinsten zur mittleren Umfangsgeschwindigkeit V des Schwungringes während einer Umdrehung, J das Trägheitsmoment und ω die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades bedeutet.

Von dieser Masse M braucht jedoch wegen der Vermehrung des Trägheitsmomentes des Schwungringes durch die Arme, deren Gewicht etwa $1/3$ des Ringes beträgt, nur etwa das 0,9-fache verwirklicht zu werden; als auszuführendes Gewicht G des Schwungringes ergibt sich daher, wenn g die Beschleunigung durch die Schwere bedeutet,

$$G = 0{,}9\,Mg = 8{,}83\,M.$$

Brauchbare **Näherungswerte** ohne Aufzeichnung von Tangentialdruckdiagrammen erhält man nach der Formel:

$$G = \frac{c}{\delta_s} \frac{N}{n V^2} ,$$

worin N die Nutzleistung in PS,
n die minutliche Umlaufzahl des Schwungrades,
V die mittlere Umfangsgeschwindigkeit des Schwungringes in m/sk,
δ_s den Ungleichförmigkeitsgrad und
c eine Unveränderliche bedeutet, die gesetzt werden kann:

bei Einzylindermaschinen und Tandem-Verbundmaschinen $c = 7000$,
bei Verbundmaschinen mit versetzten Kurbeln $c = 2500$ bis 4000,
bei Dreizylindermaschinen $c = 1400$.**)

2. Soll das Schwungrad bei **wechselnder äufserer Belastung** einen solchen Ausgleich vermitteln, dafs ihm zeitweise unter Arbeitsabgabe eine höhere Leistung entnommen wird, als den Abmessungen der Maschine entspricht, so mufs es je nach der Dauer der Kraftabgabe, den zuzulassenden Geschwindigkeitsunterschieden usw. reichlicher bemessen werden. Man kann nach Grafsmann setzen

---

*) Ausführliche theoretische Erörterungen über die Ausgleichung der Massenwirkungen bei Mehrzylindermaschinen s. Z. d. V. d. I. 1894 S. 1091, von O. Schlick; 1897 S. 998, von H. Lorenz und S. 1371 von R. Knoller; 1898 S. 907 von C. Fränzel (Taylorsches Verfahren).

**) Vrgl. auch K. Mayer, Z. d. V. d. I. 1889 S. 113.

bei Maschinen für elektrische Strafsenbahnen über 100 PS und bei Werkstätten-Betriebsmaschinen mit ähnlichen Schwankungen:

$$G \geqq 6000 \frac{N+100}{V^2}.$$

Bei vorhandener Pufferbatterie ist G kleiner, bei bergigem Gelände und fehlender Batterie bis 50 vH gröfser zu nehmen.

Für Holzbearbeitungsmaschinen, Warmeisensägen usw. genügt etwa

$$G \geqq 3000 \frac{N+20}{V^2}.$$

Mittlere Werte des Ungleichförmigkeitsgrades $\delta_s = \frac{V_{max} - V_{min}}{V}$.

Antrieb von Pumpen und Schneidwerken . .	$\delta_s = 1:20$ bis $1:30$,
„ „ Werkstätten-Triebwerken . . .	$\delta_s = 1:35$ bis $1:40$,
„ „ Webstühlen und Papiermaschinen .	$\delta_s = 1:40$,
„ „ Mahlmühlen	$\delta_s = 1:50$,
„ „ Spinnmaschinen f. niedrige Garn-Nrn.	$\delta_s = 1:60$,
„ „ „ für hohe „	$\delta_s = 1:100$,
„ „ Dynamomaschinen für Lichtbetrieb (ohne Akkumulatoren)	$\delta_s = 1:150$,
„ „ Drehstrommaschinen	$\delta_s = 1:300$.

Aus G (in kg) folgt der **Querschnitt** F des Schwungringes (in qcm), wenn der Schwerpunktabstand R des Ringquerschnittes von der Drehachse in m gemessen und das spezifische Gewicht des aus Gufseisen hergestellten Schwungringes $\gamma = 7,25$ gesetzt wird,

$$F = \frac{10}{2\pi\gamma} \frac{G}{R} = 0,22 \frac{G}{R}.$$

(Für die Berechnung des Gesamtgewichtes ist das Gewicht der Arme etwa gleich einem Drittel des Ringgewichtes zu setzen.)

3. Die durch die Fliehkraft hervorgerufene **Beanspruchung** in dem (nicht durch die Arme festgehaltenen) **Schwungringe** ist in kg/qcm:

$$\sigma_z = \frac{\gamma V^2}{g},$$

wenn V die Umfangsgeschwindigkeit des Schwungringes in cm/sk,
γ das Gewicht der Raumeinheit in kg/ccm,
g die Beschleunigung durch die Schwere, $= 981$ cm/sk^2 bedeutet,

oder: $$\sigma_z = 0,074\, V^2,$$

wenn V in **m**/sk gemessen wird. Die Beanspruchung hängt also nur von V ab und beträgt z. B. für $V = 30$ m/sk $\sigma_z = 67$ kg/qcm. Jedoch kommen durch die Arme Biegungsspannungen hinzu; hierdurch kann die Beanspruchung auf das Doppelte bis Dreifache steigen.*)

*) Genaue Formeln, auch zur Berechnung der Arme, s. J. Goebel, Ueber Schwungradexplosionen, Z. d. V. d. I. 1898 S. 353.

4. Die **Berechnung der Arme** ist auf Abreifsen durch die Fliehkraft des Ringes und auf Abbrechen durch das gröfste auf das Schwungrad zu übertragende Moment vorzunehmen, wobei für Gufseisen $k_b = 100$ kg/qcm, für Schweifseisen $k_b = 400$ kg/qcm zuzulassen ist. Anzahl der Arme gewöhnlich 6 oder 8.

Abb. 408.

Abb. 409.

Abb. 410.

Abb. 411.

Abb. 412.

5. Der **Schwungradhalbmesser** ist i. M. etwa gleich dem fünffachen Kurbelhalbmesser, stets aber derart zu wählen, dafs $V \lesseqgtr \sqrt{\frac{g k_z}{\gamma}}$, bei Gufseisen z. B. $V < 30$ m/sk wird (nur bei Walzenzugmaschinen geht man auf etwas höhere Werte). In der Verteilung der Massen sind zu starke Stoffanhäufungen zu umgehen (profilierter Ringquerschnitt). Zur Vermeidung von Gufsspannungen wird vielfach eine Teilung vorgenommen, bei kleineren Schwungrädern in zwei Teile (Sprengung), bei gröfseren in der Art, dafs Arme, Nabe und die einzelnen Ringstücke getrennt hergestellt werden. Zwei- oder mehrteilige Schwungräder von schnellem Gange verlangen sorgfältige Kranzverbindung;

Schrumpfringe sollen möglichst im Schwerpunktkreise des Radkranzes liegen. Bei grofsen Maschinen ist Verschalung der Schwungräder zur Verminderung des Luftwiderstandes zu empfehlen.

Beispiele. Für gewöhnliche Schwungräder: Abb. 408 bis 411 (in Abb. 408 sind die Arme aus Schweifseisen), für Seilscheiben: Abb. 412, Bauart der B.-A. M.-A.-G., besitzt 10 Rillen für 50 mm starke Seile, Gesamtgewicht 25 t, Kranzgewicht 18 t, Umfangsgeschwindigkeit $V = 31{,}4$ m/sk. Schrauben von 4″ Durchmesser für die Kranzverbindung werden in die gebohrten Löcher der Flansche stramm eingepafst. Mangelhafte, exzentrische Verbindung der Kranzstöfse führt leicht Kranzbrüche herbei; deshalb sind z. B. die Laschen in Abb. 408, rechts, genau einzupassen und ihre Bolzen einzuschleifen.

B. Zentrifugal-Pendelregler.

a. Allgemeines.

1. Erklärungen.

Jeder brauchbare Regler mufs auf allen Teilen seines Hubes **stabil** sein, d. h., fortschreitender Entfernung der Schwungmassen von der Achse mufs ständiges Wachsen der Umlaufzahl entsprechen. Der umgekehrte, unbrauchbare Fall **(labil)** oder der indifferente Zustand **(astatisch)** kann durch den Regler allein oder durch die Anordnung der von ihm beeinflufsten Teile verursacht sein.

Statisch sind Regler, wenn jeder höheren Muffenstellung eine gröfsere minutliche Umlaufzahl entspricht.

Astatisch sind Regler, bei denen zu allen Muffenstellungen dieselbe Umlaufzahl gehört, die also nur bei einer einzigen Umlaufgeschwindigkeit eine Muffenbewegung zeigen. Bei allen übrigen Geschwindigkeiten verharren diese Regler an einer der beiden Hubbegrenzungen der Muffe.

Pseudoastatisch sind solche Regler, die sich dem astatischen Zustande stark nähern.

Astatische Punkte nennt man solche Stellungen der Schwungkörper, bei denen in zwei unendlich nahen Lagen die gleiche Winkelgeschwindigkeit vorhanden ist. Der Uebergang von labilen Lagen zu statischen und umgekehrt erfolgt in solchen astatischen Punkten.

Da bei den gebräuchlichsten Reglern-Pendellagen in der Nähe astatischer Punkte benutzt werden, so darf man den Hub s eines in theoretischer Beziehung nicht genau bekannten Reglers nach keiner Richtung hin willkürlich erweitern, weil sonst labiles Gleichgewicht herbeigeführt werden könnte.

Ungleichförmigkeitsgrad δ heifst das Verhältnis des Unterschiedes zwischen der gröfsten und kleinsten Umlaufzahl zu der mittleren Umlaufzahl eines Reglers, der nicht mit dem Stellzeuge gekuppelt ist.

Von der richtigen Wahl des Ungleichförmigkeitsgrades hängt in erster Linie die Regelungsfähigkeit des Reglers ab. Wird δ zu klein genommen, so vollführt der Regler bei Aenderung der Belastung

der Maschine lang dauernde Pendelungen oder kommt nicht mehr zur Ruhe. Je gröfser δ, um so schneller nimmt der Regler die neue Gleichgewichtslage ein. Der kleinste zulässige Ungleichförmigkeitsgrad (ohne Anwendung einer Oelbremse) ist nach Tolle angenähert

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{s_r}{g T^2}},$$

worin

T die Zeit in sk, in welcher der Motor vom Ruhezustande bei gröfster Füllung und ohne Belastung seine normale Umlaufzahl erlangt,

g die Beschleunigung durch die Schwere $= 981$ cm/sk²,

s_r den Muffenhub des mathematischen Reglers in cm bedeutet, u. zw. ist

$$s_r = \frac{\text{Summe aller Gewichte mal den Quadraten ihrer Wege}}{\text{Arbeitsvermögen}}.$$

Bei Reglern mit verhältnismäfsig grofser Gewichtsbelastung der Muffe (grofser Umlaufzahl) ist $s_r \backsim s =$ dem Muffenhube in cm. Federregler ergeben nur dann wesentlich kleinere Werte von s_r und gestatten somit kleinere Ungleichförmigkeitsgrade, wenn jede Gewichtsbelastung (aufser der durch die Schwungmassen bedingten) vermieden, und wenn durch grofse Umlaufzahl und grofsen Abstand der Schwungmassen von der Spindel die Massen gering und ihr Ausschlag klein gehalten werden. (Vrgl. die Angaben über s_r auf S. 915 bis 917.) Je kleiner s_r im Verhältnis zum wirklichen Hube, um so gröfser ist die Regelfähigkeit des Reglers, und um so kleiner darf unter gleichen Umständen δ genommen werden.

Bezeichnet

L die gröfste Leistung des Motors in mkg/sk,

M die Masse des Schwungringes in $\frac{\text{kg sk}^2}{\text{m}}$,

V dessen Geschwindigkeit in m/sk, so ist

$$T = \frac{M V^2}{L} \text{sk}.$$

Kleine Werte von δ erfordern also, da T gegen s_r im Quadrat erscheint, in erster Linie möglichst schwere Schwungräder bei grofser Umfangsgeschwindigkeit.

Flüssigkeitskatarakte (Oelbremsen mit Hahn in dem Verbindungsrohre beider Kolbenseiten zum Berichtigen; senkrechte Stellung, damit der Kolben sich reibungsfrei im Zylinder bewegt) ermöglichen einen etwas kleineren Ungleichförmigkeitsgrad, als vorstehend angegeben, erzeugen aber durch ihren Widerstand gröfsere Unempfindlichkeit.

Unbeweglichkeits- oder Unempfindlichkeitsgrad ε. Der Widerstand P, den jeder mit Reguliervorrichtung verbundene Regler zu überwinden hat, gemessen an der Muffe im Sinne ihrer Verschiebung, setzt sich zusammen aus dem nützlichen Teile W, der durch das

Stellzeug auf die Muffe übertragen wird, und dem von der Eigenreibung des Reglers herrührenden Teile R. P wirkt also, ähnlich wie die Reibung in einem Getriebe, stets der angestrebten Bewegung entgegen.

In jeder Stellung des durch die Kraft P belasteten Reglers tritt erst dann ein Steigen oder Sinken der Muffe ein, wenn die minutliche Umlaufzahl n eine bestimmte Aenderung in positivem oder negativem Sinne ($+\varDelta n$ oder $-\varDelta n$) erfahren, d. h., wenn die Fliehkraft C der umlaufenden Schwungmassen um einen gewissen Betrag $\varDelta C$ zu- oder abgenommen hat. Die Muffe bleibt also bei einer Aenderung der Umlaufzahl zwischen

$$n-\varDelta n \text{ bis } n+\varDelta n$$

unbeweglich oder unempfindlich; man bezeichnet das Verhältnis

$$\frac{(n+\varDelta n)-(n-\varDelta n)}{n}=\frac{2\varDelta n}{n}=\varepsilon$$

als den Unbeweglichkeits- oder Unempfindlichkeitsgrad.

Weil $\varDelta n$ im allgemeinen gegen n sehr klein ist, so ist auch angenähert

$$\varepsilon=\frac{(n+\varDelta n)^2-n^2}{n^2}=\frac{\varDelta C}{C}.$$

Der Unempfindlichkeitsgrad ε eines Reglers soll bei Maschinen mit hin- und hergehender Bewegung nie kleiner sein als der Ungleichförmigkeitsgrad δ_s des zugehörigen Schwungrades (vrgl. S. 901), um ein Zucken des Reglers während eines jeden Maschinenhubes zu vermeiden. Er darf ferner nicht kleiner sein, als der kleinste zulässige Ungleichförmigkeitsgrad des Reglers (vrgl. S. 903).

Energie S nennt man die Kraft, welche der ruhend und vom Stellzeuge nicht belastet gedachte Regler an der Muffe ausübt. Die Gröfse von S ist durch Auswägen des Muffendruckes bei ruhender Spindel für jede Muffenstellung praktisch leicht zu ermitteln.

Mit Hülfe der Energie S läfst sich ε auch schreiben:

$$\varepsilon=\frac{P}{S}=\frac{W+R}{S}=\frac{W}{S}+\frac{R}{S}=\varepsilon_w+\varepsilon_r.$$

Der Unempfindlichkeitsgrad ε setzt sich also aus zwei Teilen zusammen: aus

ε_w, herrührend von der nützlichen Verstellkraft und aus

ε_r, bedingt durch die Eigenreibung des Reglers. Je niedriger ε_r, um so günstiger ist der Regler, um so gröfser darf bei vorgeschriebenem ε der nützliche Teil ε_w, und um so kleiner demnach bei gegebener Verstellkraft W die Energie S genommen werden.

Bei den meisten Reglern ist ε_r für die einzelnen Muffenstellungen verschieden. Zur vollständigen Beurteilung sind also Angaben von ε_r mindestens für die tiefste, mittlere und höchste Muffenstellung erforderlich. (Zahlenangaben für verschiedene Systeme s. S. 915 bis

917, Ermittlung von ε_r s. S. 912.) Am zweckmäfsigsten sind Regler mit möglichst unveränderlichem ε_r.

Von der Verstellkraft W ist meist nur ein Mittelwert bekannt; Abhängigkeit von den Muffenstellungen wird zwar häufig vorhanden, aber da meist unbekannt, nicht zu berücksichtigen, vielmehr gleichbleibende Verstellkraft W vorauszusetzen sein. [Bestimmung des Widerstandes W durch Auswägen an der vorhandenen Regelungsvorrichtung (unter Dampf), zweckmäfsig mittels Federwage.]

Mit Rücksicht auf gleichbleibende Unempfindlichkeit für alle Muffenstellungen ist deshalb **unveränderliche Energie** S am günstigsten; bei Gewichtbelastung der Muffe ist S für pseudoastatische Regler unveränderlich, wenn die Schwungmassen im Verhältnis zur Muffenbelastung klein, die Umlaufzahlen also grofs gemacht werden. Die bekannten Regler mit Federbelastung zeigen sämtlich starke Veränderlichkeit der Energie (Zunahme mit steigender Muffe bei Hartung, Trenck, Zabel, Steinle usw., Abnahme bei Proell); unveränderliche Energie haben die Federregler nach Tolle.

Unveränderliche Energie ermöglicht, ohne Aenderung des Ungleichförmigkeitsgrades die Hülsenbelastung zu vergröfsern oder zu verkleinern und damit die Umlaufzahl zu ändern. Regler mit stark veränderlichem S erfordern auch genaues Auswuchten des Stellzeuges, damit nicht durch Be- oder Entlastung der Muffe der Ungleichförmigkeitsgrad verändert, z. B. labile Anordnung herbeigeführt wird.

Gesamter Ungleichförmigkeitsgrad i. Der gesamte und tatsächliche Ungleichförmigkeitsgrad, den der Regler für die Maschine herbeiführt, beträgt angenähert

$$i = \delta + \varepsilon;$$

er entspricht dem mit dem Stellzeuge gekuppelten Regler.

Der Wert von i ist schliefslich für die gröfsten auftretenden Geschwindigkeitsschwankungen des Motors mafsgebend. Da sich ε und δ gegenseitig bedingen (ε soll $\backsim \delta$ sein), so gestatten nur solche Regler die geringsten Schwankungen, die sowohl kleine Unempfindlichkeitsgrade ε (geringe Eigenreibung und grofse Energie) als auch kleine Ungleichförmigkeitsgrade δ (Federbelastung, kleine Schwungmassen mit möglichst kleinen Ausschlägen) zulassen; aufserdem mufs natürlich der Motor selbst einen niedrigen Ungleichförmigkeitsgrad δ_s des Schwungrades besitzen (da $\varepsilon \geqq \delta_s$).

Arbeitsvermögen des Reglers nennt man das Produkt aus der mittleren Energie S_m und dem Muffenhube s, also

$$\text{Arbeitsvermögen } \mathfrak{A} = S_m s = \int S ds.$$

Unmittelbar wirkende Regler sind beständig mit dem Regulierwerke verbunden und verstellen dieses mit der Kraft W, entsprechend der Beziehung

$$W + R = S\varepsilon.$$

Bei käuflichen, unmittelbar wirkenden Reglern ist meist die obere Grenze des Arbeitsvermögens $S_m s \backsim 15$ bis 18 mkg bei Belastung der Muffe ausschliefslich durch Gewichte; bei Belastung durch Federkraft steigt $S_m s$ bis auf etwa 90 mkg.

Bei den gröfseren Nummern ist zu prüfen, ob nicht die Anlage eines mittelbar wirkenden Reglers billiger ausfällt.

Mittelbar wirkende Regler mit Stellhemmung kuppeln nur an den Hubgrenzen mittels der Kraft W eine Hülfskraft mit der Regelungsvorrichtung. Sie gestatten die Verwendung des kleinsten Muffenhubes, was einen geringen Ungleichförmigkeitsgrad δ zur Folge hat; da auch W sehr klein gehalten werden kann, so ist es möglich, trotz grofsen Kraftbedarfes für Wasserschützen, Rider- und Meyer-Steuerung usw. noch mit dem üblichen Aufwande von Reglermassen den gesamten Ungleichförmigkeitsgrad i in niedrigen Grenzen zu halten. — Näheres s. S. 915.

Mittelbar wirkende Regler mit Servomotor bringen eine jeder Muffenstellung entsprechend verschieden grofse Hülfskraft zur Einwirkung, indem z. B. unter Verwendung eines Hülfselektromotors die Reglermuffe über verschieden grofse Widerstände gleitend, dem Reguliermotor mehr oder minder starken Strom zuführt. Bei Wasserkraftmaschinen wird als Uebertragungselement ein von einem Hülfspumpwerk erzeugter Flüssigkeitsstrom benutzt. Indem der Regler ein in die Druckleitung eingeschaltetes Ventil mehr oder weniger drosselt, kann eine gröfsere oder geringere Kraft des Betriebswassers auf den Kolben eines hydraulischen Servomotors einwirken.

Leistungs-Regler*) für Pumpwerke, von F. J. Weifs in Basel, erstreben nicht, wie die gewöhnlichen (Geschwindigkeits-) Regler, eine möglichst gleichbleibende Umlaufzahl der Maschine, sondern gestatten bei gleicher Hubarbeit stark wechselnde Maschinen-Geschwindigkeit. Die Leistungs-Regler sind daher sehr stark statisch (Ungleichförmigkeitsgrad δ bis zu 5,6). Indem die Lage der Reglermuffe zur Steuerung nach Belieben abgeändert werden kann, wird es möglich, dem gleichen Füllungsgrade der Dampfmaschine verschiedene Muffenstellungen, also auch verschiedene Umlaufzahlen des Reglers zuzuordnen.

Für die sechs Nummern des Weifsschen Leistungs-Reglers beträgt die zulässige Verschiedenheit der Umlaufzahlen das 3,85- bis 5,6-fache der kleinsten Umlaufzahl. S wechselt zwischen 25 und 850 kg; der Hülsenhub s, von 22 bis 81 mm zunehmend, ist für das Arbeitsvermögen ohne Bedeutung.

Während der Weifssche Regler grofse Gelenkdrücke aufweist und bedeutender Umlaufzahlen bedarf, erzielen die Leistungsregler von Prof. Stumpf in Berlin die Regelung durch eine kurze Feder, die unmittelbar an den Schwunggewichten angreift und so die verschiedenen Fliehkraftmomente unmittelbar in den Gewichten aufhebt.

Beharrungsregler. Ein Fliehkraftpendelregler mit verhältnismäfsig geringer Energie (meist Flachregler) wird mit einer Hülfsschwungmasse verbunden, die entweder mit der Fliehmasse des Pendelreglers zu einem starren Stück vereinigt ist, oder um einen besonderen Bolzen (am besten um die Reglerachse) drehbar schwingt und an der Bewegung der Fliehmasse vermöge zwangläufiger Verbindung durch Zugstangen usw. teilnimmt. Der Trägheitswiderstand der Hülfs-

*) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1891 S. 1065 u. f.

schwungmasse (der sogen. Beharrungsmasse), der bei einer Aenderung der Winkelgeschwindigkeit der Reglerspindel wachgerufen wird, überträgt sich auf den eigentlichen Fliehkraftpendelregler und vergröſsert dessen Verstellkraft bedeutend. Ausführungsformen von Zabel & Co. und von Fischinger in Dresden.

2. Einteilung der Pendel-Regler.

Man unterscheidet

1. Pendel-Regler, bei denen die Bewegungen der Schwungpendel bei jeder Geschwindigkeitsänderung in einer anderen zur Spindel winkelrechten Ebene erfolgen (Kegelregler);
2. Pendel-Regler, bei denen die Bewegungen der Schwungpendel stets in einer und derselben zur Spindel winkelrechten Ebene erfolgen (Flachregler, Achsenregler).

Als Mittel zur Uebertragung der Bewegung der Schwungkörper auf die Hülse kommen als einfachste nur in Betracht:

a) das Schubkurbelgetriebe und
b) die Kurbelschleife.

Dabei können die Schwungmassen

sich entweder um einen festen Drehpunkt an der Spindel (mit ihren sämtlichen Punkten in Kreisen) bewegen (unmittelbare Aufhängung) oder

mit einem Gliede des Getriebes (z. B. der Lenkstange des Kurbelgetriebes) verbunden sein, wobei ihre einzelnen Punkte andere Bahnen beschreiben (umgekehrte Aufhängung)

Die Fliehkraft der umlaufenden Schwungmassen wird im Gleichgewichte gehalten

1. entweder durch die Gewichtwirkung der Schwungmassen allein oder in Verbindung mit einer Gewichtbelastung der Hülse (Gewichtregler) oder
2. durch Federbelastungen (Federregler). Federregler ergeben wegen der geringeren zu beschleunigenden Massen einen kleineren reduzierten Muffenhub (vrgl. S. 904) und gestatten deshalb bei gleicher Regelungsfähigkeit einen kleineren Ungleichförmigkeitsgrad.

b. Untersuchung und Berechnung der Pendel-Regler auf Grund von Diagrammen.*)

1. C-Kurven, Ungleichförmigkeitsgrad.

Bestimmt man für einen gegebenen **Kegelregler** durch Zeichnung oder Rechnung die Kräfte C, die im Schwerpunkte der Schwungmassen, winkelrecht zur Spindel nach auſsen wirkend, den belastenden Kräften (Hülsengewicht Q, Gewicht der Schwungkörper G und Federbelastung F) in den verschiedenen Reglerstellungen das Gleichgewicht halten, und trägt diese als Ordinaten von einer Achse ON aus senkrecht unter den Schwerpunkten M ab, so liegen die Endpunkte auf der **Charakteristik** oder **C-Kurve** des Reglers (Abb. 413 bis 418). Um den Einfluſs der einzelnen Gröſsen zu erkennen, empfiehlt es sich, die Anteile, welche G, Q und F zu C beitragen, d. h. die Kraft C_g, welche G allein, die Kraft C_q, welche Q allein und C_f, welche F allein das Gleichgewicht halten würden, getrennt zu er-

*) S. M. Tolle, Beiträge zur Beurteilung der Zentrifugalpendelregulatoren, Z. d. V. d. I. 1895 und 1896.

mitteln und ebenso als Ordinaten zu einer C_g-, C_q- und C_f-Kurve aufzutragen.

Im folgenden sind stets **alle Kräfte auf eine Schwungmasse** bezogen gedacht; es bedeute also

G das Gewicht und M die Masse aller Schwungkörper zusammen,
C deren gesamte Fliehkraft,
Q die Hülsenbelastung,
x den Abstand des Schwerpunktes M von der Spindel,

dann ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit ω und die minutl. Umlaufzahl n aus C:

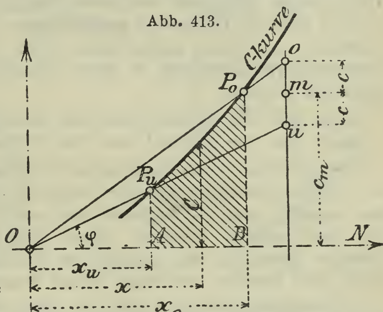


Abb. 413.

$$C = \omega^2 M x = \left(\frac{n}{30}\right)^2 \frac{\pi^2}{g} G x$$

(wenn x in m gemessen, so wird $\frac{\pi^2}{g} \backsim 1$).

Das **Arbeitsvermögen** eines Reglers ist gleich dem Inhalte der von der C-Kurve, der ON-Achse und den beiden Endwerten der C-Kräfte eingeschlossenen Fläche ($\mathfrak{A}$ = Fläche $A P_u P_0 B$ in Abb. 299).

Ist der Regler astatisch, so ist die C-Kurve eine Gerade durch O.

Wächst der Winkel φ, den der Strahl OP_u in Abb. 413 mit der Achse ON bildet, mit wachsendem Pendelausschlage, so ist der Regler stabil, nimmt φ mit zunehmendem x ab, so ist der Regler labil. Der Berührungspunkt einer Tangente, die von O aus an die C-Kurve gezogen werden kann, bedeutet einen astatischen Punkt (P_a in Abb. 414); falls nicht zufällig P_a ein Wendepunkt der C-Kurve ist, trennt P_a den brauchbaren Teil — Regler stabil — von dem unbrauchbaren — Regler labil. Ist OP_a eine Wendetangente, so kann der Regler ganz stabil oder ganz labil sein (Abb. 415).

Abb. 414.

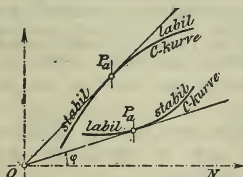
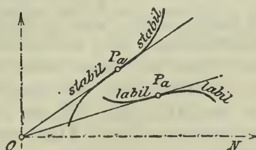


Abb. 415.



Zieht man in Abb. 413 durch die Endpunkte P_u und P_o des benutzten Teiles der C-Kurve Strahlen von O aus, schneidet diese

durch eine beliebige Senkrechte in o und u und mifst die Strecke c_m von ON bis zur Mitte m zwischen o und u, so erhält man den **Ungleichförmigkeitsgrad**

$$\delta = \frac{c}{c_m}.$$

Soll umgekehrt zu einer gegebenen tiefsten Muffenstellung die einem vorgeschriebenen Ungleichförmigkeitsgrade δ (vrgl. S. 901) entsprechende höchste Stellung ermittelt werden, so ziehe Ou durch P_u, trage $uo = 2c = 2\delta c_m$ nach oben ab und schneide mit Oo die C-Kurve im gesuchten höchsten Punkte P_o.

Da sich die C-Kurven **unabhängig** von der Lage der Spindel ergeben, so kann nachträglich beim Entwurfe eines Reglers der Ungleichförmigkeitsgrad δ durch Verlegen der Spindel beliebig abgeändert werden:

rückt man die Spindel nach den Schwungmassen hin, so nimmt δ ab,
rückt man die Spindel von den Schwungmassen ab, so wächst δ.

In der Nähe eines astatischen Punktes P_a ist δ am leichtesten klein zu halten; deshalb verwendet man meist solche Stücke der C-Kurve, die ungefähr mit P_a beginnen und stabil sind. Ist die C-Kurve, wie bei den meisten Reglern, oben konkav, so liegt ihre benutzbare Strecke oberhalb des astatischen Punktes; ist sie oben konvex, so liegt jene Strecke unterhalb dieses Punktes.

Vorstehende Beziehungen gelten nur, wenn die Schwungkörper Umdrehungskörper sind, deren Drehachsen winkelrecht zur Pendelebene stehen.

Die den einzelnen Belastungen (Gewicht G der Schwungkörper, Muffenbelastung Q, Federkraft F) entsprechenden C-Kurven geben Aufschlufs, ob und wie weit eine Aenderung dieser Gröfsen zulässig ist. Hat z. B. die C_g-Kurve den gleichen Charakter wie die gesamte C-Kurve (ist sie annähernd astatisch), so darf G ohne Beeinflussung von δ abgeändert werden; ist die C_q-Kurve genau oder annähernd astatisch, so kann die Hülsenbelastung (z. B. zur Erhöhung der Umlaufzahl) vergröfsert werden.

Regler mit astatischer C_q-Kurve erfahren auch durch gröfsere Verstellkräfte keine Aenderung ihres Ungleichförmigkeitsgrades; labile Anordnungen infolge des Stellzeuges sind deshalb hierbei ausgeschlossen.

Anspannen von Federn bedeutet Hinzufügen einer unveränderlichen Kraft; ergibt eine an Stelle der Feder gedachte unveränderliche Kraft eine astatische C-Kurve, so ist Anspannen der Feder zulässig. Federregler mit Federkraft unmittelbar an der Hülse gestatten also nur dann Aenderung der Umlaufzahl durch Aenderung der Federspannung, wenn die C_q-Kurve astatisch ist; andernfalls, z. B. wenn die C_q-Kurve (wie bei Trenck, Zabel, Hartung, Steinle) stark labil ist, wird durch Spannen der Feder labile Anordnung herbeigeführt.

Ist in Abb. 416 M der Schwerpunkt des beliebig gestalteten Schwungkörpers eines **Flachreglers**, der sich um die Achse A mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, und bedeutet

a den Abstand des Zapfenmittelpunktes I von der Drehachse A,
$\mathfrak{M}$ das Moment der Fliehkraft des Pendels von der Masse M und

dem Gewichte G, das dem Momente der belastenden Federkräfte in den einzelnen Stellungen das Gleichgewicht zu halten hat, so bleiben vorstehende Beziehungen gültig, wenn man von einer zu AI winkelrechten Achse ON aus unter M die Momente $\mathfrak{M}$ als Ordinaten errichtet. Die **$\mathfrak{M}$-Kurve ist dann genau so zu benutzen, wie die C-Kurve beim Kegelregler.** Hier gilt zur Bestimmung von ω und n:

$$\mathfrak{M} = \omega^2 a M x = \left(\frac{n}{30}\right)^2 \frac{\pi^2}{g} a G x.$$

Abb. 416.

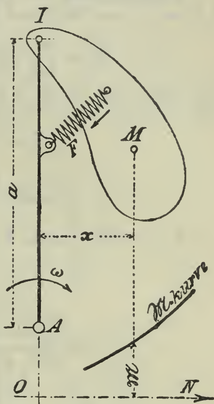
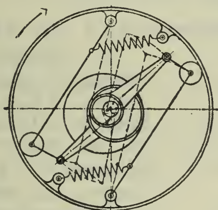


Abb. 417.



Rückt man beim Entwurfe Schwungkörper samt angreifender Feder in der Richtung AI von A fort, so bleibt die $\mathfrak{M}$-Kurve und der Anfangspunkt O, demnach auch der Ungleichförmigkeitsgrad erhalten; es ändert sich nur a und damit die Umlaufzahl gemäfs vorstehender Gleichung.

Eine besondere Gattung der Flachregler bilden die sogen. **Achsenregler** (Abb. 417). Sie sind gewöhnlich unmittelbar auf der Kurbel- oder Steuerwelle der Maschine angebracht und verdrehen ein mit der Steuerung verbundenes Exzenter, wodurch die Füllung verändert wird.

2. Regler mit Schubkurbelgetriebe und Gewichtbelastung.

1. Direkte Aufhängung des Pendels.

Für den allgemeinen Fall ergibt Abb. 418, S. 912 alle erforderlichen Gröfsen durch Zeichnung, wie folgt:

C_p: trage vom festen Pendeldrehpunkte I aus G nach unten, ziehe gg wagerecht; auf dieser schneiden die Strahlen IM die Werte C_g ab.

C_q: trage von I aus Q nach oben ab, ziehe qq wagerecht, bringe die Wagerechte durch M mit der Lenkstange II III zum Schnitt in B, ziehe BID, ferner IA parallel III II, so ist DA auf qq gelegen $= C_q$.

$C = C_g + C_q$.

Energie S: Stets ist $\frac{S}{C} = \frac{Q}{C_q}$, deshalb S als Höhe aus einem zu DA ähnlichen Dreieck mit C als Grundlinie zu entnehmen.

Zapfendrücke: Z_3 (für den Zapfen III) $= Z_2$ (für Zapfen II) $=$ IA. Z_1 (für Zapfen I) $=$ Strecke DE.

Hieraus die Zapfendurchmesser d_1, d_2 und d_3.

Eigenreibung R (auf die Hülse bezogen): entnimm die Längen I$H = h_1$ und III$\mathfrak{P} = h_3$, so ist

$$R = \frac{\mu}{2h_1}(Z_1 d_1 + Z_2 d_2) + \frac{\mu}{2h_3}(Z_2 d_2 + Z_3 d_3),$$

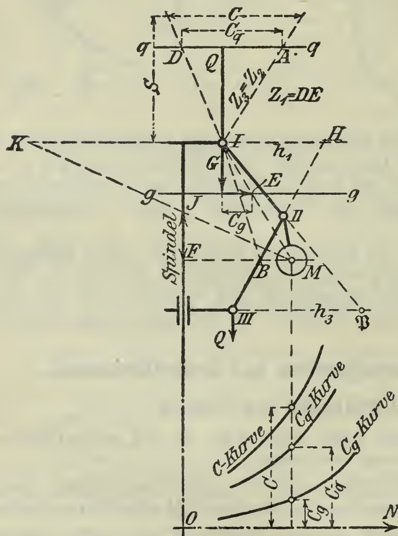
und wenn $d_1 = d_2 = d_3 = d$:

$$R = \frac{\mu d}{2}\left[\frac{Z_1 + Z_2}{h_1} + \frac{Z_2 + Z_3}{h_3}\right].$$

$$\varepsilon r = \frac{R}{S}; \quad \varepsilon w = \frac{W}{S}; \quad \varepsilon = \varepsilon r + \varepsilon w.$$

$\delta (= c : c_m)$ nach Abb. 413. Arbeitsvermögen nach Abb. 413.

Abb. 418.



Für **rhombische Aufhängung** (I und III haben gleichen Abstand von der Spindel, I II = II III, I, II, M liegen auf einer Geraden), d. h. bei den Reglern von Watt, Porter und Kley, sind die C_g-, C_q- und C-Kurve von gleicher Gestalt, Q und G können, ohne δ zu beeinflussen, beliebig abgeändert werden; Energie S unveränderlich; Eigenreibung R und somit εr am geringsten für Ausschlagwinkel $= 45°$, zur Erzielung von genügend kleinem δ, dann Kreuzung der Stangen erforderlich. Je gröfser ferner G gegen Q, je niedriger also die Umlaufzahl gewählt wird, und je gröfser h_1 und h_3 in Abb. 418, d. h. je mehr Platz bei gleicher Energie gestattet ist, um so kleiner fällt εr aus.

Nach Bartl*) ergibt die Zeichnung durch Abtragen von I$K = \frac{Q}{G} \cdot$ IH, Ziehen der Geraden KM und FM in der Strecke JF

*) Vrgl. Civilingenieur 1893, 1896; dann auch Bartl, Die Berechnung der Zentrifugalregulatoren (Leipzig 1900). Daselbst sind auch einfache Verfahren zur Ausmittelung von S, der Eigenreibung und des Einflusses der Stangenmassen angegeben.

den Wert von $\frac{g}{\omega^2}$, worin $g = 9{,}81$ und ω die Winkelgeschwindigkeit des Reglers bedeutet.

2. Umgekehrte Aufhängung des Pendels.

Für den allgemeinen Fall ergibt Abb. 419, durch Zeichnung:

C_g: Bringe I II mit der Wagerechten durch III zum Schnitt im Pole $\mathfrak{P}$, ziehe $M\mathfrak{P}$, trage von M aus G nach unten ab; auf der Wagerechten durch den Endpunkt von G schneidet dann $M\mathfrak{P}$ C_g ab.

C_q: Ziehe die Wagerechte MB, miſs von B aus Q nach unten und lege durch den Endpunkt von Q eine Wagerechte; auf dieser schneidet $B\mathfrak{P}$ C_q ab.

$C = C_g + C_q$.

S: Stets ist $\frac{S}{C} = \frac{Q}{C_q}$, deshalb S als Höhe aus einem Dreieck mit C als Grundlinie zu entnehmen, ähnlich dem, durch welches C_q aus Q gefunden wurde.

Abb. 419.

Zapfendrücke: Trage von einer Wagerechten aus (Abb. 419 oben) $Q + G$ nach unten ab, ziehe durch den Endpunkt von G eine Parallele zu I II, deren Länge $= Z_1 = Z_2$ wird, und miſs auf der Wagerechten C ab; der Endpunkt von C hat vom Endpunkte der Kraft Q einen Abstand $= Z_3$.

R und ε_r wie unter 1. Ungleichförmigkeitsgrad δ und Arbeitsvermögen nach Abb. 413, S. 909.

Für **rhombische Aufhängung** sind die C_g-, C_q- und C-Kurven von gleicher Gestalt (u. zw. wie bei direkter Aufhängung). Die umgekehrte Aufhängung des Pendels bietet keine Vorteile; Nachteile: bei gleichen Gewichten kleinere Energie und gröſsere Eigenreibung (ε_r wird um so gröſser, je gröſser G gegen Q, je kleiner also die Umlaufzahl genommen wird).

Verlegt man die Schwungmassenmittelpunkte M nach der Spindel zu (Regler von Proell, Abb. 420) oder kreuzt man nur die Stangen I II (nach Steinle, Abb. 421), so wird zunächst die C_g-Kurve labil, während die C_q-Kurve noch statisch bleibt. Durch Ausgleich beider erhält die gesamte C-Kurve die gewünschte Annäherung an die Astasie. Vergröſserung von Q vergröſsert δ, Vergröſserung von G vermindert δ.

$\varepsilon_r = 1$ bis 1,5 vH.

Durch Aendern der Federspannung (etwa durch eine Spannmutter) oder des Belastungsgewichts wird der Regler auf eine andere Umlaufzahl der zu regelnden Maschine (s. S. 917, Abs. 2) eingestellt.

Abb. 420.
Proell.

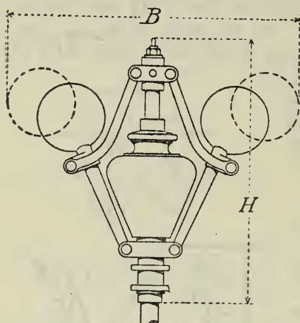
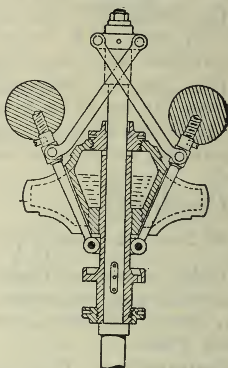


Abb. 421.
Steinle.



c. Käufliche Regler.

1. Regler von R. Trenck, Erfurt, mit Gewicht- und Federbelastung.

Nach Abb. 422 und Abb. 423; Spannmutter der Feder unzugänglich. Da C_q unveränderlich (stark labil) ist, so mufs das Stellzeug genau ausgeglichen werden. Aenderung der Umlaufzahl durch

Abb. 422.

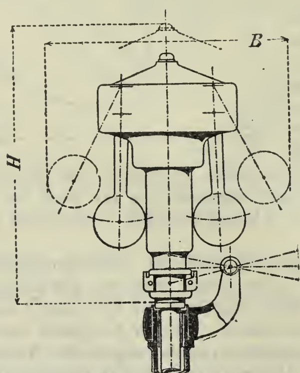
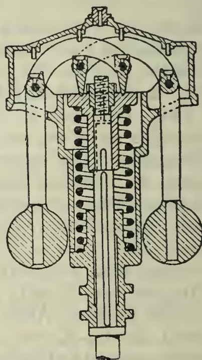


Abb. 423.



Aenderung der Federspannung ist unzulässig, deshalb wird eine besondere Einrichtung zur Aenderung der Umlaufzahl geliefert. C_g-Kurve astatisch; Energie nach oben zu stark zunehmend. $\varepsilon_r \backsim 1$ vH. Der reduzierte Hub s_r (s. S. 904) ist i. M. gleich $^1/_2\, s$ gleich dem halben Muffenhube.

Trenck-Regler. (Abb. 422 und 423.)

Nr. des Reglers	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Minutliche Umlaufzahl n .	300	280	260	240	220	200	180	160	160
Mittlere Energie S . kg	42	63	100	162	240	340	450	610	760
Muffenhub s . . . mm	30	40	50	60	70	80	95	115	115
Arbeitsvermögen $\mathfrak{A}$. mkg	1,3	2,5	5	9,7	16,8	27,2	42,7	70	87,5
Gröſste Breite B . . mm	300	365	430	510	600	700	820	950	990
Gröſste Höhe H . . mm	355	425	490	570	670	780	910	1075	1075

2. Feder-Regler von Zabel & Co., Quedlinburg.

Nach Abb. 424 oder 425; Spannmutter der Feder freigelegt zum Ausgleichen der Be- oder Entlastung durch das Stellzeug. C_q, C_g, S, ε_r wie vorstehend bei Trenck. Reduzierter Hub $s_r = 0{,}3$ bis $0{,}4\, s$.

Erhöhung der Umlaufzahl durch 2 oder 3 Zusatzfedern.

Abb. 424.

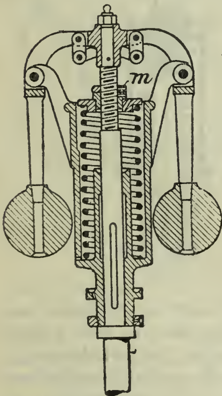
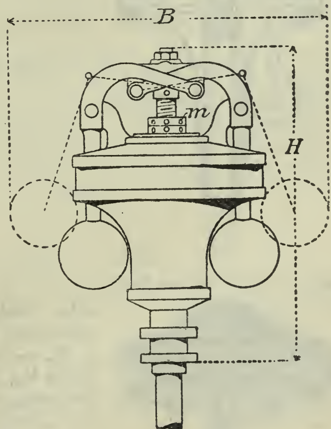


Abb. 425.



Bei den neuen, eingekapselten Federreglern mit drei Schwungkörpern ist ε_r fast 2 vH und i. M. $s_r = 0{,}6\, s$.

Zabel-Regler. (Abb. 424 und 425.)

Nr. des Reglers	1	2	3	4	5	6	7
Minutliche Umlaufzahl n . . .	240	220	200	190	180	160	150
Mittlere Energie S . . . kg	58	75	113	163	275	425	625
Muffenhub s . . . . . . mm	40	50	60	70	80	95	110
Arbeitsvermögen $\mathfrak{A}$ . . . mkg	2,32	3,75	6,78	11,4	22,0	40,4	68,8
Gröſste Breite B . . . . mm	380	430	520	610	710	830	960
Gröſste Höhe H . . . . mm	380	440	530	630	730	850	950

3. Federregler von Steinle & Hartung, Quedlinburg (Abb. 426).

Mit fast den gleichen Eigenschaften wie vorstehende Winkelhebelregler, jedoch unmittelbare Aufhängung des Pendels.

4. Federregler von H. Hartung Nachf., Düsseldorf (Abb. 427).

C_q unveränderlich (stark labil, vrgl. S. 909 unten, C_g nimmt proportional mit dem Pendelausschlage von + durch 0 nach — ab, also

Abb. 426. Steinle & Hartung.

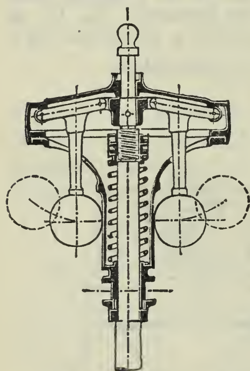


Abb. 428.

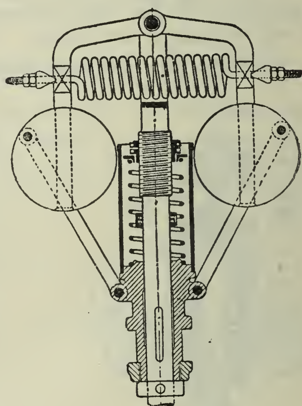
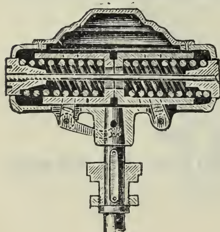


Abb. 427. H. Hartung Nachf.



sehr labil; Energie nach oben stark zunehmend, Eigenreibung, also ε_r sehr gering, i. M. $\varepsilon_r = 0{,}3$ vH (ohne Muffenbelastung); für je $^1/_{10}$ der Energie als zusätzlicher Muffenbelastung wird ε_r um $\backsim 0{,}2$ vH gröſser. s_r (s. S. 788) $= {}^1/_5\, s$ für die kleineren, bis $^1/_3\, s$ für die gröſseren Nummern. Aenderungen der Umlaufzahl nur innerhalb enger Grenzen möglich. Vorteil: Geringe Eigenreibung infolge Entlastung der Gelenke.

5. Federregler von Tolle.

Nach Abb. 428. Verkleinerung oder Vergröfserung des Ungleichförmigkeitsgrades durch Spannen oder Entspannen der Querfeder; Aenderung der Umlaufzahl ohne Beeinflussung von δ durch Spannen oder Entspannen der Längsfeder in beliebigen Grenzen. C_q astatisch, ebenso C_g, Energie unveränderlich; bei Ausführung nach Abb. 428 $\varepsilon_r = 0{,}5$ vH; s_r (s. S. 9 4) $= {}^1/_{12}\, s$ für die kleineren, bis ${}^1/_{15}\, s$ für die gröfseren Nummern (s hr gering).

Aufser den unten aufgeführten normalen Federreglern, deren Umlaufzahl durch Aenderung der Federspannung um 15 vH geändert werden kann, werden Regler mit Aenderung der Umlaufzahl während des Ganges 1) bis zu 15 vH, 2) bis 50 vH und 3) bis 100 vH geliefert.

Federregler nach Tolle. (Abb. 428.)

r. des Reglers . .	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
[inutl. Umlaufzahl n	360	340	320	300	300	300	300	290	280	260	250	230	220
nergie S . . . kg	31	53	80	112	130	151	175	212	252	296	394	567	770
Iuffenhub s . . mm	28	33	38	44	48	51	55	60	66	72	82	100	115
rbeitsvermögen mkg	0,87	1,75	3,1	4,9	6,2	7,7	9,6	12,7	16,6	21,3	37,4	56,7	88,5
röfste Breite B mm	260	306	358	410	438	474	510	560	608	666	762	910	1054
röfste Höhe H mm	278	322	383	426	457	485	534	581	634	685	791	940	1095

6. Federregler von Franz Beyer & Co. in Erfurt.

Nicht blofs die Umlaufzahl (durch Veränderung der Federspannung), sondern auch der Ungleichförmigkeitsgrad ist von aufsen einstellbar. Letzteres wird ermöglicht durch Verdrehen des oberen Federtellers (Abb. 429, S. 918). Gröfseren Ungleichförmigkeitsgraden entspricht eine geringere Anzahl der wirksamen Federgänge.

d. Mittelbar wirkende Regler. (Vrgl. S. 907.)

Wirkungsweise zur Einschaltung der Hülfskraft nach Abb. 430, S. 918 bei der Anordnung von Reibungsrädern, und nach Abb. 431 bei Anwendung einer Zahnkupplung.

In beiden Abbildungen bezeichnen die Abszissen h_1 und h_2 die untere und die obere Muffenlage, die Linie $a\,a$ die theoretische n-Kurve, die Punkte b den Beginn und die Punkte d das Ende der Einwirkung der Hülfskraft, die Punkte c die Umlaufzahl bei Umkehr der beschleunigten oder verzögerten Bewegung.

Bei einfacher Anordnung bleibt die Einkupplung der Hülfskraft von c aus bis zum Zustande bei d bestehen. Die käuflichen Regler

von Schäffer & Budenberg, Ganz & Co. und Riedinger dagegen sorgen durch besondere Einrichtung für Auskupplung bereits bei *c*.

Abb. 429.

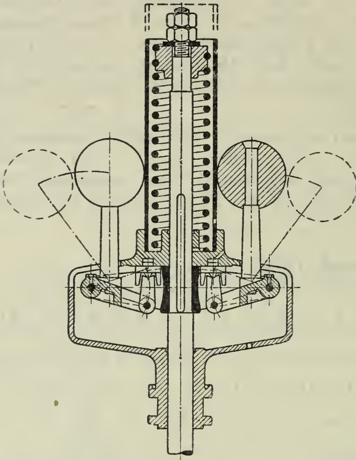


Abb. 430.

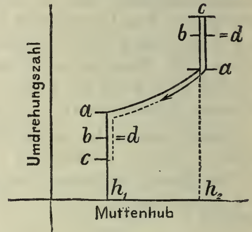
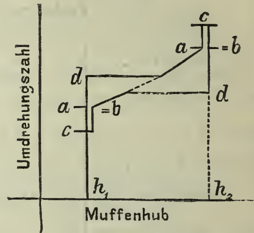


Abb. 431.



Die Anordnung mit Zahnkupplung bei nicht angemessenem Verhältnis $\delta : \varepsilon$ wird leicht labil; die Wirkungsweise beider Arten ist schwer aus den Muffenbewegungen allein zu erkennen. Im allgemeinen sei ε recht klein, dagegen $\delta > 0.02$, wonach die Hubgröfse einzurichten ist. (Gewöhnlich wird δ zu klein und ε zu grofs belassen, wodurch ein starkes Pendeln der Maschine um die Gleichgewichtslage, somit ein grofser Abstand der Punkte *b* und *c* hervorgerufen wird.)

ANHANG.

A. Münztafel.

GW. = Goldwährung; SW. = Silberwährung; DW. = Doppelwährung.

Ländernamen	Münzsorten	Deutsche ℳ	₰
Aegypten. (GW.)	1 Piaster (Tarif-, Regierungs-) zu 10 Oschr-el-Gersch, früher zu 40 Para (Medini)	—	20,75
	1 Kurant-Piaster etwa	—	15
	1 Sequin (ägypt. Pfund) mit 7,437 g Gold	20	75
	1 Beutel zu 5 Pfund zu 100 Piaster	103	75
Argentinien. (GW.)	1 Peso fuerte (Gold) zu 100 Centavos	3	87,7
	1 Peso nacional	4	05
Belgien. (DW.)	Wie Frankreich.		
Brasilien. (GW.)	1 Milreïs zu 1000 Reïs, legal 2,10 M., wirkl. Wert ~	1	—
	1 20-Milreïsstück mit 16,432 g Gold	45	85
	1 Conto di Reïs (Rechnungsmünze) = 1000 Milreïs	2292	75
Bulgarien u. Ostrumelien (SW.)	1 Lew (Franc) zu 100 Stotinki	—	81
	Keine eigenen Goldmünzen, nur Silbermünzen und in Gold einlösbare Banknoten.		
China. (SW.)	1 Haikuan-Taël Silber (amtlich)	6	41
	Man zahlt mit Silber (und Gold) nach Gewicht (Taël).		
Dänemark. (GW.)	1 Krone Silber = 100 Oere	1	12,5
	1 „ „ (als Scheidemünze)	1	08
	1 20-Kronenstück mit 8,0645 g Gold	22	50
Deutsches Reich. (GW.)	1 Mark [ℳ] zu 100 Pfennig [₰]	1	—
	1 Krone mit 3,584 g Gold	10	—
	Bei $^9/_{10}$ Feingehalt wiegen 2511 Mark in Gold 1 kg (Rauhgewicht); dsgl. 180 Mark in Silber 1 kg.		
	In Gold: 20- u. 10-Markstücke (von 8 u. 4 g Gewicht).		
	In Silber: 5-, 2-, 1-, $^1/_2$-Markstücke.		
	In Nickel: 10-, 5-Pfennigstücke.		
	In Kupferbronze: 2-, 1-Pfennigstücke.		
	Früher: 1 Thaler = 30 Groschen zu 12 Pf. = 3 Mark. 7 Gulden süddeutsche Währg. = 4 Thaler.		
	1 kg fein Gold = 2790 Mark.		
	1 kg fein Silber = 180 Mark Gold.		
	1 kg Gold = 15,5 kg Silber.*)		
Frankreich.**) (DW.)	1 Franc = 20 Sous = 100 Centimes	—	81
	1 20-Francstück mit 5,806 g Gold ($^9/_{10}$ Feingehalt) .	16	20
	1 kg fein Gold = 3444,44 Francs.		
	1 kg fein Silber = 222,22 Francs.		
	3100 Frcs. Gold bzw. 40 silb. 5-Francstücke wiegen 1 kg.		

*) Durch Einführung der Goldwährung in Deutschland (Münzgesetze vom 4. December 1871 und 9. Juli 1873) ist das Marksilber zur Scheidemünze herabgesetzt und vorstehendes Wertverhältnis zwischen Gold und Silber 15,5 : 1 hinfällig geworden Wenn heute die Börsennotiz in London für 1 (Troy-) Unze Standard Silber (Feingehalt 0,925) z. B. 25 Pence ist (am 9. Juli 1873 war sie $60^7/_8$ Pence für 1 Unze; ferner ist 1 Unze = 31,103 496 g und 1 £ = 240 d = 20,43 Mark), so ist heute:

$$1 \text{ kg Feinsilber} = \frac{1000 \cdot 25 \cdot 20{,}43}{31{,}1035 \cdot 0{,}925 \cdot 240} = 73{,}97\ ℳ, \text{ oder Gold : Silber} = \frac{2790}{73{,}97} = 37{,}72 : 1.$$

Zur Ermittlung des **Goldwertes der Silbermünzen** würde also auf Grund des vorstehenden Kurses deren Silberwert mit 15,5 : 37,72 (= 25 d : $60^7/_8$ d) = 0,411 zu multiplizieren sein. Hiernach wäre z. B. der Wert von 3 Mark Silber = 1,23 Mark Gold.

Nach dem Münzgesetze brauchen von dem als Scheidemünze geltenden Marksilber ($^1/_2$-, 1-, 2- und 5-Markstücke) jedesmal nur für 20 Mark, von Nickel- und Kupfermünzen nur für 1 Mark in Zahlung angenommen zu werden. — In 200 Mark Silber ist 1 kg fein Silber enthalten.

**) Frankreich steht in Münzunion mit Italien, Belgien, Griechenland und der Schweiz; diese Vereinigung wird lateinische Münzunion genannt; auch Luxemburg hat Franc-Währung.

Ländernamen	Münzsorten	Deutsche M	Deutsche 𝒮
Griechenland. (DW.)	1 Altdrachme zu 100 Lepta	—	72,5
	1 Neudrachme zu 100 Lepta	—	81
	1 20-Drachmenstück mit 5,806 g Gold	16	20
Grofsbritannien. (GW.)	1 Pfund Sterling oder 1 Sovereign [£] mit 7,3224 g Gold zu 20 Shilling (s)	20	42,95
	1 Guinee zu 21 s	21	45
	1 Shilling = 12 Pence [deniers, d] zu 4 Farthings	1	02
	1 Troypfund Standard- (Münz-) Gold enthält 11 Unzen fein Gold = 46 £ 14,5 s, also ein Troypfund (12 Unzen) fein Gold = 50 £ 19,5 s.		
Japan. (GW.)	1 10-Golddollarstück (mit 7,497 g Gold)	20	90
	1 Silber-Yen [Rio] = 100 Sen zu 10 Rin (thats. ∾ 2 M.)	4	37
Italien. (DW.)	1 Lire (= 1 Franc) zu 100 Centesimi	—	81
	1 Scudo zu 5 Lire. 1 20-Lirestück mit 5,806 g Gold	16	20
Mexico. (SW.)	1 Peso [Dollar, Piaster] duro (mit 24,429 g Silber) zu 8 Reales oder zu 100 Centavos (nominell 4,396 M.)	2	—
	1 Hidalgo (Gold) zu 10 Goldpesos	41	30,8
Niederlande. (GW.)	1 Gulden zu 100 Cent	1	68,7
	1 10-Guldenstück (Willemsdor) mit 6,048 g Gold	16	87
Oesterreich-Ungarn. (GW.)	1 Krone zu 100 Heller = 50 Kreuzer = 1,05 Frcs.	—	85
	1 20-Kronenstück mit 6,09756 g Gold	17	01
	1 Gulden (fl.) österr. Währung zu 100 Kreuzer (Silber und Papier)	1	70
	8 Gulden in Gold = 20 Frcs. = 5,806 g Gold	16	20
Ostindien. (SW.)	1 Gold-Mohur (mit 10,692 g Gold) zu 15 Rupien	29	83
	1 Silberrupie = 16 Annas zu 12 Pie, gesetzl. 1 s 4 d.	1	36
Portugal. (GW.)	1 Goldkrone [corôa] (mit 16,257 g Gold) zu 10 Milreïs = 10 000 Reïs	45	36
	1 Testao (in Silber) = 100 Reïs. 1 Crusado = meist 480 Reïs. 1 Conto (Rechnungsm.) = 1000 Milreïs.		
Rumänien. (GW.)	1 Leï [Piaster, Romana] zu 100 Bani (Para)	—	81
	1 Carold'or (mit 5,806 g Gold) zu 20 Leï	16	20
Russland. (GW.)	1 Rubel Silber (mit 17,994 g fein) zu 100 Kopeken	2	16
	100 Rubel Papier an der Berliner Börse zur Zeit durchschn.	216	—
	1 Imperial Gold (mit 11,612 g Gold) zu 15 Rubel	32	40
	1 Halbimperial Gold zu 7,5 Rubel	16	20
	Finnland (GW.): 1 Mark zu 100 Penni	—	81
Schweden u. Norwegen. (GW.)	1 20-Kronenstück mit 8,0645 g Gold	22	50
	1 Krone zu 100 Oere	1	12,5
Schweiz. (DW.)	1 Franc zu 100 Rappen (Centimes)	—	81
	1 20-Francstück = 5,806 g Gold	16	20
Serbien. (DW.)	1 Dinar zu 100 Para	—	81
	1 20-Dinarstück = 5,806 g Gold	16	20
Spanien. (DW.)	1 Peseta zu 100 Centesimos (wie Frankreich)	—	81
Südamerika.*) (SW.)	1 Peso corriente (nacional) (Dollar) zu 100 Centavos (Cents), thatsächlich etwa 1,80 M., nominell	4	05
Türkei. (GW.)	1 Piaster (Gersch) zu 40 Para zu 3 Asper	—	18,46
	1 Medjidié Gold (mit 6,615 g Gold) zu 100 Piaster	18	46
	1 Medjidié Silbermünze zu 19 Goldpiaster	3	40
	1 Beutel = 5 Goldmedjidié = 500 Piaster	92	30
Uruguay. (GW.)	1 Goldpeso zu 100 Centimos	4	34,78
Ver. Staaten v. N.-Am. (DW.)	1 Dollar [$] (mit 24,057 g Silber) zu 100 Cents [c.]	4	19,8
	1 Eagle (mit 15,046 g Gold) zu 10 Dollar	41	98

Umrechnungsätze i. Febr. 1908 an der Berliner Börse: 1 Fr., Lire, Leu, Peseta: 80 Pf. — Oest. 1 fl. Gold: 2 M., Währ.: 1,70, 1 Kr.: 0,85. — 7 fl. südd.: 12. — 1 fl. holl.: 1,70. — 1 M. Banco: 1,50. — 1 Kr.: 1,12½ — 1 Rbl.: 2,16, 1 Gold-Rbl.: 3,20. — 1 Peso: 4. — 1 Doll.: 4,20. — 1 Lstrl.: 20,40 M.

*) Die Angaben gelten für Bolivia (SW.), Chile (DW.), Colombia (SW.), Costarica (SW.), Dominikanische Republik (SW.), Ecuador (SW.), Guatemala (SW.), Haiti (DW.), Honduras (SW.), Nicaragua (SW.), Paraguay (Papierwährung), Peru (SW., 1 Sol = 10 Dinaros zu 10 Centavos), S. Salvador (SW.) und Venezuela (DW.).

B. Vergleich der Mafse verschiedener Länder mit dem metrischen Mafs.

	Preufsen, Dänemark. 1 F. = 12 Z.	Bayern. 1 F. = 12 Z.	Sachsen. 1 F. = 12 Z.	Württemberg. 1 F. = 12 Z.	Baden, Schweiz. 1 F. = 10 Z.	Oesterreich. 1 F. = 12 Z.	England, Rufsland. 1 F. = 12 Z.	Schweden. 1 F. = 10 Z.	Frankreich. 1 Par. F. = 12 Z.
	1. Fufse.								
	1 Meter = *n* Fufs.								
n	3,1862	3,4263	3,5312	3,4905	3,3333	3,1637	3,2809	3,3681	3,0784
	1 Fufs = 1/*n* Meter.								
1/*n*	0,3139	0,2919	0,2832	0,2865	0,3000	0,3161	0,3048	0,2969	0,3248
	2. Quadrat-Fufse.								
	1 Quadrat-Meter = *n* Quadrat-Fufs.								
n	10,152	11,740	12,469	12,184	11,111	10,008	10,764	11,344	9,4768
	1 Quadrat-Fufs = 1/*n* Quadrat-Meter.								
1/*n*	0,0985	0,0852	0,0802	0,0821	0,0900	0,0999	0,0929	0,0882	0,1055
	3. Kubik-Fufse.								
	1 Kubik-Meter = *n* Kubik-Fufs.								
n	32,346	40,224	44,032	42,528	37,037	31,660	35,317	38,208	29,174
	1 Kubik-Fufs = 1/*n* Kubik-Meter.								
1/*n*	0,0309	0,0249	0,0227	0,0235	0,0270	0,0316	0,0283	0,0262	0,0343

	Preufsen. 1 R. = 12 F.	Bayern. 1 R. = 10 F.	Sachsen. 1 R. = $15^1/_6$ F.	Württemberg. 1 R. = 10 F.	Baden, Schweiz. 1 R. = 10 F.	Oesterreich. 1 Klafter = 6 F.	England. 1 R. (pole) = 16,5 F.	Rufsland. 1 Faden (Saschehn) = 7 F.	Frankreich. 1 Toise = 6 F.
	4. Ruten.								
	10 Meter = *n* Ruten (Klafter, Faden, Toisen).								
n	2,6552	3,4263	2,3283	3,4905	3,3333	5,2726	1,9884	4,6870	5,1307
	1 Rute (Klafter, Faden, Toise) = 10/*n* Meter.								
10/*n*	3,7662	2,9186	4,2950	2,8649	3,0000	1,8965	5,0291	2,1336	1,9490
	5. Quadrat-Ruten.								
	1 Ar (100 Quadrat-Meter) = *n* Quadrat-Ruten usw.								
n	7,0499	11,740	5,4208	12,184	11,111	27,800	3,9538	21,968	26,324
	1 Quadrat-Rute usw. = 100/*n* Quadrat-Meter.								
100/*n*	14,185	8,5181	18,447	8,2077	9,0000	3,5971	25,292	4,5521	3,7987
	6. Kubik-Ruten.								
	1000 Kubik-Meter = *n* Kubik-Ruten usw.								
n	18,719	40,223	12,621	42,527	37,037	146,58	7,8618	102,96	135,06
	1 Kubik-Rute usw. = 1000/*n* Kubik-Meter.								
1000/*n*	53,423	24,861	79,233	23,515	27,000	6,8224	127,20	9,7123	7,4039

7. Meilen.

1 Aequ.-Gr. = 111 307 km. 1 durchschnittlicher Meridiangrad = 60 Seemeilen = 1/90 des Meridianquadranten = 111,120 km.

	Geograph. Meile 15 = 1 Aequ.-Gr.	Preußen. 1 Mle. = 24000 F.	Baden. 1 Meile = 29629,6 F.	Oesterreich. 1 Mle. = 24000 F.	Schweiz. 1 Wegstunde = 16000 F.	Franz. Seemeile (lieue marine) = 5/9 Myriameter.	Engl. Seemeile = 6080 F. (Vergl. S. 644.)	Engl. Landmeile (Statute Mile) = 5280 F.	Rußland. 1 Werst = 500 Saschehn.
	1 Kilometer = *n* Meilen (Seemeilen, Wegstunden, Werst).								
n	0,1348	0,1328	0,1125	0,1318	0,2083	0,1800	0,5396	0,6214	0,9374
	1 Meile usw. = 1/*n* Kilometer.								
1/*n*	7,4204	7,5325	8,8890	7,5859	4,8000	5,5556	1,8532	1,6093	1,0668

8. Feldmaße.

	Preußen. 1 Morgen = 180 Qu.-Ruten.	Bayern. 1 Tagewerk = 400 Qu.-Ruten.	Sachsen. 1 Acker = 300 Qu.-Ruten.	Württemberg. 1 Morgen = 400 Qu.-Ruten.	Baden. 1 Morgen = 400 Qu.-Ruten.	Oesterreich. 1 Wiener Joch = 300 Qu.-Ruten.	England. 1 Acre = 160 Qu.-Ruten.	Rußland. Dessätine = 2400 Qu.-Saschehn.
	1 Hektar = *n* Morgen (Tagewerke usw.).							
n	3,9166	2,9349	1,8069	3,1729	2,7778	1,7377	2,4711	0,9153
	1 Morgen (Tagewerk usw.) = 1/*n* Hektar.							
1/*n*	0,2553	0,3407	0,5534	0,3152	0,3600	0,5755	0,4047	1,0925

9. Flüssigkeitsmaße.

	Preußen. 1 Quart = 64 Kub. Z.	Bayern. 1 Maßkanne = 0,043 Kub. F.	Sachsen. 1 Dresdener Kanne = 71,186 Kub. Z.	Württemberg. 1 Helleichmaß = 78,125 Kub. Z.	Baden. 1 Maß = 0,05556 Kub. F.	Oesterreich. 1 Maß = 0,0448 Kub. F.	Rußland. 1 Krutschka (Stoof) = 75,057 Kub. Z.	England.*) 1 Imp. Gallon = 277,2738 Kub. Z.	Amerika. 1 altengl. Gallon = 231 Kub. Z.
	1 Liter = *n* Quart (Kannen usw.).								
n	0,8733	0,9354	1,0688	0,5444	0,6667	0,7068	0,8131	0,2201	0,2642
	1 Quart (Kanne usw.) = 1/*n* Liter.								
1/*n*	1,1450	1,0690	0,9356	1,8371	1,5000	1,4147	1,2299	4,5435	3,7852

10. Getreidemaße.

	Preußen. 1 Scheffel = 3072 Kub. Z.	Bayern. 1 Scheffel = 208 Maßkannen.	Sachsen. 1 Dresd. Scheffel = 7900 Kub. Z.	Württemberg. 1 Scheffel = 7537 Kub. Z.	Baden. 1 Malter = 100 Maß.	Oesterreich. 1 Wiener Metze = 1,9471 Kub. F.	England.*) 1 Bushel = 8 Gallonen.	Rußland. 1 Tschetwerik = 1601,2 Kub. Z.	Schweden. 1 Spann = 28 Kannen.
	1 Hektoliter = *n* Scheffel (Malter usw.).								
n	1,8194	0,4497	0,9631	0,5642	0,6667	1,6264	2,7512	3,8113	1,3646
	1 Scheffel (Malter usw.) = 1/*n* Hektoliter.								
1/*n*	0,5496	2,2236	1,0383	1,7723	1,5000	0,6149	0,3635	0,2624	0,7328

*) Vrgl. die Fußnote S. 887.

11. Verwandlung des preufsischen Mafses in Metermafs.

Fufs Quadr.-F. Kubik-F.	m	qm	cbm	Zoll Quadr.-Z. Kubik-Z.	cm	qcm	ccm
1	0,31385	0,09850	0,03092	1	2,6154	6,8406	17,891
2	0,6277	0,19701	0,06183	2	5,2309	13,681	35,782
3	0,9415	0,29551	0,09275	3	7,8463	20,522	53,673
4	1,2554	0,39402	0,12366	4	10,462	27,362	71,564
5	1,5693	0,49252	0,15458	5	13,077	34,203	89,456
6	1,8831	0,59102	0,18549	6	15,693	41,043	107,35
7	2,1970	0,68953	0,21641	7	18,308	47,884	125,24
8	2,5108	0,78803	0,24733	8	20,924	54,724	143,13
9	2,8247	0,88654	0,27824	9	23,539	61,565	161,02

12. Verwandlung des Metermafses in preufsisches Mafs.

m, qm, cbm	Fufs	Zoll	Quadr.-Fufs	Quadr.-Zoll	Kubik-Fufs	Kubik-Zoll
1	3,1862	38,234	10,152	1461,9	32,346	55894
2	6,3724	76,469	20,304	2923,7	64,692	111787
3	9,5586	114,703	30,456	4385,6	97,038	167681
4	12,7448	152,938	40,607	5847,5	129,384	223575
5	15,9310	191,172	50,759	7309,3	161,729	279468
6	19,1172	229,406	60,911	8871,2	194,075	335362
7	22,3034	267,640	71,063	10233,1	226,421	391256
8	25,4896	305,875	81,215	11695,0	258,767	447150
9	28,6758	344,109	91,367	13156,8	291,113	503043

13. Verwandlung des englischen Mafses in Metermafs.

Fufs Quadr.-F. Kubik-F.	m	qm	cbm	Zoll Quadr.-Z. Kubik-Z.	cm	qcm	ccm
1	0,304794	0,092900	0,028315	1	2,5400	6,4514	16,386
2	0,609589	0,185799	0,056631	2	5,0799	12,9028	32,772
3	0,914383	0,278699	0,084946	3	7,6199	19,3542	49,159
4	1,219178	0,371599	0,113261	4	10,1598	25,8055	65,545
5	1,523972	0,464498	0,141577	5	12,6998	32,2569	81,931
6	1,828767	0,557398	0,169892	6	15,2397	38,7083	98,317
7	2,133561	0,650298	0,198207	7	17,7797	45,1597	114,703
8	2,438356	0,743197	0,226522	8	20,3196	51,6111	131,089
9	2,743150	0,836097	0,254838	9	22,8596	58,0625	147,476

14. Verwandlung des Metermafses in englisches Mafs.

m, qm, cbm	Fufs	Zoll	Quadr.-Fufs	Quadr.-Zoll	Kubik-Fufs	Kubik-Zoll
1	3,2809	39,3708	10,7643	1550,06	35,3166	61027,1
2	6,5618	78,7416	21,5286	3100,12	70,6332	122054,1
3	9,8427	118,1124	32,2929	4650,18	105,9498	183081,2
4	13,1236	157,4832	43,0572	6200,24	141,2664	244108,2
5	16,4045	196,8540	53,8215	7750,30	176,5830	305135,3
6	19,6854	236,2247	64,5858	9300,35	211,8996	366162,3
7	22,9663	275,5955	75,3501	10850,41	247,2162	427189,4
8	26,2472	314,9663	86,1144	12400,47	282,5328	488216,4
9	29,5281	354,3371	96,8787	13950,53	317,8494	549243,5

15. Verwandlung von preufsischen Zollen in Millimeter.

Ganze, halbe, Viertel-, Achtel- und Sechzehntel-Zoll = Millimeter.

1 preufs. Zoll = 26,1545 mm

Zoll	0	1/16	1/8	3/16	1/4	5/16	3/8	7/16	1/2	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16	7/8	15/16	Zoll
0	0,00	1,63	3,27	4,90	6,54	8,17	9,81	11,44	13,08	14,71	16,35	17,98	19,62	21,25	22,89	24,52	0
1	26,15	27,79	29,42	31,06	32,69	34,33	35,96	37,60	39,23	40,87	42,50	44,14	45,77	47,40	49,04	50,67	1
2	52,31	53,94	55,58	57,21	58,85	60,48	62,12	63,75	65,39	67,02	68,66	70,29	71,93	73,56	75,19	76,83	2
3	78,46	80,10	81,73	83,37	85,00	86,64	88,27	89,91	91,54	93,18	94,81	96,45	98,08	99,71	101,35	102,98	3
4	104,62	106,25	107,89	109,52	111,16	112,79	114,43	116,06	117,70	119,33	120,96	122,60	124,23	125,87	127,50	129,14	4
5	130,77	132,41	134,04	135,68	137,31	138,95	140,58	142,21	143,85	145,48	147,12	148,75	150,39	152,02	153,66	155,29	5
6	156,93	158,56	160,20	161,83	163,47	165,10	166,73	168,37	170,00	171,64	173,27	174,91	176,54	178,18	179,81	181,45	6
7	183,08	184,72	186,35	187,99	189,62	191,25	192,89	194,52	196,16	197,79	199,43	201,06	202,70	204,33	205,97	207,60	7
8	209,24	210,87	212,50	214,14	215,77	217,41	219,04	220,68	222,31	223,95	225,58	227,22	228,85	230,49	232,12	233,76	8
9	235,39	237,02	238,66	240,29	241,93	243,56	245,20	246,83	248,47	250,10	251,74	253,37	255,01	256,64	258,28	259,91	9
10	261,54	263,18	264,81	266,45	268,08	269,72	271,35	272,99	274,62	276,26	277,89	279,53	281,16	282,80	284,43	286,06	10
11	287,70	289,33	290,97	292,60	294,24	295,87	297,51	299,14	300,78	302,41	304,05	305,68	307,31	308,95	310,58	312,22	11
12	313,85	315,49	317,12	318,76	320,39	322,03	323,66	325,30	326,93	328,57	330,20	331,83	333,47	335,10	336,74	338,37	12
13	340,01	341,64	343,28	344,91	346,55	348,18	349,82	351,45	353,09	354,72	356,35	357,99	359,62	361,26	362,89	364,53	13
14	366,16	367,80	369,43	371,07	372,70	374,34	375,97	377,60	379,24	380,87	382,51	384,14	385,78	387,41	389,05	390,68	14
15	392,32	393,95	395,59	397,22	398,86	400,49	402,12	403,76	405,39	407,03	408,66	410,30	411,93	413,57	415,20	416,84	15
16	418,47	420,11	421,74	423,38	425,01	426,64	428,28	429,91	431,55	433,18	434,82	436,45	438,09	439,72	441,36	442,99	16
17	444,63	446,26	447,90	449,53	451,16	452,80	454,43	456,07	457,70	459,34	460,97	462,61	464,24	465,88	467,51	469,15	17
18	470,78	472,41	474,05	475,68	477,32	478,95	480,59	482,22	483,86	485,49	487,13	488,76	490,40	492,03	493,67	495,30	18
19	496,93	498,57	500,20	501,84	503,47	505,11	506,74	508,38	510,01	511,65	513,28	514,92	516,55	518,19	519,82	521,45	19
20	523,09	524,72	526,36	527,99	529,63	531,26	532,90	534,53	536,17	537,80	539,44	541,07	542,71	544,34	545,97	547,61	20
21	549,24	550,88	552,51	554,15	555,78	557,42	559,05	560,69	562,32	563,96	565,59	567,22	568,86	570,49	572,13	573,76	21
22	575,40	577,03	578,67	580,30	581,94	583,57	585,21	586,84	588,48	590,11	591,74	593,38	595,01	596,65	598,28	599,92	22
23	601,55	603,19	604,82	606,46	608,09	609,73	611,36	613,00	614,63	616,26	617,90	619,53	621,17	622,80	624,44	626,07	23
24	627,71	629,34	630,98	632,61	634,25	635,88	637,51	639,15	640,78	642,42	644,05	645,69	647,32	648,96	650,59	652,23	24

Zoll	0	1/16	1/8	3/16	1/4	5/16	3/8	7/16	1/2	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16	7/8	15/16	Zoll
25	653,86	655,50	657,13	658,77	660,40	662,03	663,67	665,30	666,94	668,57	670,21	671,84	673,48	675,11	676,75	678,38	25
26	680,02	681,65	683,29	684,92	686,55	688,19	689,82	691,46	693,09	694,73	696,36	698,00	699,63	701,27	702,90	704,54	26
27	706,17	707,81	709,44	711,07	712,71	714,34	715,98	717,61	719,25	720,88	722,52	724,15	725,79	727,42	729,06	730,69	27
28	732,32	733,96	735,59	737,23	738,86	740,50	742,13	743,77	745,40	747,04	748,67	750,31	751,94	753,58	755,21	756,84	28
29	758,48	760,11	761,75	763,38	765,02	766,65	768,29	769,92	771,56	773,19	774,83	776,46	778,10	779,73	781,36	783,00	29
30	784,63	786,27	787,90	789,54	791,17	792,81	794,44	796,08	797,71	799,35	800,98	802,61	804,25	805,88	807,52	809,15	30
31	810,79	812,42	814,06	815,69	817,33	818,96	820,60	822,23	823,87	825,50	827,13	828,77	830,40	832,04	833,67	835,31	31
32	836,94	838,58	840,21	841,85	843,48	845,12	846,75	848,39	850,02	851,65	853,29	854,92	856,56	858,19	859,83	861,46	32
33	863,10	864,73	866,37	868,00	869,64	871,27	872,91	874,54	876,17	877,81	879,44	881,08	882,71	884,35	885,98	887,62	33
34	889,25	890,89	892,52	894,16	895,79	897,42	899,06	900,69	902,33	903,96	905,60	907,23	908,87	910,50	912,14	913,77	34
35	915,41	917,04	918,68	920,31	921,94	923,58	925,21	926,85	928,48	930,12	931,75	933,39	935,02	936,66	938,29	939,93	35
36	941,56	943,20	944,83	946,46	948,10	949,73	951,37	953,00	954,64	956,27	957,91	959,54	961,18	962,81	964,45	966,08	36
37	967,71	969,35	970,98	972,62	974,25	975,89	977,52	979,16	980,79	982,43	984,06	985,70	987,33	988,97	990,60	992,23	37
38	993,87	995,50	997,14	998,77	1000,4	1002,0	1003,7	1005,3	1006,9	1008,6	1010,2	1011,9	1013,5	1015,1	1016,8	1018,4	38
39	1020,0	1021,7	1023,3	1024,9	1026,6	1028,2	1029,8	1031,5	1033,1	1034,7	1036,4	1038,0	1039,6	1041,3	1042,9	1044,5	39
40	1046,2	1047,8	1049,4	1051,1	1052,7	1054,4	1056,0	1057,6	1059,3	1060,9	1062,5	1064,2	1065,8	1067,4	1069,1	1070,7	40
41	1072,3	1074,0	1075,6	1077,2	1078,9	1080,5	1082,1	1083,8	1085,4	1087,0	1088,7	1090,3	1091,9	1093,6	1095,2	1096,9	41
42	1098,5	1100,1	1101,8	1103,4	1105,0	1106,7	1108,3	1109,9	1111,6	1113,2	1114,8	1116,5	1118,1	1119,7	1121,4	1123,0	42
43	1124,6	1126,3	1127,9	1129,5	1131,2	1132,8	1134,4	1136,1	1137,7	1139,4	1141,0	1142,6	1144,3	1145,9	1147,5	1149,2	43
44	1150,8	1152,4	1154,1	1155,7	1157,3	1159,0	1160,6	1162,2	1163,9	1165,5	1167,1	1168,8	1170,4	1172,0	1173,7	1175,3	44
45	1177,0	1178,6	1180,2	1181,9	1183,5	1185,1	1186,8	1188,4	1190,0	1191,7	1193,3	1194,9	1196,6	1198,2	1199,8	1201,5	45
46	1203,1	1204,7	1206,4	1208,0	1209,6	1211,3	1212,9	1214,5	1216,2	1217,8	1219,5	1221,1	1222,7	1224,4	1226,0	1227,6	46
47	1229,3	1230,9	1232,5	1234,2	1235,8	1237,4	1239,1	1240,7	1242,3	1244,0	1245,6	1247,2	1248,9	1250,5	1252,1	1253,8	47
48	1255,4	1257,0	1258,7	1260,3	1262,0	1263,6	1265,2	1266,9	1268,5	1270,1	1271,8	1273,4	1275,0	1276,7	1278,3	1279,9	48
49	1281,6	1283,2	1284,8	1286,5	1288,1	1289,7	1291,4	1293,0	1294,6	1296,3	1297,9	1299,5	1301,2	1302,8	1304,5	1306,1	49
50	1307,7	1309,4	1311,0	1312,6	1314,3	1315,9	1317,5	1319,2	1320,8	1322,4	1324,1	1325,7	1327,3	1329,0	1330,6	1332,2	50
51	1333,9	1335,5	1337,1	1338,8	1340,4	1342,1	1343,7	1345,3	1347,0	1348,6	1350,2	1351,9	1353,5	1355,1	1356,8	1358,4	51
52	1360,0	1361,7	1363,3	1364,9	1366,6	1368,2	1369,8	1371,5	1373,1	1374,7	1376,4	1378,0	1379,6	1381,3	1382,9	1384,6	52
53	1386,2	1387,8	1389,5	1391,1	1392,7	1394,4	1396,0	1397,6	1399,3	1400,9	1402,5	1404,2	1405,8	1407,4	1409,1	1410,7	53
54	1412,3	1414,0	1415,6	1417,2	1418,9	1420,5	1422,1	1423,8	1425,4	1427,1	1428,7	1430,3	1432,0	1433,6	1435,2	1436,9	54

16. Verwandlung von englischen Zollen in Millimeter.

Ganze, halbe, Viertel-, Achtel- und Sechzehntel-Zoll = Millimeter.

1 engl. Zoll = 25,399541 mm.

Zoll	0	1/16	1/8	3/16	1/4	5/16	3/8	7/16	1/2	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16	7/8	15/16	Zoll
0	0,000	1,587	3,175	4,762	6,350	7,937	9,525	11,112	12,700	14,287	15,875	17,462	19,050	20,637	22,225	23,812	0
1	25,400	26,987	28,574	30,162	31,749	33,337	34,924	36,512	38,099	39,687	41,274	42,862	44,449	46,037	47,624	49,212	1
2	50,799	52,387	53,974	55,561	57,149	58,736	60,324	61,911	63,499	65,086	66,674	68,261	69,849	71,436	73,024	74,611	2
3	76,199	77,786	79,374	80,961	82,549	84,136	85,723	87,311	88,898	90,486	92,073	93,661	95,248	96,836	98,423	100,01	3
4	101,60	103,19	104,77	106,36	107,95	109,54	111,12	112,71	114,30	115,89	117,47	119,06	120,65	122,24	123,82	125,41	4
5	127,00	128,59	130,17	131,76	133,35	134,94	136,52	138,11	139,70	141,28	142,87	144,46	146,05	147,63	149,22	150,81	5
6	152,40	153,98	155,57	157,16	158,75	160,33	161,92	163,51	165,10	166,68	168,27	169,86	171,45	173,03	174,62	176,21	6
7	177,80	179,38	180,97	182,56	184,15	185,73	187,32	188,91	190,50	192,08	193,67	195,26	196,85	198,43	200,02	201,61	7
8	203,20	204,78	206,37	207,96	209,55	211,13	212,72	214,31	215,90	217,48	219,07	220,66	222,25	223,83	225,42	227,01	8
9	228,60	230,18	231,77	233,36	234,95	236,53	238,12	239,71	241,30	242,88	244,47	246,06	247,65	249,23	250,82	252,41	9
10	254,00	255,58	257,17	258,76	260,35	261,93	263,52	265,11	266,70	268,28	269,87	271,46	273,05	274,63	276,22	277,81	10
11	279,39	280,98	282,57	284,16	285,74	287,33	288,92	290,51	292,09	293,68	295,27	296,86	298,44	300,03	301,62	303,21	11
12	304,79	306,38	307,97	309,56	311,14	312,73	314,32	315,91	317,49	319,08	320,67	322,26	323,84	325,43	327,02	328,61	12
13	330,19	331,78	333,37	334,96	336,54	338,13	339,72	341,31	342,89	344,48	346,07	347,66	349,24	350,83	352,42	354,01	13
14	355,59	357,18	358,77	360,36	361,94	363,53	365,12	366,71	368,29	369,88	371,47	373,06	374,64	376,23	377,82	379,41	14
15	380,99	382,58	384,17	385,76	387,34	388,93	390,52	392,11	393,69	395,28	396,87	398,46	400,04	401,63	403,22	404,81	15
16	406,39	407,98	409,57	411,16	412,74	414,33	415,92	417,50	419,09	420,68	422,27	423,85	425,44	427,03	428,62	430,20	16
17	431,79	433,38	434,97	436,55	438,14	439,73	441,32	442,90	444,49	446,08	447,67	449,25	450,84	452,43	454,02	455,60	17
18	457,19	458,78	460,37	461,95	463,54	465,13	466,72	468,30	469,89	471,48	473,07	474,65	476,24	477,83	479,42	481,00	18
19	482,59	484,18	485,77	487,35	488,94	490,53	492,12	493,70	495,29	496,88	498,47	500,05	501,64	503,23	504,82	506,40	19
20	507,99	509,58	511,17	512,75	514,34	515,93	517,52	519,10	520,69	522,28	523,87	525,45	527,04	528,63	530,22	531,80	20
21	533,39	534,98	536,57	538,15	539,74	541,33	542,92	544,50	546,09	547,68	549,27	550,85	552,44	554,03	555,61	557,20	21
22	558,79	560,38	561,96	563,55	565,14	566,73	568,31	569,90	571,49	573,08	574,66	576,25	577,84	579,43	581,01	582,60	22
23	584,19	585,78	587,36	588,95	590,54	592,13	593,71	595,30	596,89	598,48	600,06	601,65	603,24	604,83	606,41	608,00	23
24	609,59	611,18	612,76	614,35	615,94	617,53	619,11	620,70	622,29	623,88	625,46	627,05	628,64	630,23	631,81	633,40	24

Zoll	0	1/16	1/8	3/16	1/4	5/16	3/8	7/16	1/2	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16	7/8	15/16	Zoll
25	634,99	636,58	638,16	639,75	641,34	642,93	644,51	646,10	647,69	649,28	650,86	652,45	654,04	655,63	657,21	658,80	25
26	660,39	661,98	663,56	665,15	666,74	668,33	669,91	671,50	673,09	674,68	676,26	677,85	679,44	681,03	682,61	684,20	26
27	685,79	687,38	688,96	690,55	692,14	693,72	695,31	696,90	698,49	700,07	701,66	703,25	704,84	706,42	708,01	709,60	27
28	711,19	712,77	714,36	715,95	717,54	719,12	720,71	722,30	723,89	725,47	727,06	728,65	730,24	731,82	733,41	735,00	28
29	736,59	738,17	739,76	741,35	742,94	744,52	746,11	747,70	749,29	750,87	752,46	754,05	755,64	757,22	758,81	760,40	29
30	761,99	763,57	765,16	766,75	768,34	769,92	771,51	773,10	774,69	776,27	777,86	779,45	781,04	782,62	784,21	785,80	30
31	787,39	788,97	790,56	792,15	793,74	795,32	796,91	798,50	800,09	801,67	803,26	804,85	806,44	808,02	809,61	811,20	31
32	812,79	814,37	815,96	817,55	819,14	820,72	822,31	823,90	825,49	827,07	828,66	830,25	831,83	833,42	835,01	836,60	32
33	838,18	839,77	841,36	842,95	844,53	846,12	847,71	849,30	850,88	852,47	854,06	855,65	857,23	858,82	860,41	862,00	33
34	863,58	865,17	866,76	868,35	869,93	871,52	873,11	874,70	876,28	877,87	879,46	881,05	882,63	884,22	885,81	887,40	34
35	888,98	890,57	892,16	893,75	895,33	896,92	898,51	900,10	901,68	903,27	904,86	906,45	908,03	909,62	911,21	912,80	35
36	914,38	915,97	917,56	919,15	920,73	922,32	923,91	925,50	927,08	928,67	930,26	931,85	933,43	935,02	936,61	938,20	36
37	939,78	941,37	942,96	944,55	946,13	947,72	949,31	950,90	952,48	954,07	955,66	957,25	958,83	960,42	962,01	963,60	37
38	965,18	966,77	968,36	969,94	971,53	973,12	974,71	976,29	977,88	979,47	981,06	982,64	984,23	985,82	987,41	988,99	38
39	990,58	992,17	993,76	995,34	996,93	998,52	1000,1	1001,7	1003,3	1004,9	1006,5	1008,0	1009,6	1011,2	1012,8	1014,4	39
40	1016,0	1017,6	1019,2	1020,7	1022,3	1023,9	1025,5	1027,1	1028,7	1030,3	1031,9	1033,4	1035,0	1036,6	1038,2	1039,8	40
41	1041,4	1043,0	1044,6	1046,1	1047,7	1049,3	1050,9	1052,5	1054,1	1055,7	1057,3	1058,8	1060,4	1062,0	1063,6	1065,2	41
42	1066,8	1068,4	1070,0	1071,5	1073,1	1074,7	1076,3	1077,9	1079,5	1081,1	1082,7	1084,2	1085,8	1087,4	1089,0	1090,6	42
43	1092,2	1093,8	1095,4	1096,9	1098,5	1100,1	1101,7	1103,3	1104,9	1106,5	1108,1	1109,6	1111,2	1112,8	1114,4	1116,0	43
44	1117,6	1119,2	1120,8	1122,3	1123,9	1125,5	1127,1	1128,7	1130,3	1131,9	1133,5	1135,0	1136,6	1138,2	1139,8	1141,4	44
45	1143,0	1144,6	1146,2	1147,7	1149,3	1150,9	1152,5	1154,1	1155,7	1157,3	1158,9	1160,4	1162,0	1163,6	1165,2	1166,8	45
46	1168,4	1170,0	1171,6	1173,1	1174,7	1176,3	1177,9	1179,5	1181,1	1182,7	1184,3	1185,8	1187,4	1189,0	1190,6	1192,2	46
47	1193,8	1195,4	1197,0	1198,5	1200,1	1201,7	1203,3	1204,9	1206,5	1208,1	1209,7	1211,2	1212,8	1214,4	1216,0	1217,6	47
48	1219,2	1220,8	1222,4	1223,9	1225,5	1227,1	1228,7	1230,3	1231,9	1233,5	1235,1	1236,6	1238,2	1239,8	1241,4	1243,0	48
49	1244,6	1246,2	1247,8	1249,3	1250,9	1252,5	1254,1	1255,7	1257,3	1258,9	1260,5	1262,0	1263,6	1265,2	1266,8	1268,4	49
50	1270,0	1271,6	1273,2	1274,7	1276,3	1277,9	1279,5	1281,1	1282,7	1284,3	1285,9	1287,4	1289,0	1290,6	1292,2	1293,8	50
51	1295,4	1297,0	1298,6	1300,1	1301,7	1303,3	1304,9	1306,5	1308,1	1309,7	1311,3	1312,8	1314,4	1316,0	1317,6	1319,2	51
52	1320,8	1322,4	1324,0	1325,5	1327,1	1328,7	1330,3	1331,9	1333,5	1335,1	1336,7	1338,2	1339,8	1341,4	1343,0	1344,6	52
53	1346,2	1347,8	1349,4	1350,9	1352,5	1354,1	1355,7	1357,3	1358,9	1360,5	1362,1	1363,6	1365,2	1366,8	1368,4	1370,0	53
54	1371,6	1373,2	1374,8	1376,3	1377,9	1379,5	1381,1	1382,7	1384,3	1385,9	1387,4	1389,0	1390,6	1392,2	1393,8	1395,4	54

C. Mafse und Gewichte

Meter-Konvention vom 20. Mai 1875. Dieser gehören an: Deutsches Reich, Oesterreich-land, Schweden-Norwegen, Schweiz, Türkei, Argentinische Republik, Vereinigte Staaten Japan (1885), Mexiko (1890). — Die Meter-Konvention bezweckt:

1) Herstellung und Vergleich der für die einzelnen Staaten bestimmten neuen Urmafse Kilogramm der Archive ersetzender internationaler Urmafse; 3) periodische Vergleichung

Ländernamen	Längenmafse	$\frac{1}{n}$ *)	Flächenmafse	$\frac{1}{n}$ *)
Aegypten.	metrisch, früher: 1 Pik Beledi = 0,5826 m 1 Pik Endaseh = 0,6384 m 1 Pik Stambuli = 0,677 m 1 Pik Meimari = 0,750 m 1 Pik Nili = 0,5245 m	 1,7164 1,5664 1,4771 1,3333 1,9066	metrisch, früher: 1 Feddan = 42,008 33 a	 0,023 804
Argentinische Republik.	metrisch, früher: 1 Braza zu 2 Vara zu 4 Palmas = 1,732 m 1 Legua zu 3000 Braza = 5,196 km	 0,5774 0,1925	metrisch, früher: 1 Qu.-Legua = 26,998 42 qkm	 0,037 04
Brasilien.	metrisch, früher altportugiesisch: 1 Covado zu 2 Pè zu 1,5 Palmos = 0,660 m 1 Braza zu 2 Vara = 2,2 m 1 Legua = 6,183 km 1 Pè = 0,33 m	 1,5152 0,4545 0,1617 3,0303	metrisch, früher altportugiesisch: 1 Qu.-Covado = 0,4356 qm 1 Qu.-Pè = 0,1089 qm 1 Qu.-Braza = 4,84 qm 1 Qu.-Legua = 38,2295 qkm	 2,295 7 9,182 7 0,206 6 0,026 16
China.	1 Yin zu 10 Tschi (Covid, Fufs) zu 10 Tsun (Pant) zu 10 Fän = 3,73 m 1 Yin nach Vertrag mit England = 3,581 m 1 Li (Meile) zu 180 Faden zu 10 Feldmesser - Covid = 0,5755 km	0,2681 0,2793 1,7376	1 Mau = 631 qm 1 King = 0,2453 ha Seidenzeug nach Gewicht	1,584 8 / 1000 4,076 6
Deutsches Reich. (Deutsche Mafs- und Gewichts-Ordnung vom 17. August 1868, 11. Juli 1884 und 26. April 1893.)	1 Meter (m) (= 1,000 003 01 Mètre des Archives = 443,297 27 Pariser Linien) zu 100 Centimeter (cm) zu 10 Millimeter (mm) 1 Kilometer (km) = 1000 m ——— 1 dtsch. Landmeile = 7,5 km 1 geographische Meile (15 = 1 Aequator - Grad) = 7,420 438 54 km ——— 1 deutsche (und französ.) Seemeile (60 = 1 Meridian-Grad) = 1,852 km 1 Faden = 1,829 m 1 Kabel = 0,22 km 1 Aeq.-Grad = 111,3064 km 1 Mer.-Grad = 111,1111 km	 0,1333 0,1348 0,5400 0,5467 4,545	1 Quadratmeter (qm) zu 10 000 Quadratcentimeter (qcm) zu 100 Quadratmillimeter (qmm) 1 Hektar (ha) zu 100 Ar (a) zu 100 qm 1 Quadratkilometer (qkm) = 100 ha ——— 1 geographische Quadratmeile = 55,062 91 qkm	 0,018 16

*) Anmerkung. In der Tafel sind alle Mafs- und Gewichtseinheiten durch eine Vergleichzahl n auf das metrische Mafs bezogen. In den Spalten $1/n$ sind die reciproken Werte der Vergleichszahlen angegeben. Es bedeutet also n die Anzahl metrischer Einheiten, welche der betreff. Mafseinheit entspricht, und $1/n$ die Anzahl der betreff. Mafseinheiten, welche der metrischen Einheit entspricht. Z. B. Grofsbritannien (s. S. 824): 1 Fathom = n Meter = 1.828 767 m; 1 m = $1/n$ Fathoms = 0,5468 Fathoms, mithin beispielsweise 683,5 m = 683,5 · 0,5468 = 373,7 Fathoms.

ʼerschiedener Länder.

Jngarn, Belgien, Niederlande, Dänemark, Spanien, Frankreich, Italien, Portugal, Russ-
ʼon Nordamerika, Peru, Venezuela, Serbien (1879), Rumänien (1882), Grofsbritannien (1884),

les Meters und Kilogramms; 2) Auswahl und Aufbewahrung neuer, das Meter und das
ler nationalen mit den internationalen Urmafsen, usw.

Raummafse	$\frac{1}{n}$	Gewichte	$\frac{1}{n}$	Ländernamen
metrisch, früher: Ardeb zu 6 Quebèhs zu 4 Roubèhs zu 12 Keles = 1,9775 hl	0,5057	metrisch, früher: 1 Cantar forforo zu 36 Oka oder zu 100 Rotoli zu 144 Drachmen = 44,4931 kg	2,247 54/100	**Aegypten.**
metrisch, früher: Fanega zu 4 Cuartillas zu 3 Almudes = 1,372 hl Barril zu 4 Cannecas zu 8 Frascos = 0,76 hl Pipa zu 4 Cargas zu 16 Cortagnes = 4,56 hl	0,7289 1,3158 0,2193	metrisch, früher: 1 Libra zu 2 Marcos zu 8 Onzas zu 16 Adarmes zu 36 Granos = 0,459 37 kg 1 Quintal zu 4 Arrobas zu 25 Libras = 45,9367 kg	2,176 91 2,176 91/100	**Argentinische Republik.**
metrisch, früher: Mojo zu 15 Fangas zu 4 Alqueiras Alqueira zu 4 Maquias in Rio de Janeiro = 0,3628 hl in Bahia = 0,3114 hl Pipa = 4,007 hl	2,7563 3,2113 0,2496	metrisch, früher altportugiesisch: 1 Quintal zu 4 Arrobas zu 32 Arratels = 58,752 kg 1 Tonnelada = 13,5 Quintal = 793,152 kg	1,702 05/100 0,126 08/100	**Brasilien.**
Tschi Getreide zu 10 Sching = 1,031 hl Sai Getreide zu 2 Hwo zu 10 Sching = 1,2243 hl (Getreide und Flüssigkeiten sonst meist nach Gewicht)	0,9708 0,8168	1 Pikul zu 100 Kätties zu 16 Taël (Liang) = 60,453 kg 1 Taël zu 10 Mähs oder Tsin zu 10 Condorin oder Fän zu 10 Käsch (Sabek) = 37,793 g (für Silber = 37,573 g)	1,654 2/100 2,645 99/100 2,661 48/100	**China.**
Kubikmeter (cbm) zu 1000 Liter (l) zu 1000 Kubikcentimeter (ccm) zu 1000 Kubikmillimeter (cmm) Hektoliter (hl) = 100 l ——— Scheffel = 0,5 hl (nicht mehr amtlich) Oxhoft = 2,20 hl Stückfass = 12,00 hl Tonne (Schiffsmafs) = 2,12 cbm	0,01 0,4545 0,0833 0,4717	1 Kilogramm (kg) (= 0,999 999 842 Kilogramme prototype) zu 1000 Gramm (g) zu 1000 Milligramm (mg) 1 kg = 2 (alte) Zoll-Pfund 1 Tonne (t) (früher 20 Centner) = 1000 kg 1 Doppelcentner (dz) = 100 kg ——— 1 Schiffslast zu 2 Tonnen 2000 kg	 0,5 0,001 0,01 0,0005	**Deutsches Reich.** (Mafs- und Gewichtsbezeichnung gemäfs Verordnung des Bundesrates vom 8. Oktober 1877).*)

*) Hiernach gilt noch Folgendes:
1. Den Buchstaben werden Schlusspunkte nicht beigefügt.
2. Die Buchstaben werden an das Ende der vollständigen Zahlenausdrücke — nicht über das Decimalkomma — gesetzt, also 5,37 m, nicht 5 m 37 und nicht 5 m 37 cm.
3. Zur Trennung der Einerstellen von den Decimalstellen dient das Komma, nicht der Punkt. Sonst ist das Komma bei Mafs- und Gewichtszahlen nicht anzuwenden, besonders nicht zur Abteilung mehrstelliger Zahlenausdrücke. Diese Abteilung ist durch Anordnung der Zahlen in Gruppen zu je 3 Ziffern, vom Komma aus gerechnet, mit angemessenem Zwischenraume zwischen den Gruppen zu bewirken.

Ländernamen	Längenmafse	$\frac{1}{n}$	Flächenmafse	$\frac{1}{n}$
Frankreich.	metrisch, früher: 1 Pariser Fufs = 0,324 839 m (1 m = 443,295 936 Par. Lin.)	 3,0784	metrisch.	
Griechenland.	metrisch. 1 griechische Meile = 10 km	 0,1	metrisch. 1 Stremma = 10 a	 0,1
Grofsbritannien. (Das metrische Mafs und Gewicht sind zugelassen.)	1 Zoll, Inch (16- oder 12-teilig) = 2,539 954 cm 1 Fufs (= 12 Zoll) = 0,304 794 49 m 1 Yard (= 3 Fufs) = 0,914 383 5 m 1 Fathom = 2 Yards = 6 Fufs = 72 Zoll = 1,828 767 m 1 Chain zu 100 Links zu 7,92 Inches = 20,12 m 1 Statute Mile zu 8 Furlongs zu 40 Ruten zu 2,75 Fathoms zu 2 Yards = 1,609 314 9 km (1 Statute Mile = 1760 Yards) 1 Nautical Mile (Knot) zu 6080 Fufs = 1,853 15 km*) Kaufmännisch: 12 Yards = 11 m	0,3937 3,2809 1,0936 0,5468 0,0497 0,6214 0,5396	1 Qu.-Zoll = 6,451 4 qcm 1 Qu.-Fufs = 0,092 90 qm 1 Qu.-Yard = 0,8361 qm 1 Acre = 160 Qu.-Ruten = 4840 Qu.-Yard = 40,4671 a 1 Yard of land = 30 Acres = 12,1401 ha 1 Hide of land = 100 Acres = 40,467 ha 1 Mile of land = 640 Acres = 2,59 qkm	0,1550 10,764 3 1,196 17 0,024 71 0,082 4 0,024 71 0,386 10
Ostindien, (britisch).	1 Guz zu 2 Hat zu 24 Angli = 1 engl. Yard = 0,9144 m 1 Meile zu 1000 engl. Faden zu 4 Cubits oder 2 Bombay-Guz = 1,8288 km 1 Cubit (Madras) = 0,4572 m 1 Guz (Bombay) = 0,6858 m 1 Guz (Bengalen) = 0,9144 m Im Grofshandel d. engl. Yard	1,0936 0,5468 2,1872 1,4582 1,0936	1 Qu.-Yard = 0,8361 qm 1 Acre = 40,4671 a 1 Qu.-Fufs = 0,0929 qm 1 Qu.-Cubit = 0,209 qm 1 Qu.-Guz (Bombay) = 0,4703 qm 1 Qu.-Meile = 3,3444 qkm	1,196 17 0,024 71 10,764 3 4,784 7 2,126 2 0,299 0
Japan.	metrisch und englisch. 1 Shaku Kane zu 10 Sun zu 10 Bu = 0,303 m 1 Ri zu 36 Tschô zu 60 Ken zu 6 Shaku = 3,927 km	 3,3003 0,2546	metrisch und englisch. 1 Qu.-Tschô = 0,991 74 ha	 1,008 33
Oesterreich-Ungarn.	metrisch. 1 m = 0,999 997 64 Mètre des Archives = 443,294 889 8 Pariser Linien. 1 Seemeile = 1,852 km Früher: 1 Wr. Fufs = 0,316 081 m 1 Wr. Elle = 0,777 558 m 1 Wr. Klafter = 1,896 484 m 1 Postmeile = 7,585 936 km	 0,5400 3,1637 1,2861 0,5273 0,1318	metrisch, früher: 1 Qu.-Fufs = 0,099 907 qm 1 Qu.-Klafter = 3,596 652 qm 1 n.-österreich. Joch = 0,575 464 2 ha 1 Qu.-Meile = 57,546 42 qkm	 10,007 9 0,278 00 1,737 73 0,017 38
Paraguay.	metrisch, früher: 1 Vara = 0,866 m 1 Legua = 4,33 km	 0,1549 0,2312	metrisch, früher: 1 Qu.-Legua = 17,43 qkm	 0,057 37

*) 6080 engl. F. ist die abgerundete Länge des Mittels aus den 60-ten Teilen des Meridian- und des Aequatorgrades, dabei die Meridianlänge = 40 000 km und die Aequatorlänge = 5400 geographische Meilen gerechnet. Die engl. Admiralität rechnet 1 Admiralty Mile = 6086,5 Fufs = 1,8551 km = $^1/_{60}$ des Aequatorgrades = $^1/_4$ geographische Meile.

Raummafse	1/n	Gewichte	1/n	Ländernamen
metrisch. 1 Stère = 1000 l	0,001	metrisch.		**Frankreich.**
metrisch. 1 Kiló = 1 hl	1	metrisch. 1 Stater = 56,32 kg	1,775 56 / 100	**Griechenland.**
1 Kub.-Zoll = 16,386 ccm 1 Kub.-Fufs = 0,028 315 cbm 1 Kub.-Yard = 0,7645 cbm 1 Register-Ton = 100 Kub.-Fufs = 2,832 cbm 1 Imperial Gallon v. 277,2738 Kub.-Zoll = 4,5435 l *) 1 alter (Winchester-) Gallon von 231 Kub.-Zoll = 5/6 Imp. Gallon = 3,785 203 l 1 Last zu 10 Quarters zu 8 Bushels zu 4 Peks zu 2 Gallons = 29,078 924 hl 1 Barrel zu 2 Kilderkin zu 2 Firkin = 1,635 hl 1 Anker = 10 Imp. Gallons von 1824 = 0,454 35 hl 1 Tun zu 2 Pipes (Butts) zu 2 Hogsheads zu 63 Gallons = 11,45 hl	0,06103 35,3166 1,3080 0,3532 0,2201 0,2642 0,0344 0,6116 2,2009 0,0873	1 Pfd. avoirdupoids (lbs) [Handelsgewicht] zu 16 Ounces zu 16 Drams = 0,453 592 65 kg = 7000 Troygrains 1 Troypfund [Gold-, Silber- und Münz-, sowie Apothekergewicht] zu 12 Ounces zu 20 Pennyweights (dw) = 5760 Grains = 0,373 241 95 kg 1 Schiffston (short ton, Kanada, Ver. St. [s. u.]) = 2000 Pfund (lbs.) = 907,1853 kg 1 Ton (long ton) = 20 Hundred- (cent-) weight zu 4 Quarters zu 28 Pfund (= 2240 lbs.) = 1016,0475 kg	2,204 62 2,679 23 1,102 31 / 1000 0,984 206 / 1000	**Grofsbritannien.** (Das metrische Mafs und Gewicht sind zugelassen.)
Flüssigkeiten nach engl. Imperial Gallons, oder wie Getreide, nach Gewicht. 1 Khahoon (Bengalen) zu 16 Soallees wiegt 1354,73 kg 1 Kandry Reis (Bombay) wiegt 97,95 kg 1 Garce (Madras) zu 80 Parahs = 4,916 cbm	0,73815 / 1000 0,0102 0,2034	1 Bazar Maund zu 40 Sihrs (Seers) zu 16 Chittaks = 37,324 kg 1 Faktorei Maund = 33,868 kg 1 Madras Maund = 11,34 kg 1 Bombay Maund = 12,70 kg	0,026 79 0,029 53 0,088 18 0,078 74	**Ostindien,** (britisch).
metrisch und englisch. 1 Sho zu 10 Go zu 10 Sai zu 10 Satsu = 1,803 907 l 1 Koko zu 10 To zu 10 Sho = 1,803 907 hl	0,5544 0,5544	metrisch und englisch. 1 Kin zu 160 Momme zu 10 Fun zu 10 Rin = 0,601 kg 1 Kwan zu 1000 Momme = 3,7565 kg	1,664 0,266 19	**Japan.**
metrisch, früher: 1 Kub.-Fufs = 0,031 578 67 cbm 1 Kub.-Klafter = 6,820 099 2 cbm 1 Schachtrute = 3,157 867 cbm 1 Wr. Metze = 0,614 868 3 hl 1 Eimer = 0,565 890 hl 1 Mafs = 1,414 724 l	31,667 0,1466 0,3167 1,6264 1,7671 0,7069	metrisch. 1 kg = 0,999 997 8 Kilogramme prototype Früher: 1 Wr. (und bayrisches) Pfund = 0,560 060 kg 1 Wr. Lot = 17,501 87 g 1 Wr. Ctr. = 56,0060 kg 1 Apotheker-Pfund = 0,420 kg 1 Stein = 11,212 kg	1,785 52 0,057 14 0,017 86 2,381 0,891 90	**Oesterreich-Ungarn.**
metrisch, früher: 1 Fanega = 2,88 hl 1 Pipa = 4,560 26 hl	0,3472 0,2195	metrisch, daneben: 1 Quintal zu 4 Arrobas zu 25 Libra = 46,008 kg	0,021 74	**Paraguay.**

*) Imperial Gallon von 1824. Mit der Jahreszahl 1890 wird ein Imperial Gallon zu 277,463 Kub.-Zoll = 4,546 508 718 l angegeben; 1 l = 0,219 949 Imperial Gallons. Hieraus ergiebt sich 1 hl = 2,7466 Bushel; 1 Bushel = 0,3637 hl.

Ländernamen	Längenmafse	$\frac{1}{n}$	Flächenmafse	$\frac{1}{n}$
Preufsen. (Altes Mafs.)	1 Fufs zu 12 Zoll zu 12 Linien = 0,313 853 5 m 1 Elle = 0,666 94 m 1 Lachter = 2,092 36 m 1 Rute zu 12 Fufs = 3,766 24 m	3,1862 1,4994 0,4779 0,2655	1 Qu.-Fufs = 0,098 50 qm 1 Qu.-Rute = 14,185 qm 1 Morgen zu 180 Qu.-Ruten = 0,255 322 4 ha 1 Qu.-Zoll = 6,8406 qcm	10,151 90 0,0705 3,916 62 0,146 19
Dänemark. Norwegen.	In **Dänemark, Norwegen:** 1 Rute zu 5 Alen zu 2 Fufs = 3,138 535 m 1 Meile zu 2000 preufs. Ruten = 7,532 484 km in Norwegen 1 Meile zu 6000 Faden = 11,295 km	0,3186 0,1328 0,0885	In **Dänemnrk:** 1 Qu.-Rute zu 100 Qu.-Fufs = 9,85 qm 1 Tonne Land zu 560 Qu.-Ruten = 0,551 63 ha	0,101 52 1,8128
Russland.	metrisch, engl. Fufsmafs. 1 Saschehn (zu 7 Fufs oder) zu 3 Arschin zu 16 Werschock = 2,133 57 m 1 russ. Fufs = 1 engl. Fufs (Zoll 10-teilig) 1 Werst = 1,066 781 km 1 Meile zu 7 Werst = 7,467 465 km	0,4687 0,9374 0,1339	metrisch, engl. Fufsmafs. 1 Dessätine = 1,0925 ha 1 Qu.-Saschehn = 4,5521 qm 1 Qu.-Werst = 1,138 02 qkm	0,9153 0,219 68 0,878 72
Schweden.	metrisch, früher: 1 Famn zu 3 Alen zu 2 Fufs zu 10 Zoll = 1,7814 m 1 Meile = 10,6886 km	0,5614 0,0936	metrisch, früher: 1 Tunnland zu 2 Spanland zu 16 Kappland zu 3½ Kannland = 56 000 Qu.-Fufs = 0,493 641 ha	2,025 76
Schweiz.	metrisch, früher: 1 Rute (= 1⅔ Klafter) zu 10 Fufs zu 10 Zoll = 3,000 m	0,3333	metrisch, früher: 1 Qu.-Klafter = 3,24 qm 1 Juchart = 0,36 ha	0,309 2,777
Südamerika.*)	metrisch, altkastilisch. 1 Vara = 3 Piks = 4 Palmos = 0,8359 m 1 Legua = 5,565 km	1,1963 0,1797	metrisch, altkastilisch. In **Venezuela:** 1 Fanegada = 0,6987 ha	1,4456
Uruguay.	metrisch, früher: 1 Vara = 0,859 m 1 Legua = 5,154 km	1,1641 0,1940	metrisch, früher: 1 Qu.-Legua = 26,6 qkm	0,0376
Vereinigte Staaten von Nordamerika. (Das metrische Mafs und Gewicht sind zugelassen.)	englisch, jedoch: 1 Mile = 1,609 33 km 1 Naut. M. = 1,854 95 km 1 Statute M. = 3 Naut. Miles	0,6214 0,5391	englisch. 1 Qu.-Meile (Sektion) = 2,5899 qkm 1 Township zu 36 Sektionen = 93,236 qkm	0,3861 0,010 73

*) Die Angaben gelten für Bolivia, Chile, Colombia, Costarica, Ecuador, Guatemala, Honduras, Nicaragua, Peru, S. Salvador und Venezuela.
**) Anm. zu S. 827: Die Fanega weicht von dem angegebenen Werte oft ab.

Raummafse	$\frac{1}{n}$	Gewichte	$\frac{1}{n}$	Ländernamen
1 Kub.-Fufs = 0,030 92 cbm 1 Kub.-Zoll = 17,891 ccm 1 Klafter zu 108 Kub.-Fufs = 3,339 cbm 1 Schachtrute zu 144 Kub.-Fufs = 4,452 cbm 1 Oxhoft zu 1,5 Ohm zu 2 Eimer zu 2 Anker zu 30 Quart zu 64 Kub.-Zoll = 2,061 05 hl 1 Scheffel zu 16 Metzen zu 3 Quart = 0,549 61 hl	32,342 0,0559 0,2995 0,2246 0,4852 1,8195	1 (Zoll-) Pfund zu 30 Lot zu 10 Quentchen zu 100 Korn = 0,500 kg 1 alt. preufs. (u. württemberg.) Pfd. = 0,4677 kg 1 Schiffslast zu 40 Centner zu 100 Pfd. = 2000 kg 1 Hamburger Komm.-Last = 6000 Pfund	2,000 2,1381 0,02/100 0,033 33/100	**Preufsen.** (Altes Mafs.)
		In Dänemark: 1 Komm.-Last zu 5200 Pfund = 2600 kg	0,038 46/100	**Dänemark.**
		In Norwegen: 1 Centner = 49,811 kg	2,007 59/100	**Norwegen.**
metrisch, engl. Fufsmafs. 1 Kub.-Saschehn = 9,7123 cbm 1 Botscka zu 40 Wedro zu 100 Tscharka = 4,9195 hl 1 Krutschka (Stoof) = 1,22989 l 1 Tschetwert zu 8 Tschetwerik zu 8 Garnitzi = 2.099 hl 1 Wedro zu 10 Krutschka	 0,1030 0,2033 0,8131 0,4764	1 Pfund = 0,409 531 kg 1 Pud zu 40 Pfund zu 32 Lot = 16,380 48 kg 1 Tonne zu 12 Berkowitz zu 10 Pud = 1965,66 kg 1 Last = 2025,48 kg	2,441 82 0,061 05 0,050 87/100 0,049 37/100	**Russland.**
metrisch, früher: 1 Ahm zu 6 Kub.-Fufs zu 10 Kannen = 1,570 313 hl 1 Tonne = 1,6489 hl	 0,6368 0,6065	metrisch, früher: 1 Centner zu 100 Skalpund zu 100 Ort = 42,507 58 kg 1 Schiffspfd. = 170,028 kg 1 Schiffslast = 5760 Pfd. = 2450 kg	 2,352 37/100 5,881 38/1000	**Schweden.**
metrisch, früher: 1 Saum zu 4 Eimer zu 25 Mafs = 1,5 hl	 0,6667	metrisch, früher: 1 Centner = 100 Pfund = 50 kg	 0,02	**Schweiz.**
metrisch, auch altkastilisch. 1 Cahiz zu 12 Fanegas**) zu 12 Celemines = 6,66 hl 1 Cantara zu 8 Acumbres zu 4 Cuartillas = 16,328 l 1 Moyo = 2,5826 hl 1 Pipa = 4,3570 hl 1 Bota = 4,8411 hl	 0,1502 0,0612 0,3872 0,2295 0,2066	metrisch, auch altkastilisch. 1 Quintal zu 4 Arrobas zu 25 Libras zu 2 Marco zu 8 Oncas = 46,0093 kg 1 Tonnelada = 20 Quintal = 920 kg	 2,173 47/100 0,108 674/100	**Südamerika.**
metrisch, früher: 1 Pipa = 4,554 24 hl 1 Fanega**) = 1,372 72 hl 1 Galon = 3,805 l	 0,2196 0,7285 2,6281	metrisch, früher: 1 Quintal zu 4 Arrobas zu 25 Libras = 45,94 kg 1 Tonnelada = 918,8 kg	 2,172 40/100 0,108 620/100	**Uruguay.**
alt-englisch. 1 (Wein-) Gallon zu 4 Quarts zu 2 Pints zu 4 Gills zu 4 Fluid Ounces = 3,7852 l 1 Trocken-Gall. (Getreidem.) von 268,803 Kub.-Zoll = 4,4046 l (1 Bushel = 8 Trocken-Gall.) 1 gehäuft. Gallon = $1\frac{1}{4}$ Trocken-Gallons 1 Barrel Petroleum zu 40 Gallons = 1,514 hl 1 Barrel Bier zu 31 Gallons = 1,173 hl	 0,2642 0,2270 0,6605 0,8525	englisch. 1 Hundred-weight häufig (z. B. in New-York) zu 4 Quarters zu 25 Pfund = 45,359 kg 1 Ton (short ton) zu 2000 Pfd. (lbs.) = 907,1853 kg 1 long ton zu 2240 Pfund (lbs.) = 1016,0475 kg	 2,204 63/100 1,102 31/1000 0,984 206/1000	**Vereinigte Staaten von Nordamerika.** (Das metrische Mafs und Gewicht sind zugelassen.)

17. Verwandlung von Schachtruten in Kubik-Fufs und Kubik-Meter, und umgekehrt.*)

1 Schachtrute = 144 Kubik-Fufs = 4,4519 cbm.

Schtr.	Kub.F.	cbm	Schtr.	Kub.F.	cbm	Schtr.	Kub.F.	cbm	Schtr.	Kub.F.	cbm
1/144	1	0,031	19/48	57	1,763	1	144	4,452	46	6624	204,79
1/72	2	0,062	5/12	60	1,855	2	288	8,904	47	6768	209,24
1/48	3	0,093	7/16	63	1,948	3	432	13,356	48	6912	213,69
1/40	3 2/5	0,111	4/9	64	1,979	4	576	17,808	49	7056	218,14
1/36	4	0,124	11/24	66	2,040	5	720	22,260	50	7200	222,59
1/30	4 4/5	0,148	17/36	68	2,102	6	864	26,711	51	7344	227,05
1/28	5 1/7	0,159	23/48	69	2,134	7	1008	31,163	52	7488	231,50
1/24	6	0,185	1/2	72	2,226	8	1152	35,615	53	7632	235,95
1/20	7 1/5	0,223	25/48	75	2,319	9	1296	40,067	54	7776	240,40
1/18	8	0,247	19/36	76	2,350	10	1440	44,519	55	7920	244,85
1/16	9	0,278	13/24	78	2,412	11	1584	48,971	56	8064	249,31
5/72	10	0,309	5/9	80	2,473	12	1728	53,423	57	8208	253,76
1/13	11 1/13	0,342	9/16	81	2,504	13	1872	57,875	58	8352	258,21
1/12	12	0,371	7/12	84	2,597	14	2016	62,327	59	8496	262,66
1/11	13 1/11	0,405	3/5	86 2/5	2,671	15	2160	66,779	60	8640	267,11
1/10	14 2/5	0,445	29/48	87	2,690	16	2304	71,230	61	8784	271,57
1/9	16	0,494	11/18	88	2,722	17	2448	75,682	62	8928	276,02
2/17	16 16/17	0,524	5/8	90	2,782	18	2592	80,134	63	9072	280,47
1/8	18	0,556	23/36	92	2,844	19	2736	84,586	64	9216	284,92
5/36	20	0,618	31/48	93	2,875	20	2880	89,038	65	9360	289,37
1/7	20 4/7	0,636	2/3	96	2,968	21	3024	93,490	66	9504	293,83
7/48	21	0,649	11/16	99	3,061	22	3168	97,942	67	9648	298,28
3/20	21 3/5	0,668	25/36	100	3,092	23	3312	102,39	68	9792	302,73
1/6	24	0,742	7/10	100 4/5	3,116	24	3456	106,85	69	9936	307,18
2/11	26 2/11	0,809	17/24	102	3,153	25	3600	111,30	70	10080	311,63
3/16	27	0,835	13/18	104	3,215	26	3744	115,75	71	10224	316,08
7/36	28	0,865	35/48	105	3,246	27	3888	120,20	72	10368	320,55
1/5	28 4/5	0,890	3/4	108	3,339	28	4032	124,65	73	10512	324,99
5/24	30	0,927	37/48	111	3,432	29	4176	129,10	74	10656	329,44
2/9	32	0,989	7/9	112	3,463	30	4320	133,56	75	10800	333,89
11/48	33	1,020	19/24	114	3,525	31	4464	138,01	76	10944	338,34
1/4	36	1,113	29/36	116	3,586	32	4608	142,46	77	11088	342,80
13/48	39	1,206	13/16	117	3,617	33	4752	146,91	78	11232	347,25
5/18	40	1,237	5/6	120	3,710	34	4896	151,36	79	11376	351,70
2/7	41 1/7	1,272	41/48	123	3,803	35	5040	155,82	80	11520	356,15
7/24	42	1,298	31/36	124	3,834	36	5184	160,27	81	11664	360,60
3/10	43 1/5	1,336	7/8	126	3,895	37	5328	164,72	82	11808	365,05
11/36	44	1,360	8/9	128	3,957	38	5472	169,17	83	11952	369,51
5/16	45	1,391	43/48	129	3,988	39	5616	173,62	84	12096	373,96
1/3	48	1,484	11/12	132	4,081	40	5760	178,08	85	12240	378,41
25/72	50	1,546	15/16	135	4,174	41	5904	182,53	86	12384	382,86
17/48	51	1,577	17/18	136	4,205	42	6048	186,98	87	12528	387,31
13/36	52	1,608	23/24	138	4,267	43	6192	191,43	90	12960	400,67
3/8	54	1,670	35/36	140	4,328	44	6336	195,88	95	13680	422,93
7/18	56	1,731	47/48	141	4,359	45	6480	200,34	100	14400	445,19

*) Diese Tafel kann auch zur Verwandlung der Quadrat-Zolle in Quadrat-Fufse, ferner der Quadrat-Fufse in Quadrat-Ruten, und umgekehrt, benutzt werden. Z. B.: 5040 Qu.Z. = 35 Q.F.; 112 Q.F. = 7/9 Q.Rt.; 69 1/2 Q.Rt. = 9936 + 48 = 9984 Q.F.

D. Vergleichungstafeln zusammengesetzter Maſseinheiten.

1. Gewichtseinheit für die Längeneinheit.

kg/m	Pfund/Fuſs preuſs.	Pfund/Fuſs engl.	Pfund/Fuſs österr.	Pfund/Fuſs	kg/m aus preuſs. Maſs.	kg/m aus engl. Maſs.	kg/m aus österr. Maſs.
1	0,6277	0,6719	0,5644	1	1,5931	1,4882	1,7719
2	1,2554	1,3439	1,1287	2	3,1862	2,9764	3,5438
3	1,8831	2,0158	1,6931	3	4,7793	4,4646	5,3157
4	2,5108	2,6878	2,2575	4	6,3724	5,9528	7,0875
5	3,1385	3,3597	2,8218	5	7,9655	7,4410	8,8594
6	3,7662	4,0317	3,3862	6	9,5586	8,9292	10,6313
7	4,3939	4,7036	3,9506	7	11,1517	10,4174	12,4032
8	5,0217	5,3756	4,5150	8	12,7448	11,9057	14,1751
9	5,6494	6,0475	5,0793	9	14,3379	13,3939	15,9470

2. Gewichtseinheit für die Flächeneinheit.

kg/qcm	Pfund/Quadrat-Zoll preuſs.	Pfund/Quadrat-Zoll engl.	Pfund/Quadrat-Zoll österr.	Pfund/Qu.-Zoll.	kg/qcm aus preuſs. Maſs.	kg/qcm aus engl. Maſs.	kg/qcm aus österr. Maſs.
1	13,681	14,223	12,388	1	0,0731	0,0703	0,0807
2	27,361	28,445	24,776	2	0,1462	0,1406	0,1614
3	41,042	42,668	37,164	3	0,2193	0,2109	0,2422
4	54,722	56,891	49,552	4	0,2924	0,2812	0,3229
5	68,403	71,114	61,940	5	0,3655	0,3516	0,4036
6	82,083	85,336	74,328	6	0,4386	0,4219	0,4843
7	95,764	99,559	86,716	7	0,5117	0,4922	0,5651
8	109,444	113,782	99,103	8	0,5848	0,5625	0,6458
9	123,125	128,004	111,491	9	0,6579	0,6328	0,7265

kg/qcm	Tons/engl. Qu.-Zoll.	kg/qcm	Tons/engl. Qu.-Zoll	kg/qcm	Tons/engl. Qu.-Zoll	Tons/engl. Qu.-Zoll	kg/qcm	Tons/engl. Qu.-Zoll	kg/qcm
100	0,635	2300	14,6	4600	29,2	1	157,5	26	4095
200	1,27	2400	15,2	4700	29,8	2	315,0	27	4252
300	1,905	2500	15,9	4800	30,5	3	472,5	28	4410
400	2,54	2600	16,5	4900	31,1	4	630,0	29	4567
500	3,175	2700	17,1	5000	31,75	5	787,5	30	4725
600	3,81	2800	17,8	5100	32,4	6	945,0	31	4882
700	4,445	2900	18,4	5200	33,0	7	1102,5	32	5040
750	4,762	3000	19,0	5300	33,7	8	1260,0	33	5197
800	5,08	3100	19,7	5400	34,3	9	1417,5	34	5355
900	5,715	3200	20,3	5500	34,9	10	1574,9	35	5512
1000	6,35	3300	21,0	5600	35,6	11	1732	36	5670
1100	6,985	3400	21,6	5700	36,2	12	1890	37	5827
1200	7,62	3500	22,2	5800	36,8	13	2047	38	5985
1300	8,254	3600	22,9	5900	37,5	14	2205	39	6142
1400	8,889	3700	23,5	6000	38,1	15	2362	40	6300
1500	9,524	3800	24,1	6500	41,3	16	2520	41	6457
1000	10,159	3900	24,8	7000	44,4	17	2677	42	6615
1700	10,794	4000	25,4	7500	47,6	18	2835	43	6772
1800	11,429	4100	26,0	8000	50,8	19	2992	44	6930
1900	12,064	4200	26,7	8500	54,0	20	3150	45	7087
2000	12,699	4300	27,3	9000	57,1	21	3307	46	7245
2100	13,334	4400	27,9	9500	60,3	22	3465	47	7402
2200	13,969	4500	28,6	10000	63,5	23	3622	48	7560
						24	3780	49	7717
						25	3937	50	7875

3. Gewichtseinheit für die Raumeinheit.

kg/cbm	Pfund/Kubik-Fufs preufs.	engl.	österr.	Pfund/Kubik-Fufs	kg/cbm aus preufs. Mafs	engl. Mafs	österr. Mafs
1	0,06183	0,06242	0,05638	1	16,1729	16,0196	17,7354
2	0,12366	0,12485	0,11277	2	32,3459	32,0392	35,4708
3	0,18550	0,18727	0,16915	3	48,5188	48,0588	53,2062
4	0,24733	0,24969	0,22554	4	64,6918	64,0784	70,9416
5	0,30916	0,31212	0,28192	5	80,8647	80,0980	88,6770
6	0,37099	0,37454	0,33831	6	97,0376	96,1175	106,4123
7	0,43282	0,43697	0,39469	7	113,2106	112,1371	124,1477
8	0,49465	0,49939	0,45108	8	129,3835	128,1567	141,8831
9	0,55649	0,56181	0,50746	9	145,5565	144,1763	159,6185

4. Metrische (neue) Atmosphäre, alte at. und Höhe der gleichwertigen Quecksilbersäule (Q.-S.). (Vrgl. Abteil. I, S. 313.)

1 neue at = 1 kg/qcm.

	Die alte at angenommen zu 76 cm Q.-S.	28 Par. Zoll Q.-S.	Höhe der Quecksilbersäule in cm	preufs. Zoll	engl. Zoll	Par. Zoll
	1 metr. at = n alte at		1 metr. at = n Q.-S.-Einheiten			
$n =$	0,96778	0,97039	73,551	28,122	28,958	27,171
	1 alte at = $\frac{1}{n}$ metr. at		1 Q.-S.-Einheit = $\frac{1}{n}$ metr. at			
$\frac{1}{n} =$	1,033296	1,0305	0,013596	0,0356	0,0345	0,0368

5. Vergleich der Arbeitseinheiten.

Verglichene Arbeitseinheit	preufs.	engl.	österr.	russ.	schwed.	
1 mkg = n Fufspfunde . . .	6,3724	7,2331	5,6489	8,0114	7,9236	$= n$
1 Fufspfund = $\frac{1}{n}$ mkg . . .	0,1569	0,1383	0,1770	0,1248	0,1262	$= \frac{1}{n}$

6. Vergleich der Pferdestärken. (Vrgl. Abteil. I, S. 190.)

	England 1 PS = 550 Fufspfd./sk	Oesterreich 1 PS = 430 Fufspfd./sk	Preufsen 1 PS = 480 Fufspfd./sk	Sachsen 1 PS = 530 Fufspfd./sk	Baden 1 PS = 500 Fufspfd./sk	Württemberg 1 PS = 525 Fufspfd./sk
	1 metr. PS = 75 mkg/sk = n PS der verschiedenen Länder					
$n =$	0,9863	0,9853	0,9957	0,9994	1,000	0,9973
	1 PS der verschiedenen Länder = $\frac{1}{n}$ metr. PS					
$\frac{1}{n} =$	1,0139	1,0149	1,0043	1,0006	1,000	1,0027
	1 PS der verschiedenen Länder = $\frac{75}{n}$ mkg/sk					
$\frac{75}{n} =$	76,041	76,119	75,325	75,045	75,000	75,204

Zeitvergleichung.

Mitteleuropäische Zeit (M. E. Z.) nach dem 15. Längengrade östl. von Greenwich: in Deutschland, Luxemburg, Oesterreich-Ungarn, Dänemark, Schweden, Norwegen, in der Schweiz, Italien, Bosnien, Serbien, westl. Türkei (Saloniker Netz).

Westeuropäische Zeit (W. E. Z.) nach dem Längengrade von Greenwich, 1 Stunde **nach** gegen M. E. Z.: in Grofsbritannien, Belgien, Niederland und Spanien.

Osteuropäische Zeit (O. E. Z.) nach dem 30. Längengrade östlich von Greenwich, 1 Stunde **vor** gegen M. E. Z.: in Bulgarien, Rumänien, in der östl. Türkei (Constantinopeler Netz) und in Aegypten.

Einheitliche Landeszeiten nach den Längengraden der Hauptstädte: in Portugal, Frankreich, Griechenland und Rufsland.

Gegen die mitteleuropäische Zeit gehen die Eisenbahn-Uhren

im westlichen Europa	nach Stund.	nach Min.
Frankreich	—	50
auf den Bahnhöfen	—	55
Niederland, Belgien, Grofsbritannien, Spanien — W. E. Z.	1	—
Portugal	1	37

im östlichen Europa	vor Stund.	vor Min.
Griechenland	—	35
Bulgarien, Rumänien, Oestl. Türkei — O. E. Z.	1	—
Rufsland	1	1

in aufsereuropäischen Orten	nach Stund.	nach Min.
Rio de Janeiro	3	53
Halifax (Inter. Colonial Time) ×	5	—
Boston (Eastern Time) ×	6	—
New York (Eastern Time) ×	6	—
Chicago (Central Time) ×	7	—
New Orleans (Central Time) ×	7	—
Salt Lake City (Mountain Time) ×	8	—
San Francisco (Pacific Time) ×	9	—
Honolulu	11	32
Apia (Samoa-Inseln)	12	27

in aufsereuropäischen Orten	vor Stund.	vor Min.
Bombay	3	52
Calcutta	4	54
Hongkong	6	37
Albany (wie ganz Westaustralien) ×	7	—
Shanghai (wie die ganze chinesische Küste) ×	7	—
Yokohama (wie ganz Japan) ×	8	—
Adelaide („ „ Süd-Australien) ×	8	—
Melbourne („ „ Victoria) ×	9	—
Sydney („ „ Neu-Süd-Wales) ×	9	—
Brisbane („ „ Queensland) ×	9	—

× Stundenzonenzeit.

In einigen Ländern, wie Oesterreich, Rufsland usw. werden die Uhren mancher Orte nach mittlerer Ortszeit gestellt. Sie gehen dann auf jeden Grad, um welchen der Ort östlicher oder westlicher liegt, als der für den Fahrplan mafsgebende Meridian um 4 Minuten vor oder nach gegen die Eisenbahn-Uhr.

Beförderungsdauer in Tagen für Postsendungen von europäischen Häfen nach Uebersee.*)

Abgangshäfen: b = belgische, d = deutsche, e = englische, f = französische, i = italienische, p = portugiesische, sp = spanische.

Adelaide . . . 27—30 i
Aden . . . . 7—10 i
Akkra (Goldküste) 15 e u. f
Alexandrien . . $2^{3}/_{4}$—4 i
Algier . . 3—4 v. Berlin
Amiranten . . . 17—24 f
Angola (Loanda) . 15—24 p
Arica (Chile) . . 29—39 d
Ascension . . . 14 e
Auckland . . . 37 e
Autofagasta . . 32—39 d
Azoren . . . . 3—7 p
Bahama-Ins. 4—5 v. New York
Bahia . . . . 11—13 p
Batavia . . . . 23—25 i
Beira (Mosambik) 23—29 i
Beirut . . . . 5—9 i
Bender-Abbas (Persien) 18—25 i
Betschuanaland über Capstadt, Bolivien über Panama,
Boma (Kongo) . 19 b
Bombay . . . . 12—18 i
Brisbane . 4 v. Adelaide
Buenos Aires . . 14—19 p
Buschir . . . . 19—28 i
Calabar (Kamerun) 19 e
Caldera (Chile) . 33—40 d
Canarische Ins. . 2—5 sp
Cape Palmas . . 18—23 d
Capstadt . . . 17 e
Capverdische Ins. 5—7 p
Cartagena (Columbien) 11 v. New York
Colombo . . . 13—15 i
Colon (Panama) 6—8 v. New York
Conakry (Frz.-Guinea) 10—12 f
Costa Rica 5 v. New York
Coquimbo (Chile) 32—35 f u. p
Cuba 12—14 v. Berlin nach Havanna
Curaçao 8—10 v. New York
Cypern . . . . 4—5 i
Dahomey über Lome
Dakar (Senegal) . 5 p
Daressalam 17—18 f u. i
Delagoabai . . . 27—34 i
Djibouti . . . 9—11 f
Duala (Kamerun) 18 f
Ecuador über Colon-Panama
Falkland-Ins. . . 27 e
Fayal . . . . . 6—7 p
Fernando Po . . 23 sp
Fidschi-Ins. . . 30 e
Frz.-Guinea . . 10—12 f

Fremantle (West-Australien) 23—26 i
Gambia (Bathurst) 13 e
Grand Bassa (Liberia) 19 b
Grand Bassam (Elfenbeinküste) . . . . 13—16 f
Guadeloupe . . 10—12 f
Guatemala von New York über New Orleans nach Puerto Barrios 5
Guyana . . . . 15 e
Hawai v. Berlin nach Honolulu . . . 20—24
Haiti . . . . . 17—19 f
Honduras 5 v. New York
Hongkong . . . 25—29 i
Jquique 30—40 über New York
Jaffa . . . . . 5—8 i
Jamaika 5—7 von New York
Jap . . . . . 39 i
Karolinen . . . 51 i
Kilindini (Deutsch-Ostafrika) . . . 16—18 i
Kingston . . . 13 e
Kribi (Kamerun) 20—31 d
Lagos . . . . . 16 e u. f
La Guayra . . . 15—16 f
Libreville (Kongo) 16—20 f
Loanda . . . . 15—24 p
Loango . . . . 18—24 f
Lome . . . . . 16—25 d
Lüderitzbucht . 20—21 d
Madagaskar . . 22—26 f
Madeira (Funchal) 2—4 p
Manas . . . . 18—21 p
Maracaibo 10 von New York
Marianen (Saipan) 44 i
Marschall-Ins. (Jaluit) 54—57 i
Martinique . . . 11—12 f
Matadi . . . . 20 f
Mauritius . . . 26—31 f
Melbourne 1 von Adelaide
Mexiko 5 von New York
Mombasa . . . 14—18 i
Monrovia . . . 12 f
Montevideo . . 16—21 f
Montreal 14 Stunden von New York
Mosambik . . . 21 i
Nagasaki . . . 33 e
Natal über Capstadt
Neu-Fundland . 6—7 e
Neu-Guinea . . 38—41 i
Neu-Seeland über Adelaide
New York . . . 5—10
Nicaragua (Westküste) 3—5 von Colon
Nigeria . . 17—18 e u. d

Padang . . . . 22—23 f
Palau . . . . 37 i
Panama siehe Colon
Para . . . . . 10—12 p
Paraguay über Buenos Aires
Penang . . . . 18—20 i
Pernambuco . . 10—13 p
Peru über Colon
Philippinen über Singapore
Pisagua . . . . 29—36 d
Port au Prince 9 von New York
Porto Rico 4—6 v. New York
Port Said . . . $2^{1}/_{4}$—4 i
Portg.-Guinea . 8—10 p
Puerto Columbia 9—10 v. New York
Punta Arenas . 23—24 p
Quebec . . 1 v. New York
Réunion . . . 24—29 f
Rhodesia über Capstadt
Rio de Janeiro . 13—14 p
Rio del Rey . . 23 e
Sabang . . . . 20 i
Saigon . . . . 24 i u. f
Salvador . 8—9 v. Colon
Samoa 29—31 v. Queenstown
San Domingo 9 v. New York
San Thomé . . 11—17 p
Shanghai . . . 29—32 i
Seychellen-Ins. . 17—24 f
Sierra Leone . . 11 p
Singapore . . . 21 i
Smyrna . . 4—5 v. Berlin
St. Helena . . . 17 e
St. John's (Canada) 8—11 e
St. Lucia . . . 14 f
St. Thomas . . 13 e
Swakopmund . . 19 f
Sydney . . 2 v. Adelaide
Tahiti 12 v. S. Francisco
Tampico . . . 20—29 b
Tanga . . . . 16—19 i
Tanger . $2^{1}/_{2}$ $6^{1}/_{2}$ St. sp.
Tenerife . . . . 2—5 sp.
Togo (Lome) . . 16 f
Tonkin über Saigon
Transvaal über Capstadt
Trinidad . . . 14 e
Tripolis . . . . 2 i
Tsingtau . . . 33—36 i
Tunis . . . 10—36 St. i
Valparaiso . . . 29 p
Venezuela siehe La Guayra
Veracruz . . . 14 f
Viktoria (Kamerun) 18 f
West-Australien . 23—26 i
Windhuk über Swakopmund
Yokohama . . . 23 e
Zanzibar . 18—20 i u. f.

*) Näheres in dem monatlich erscheinenden Beiheft zum Amtsblatt des Reichspostamts.

E. Gebührenordnung der Architekten und Ingenieure.*)

I. Allgemeine Bestimmungen.

§ 1. Grundsätze für die Bemessung der Gebühren.

1. Die Gebühren werden im allgemeinen nach der Bausumme in Rechnung gestellt, u. zw. für Vorarbeiten und Ausführungsarbeiten**) gesondert. Für erstere ist die Summe des Kostenanschlages oder — falls, oder solange ein Kostenanschlag noch nicht aufgestellt ist — die Kostenschätzung mafsgebend, für letztere die Summe der Baukosten.

2. Vorarbeiten sind:

a) der Vorentwurf in Skizzen nebst Kostenschätzung und gebotenenfalls Erläuterungsbericht,
b) der Entwurf in solcher Durcharbeitung, dafs danach der Kostenanschlag c) aufgestellt werden kann,
c) der Kostenanschlag zur genauen Ermittlung der Baukosten,
d) die Bauvorlagen, bestehend in den zur Nachsuchung der behördlichen Genehmigungen nötigen Zeichnungen und Schriftstücken.

Ausführungsarbeiten sind:

e) die Bau- und Werkzeichnungen in einem für die Ausführung genügenden Mafsstabe,
f) die Oberleitung. Diese umfafst die Vorbereitung der Ausschreibungen, den Entwurf der Verträge über Arbeiten und Lieferungen, die Verhandlungen über die Verträge mit den Lieferanten und Unternehmern bis zum Vertragsabschlusse; die Bestimmung der Fristen für den Beginn, die Fortführung und die Fertigstellung der Bauarbeiten; die Ueberwachung der Bauausführung; den Schriftwechsel in den bei der Ausführung vorkommenden Verhandlungen mit Behörden und dritten Personen; die Prüfung und Feststellung der Baurechnungen.

3. Die für die Berechnung der Gebühren in Betracht zu ziehende Gesamtbausumme umfafst sämtliche Kosten, welche für den Bau aufgewandt werden, mit Ausschlufs der Kosten des Grunderwerbes und der Bauleitung, sowie der Gebühren für den Architekten und Ingenieur. Uebernimmt der Bauherr selbst Materiallieferungen und Arbeitsleistungen, so werden deren Kosten bei der Berechnung der Gebühren nach ortsüblichen Preisen zu den übrigen Baukosten hinzugerechnet.

4. Die Zahlung der Gebühr berechtigt den Auftraggeber nur zu einmaliger Ausführung des gelieferten Entwurfes; Benutzung zu wiederholter Ausführung ist von neuem gebührenpflichtig.

5. Umfafst ein Auftrag mehrere Bauwerke nach demselben Entwurfe, so sind die Gebühren, vorausgesetzt, dafs diese Bauwerke auf einmal ausgeführt werden, für Vorentwurf und Oberleitung nach der Gesamtsumme, für die übrigen Arbeiten den erforderlichen Leistungen entsprechend zu berechnen. Umfafst ein Auftrag mehrere gleichartige Bauwerke nach verschiedenen Entwürfen, so sind die Gebühren für jedes Bauwerk einzeln zu berechnen.

6. Umfafst ein Bauauftrag mehrere verschiedenen Gebieten, Gruppen oder Bauklassen angehörende Bauwerke, so darf die Gebühr für jedes getrennt berechnet werden.

7. Wird auf Veranlassung oder unter Zustimmung des Auftraggebers durch Veränderung des Entwurfes eine Vermehrung der vorbereitenden Arbeiten erforderlich, so ist dafür eine der Mehrleistung entsprechende Gebühr zu zahlen.

8. Wird nur der **Vorentwurf** als eine in sich abgeschlossene Leistung geliefert, so erhöht sich die Gebühr um die Hälfte.

9. Werden für eine Baustelle mehrere Vorentwürfe nach verschiedenen Bauprogrammen verlangt, so ist jeder Vorentwurf besonders zu berechnen. Sind nach demselben Bauprogramme und für dieselbe Baustelle mehrere Vorentwürfe auf Verlangen des Bauherrn aufgestellt, so wird die Gebühr für den ersten voll, für alle weiteren nach Verhältnis der Mehrleistung berechnet.

---

*) Siehe auch: Gebührenordnung der beratenden Ingenieure für Elektrotechnik, aufgestellt vom Verein beratender Ingenieure für Elektrotechnik (E. V.) in Berlin. 1908.

**) Unter „Bauausführung“ ist nicht die „Bauunternehmung“ zu verstehen.

10. Für den **Entwurf** sind die Teilbeträge aus § 1, 2a) und b) zusammen zu berechnen, auch wenn ein Vorentwurf nicht geliefert worden ist.

11. Sind im Auftrage des Auftraggebers mehrere Entwürfe für dieselbe Bauaufgabe angefertigt worden, so sind die Gebühren für den ersten Entwurf aus § 1, 2a) und b), für jeden der weiteren Entwürfe nach Verhältnis der Mehrleistung, jedoch mindestens mit der Hälfte der Gebühren aus § 1, 2a) und b) zu berechnen.

12. Die Gebühren für die **Oberleitung** gelten unter der Voraussetzung, dafs die Bauausführung durch Einzel- oder Gesamtunternehmer erfolgt. Für solche Leistungen, welche ohne Zuziehung von Unternehmern ausgeführt werden, verdoppelt sich die Gebühr für § 1, 2f) bezüglich des von dieser Ausführungsart betroffenen Teiles der Bausumme. Die Gebühr für § 1, 2c) kommt auf alle Fälle auch dann zur Verrechnung, wenn die Pläne des Entwurfes ganz oder zum Teil als Bau- und Werkzeichnungen verwendet werden können.

13. Erstreckt sich der Auftrag nur auf die Ausführungsarbeiten, so erhöht sich die Gebühr für § 1, 2e) und f) um ein Viertel.

14. Für Umbauten erhöhen sich die Gebühren den erforderlichen Leistungen entsprechend, mindestens aber um die Hälfte.

15. Werden seitens eines Lieferanten oder Unternehmers Provisionen oder Rabatte auf Bestellungen gewährt, so fallen diese dem Bauherrn zu.

16. Dem Auftraggeber ist auf Verlangen eine Ausfertigung des Entwurfes ohne besondere Vergütung zu übergeben.

§ 2. Nebenkosten.

In die festgesetzten Gebühren sind nicht eingeschlossen und daher vom Auftraggeber besonders zu vergüten:

17. die Kosten aller für die Aufstellung des Entwurfes notwendigen Unterlagen, als: Katasterauszüge, Lage- und Höhenpläne;*) Bauaufnahmen, Bodenuntersuchungen, Bohrungen, Wassermessungen, Analysen, statistische Erhebungen u. drgl.; die Bauskizzen und Bauzeichnungen des zu bearbeitenden Gebäudes für Entwürfe zu Heizungs-, Lüftungs-, Beleuchtungs-, Be- und Entwässerungs- sowie elektrischen Anlagen;

18. die Kosten der besonderen Bauleitung, d. h. die Gehaltsbezüge der Bauführer, Bauaufseher, Bauwächter usw.; die Kosten für die Beschaffung und Unterhaltung eines besonderen Baubureaus, für die Vervielfältigung der Unterlagen und für die Ausschreibung und Vergebung der Arbeiten, Lieferungen u. drgl., sowie für die zur Abrechnung erforderlichen Vermessungen. Die Gehaltsbezüge eines zur besonderen Bauleitung erforderlichen Bauführers sind auch dann — u. zw. nach Verhältnis des Zeitaufwandes — zu erstatten, wenn der Bauführnr zur Leitung mehrerer Bauten vom Architekten oder Ingenieur bestellt ist;

19. bei Hochbauten die Gebühren der mit statischen Berechnungen, Konstruktionen, maschinellen Anlagen u. drgl. betrauten Ingenieure; bei Ingenieurbauten diejenigen des mit der künstlerischen Ausbildung des Entwurfes betrauten Architekten und der zugezogenen Spezialisten;

20. die Mühewaltung bei Auswahl, Erwerb, Veräufserung, Benutzung und Belastung von Grundstücken, Baulichkeiten usw., sowie bei Ordnung der Rechtsverhältnisse;

21. die aus Anlafs des Baues erforderlichen Reisen;

22. etwa geforderte Revisions- und Inventarzeichnungen, sowie bei Strafsen, Eisenbahnen und Kanälen die Schlufsvermessungen.

§ 3. Zahlungen.

23. Abschlagzahlungen auf die Gebühren sind auf Verlangen bis zu $^3/_4$ der nach dieser Gebührenordnung zu bewertenden, bereits bewirkten Leistungen zu gewähren. Insbesondere sind die Gebühren für die Vorarbeiten zu $^3/_4$ sofort nach deren Ablieferung fällig. Die Restzahlungen sind, gesondert nach Vorarbeiten und Ausführungsarbeiten, längstens 3 Monate nach Erfüllung des Auftrages zu leisten.

---

*) Bezüglich der Kosten der Arbeiten des Feldmessers wird auf den Entwurf des deutschen Geometer-Vereines für einen Gebührentarif für geometrische Arbeiten, Zeitschrift für Vermessungswesen Bd. XV Heft 10 bis 12, verwiesen, welcher als Sonderdruck von dem Bibliothekar des Vereines aus München zu beziehen ist.

4. Besondere Gebühren.

24. Gutachten, Schätzungen, schiedsgerichtliche Arbeiten, statische Berechnungen, künstlerische Darstellungen u. drgl. stehen aufserhalb dieser Gebührenordnung und sind nach der darauf verwendeten geistigen Arbeit, nach der fachlichen Stellung des Beauftragten und nach der wirtschaftlichen Bedeutung der Frage zu bewerten.

25. Für nach der Zeit zu vergütende Arbeiten sind zu berechnen

für die erste Stunde . 20 *M*
für jede fernere Stunde 5 „

26. Für Reisen im Inlande sind aufser den im § 4, 24 und 25, oder § 6 und §§ 8 bis 10 aufgeführten Gebühren 30 *M* für den Tag zu vergüten. Dieser Satz kommt auch für Teile eines Tages voll in Ansatz; jedoch kann er für einen Tag nur einmal angesetzt und soll nach Verhältnis verteilt werden, wenn gleichzeitig mehrere Auftraggeber beteiligt sind. Neben diesem Tagesatze sind die Auslagen für Fahrten, Gepäckbeförderung und Arbeiter zu erstatten.

27. Die Leistungen von Gehülfen werden deren Stellung entsprechend in Rechnung gestellt.

II. Gebühren der Architekten.

§ 5. Grundlagen der Berechnung.

28. Die Gebühren für die Leistungen der Architekten bei der Vorbereitung und Ausführung von Bauten werden

sowohl nach der **Bausumme,**
als nach der **Art,**
als nach der **Ausbausumme**

der Bauwerke bemessen.

29. Die **Bausumme** umfafst die sämtlichen Baukosten. Sie ist bei Berechnung der Gebühren für die Vorarbeiten dem Kostenanschlage, und für die Ausführungsarbeiten der Bauabrechnung zu entnehmen. Wenn und solange die Bauabrechnung nicht vorliegt, tritt an deren Stelle der Kostenanschlag und, solange auch dieser fehlt, an deren Stelle die Kostenschätzung.

30. Nach der **Art** der Bauwerke werden unterschieden:

Gruppe I: Schuppen, Scheunen, Ställe, Remisen, Gewächshäuser; Lagerhäuser, Speicher, Schlacht- und Viehhöfe; Werkstätten, Betriebsanlagen, Fabriken; Aborts- und Barackenbauten;

Gruppe II: Wohn-, Gast-, Kaufhäuser, Banken; Schulen, Kasernen, Gefängnisse, Bade-, Heil- und Pflegeanstalten, Markt- und provisorische Hallenbauten, Geschäfts-, Bureau-, Verwaltungs-, Verkehrs-, sowie alle solche Gebäude, welche nicht unter den Gruppen I und III besonders benannt sind;

Gruppe III: Kirchen aller Art, Friedhofsbauten, Gedenkhallen; Hochschulen, Akademien, Bibliotheken; Museen, Theater, Konzerthäuser; Börsen, Parlaments- und Rathäuser;

Gruppe IV: Denkmäler, Brunnen, Grotten, Lauben, Bänke; Raumausstattungen; Fest- und Trauerdekorationen, bauliche Ausstattungsgegenstände (Altäre, Kanzeln usw.);

Gruppe V: Möbel und kunstgewerbliche Gegenstände (Lichtträger, Geräte, Schmucksachen usw.).

31. Die **Ausbausumme** umfafst den auf den Ausbau und die Ausschmückung des Bauwerkes fallenden Teil der Bausumme, welcher in Kostenanschlägen und Bauabrechnungen im einzelnen nachzuweisen ist. Dabei werden die Bauarbeiten wie folgt geschieden:

Rohbau:	Ausbau:
Ausschachtungsarbeiten	—
Maurerarbeiten	Putzarbeiten und Mehrkosten für Ziegelverblendung
Steinmetzarbeiten: Lieferung und Versetzen des Materiales in einfacher glatter Bearbeitung (durchschnittlich zu 2/3 der Gesamtkosten anzunehmen)	Mehrkosten für Profilierung und Verzierung (durchschnittlich zu 1/3 der Gesamtkosten anzunehmen)

Asphalt- und Isolierarbeiten	—
Zimmerarbeiten: Balken, Fachwände, Dachverband	Zulagen für Verzierung und Verkleidung sichtbarer Holzteile; Fufsböden; hölzerne Treppen
Eisenkonstruktionen	Kunstschmiedearbeiten
Dachdeker- und Klempnerarbeiten . . .	Metallverzierungen
—	Putz- und Stuckarbeiten
—	Bildhauerarbeiten mit Modellen
—	Bekleidung aus Stuckmarmor, Terrazzo, Mosaik, Steinplatten, Fliesen, Kacheln, Formsteinen, Terrakotten usw.
—	Tischler-, Glaser- und Schlosserarbeiten
—	Maler- und Tapezierarbeiten
—	Heizungs- und Lüftungsanlagen, Ofensetzerarbeiten
—	Wasser- und Gasleitungen, Abortanlagen
—	Elektrische und Maschinenanlagen
Pflasterungen, Wege- und Gartenanlagen	—
Insgemein	Unvorhergesehene Arbeiten des Ausbaues.

§ 6. Berechnung der Gebühren.

32. Die Gesamtgebühren werden nach Mafsgabe der beigefügten Tafel in Prozenten der Bausumme berechnet, welche mit den Gruppen und mit steigendem Ausbaue wachsen, dagegen mit steigenden Bausummen abnehmen.

33. Die Grundgebühren der Tafel in den Gruppen I bis IV entsprechen den am Kopfe der Spalten 2 bis 5 bezeichneten Mindestsätzen für das Verhältnis der Ausbausumme zur Bausumme und werden für jedes weitere Hundertstel dieses aus dem Kostenanschlage bzw. aus der Bauabrechnung nachzuweisenden Verhältnisses um den in Spalte 6 angegebenen Zuschlag erhöht.

34. So lange die Ausbausumme nicht nachgewiesen ist, wird das Ausbauverhältnis zu den Mindestsätzen der Tafel angenommen. Nach geschehener Lieferung des Entwurfes steht es dem Architekten jedoch zu, den Nachweis durch Vorlage eines Kostenanschlages zu führen.

35. An Einzelgebühren werden berechnet

für **Vorarbeiten**	a) Vorentwurf	10	30	40	Hundertstel der in der Tafel angegebenen Sätze.
	b) Entwurf.	20			
	c) Kostenanschlag . . .	7	10		
	d) Bauvorlagen.	3			
für **Ausführungsarbeiten**	e) Bauzeichnungen . . .	20	40	60	
	und Werkzeichnungen	20			
	f) Bauleitung.	20	20		

Beispiele der Gebührenberechnung.

Beispiel 1. Villa. Gebühren für Vorentwurf und Entwurf. Nach der Kostenschätzung: Bausumme 100 000 *M*

$$\text{Gruppe II: } \frac{100\,000}{100} \cdot 4{,}95 \cdot 0{,}30 = 1485 \, \mathcal{M}.$$

Beispiel 2. Dieselbe Villa. Gebühren für alle Vorarbeiten. Nach dem Kostenanschlage: Bausumme 100 000 *M*, Ausbausumme 50 000 *M*, Ausbauverhältnis $= {}^{50}/_{100}$.

$$\text{Gruppe II: } \frac{100\,000}{100} \, [4{,}95 + (50 - 30)\, 0{,}074] \, 0{,}40 = 2572 \, \mathcal{M}$$

Beispiel 3. Dieselbe Villa. Gebühren für alle Arbeiten.

Nach dem Kostenanschlage: Bausumme 100 000 *M*, Ausbausumme 50 000 *M*, Ausbauverhältnis $= {}^{50}/_{100}$.

Nach der Bauabrechnung: Bausumme 120 000 *M*, Ausbausumme 66 000 *M*, Ausbauverhältnis $= {}^{55}/_{100}$.

Gruppe II:

$$\frac{100\,000}{100} (4{,}95 + 20 \cdot 0{,}074)\, 0{,}40 + \frac{120\,000}{100} (4{,}70 + 25 \cdot 0{,}070)\, 0{,}60 = 7216 \, \mathcal{M}.$$

Gebühren der Architekten in Hundertsteln der Bausumme.*)

1.	2.	3.	4.	5.	6	7.
	In den Gruppen					
Für Bausummen bis	I	II	III	IV	I bis IV	V
	Grundgebühr				Zuschlag	
	beim Verhältnis der Ausbausumme zur Bausumme bis					
ℳ	20/100	30/100	40/100	50/100	je 1/100 mehr	
1 000	6,00	9,00	12,00	15,00	0,135	21,00
2 000	5,60	8,40	11,20	14,00	0,125	19,60
3 000	5,30	8,00	10,60	13,30	0,120	18,60
4 000	5,10	7,70	10,20	12,80	0,115	17,90
5 000	4,90	7,40	9,80	12,30	0,110	17,20
6 000	4,80	7,20	9,60	12,00	0,108	16,80
7 000	4,70	7,00	9,40	11,70	0,106	16,40
8 000	4,60	6,90	9,20	11,50	0,104	16,10
9 000	4,55	6,85	9,10	11,40	0,103	15,95
10 000	4,50	6,80	9,00	11,30	0,102	15,80
15 000	4,30	6,50	8,60	10,80	0,097	15,10
20 000	4,10	6,20	8,20	10,30	0,093	14,50
25 000	4,00	6,00	8,00	10,00	0,090	14,00
30 000	3,90	5,85	7,80	9,70	0,088	13,60
35 000	3,80	5,70	7,60	9,50	0,086	13,30
40 000	3,70	5,55	7,40	9,30	0,084	13,00
50 000	3,60	5,40	7,20	9,00	0,081	12,60
60 000	3,50	5,25	7,00	8,70	0,079	12,20
70 000	3,40	5,10	6,80	8,50	0,077	11,90
80 000	3,35	5,05	6,70	8,40	0,076	11,75
90 000	3,30	5,00	6,60	8,30	0,075	11,60
100 000	3,25	4,95	6,50	8,20	0,074	11,45
150 000	3,10	4,70	6,20	7,80	0,070	10,90
200 000	3,00	4,50	6,00	7,50	0,067	10,50
250 000	2,90	4,30	5,80	7,20	0,065	10,10
300 000	2,80	4,20	5,60	7,00	0,063	9,80
350 000	2,75	4,10	5,50	6,90	0,062	9,65
400 000	2,70	4,00	5,40	6,80	0,061	9,50
500 000	2,65	3,90	5,30	6,60	0,059	9,25
600 000	2,60	3,80	5,20	6,40	0,058	9,00
700 000	2,55	3,75	5,10	6,30	0,057	8,85
800 000	2,50	3,70	5,00	6,20	0,056	8,70
900 000	2,45	3,65	4,90	6,10	0,055	8,55
1 000 000	2,40	3,60	4,80	6,00	0,054	8,40
1 250 000	2,30	3,45	4,60	5,80	0,052	8,10
1 500 000	2,20	3,30	4,45	5,60	0,050	7,80
2 000 000	2,10	3,20	4,30	5,40	0,049	7,50
2 500 000	2,05	3,10	4,15	5,20	0,047	7,25
3 000 000	2,00	3,00	4,00	5,00	0,045	7,00
4 000 000	1,95	2,95	3,90	4,90	0,044	6,85
5 000 000	1,90	2,90	3,80	4,80	0,043	6,70
6 000 000	1,85	2,85	3,70	4,70	0,042	6,55
7 000 000	1,80	2,80	3,65	4,60	0,041	6,40
10 000 000	1,75	2,70	3,55	4,50	0,040	6,30

*) Die Bausumme wird nach der nächst unteren Stufe abgerundet, solange die Gebühr dadurch höher ausfällt.

III. Gebühren der Ingenieure.

§ 7. Art der Berechnung.

36. Für die Gebührenberechnung werden die Ingenieurarbeiten, sofern sie nicht als Hochbauten nach II. zu verrechnen sind, in drei Gruppen geteilt, u. zw. in solche, die

A. nach Hundertsteln der Baukosten (§ 8),
B. nach der Länge der Linie (§ 9),
C. nach der Gröfse der Fläche vergütet werden (§ 10).

Die Gruppe A. zerfällt in vier Bauklassen 1., 2., 3. und 4.

37. Für die Arbeiten der Gruppen B. und C. werden Gebührengrenzen für einfache und schwierige Verhältnisse angegeben. Die zu zahlenden Gebüren sind in jedem Falle vertragsmäfsig zwischen diesen Grenzen mit dem Bauherrn zu vereinbaren.

38. Die Frage, ob einfache oder schwierige Verhältnisse vorliegen, wird gleichzeitig nach der Geländegestaltung, nach den wirtschaftlichen Umständen und nach technischen Gesichtspunkten entschieden.

39. Alle Arbeiten, deren Baukosten den Betrag von 5000 ℳ nicht erreichen, dürfen nach den Sätzen für Zeitgebühren (§ 4, 25) verrechnet werden.

40. Die Anteile der Einzelleistungen an der Gesamtgebühr werden für Ingenieurarbeiten folgendermafsen festgesetzt:

Bezeichnung der Einzelleistung	Teilbeträge in Hundertsteln
Vorentwurf und Kostenschätzung	25
Entwurf	} 30
Kostenanschlag	
Bauvorlagen	5
Bau- und Werkzeichnungen	10
Oberleitung der Bauausführung	30

§ 8.

Gebührensätze für Arbeiten, welche nach der Bausumme vergütet werden.

41. Hierher gehören alle Bauwerke, welche nicht nach den Bestimmungen für die Gruppen B. § 9 und C. § 10 zu berechnen sind, nämlich:

Bauklasse 1.

Bohlwerke, Brücken, gerade feste bis 10 m Spannweite; einfache Deichsiele; einfache Durchlässe; Erdarbeiten jeder Art; Anlagen zur Fortleitung und Verteilung der Elektrizität; Faschinenbauten; Felssprengungen; Futtermauern, Gerinne für Wasserleitungen ohne Kunstbauten; einfache Hafenanlagen ohne Kunstbauten; Pflasterungen als Uferdeckung; Rohrleitungen ohne Abzweige; einfache Strafsenanlagen; Strafsenbefestigungen; Stützmauern mit einfacher Gründung; Trockenmauern; einfache Uferdeckungen; einfache feste Wehre.

Bauklasse 2.

Einfache Anschlufsgleise und Bahnhöfe mit mehr als 2 Nebengleisen für jedes Hauptgleis (kleinere Bahnhöfe werden mit den Strecken-km nach B. § 9 verrechnet); unterirdische Behälter für Flüssigkeiten; feste Brücken von 10 bis 30 m Spannweite; Anlagen zur Entwässerung von Städten; schwierigere Deichsiele; Düker; schwierigere Durchlässe; Fabrikgebäude mit maschineller Einrichtung; kleine Fähren für Fufsgänger und Wagen; Flufskanalisierungen; Flufsregelungen; Anlagen zur Gewinnung, Reinigung, Aufbewahrung und Verteilung von Gas; Gründungen ausschliefslich der Luftdruck- und Gefriergründungen; schwierigere Hafenanlagen; Heizungsanlagen; Hellinge; Installationen für Elektrizität, Gas und Wasser; einfache Konstruktionen für Hochbauten; Lüftungsanlagen; Schöpfwerkanlagen; einfache Schiffschleusen; Speicher mit maschineller Einrichtung; schwierige Strafsenanlagen; kleine Talsperren; einfache Tunnel; Ufermauern mit schwieriger Gründung; Anlagen zur Gewinnung, Reinigung, Aufbewahrung und Verteilung von Wasser; Wasserbauten für Kraftgewinnungsanlagen; einfache bewegliche Wehre; schwierige feste Wehre.

Bauklasse 3.

Schwierige Anschlufsgleise und Bahnhöfe; oberirdische Behälter für Gase und Flüssigkeiten; hohe Wasserleitungsbrücken; bewegliche Brücken, schwierige Konstruktionen für Hochbauten; Doppelbrücken; schiefe Hausteinbrücken (falls der Steinschnitt ausgetragen wird); schwierige und grofse Brücken über 30 m Spannweite; Fähranstalten für Eisenbahnen; Gefriergründungen; geneigte Ebenen; Luftdruckgründungen; Schiffshebewerke; schwierige Schiffschleusen; Schiffswerften; Schwimmdocks; grofse Talsperren; hohe Talübergänge; Trockendocks; schwierige Tunnel; schwierige bewegliche Wehre.

Bauklasse 4.

Maschinentechnische Anlagen aller Art, insbesondere Azetylenanlagen; Anlagen zur Verarbeitung von Abfallstoffen; Appreturanstalten; Aufbereitungen; Aufzüge; Badeanstalten; Bagger; Bergwerksmaschinenanlagen; Brauereien, Brennereien; chemische Fabriken; Cementfabriken; Dampfanlagen; Dampfkessel, Dampfmaschinen, Dampfleitungen, Dampfüberhitzer usw.; Destillieranlagen; Druckluftanlagen; Eiserzeugungsanlagen; Anlagen zur Erzeugung, Aufspeicherung und Umformung des elektrischen Stromes; Färbereien; Feuerlöschanlagen; Gebläse; Gerbereien; Gesteinbohranlagen; Giefsereien; Glashütten; Hammerwerke; Hebewerke; Hochöfen; Holzbearbeitungsanlagen; Holzschleifereien; Hüttenwerke; hydraulische Kraftanlagen; Kälteerzeugungsanlagen; Karbidfabriken; Kesselschmieden; Koch- und Waschküchen; Kokereien; Kompressoren für Luft und Gase; Kondensationen; Kühlanlagen; Ladevorrichtungen; landwirtschaftliche mechanische Einrichtungen; Lederbearbeitungsanlagen; Mälzereien; Maschinenfabriken; Molkereien; Mühlen; Oefen für technische Zwecke; Papierfabriken; Pressen; Pumpwerke; Sägewerke; Schachtanlagen; Schiffe; Separationsanlagen; Spinnereien; Transmissionen; Transportvorrichtungen; Trockenanstalten; Walzwerke; Waschanstalten; Wasserdruckwerke; Wasserkraftanlagen; Webereien; Werkzeugmaschinen; Windkraftmaschinen; Zuckerfabriken usw

Gebühren der Ingenieure nach Hundertsteln der Bausumme.

Bausumme	Bauklasse				Bausumme	Bauklasse			
M	1	2	3	4	M	1	2	3	4
5000	8,0	12,0	16,0	16,0	200000	3,4	5,2	7,5	5,5
10000	6,7	10,5	13,4	13,4	300000	3,2	4,8	6,8	4,9
20000	5,8	8,7	11,7	11,7	400000	3,2	4,6	6,4	4,6
30000	5,3	7,9	10,6	10,6	500000	3,2	4,4	6,0	4,4
40000	4,9	7,4	9,9	9,9	600000	3,2	4,3	5,6	4,3
50000	4,7	7,0	9,5	9,3	700000	3,1	4,2	5,3	4,2
60000	4,5	6,8	9,2	8,8	800000	3,1	4,1	5,2	4,1
70000	4,3	6,5	9,0	8,4	900000	3,0	4,1	5,1	4,1
80000	4,1	6,3	8,8	8,0	1000000	3,0	4,0	5,0	4,0
90000	4,0	6,2	8,6	7,7	2000000	2,7	3,6	4,5	3,6
100000	3,9	6,0	8,5	7,3	3000000	2,4	3,2	4,0	3,2
150000	3,5	5,6	7,9	6,2					

42. Die Gebührensätze für diese vier Bauklassen sind nach der folgenden Zusammenstellung in Hundertsteln der Bausumme zu berechnen. Die Bausumme wird nach der nächst unteren Stufe abgerundet, solange die Gebühr dadurch höher ausfällt.

§ 9.

B. Gebührensätze für Arbeiten, welche nach der Länge der Linie vergütet werden.

Die Leistungen des Ingenieurs sind die folgenden:

Allgemeine Vorarbeiten [§ 1, 2a)]: Bereisung der Linie, Eintragung der Linie in Abzeichnungen vorhandener Karten, Anfertigung eines Höhenplanes auf Grund von Höhenaufnahmen, Erläuterungsbericht, Kostenschätzung.

Ausführliche Vorarbeiten [§ 1, 2 b) c) d)]: Aufstellung der besonderen Vorarbeiten unter Benutzung vorhandener, nach Bedarf zu ergänzender Karten; Auftragung

des Höhenplanes und etwa erforderlicher Querschnitte; Aufstellung der Regelentwürfe für wiederkehrende Bauten und Bauteile; Eintragung der Streckenbauwerke; Erläuterungsbericht, Kostenanschlag. Alle Einzelbauwerke, welche nicht nach Regelentwürfen hergestellt werden können, werden nach § 8 nach Maſsgabe ihrer Bausumme besonders vergütet.

Bauausführung: alle in § 1 unter e) und f) aufgeführten Arbeiten.

44. Deichanlagen, Straſsenanlagen.

Die Gebühren betragen für 1 km Länge bei

einfachen		schwierigen
	Verhältnissen	
800 ℳ		2400 ℳ

45. Haupteisenbahnen, Neben-, Klein- und Straſsenbahnen aller Betriebsarten, Leitungs- und Schiffahrtskanäle.

Die Gebühren betragen für 1 km Länge bei

einfachen		schwierigen
	Verhältnissen	
1200 ℳ		3600 ℳ

§ 10.

C. Gebührensätze für Arbeiten, welche nach der Fläche vergütet werden.

46. Die Leistungen des Ingenieurs sind in dieser Gruppe die folgenden:

Allgemeine Vorarbeiten [§ 1, 2a)]: Begehung der Fläche, Eintragung des Vorentwurfes in vorhandene Lage- und Höhenpläne, Darstellung der allgemeinen Anordnungen der beabsichtigten Anlage, Erläuterungsbericht, Kostenschätzung.

Ausführliche Vorarbeiten [§ 1, 2b) c) d)]: Beschaffung aller Unterlagen für die Bauausführung unter Benutzung vorhandener Lage- und Höhenpläne; Aufstellung der Regelentwürfe für wiederkehrende Bauten und Bauteile; Eintragung der Hauptmaſse der nicht nach Regelentwürfen herzustellenden Einzelbauwerke, welche nach § 8 vergütet werden; Erläuterungsbericht, Kostenanschlag.

Bauausführung: alle in § 1 unter e) und f) aufgeführten Arbeiten.

47. Bebauungspläne.

Die Gebühren, welche den Teilleistungen a) und b) in § 7, 40 entsprechen und eintretenden Falles nach dem Verhältnis 1 : 1 zu teilen sind, betragen für 1 ha Fläche bei

einfachen		schwierigen
	Verhältnissen	
20 ℳ		60 ℳ

48. Bewässerungs- und Entwässerungsanlagen für landwirtschaftliche Zwecke.

Die Gebühren betragen für 1 ha Fläche bei

einfachen		schwierigen
	Verhältnissen	
30 ℳ		90 ℳ

F. Patentwesen.

a. Patentgesetz für das Deutsche Reich.*)

(Vom 7. April 1891.)

[Auszug.]

§ 1. Patente werden erteilt für **neue Erfindungen**, welche eine gewerbliche Verwertung gestatten. **Ausgenommen** sind:

---

*) Vrgl. Berg, Deutsches Patentgesetz; Leipzig, Ph. Reclam jun. (Universal-Bibliothek Nr. 3110). — Ferner: Taschenbuch des Patentwesens, Amtliche Ausgabe. Berlin 1905, Carl Heymanns Verlag. — L. Glaser, Patentschutz im In- und Auslande. Berlin 1899, Georg Siemens.

1. Erfindungen, deren Verwertung den Gesetzen oder guten Sitten zuwiderlaufen würde;

2. Erfindungen von Nahrungs-, Genufs- und Arzneimitteln, sowie von Stoffen, welche auf chemischem Wege hergestellt werden, soweit die Erfindungen nicht ein bestimmtes Verfahren zur Herstellung der Gegenstände betreffen.

§ 2. Eine Erfindung gilt **nicht als neu,** wenn sie zur Zeit der auf Grund dieses Gesetzes erfolgten Anmeldung in öffentlichen Druckschriften aus den letzten hundert Jahren bereits derart beschrieben oder im Inlande bereits so offenkundig benutzt ist, daß danach die Benutzung durch andere Sachverständige möglich erscheint.

Die im Auslande amtlich herausgegebenen Patentbeschreibungen stehen den öffentlichen Druckschriften erst nach Ablauf von drei Monaten seit dem Tage der Herausgabe gleich, sofern das Patent von demjenigen, welcher die Erfindung im Auslande angemeldet hat, oder von seinem Rechtsnachfolger nachgesucht wird. Diese Begünstigung erstreckt sich jedoch nur auf die amtlichen Patentbeschreibungen derjenigen Staaten, in welchen nach einer im Reichs-Gesetzblatte enthaltenen Bekanntmachung die Gegenseitigkeit verbürgt ist.

§ 3. Auf die Erteilung des Patentes hat derjenige **Anspruch,** welcher die Erfindung zuerst nach Mafsgabe dieses Gesetzes angemeldet hat. Eine spätere Anmeldung kann den Anspruch auf ein Patent nicht begründen, wenn die Erfindung Gegenstand des Patentes des früheren Anmelders ist. Trifft diese Voraussetzung teilweise zu, so hat der spätere Anmelder nur Anspruch auf Erteilung eines Patentes in entsprechender Beschränkung.

Ein Anspruch des Patentsuchers auf Erteilung des Patentes findet nicht statt, wenn der wesentliche Inhalt seiner Anmeldung den Beschreibungen, Zeichnungen, Modellen, Gerätschaften oder Einrichtungen eines anderen oder einem von diesem angewendeten Verfahren ohne Einwilligung desselben entnommen und von dem letzteren aus diesem Grunde Einspruch erhoben ist. Hat der Einspruch die Zurücknahme oder Zurückweisung der Anmeldung zur Folge, so kann der Einsprechende, falls er innerhalb eines Monates seit Mitteilung des hierauf bezüglichen Bescheides des Patentamtes die Erfindung seinerseits anmeldet, verlangen, dafs als Tag seiner Anmeldung der Tag vor Bekanntmachung der früheren Anmeldung festgesetzt werde.

§ 4. Das Patent hat die **Wirkung,** dafs der Patentinhaber ausschliefslich befugt ist gewerbsmäfsig den Gegenstand der Erfindung herzustellen, in Verkehr zu bringen, feilzuhalten oder zu gebrauchen. Ist das Patent für ein Verfahren erteilt, so erstrekt sich die Wirkung auch auf die durch das Verfahren unmittelbar hergestellten Erzeugnisse.

§ 5. Die Wirkung des Patentes tritt gegen denjenigen nicht ein, welcher zurzeit der Anmeldung bereits im Inlande die Erfindung in Benutzung genommen oder die zur Benutzung erforderlichen Veranstaltungen getroffen hatte. Derselbe ist befugt, die Erfindung für die Bedürfnisse seines eigenen Betriebes in eigenen oder fremden Werkstätten auszunutzen. Diese Befugnis kann nur zusammen mit dem Betriebe vererbt oder veräufsert werden.

Die Wirkung des Patentes tritt ferner insoweit nicht ein, als die Erfindung nach Bestimmung des Reichskanzlers für das Heer oder für die Flotte oder sonst im Interesse der öffentlichen Wohlfahrt benutzt werden soll. Doch hat der Patentinhaber in diesem Falle gegenüber dem Reiche oder dem Staate, welcher in seinem besonderen Interesse die Beschränkung des Patentes beantragt hat, Anspruch auf angemessene Vergütung, welche in Ermanglung einer Verständigung im Rechtswege festgesetzt wird.

Auf Einrichtungen an Fahrzeugen, welche nur vorübergehend in das Inland gelangen, erstreckt sich die Wirkung des Patentes nicht.

§ 6. Der Anspruch auf Erteilung des Patentes und das Recht aus dem Patente gehen auf die Erben über. Der Anspruch und das Recht können beschränkt oder unbeschränkt durch Vertrag oder durch Verfügung von Todeswegen auf andere übertragen werden.

§ 7. **Die Dauer des Patentes ist fünfzehn Jahre;** der Lauf dieser Zeit beginnt mit dem auf die Anmeldung der Erfindung folgenden Tage. Bezweckt eine Erfindung die Verbesserung oder sonstige weitere Ausbildung einer anderen, zu gunsten des Patentsuchers durch ein Patent geschützten Erfindung, so kann dieser die Erteilung eines **Zusatzpatentes** nachsuchen, welches mit dem Patente für die ältere Erfindung sein Ende erreicht.

Wird durch die Erklärung der Nichtigkeit des Hauptpatentes ein Zusatzpatent zu einem selbständigen Patent, so bestimmt sich dessen Dauer und der Fälligkeitstag der Gebühren nach dem Anfangstage des Hauptpatentes. Für den Jahresbetrag der Gebühren ist der Anfangstag des Zusatzpatentes mafsgebend. Dabei gilt als erstes Patentjahr der Zeitabschnitt zwischen dem Tage der Anmeldung des Zusatzpatentes und dem nächstfolgenden Jahrestage des Anfangs des Hauptpatentes.

§ 8. Für jedes Patent ist vor der Erteilung eine **Gebühr von dreifsig Mark** zu entrichten (§ 24 Abs. 1).

Mit Ausnahme der Zusatzpatente (§ 7) ist auferdem für das Patent mit Beginn des zweiten und jedes folgenden Jahres der Dauer eine Gebühr zu entrichten, welche das erste Mal fünfzig Mark beträgt und weiterhin jedes Jahr um fünfzig Mark steigt.

Diese Gebühr (Ab. 2) ist innerhalb sechs Wochen nach der Fälligkeit zu entrichten. Nach Ablauf der Frist kann die Zahlung nur unter Zuschlag einer Gebühr von zehn Mark innerhalb weiterer sechs Wochen erfolgen.

Einem Patentinhaber, welcher seine Bedürftigkeit nachweist, können die Gebühren für das erste und zweite Jahr der Dauer des Patentes bis zum dritten Jahre gestundet und, wenn das Patent im dritten Jahre erlischt, erlassen werden.

Die Zahlung der Gebühren kann vor Eintritt der Fälligkeit erfolgen. Wird auf das Patent verzichtet oder dasselbe für nichtig erklärt (§ 10) oder zurückgenommen (§ 11), so erfolgt die Rückzahlung der nicht fällig gewordenen Gebühren.

§ 9. Das Patent **erlischt,** wenn der Patentinhaber auf dasselbe verzichtet, oder wenn die Gebühren nicht rechtzeitig bei der Kasse des Patentamtes oder zur Überweisung an diese bei einer Postanstalt im Gebiete des Deutschen Reiches eingezahlt sind.

§ 10. Das Patent wird für **nichtig erklärt,** wenn sich ergibt:

1. dafs der Gegenstand nach §§ 1 und 2 nicht patentfähig war,

2. dafs die Erfindung Gegenstand des Patentes eines früheren Anmelders ist,

3. dafs der wesentliche Inhalt der Anmeldung den Beschreibungen, Zeichnungen, Modellen, Gerätschaften oder Einrichtungen eines anderen oder einem von diesem angewendeten Verfahren ohne Einwilligung desselben entnommen war.

Trifft eine dieser Voraussetzungen (1 bis 3) nur teilweise zu, so erfolgt die Erklärung der Nichtigkeit durch entsprechende Beschränkung des Patentes.

§ 11. Das Patent kann nach Ablauf von drei Jahren, von dem Tage der über die Erteilung des Patentes erfolgten Bekanntmachung (§ 27 Abs. 1) gerechnet, **zurückgenommen** werden:

1. wenn der Patentinhaber es unterläfst, im Inlande die Erfindung in angemessenem Umfange zur Ausführung zu bringen, oder doch alles zu tun, was erforderlich ist, um diese Ausführung zu sichern;

2. wenn im öffentlichen Interesse die Erteilung der Erlaubnis zur Benutzung der Erfindung an andere geboten erscheint, der Patentinhaber aber gleichwohl sich weigert, diese Erlaubnis gegen angemessene Vergütung und genügende Sicherstellung zu erteilen.

§ 12. **Wer nicht im Inlande wohnt,** kann den Anspruch auf die Erteilung eines Patentes und das Recht aus dem Patente nur geltend machen, wenn er im Inlande einen **Vertreter** bestellt hat. Der letztere ist zur Vertretung in dem nach Mafsgabe dieses Gesetzes stattfindenden Verfahren, sowie in den das Patent betreffenden bürgerlichen Rechtsstreitigkeiten und zur Stellung von Strafanträgen befugt. Der Ort, wo der Vertreter seinen Wohnsitz hat, und in Ermanglung eines solchen der Ort, wo das Patentamt seinen Sitz hat, gilt im Sinne des § 24 der Reichs-Zivilprozefs-Ordnung als der Ort, wo sich der Vermögensgegenstand befindet.

§ 13. Die Erteilung, die Erklärung der Nichtigkeit und die Zurücknahme der Patente erfolgt durch das **Kaiserl. Patentamt.**

Das Patentamt hat seinen Sitz in Berlin (SW., Gitschinerstrafse). Es besteht aus einem Präsidenten, aus Mitgliedern, welche die Befähigung zum Richteramt oder zum höheren Verwaltungsdienste besitzen (rechtskundige Mitglieder), und aus Mitgliedern, welche in einem Zweige der Technik sachverständig sind (technische Mitglieder) Die Mitglieder werden, u. zw. der Präsident auf Vorschlag des Bundesrates, vom Kaiser ernannt. Die Berufung der rechtskundigen Mitglieder erfolgt, wenn sie im Reichs- oder Staatsdienst ein Amt bekleiden, auf die Dauer dieses Amtes, andernfalls auf Lebenszeit. Die Berufung der technischen Mitglieder erfolgt entweder auf Lebenszeit oder auf fünf Jahre.

§ 19. Bei dem Patentamte wird eine **Rolle** geführt, welche den Gegenstand und die Dauer der erteilten Patente, sowie den Namen und Wohnort der Patentinhaber und ihrer bei Anmeldung der Erfindung etwa bestellten Vertreter angibt. Der Anfang, der Ablauf, das Erlöschen, die Erklärung der Nichtigkeit und die Zurücknahme der Patente sind, unter gleichzeitiger Bekanntmachung durch den Reichs-Anzeiger, in der Rolle zu vermerken.

Tritt in der Person des Patentinhabers oder seines Vertreters eine Aenderung ein, so wird dieselbe, wenn sie in beweisender Form zur Kenntnis des Patentamtes gebracht ist, ebenfalls in der Rolle vermerkt und durch den Reichs-Anzeiger veröffentlicht. Solange dies nicht geschehen ist, bleiben der frühere Patentinhaber und sein früherer Vertreter nach Mafsgabe dieses Gesetzes berechtigt und verpflichtet.

Die Einsicht der Rolle, der Beschreibungen, Zeichnungen, Modelle und Probestücke, auf Grund deren die Erteilung der Patente erfolgt ist, steht, soweit es sich nicht um ein im Namen der Reichsverwaltung für die Zwecke des Heeres oder der Flotte genommenes Patent handelt, jedermann frei.

§ 20. Die **Anmeldung** einer Erfindung behufs Erteilung eines Patentes geschieht schriftlich bei dem Patentamte. Für jede Erfindung ist eine besondere Anmeldung erforderlich. Die Anmeldung mufs den Antrag auf Erteilung des Patentes enthalten und in dem Antrage den Gegenstand, der durch das Patent geschützt werden soll, genau bezeichnen. In einer Anlage ist die Erfindung dergestalt zu beschreiben, dafs danach die Benutzung derselben durch andere Sachverständige möglich erscheint. Am Schlusse der Beschreibung ist dasjenige anzugeben, was als patentfähig unter Schutz gestellt werden soll (Patentanspruch). Auch sind die erforderlichen Zeichnungen, bildlichen Darstellungen, Modelle und Probestücke beizufügen.

Das Patentamt erläfst Bestimmungen über die sonstigen Erfordernisse der Anmeldung. [Diese Bestimmungen s. unter **b**, S. 906.]

Bis zu dem Beschlusse über die Bekanntmachung der Anmeldung sind Abänderungen der darin enthaltenen Angaben zulässig. — Gleichzeitig mit der Anmeldung sind für die Kosten des Verfahrens **zwanzig Mark** zu zahlen.

§ 21. Die Anmeldung unterliegt einer **Vorprüfung** durch ein Mitglied der Anmeldeabteilung. Erscheint hierbei die Anmeldung als den vorgeschriebenen Anforderungen (§ 20) nicht genügend, so wird durch **Vorbescheid** der Patentsucher aufgefordert, die Mängel innerhalb einer bestimmten Frist zu beseitigen.

Insoweit die Vorprüfung ergibt, dafs eine nach §§ 1, 2 und 3 Abs. 1 patentfähige Erfindung nicht vorliegt, wird der Patentsucher hiervon unter Angabe der Gründe mit der Aufforderung benachrichtigt, sich binnen einer bestimmten Frist zu äufsern. Erklärt sich der Patentsucher auf den Vorbescheid nicht rechtzeitig, so gilt die Anmeldung als zurückgenommen; erklärt er sich innerhalb der Frist, so fafst die Anmeldeabteilung Beschlufs.

§ 22. Ist durch die Anmeldung den vorgeschriebenen Anforderungen (§ 20) **nicht genügt**, oder ergibt sich, dafs eine nach §§ 1, 2 und 3 Abs. 1 patentfähige Erfindung nicht vorliegt, so wird die Anmeldung zurückgewiesen.

Soll die Zurückweisung auf Grund von Umständen erfolgen, welche nicht bereits durch den Vorbescheid (§ 21) dem Patentsucher mitgeteilt waren, so ist demselben vorher Gelegenheit zu geben, sich über diese Umstände binnen einer bestimmten Frist zu äufsern.

§ 23. Erachtet das Patentamt die Anmeldung für gehörig erfolgt und die Erteilung eines Patentes nicht für ausgeschlossen, so beschliefst es die **Bekanntmachung** der Anmeldung. Mit der Bekanntmachung treten für den Gegenstand der Anmeldung zugunsten des Patentsuchers einstweilen die gesetzlichen Wirkungen des Patentes ein (§§ 4 und 5).

Die Bekanntmachung geschieht in der Weise, dafs der Name des Patentsuchers und der wesentliche Inhalt des in seiner Anmeldung enthaltenen Antrages durch den Reichs-Anzeiger einmal veröffentlicht wird. Mit der Veröffentlichung ist die Anzeige zu verbinden, dafs der Gegenstand der Anmeldung einstweilen gegen unbefugte Benutzung geschützt ist.

Gleichzeitig ist die Anmeldung mit sämtlichen Beilagen bei dem Patentamte zur Einsicht für jedermann auszulegen.

Die Bekanntmachung kann auf Antrag des Patentsuchers auf die Dauer von höchstens sechs Monaten, vom Tage des Beschlusses über die Bekanntmachung an gerechnet, ausgesetzt werden. Bis zur Dauer von 3 Monaten darf die Aussetzung nicht versagt werden.

Handelt es sich um ein im Namen der Reichsverwaltung für die Zwecke des Heeres oder der Flotte nachgesuchtes Patent, so erfolgt auf Antrag die Patenterteilung ohne jede Bekanntmachung. In diesem Falle unterbleibt auch die Eintragung in die Patentrolle.

§ 24. Innerhalb der Frist von zwei Monaten nach der Veröffentlichung (§ 23) ist die erste Jahresgebühr (§ 8 Abs. 1) einzuzahlen. Erfolgt die Einzahlung nicht binnen dieser Frist, so gilt die Anmeldung als zurückgenommen.

Innerhalb der gleichen Frist kann gegen die Erteilung des Patentes **Einspruch erhoben** werden. Der Einspruch mufs schriftlich erfolgen und mit Gründen versehen sein. Er kann nur auf die Behauptung gestützt werden, dafs der Gegenstand nach §§ 1 und 2 nicht patentfähig sei, oder dafs dem Patentsucher ein Anspruch auf das Patent nach § 3 nicht zustehe. Im Falle des § 3 Abs. 2 ist nur der Verletzte zum Einspruch berechtigt.

Nach Ablauf der Frist hat das Patentamt über die Erteilung des Patentes Beschlufs zu fassen.

§ 25. Bei der Vorprüfung und in dem Verfahren vor der Anmeldeabteilung kann jederzeit die Ladung und Anhörung der Beteiligten, die Vernehmung von Zeugen und Sachverständigen, sowie die Vornahme sonstiger zur Aufklärung der Sache erforderlichen Ermittlungen angeordnet werden.

§ 26. Gegen den Beschlufs, durch welchen die Anmeldung zurückgewiesen wird, kann der Patentsucher, und gegen den Beschlufs, durch welchen über die Erteilung des Patentes entschieden wird, der Patentsucher oder der Einsprechende innerhalb eines Monates nach der Zustellung **Beschwerde** einlegen. Mit der Einlegung der Beschwerde sind für die Kosten des Beschwerdeverfahrens zwanzig Mark zu zahlen; erfolgt die Zahlung nicht, so gilt die Beschwerde als nicht erhoben.

Ist die Beschwerde an sich nicht statthaft, oder ist dieselbe verspätet eingelegt, so wird sie als unzulässig verworfen.

Wird die Beschwerde für zulässig befunden, so richtet sich das weitere Verfahren nach § 25. Die Ladung und Anhörung der Beteiligten mufs auf Antrag eines derselben erfolgen. Dieser Antrag kann nur abgelehnt werden, wenn die Ladung des Antragstellers in dem Verfahren vor der Anmeldeabteilung bereits erfolgt war.

Soll die Entscheidung über die Beschwerde auf Grund anderer als der in dem angegriffenen Beschlusse berücksichtigten Umstände erfolgen, so ist den Beteiligten zuvor Gelegenheit zu geben, sich hierüber zu äufsern.

Das Patentamt kann nach freiem Ermessen bestimmen, inwieweit einem Beteiligten im Falle des Unterliegens die Kosten des Beschwerdeverfahrens zur Last fallen, sowie anordnen, dafs dem Beteiligten, dessen Beschwerde für gerechtfertigt befunden ist, die Gebühr (Abs. 1) zurückgezahlt wird.

§ 27. Ist die **Erteilung** des Patentes endgültig beschlossen, so erläfst das Patentamt darüber durch den Reichs-Anzeiger eine Bekanntmachung und fertigt demnächst für den Patentinhaber eine **Urkunde** aus.

Wird die Anmeldung nach der Veröffentlichung (§ 23) **zurückgenommen** oder wird das Patent **versagt**, so ist dies ebenfalls bekannt zu machen. Die eingezahlte Jahresgebühr wird in diesen Fällen erstattet. Mit der Versagung des Patentes gelten die Wirkungen des einstweiligen Schutzes als nicht eingetreten.

§ 28. Die Einleitung des Verfahrens wegen Erklärung der Nichtigkeit oder wegen Zurücknahme des Patentes erfolgt nur auf Antrag.

Im Falle des § 10 Nr. 3 ist nur der Verletzte zu dem Antrage berechtigt.

Im Falle des § 10 Nr. 1 ist nach Ablauf von fünf Jahren, von dem Tage der über die Erteilung des Patentes erfolgten Bekanntmachung (§ 27 Abs. 1) gerechnet, der Antrag unstatthaft.

Der Antrag ist schriftlich an das Patentamt zu richten und hat die Tatsachen anzugeben, auf welche er gestützt wird. Mit dem Antrage ist eine Gebühr von fünfzig Mark zu zahlen. Erfolgt die Zahlung nicht, so gilt der Antrag als nicht gestellt. Die Gebühr wird erstattet, wenn das Verfahren ohne Anhörung der Beteiligten beendet wird.

Wohnt der Antragsteller im Auslande, so hat er dem Gegner auf dessen Verlangen Sicherheit wegen der Kosten des Verfahrens zu leisten. Die Höhe der Sicherheit wird von dem Patentamte nach freiem Ermessen festgesetzt. Dem Antragsteller wird bei Anordnung der Sicherheitsleistung eine Frist bestimmt, binnen welcher die Sicherheit zu leisten ist. Erfolgt die Sicherheitsleistung nicht vor Ablauf der Frist, so gilt der Antrag als zurückgenommen.

§ 29. Nachdem die Einleitung des Verfahrens verfügt ist, fordert das Patentamt den Patentinhaber unter Mitteilung des Antrages auf, sich über denselben innerhalb eines Monates zu erklären.

Erklärt der Patentinhaber binnen der Frist sich nicht, so kann ohne Ladung und Anhörung der Beteiligten sofort nach dem Antrage entschieden und bei dieser Entscheidung jede von dem Antragsteller behauptete Tatsache für erwiesen angenommen werden.

§ 30. Widerspricht der Patentinhaber rechtzeitig, oder wird im Falle des § 29 Abs. 2 nicht sofort nach dem Antrage entschieden, so trifft das Patentamt, u. zw. im ersteren Falle unter Mitteilung des Widerspruches an den Antragsteller, die zur Aufklärung der Sache erforderlichen Verfügungen. Es kann die Vernehmung von Zeugen und Sachverständigen anordnen. Auf dieselben finden die Vorschriften der Reichs-Zivilprozeſs-Ordnung entsprechende Anwendung. Die Beweisverhandlungen sind unter Zuziehung eines beeidigten Protokollführers aufzunehmen.

Die Entscheidung erfolgt nach Ladung und Anhörung der Beteiligten.

Wird die Zurücknahme des Patentes auf Grund des § 11 Nr. 2 beantragt, so muſs der diesem Antrage entsprechenden Entscheidung eine Androhung der Zurücknahme unter Angabe von Gründen und unter Festsetzung einer angemessenen Frist vorausgehen.

§ 31. In der Entscheidung (§§ 29, 30) hat das Patentamt nach freiem Ermessen zu bestimmen, zu welchem Anteile die Kosten des Verfahrens den Beteiligten zur Last fallen.

§ 33. Gegen die Entscheidung des Patentamtes (§§ 29, 30) ist die **Berufung** zulässig. Die Berufung geht an das Reichsgericht. Sie ist binnen sechs Wochen nach der Zustellung bei dem Patentamte schriftlich anzumelden und zu begründen.

§ 34. In betreff der Geschäftssprache vor dem Patentamte finden die Bestimmungen des Gerichtsverfassungsgesetzes über die Gerichtssprache entsprechende Anwendung. Eingaben, welche nicht in deutscher Sprache abgefaſst sind, werden nicht berücksichtigt.

§ 35. Wer wissentlich oder aus grober Fahrlässigkeit den Bestimmungen der §§ 4 und 5 zuwider eine Erfindung in Benutzung nimmt, ist dem Verletzten zur **Entschädigung** verpflichtet.

Handelt es sich um eine Erfindung, welche ein Verfahren zur Herstellung eines neuen Stoffes zum Gegenstande hat, so gilt bis zum Beweise des Gegenteiles jeder Stoff von gleicher Beschaffenheit als nach dem patentierten Verfahren hergestellt.

§ 36. Wer wissentlich den Bestimmungen der §§ 4 und 5 zuwider eine Erfindung in Benutzung nimmt, wird mit Geldstrafe bis zu 5000 Mark oder mit Gefängnis bis zu einem Jahre bestraft. — Die Strafverfolgung tritt nur auf Antrag ein. Die Zurücknahme des Antrages ist zulässig.

Wird auf Strafe erkannt, so ist zugleich dem Verletzten die Befugnis zuzusprechen, die Verurteilung auf Kosten des Verurteilten öffentlich bekannt zu machen. Die Art der Bekanntmachung, sowie die Frist zu derselben ist im Urteile zu bestimmen.

§ 37. Statt jeder aus diesem Gesetze entspringenden Entschädigung kann auf Verlangen des Beschädigten (neben der Strafe) auf eine an ihn zu erlegende Buſse bis zum Betrage von 10 000 Mark erkannt werden. Für diese Buſse haften die zu derselben Verurteilten als Gesamtschuldner. — Eine erkannte Buſse schlieſst die Geltendmachung eines weiteren Entschädigungsanspruches aus.

§ 39. Die Klagen wegen Verletzung des Patentrechtes verjähren rücksichtlich jeder einzelnen dieselbe begründenden Handlung in drei Jahren.

§ 40. Mit Geldstrafe bis zu 1000 Mark wird bestraft:

1. wer Gegenstände oder deren Verpackung mit einer Bezeichnung versieht, welche geeignet ist, den Irrtum zu erregen, daſs die Gegenstände durch ein Patent nach Maſsgabe dieses Gesetzes geschützt seien;

2. wer in öffentlichen Anzeigen auf Aushängeschildern, auf Empfehlungskarten oder in ähnlichen Kundgebungen eine Bezeichnung anwendet, welche geeignet ist, den Irrtum zu erregen, daſs die darin erwähnten Gegenstände durch ein Patent nach Maſsgabe dieses Gesetzes geschützt seien.

b. Bestimmungen über die Anmeldung von Erfindungen.

(Bekanntmachung des Kaiserl. Patentamtes vom 22. November 1898.)

Auf Grund des § 20 Abs. 2 des Patentgesetzes vom 7. April 1891 (s. S. 949) werden die nachfolgenden Bestimmungen über die Erfordernisse einer Patentanmeldung erlassen.

§ 1. Die Anmeldung einer Erfindung behufs Erteilung eines Patentes geschieht in der Form eines schriftlichen Gesuches, dem die sonst erforderlichen Stücke als Anlagen beizufügen sind.

§ 2. Das Gesuch mufs enthalten:

a) die Angabe des Namens und des Wohnortes oder der Hauptniederlassung des Anmelders;
b) eine für die Veröffentlichung (§ 23 Abs. 2 des Patentgesetzes) geeignete Benennung der Erfindung;
c) die Erklärung, dafs für die Erfindung ein Patent nachgesucht werde. Bei Zusatzmeldungen ist die Angabe des Hauptpatentes nach Gegenstand und Nummer oder der Hauptanmeldung nach Gegenstand und Aktenzeichen erforderlich;
d) die Erklärung, dafs die gesetzliche Gebühr von zwanzig Mark an die Kasse des Kaiserl. Patentamtes gezahlt worden ist oder gleichzeitig mit der Anmeldung gezahlt werden soll;
e) die Aufführung der Anlagen unter Angabe ihrer Nummer und ihres Inhaltes;
f) falls der Anmelder einen Vertreter bestellt hat, die Angabe der Person, der Berufstellung und des Wohnortes des Vertreters; als Anlage ist eine Vollmacht beizufügen (§ 28 der Kaiserl. Verordnung vom 11. Juli 1891);
g) die Unterschrift des Anmelders oder seines Vertreters.

§ 3. Die Beschreibung ist in zwei Ausfertigungen einzureichen. Dasselbe gilt für alle Nachträge. Die Schriftstücke, welche die Beschreibung bilden, müssen sowohl am Rande als auch zwischen den Zeilen ausreichenden Raum für Zusätze und Aenderungen frei lassen.

Mafse, Gewichte, sowie elektrische Einheiten müssen nach den gesetzlichen Vorschriften Temperaturen nach Celsius angegeben werden. Bei chemischen Formeln sind die in Deutschland üblichen Atomgewichtszeichen und Molekularformeln anzuwenden.

Die Einfügung von Figuren in die Beschreibung ist nicht zulässig.

§ 4. Die für die Veranschaulichung der Erfindung bestimmten Zeichnungen sind auf das zur Klarstellung der Erfindung Erforderliche zu beschränken. Sie sind in zwei Ausfertigungen einzureichen.

a) Für die Hauptzeichnung ist weifses, starkes und glattes Zeichenpapier, sogen. Kartonpapier, für die Nebenzeichnung Zeichenleinwand zu verwenden.

Das Blatt der Hauptzeichnung soll 33 cm hoch und 21 cm breit sein. In Ausnahmefällen ist, falls die Deutlichkeit es erfordert, ein Blatt in der Höhe von 33 cm und in der Breite von 42 cm zulässig. Die Nebenzeichnung mufs bei beliebiger Breite 33 cm hoch sein. Für die Hauptzeichnung wie für die Nebenzeichnung ist die Verwendung mehrerer Blätter zulässig.

b) Die Figuren und Schriftzeichen sind in tiefschwarzen, kräftigen, scharf begrenzten Linien auszuführen. Auf der Hauptzeichnung sind Querschnitte entweder tiefschwarz anzulegen oder durch Schrägstriche in tiefschwarzen Linien zum Ausdruck zu bringen. Ist zur Darstellung unebener Flächen ausnahmsweise eine Schattierung erforderlich, so darf sie ebenfalls nur in tiefschwarzen Linien ausgeführt werden. Die Anwendung bunter Farben ist bei der Hauptzeichnung unzulässig.

Alle auf den Zeichnungen angebrachten Schriftzeichen müssen einfach und deutlich sein. Die Hauptzeichnung mufs sich zur photographischen Verkleinerung eignen.

c) Die einzelnen Figuren müssen durch einen angemessenen Zwischenraum voneinander getrennt sein.

d) Die Figuren sind nach ihrer Stellung fortlaufend und ohne Rücksicht auf die Anzahl der Blätter mit Zahlen zu versehen.

e) Erläuterungen sind in die Zeichnung nicht aufzunehmen. Ausgenommen sind kurze Angaben wie „Wasser“, „Dampf“, Schnitt nach A—B (Fig. 3)“, sowie Inschriften, die auf den dargestellten Gegenständen angebracht werden sollen, z. B. „offen“, „zu“.

f) In der rechten unteren Ecke jedes Blattes ist der Name des Anmelders anzugeben.

g) Die Hauptzeichnungen dürfen weder gefaltet noch gerollt werden, sondern sind in glattem Zustande vorzulegen.

§ 5. Die für die Veranschaulichung der Erfindung bestimmten Modelle und Probestücke brauchen nur in einer Ausführung eingereicht zu werden.

Proben sind stets einzureichen zu den Anmeldungen, welche die Herstellung neuer chemischer Stoffe betreffen. Ausgenommen sind explosive und leicht entzündliche Stoffe, deren Einsendung nur auf besondere Aufforderung zulässig ist.

Bildet ein chemisches Verfahren von allgemeiner Anwendbarkeit, nach dem ganze Gruppen von Stoffen hergestellt werden können, den Gegenstand der Anmeldung, so sind Proben der typischen Vertreter der Gruppen einzureichen. Werden jedoch besondere Ausführungsformen eines chemischen Verfahrens unter Aufzählung der einzelnen nach ihnen entstehenden Stoffe beansprucht, so sind die Stoffe sämtlich mit Proben zu belegen. Bei Farbstoffen sind aufserdem Ausfärbungen auf Wolle, Seide oder Baumwolle in je einer Ausführung beizufügen.

Ueber die Beschaffenheit der Modelle und Probestücke gilt folgendes:

a) Modelle und Probestücke, die leicht beschädigt werden können, sind in festen Hüllen einzureichen. Gegenstände von kleinem Umfange sind auf steifem Papier zu befestigen.

b) Proben von giftigen, ätzenden, explosiven oder leicht entzündlichen Stoffen sind auf der Umhüllung und, soweit möglich, auf dem Gegenstande selbst durch eine deutliche Aufschrift als solche zu kennzeichnen.

c) Proben chemischer Stoffe sind in Glasflaschen ohne vorspringenden Fufs von etwa 3 cm äufserem Durchmesser und 8 cm Gesamthöhe einzureichen; die Flaschen sind mit einem haltbaren Siegel zu verschliefsen und mit einer dauerhaft befestigten Inhaltsangabe zu versehen. Den Proben ist ein nach der Beschreibung oder dem Patentanspruche geordnetes Verzeichnis beizulegen.

d) Ausfärbungen müssen möglichst flach auf steifem Papier von 33 cm Höhe und 21 cm Breite dauerhaft befestigt und mit genauen, den Angaben der Beschreibung entsprechenden Aufschriften versehen sein. Den Ausfärbungen ist eine Beschreibung des angewendeten Färbeverfahrens beizulegen mit genauen Angaben über den Gehalt der Flotte an Farbstoff, die etwa gebrauchten Beizen, die Temperatur usw., sowie auch darüber, ob die gebrauchte Flotte erschöpft war oder erheblichere Mengen von Farbstoff zurückgehalten hat.

§ 6. Die Anlagen des Gesuches müssen mit einer ihre Zugehörigkeit zur Anmeldung kennzeichnenden Aufschrift versehen sein. Dasselbe gilt für Modelle und Probestücke.

Schriftstücke, die zur Mitteilung an andere Personen bestimmt sind, sind in der dazu erforderlichen Zahl von Ausfertigungen einzureichen.

Zu allen Schriftstücken ist dauerhaftes, nicht durchscheinendes weifses Papier, zu Schriftstücken, die Anträge enthalten oder zur Beschreibung der Erfindung gehören, Papier in Seitengröfse von 33 cm zu 21 cm zu verwenden.

Alle Schriftstücke müssen leicht lesbar sein. Die Schriftzüge müssen in dunkler Farbe ausgeführt sein. Schriftstücke, die mittels der Schreibmaschine hergestellt sind, müssen deutliche Druckzeichen und zwischen den einzelnen Buchstaben, Worten und Zeilen einen angemessenen Zwischenraum aufweisen.

Auf den später eingereichten Anmeldestücken ist der Name des Anmelders und das Aktenzeichen anzugeben.

Erläuterungen zu den vorstehenden Bestimmungen.

1. Gebühr.

Die Anmeldegebühr ist zweckmäfsig entweder unmittelbar bei der Kasse des Kaiserl. Patentamtes einzuzahlen oder unter genauer Angabe der Anmeldung, für die das Geld bestimmt ist, durch Postanweisung zu übersenden.

Die Beifügung baren Geldes als Anlage der Anmeldung ist nicht erwünscht. Wird das Geld gleichwohl beigefügt, so ist darüber in dem Gesuche ein deutlicher Vermerk in Rotschrift zu machen. Enthält eine Sendung das Geld für mehrere Anmeldungen, so ist ein besonderes Verzeichnis über die Zugehörigkeit des Geldes beizufügen.

Anmerkung. Eine Stundung oder ein Erlafs der Anmeldegebühr ist gesetzlic unzulässig.

2. Gesuch.

a) Ein Antrag auf Aussetzung der Bekanntmachung (§ 23 Abs. 4 des Patentgesetzes) ist entweder in einem besonderen Schriftstücke einzureichen oder, falls er mit dem Anmeldegesuche oder mit anderen Erklärungen verbunden wird, augenfällig, z. B. durch Unterstreichen oder in Rotschrift, hervorzuheben.

Für die Aussetzung der Bekanntmachung auf länger als drei Monate bedarf es einer Begründung. Es empfiehlt sich, die Begründung erst gegen Ende der ersten Frist beizubringen.

b) Falls der Anmelder die Rechte aus einer früheren Anmeldung in einem Staate, mit dem das Deutsche Reich einen entsprechenden Vertrag geschlossen hat, geltend machen will, soll dieser Anspruch gleichfalls in das Gesuch aufgenommen werden.

c) Soll für den Fall der Zurückweisung einer Patentanmeldung derselbe Gegenstand in die Rolle für Gebrauchsmuster eingetragen werden, so bedarf es hierzu einer besonderen an das „Kaiserliche Patentamt, Anmeldestelle für Gebrauchsmuster“ zu richtenden Anmeldung.

d) Zur Angabe der Person des Anmelders gehört, dafs jeder Zweifel darüber ausgeschlossen wird, ob das Patent von Einzelpersonen oder von einer Gesellschaft, ob von einem Manne oder von einer Frau, ob auf den bürgerlichen Namen oder auf die kaufmännische Firma nachgesucht wird. Bei Einzelpersonen ist der Rufname, bei Frauen aufserdem der Familienstand und der Geburtsname anzugeben.

Die Angabe des Wohnortes mufs bei gröfseren Städten auch Strafse und Hausnummer, bei kleineren Orten und bei Orten, deren Name mehrfach vorkommt, sowie in der Regel bei ausländischen Orten den Staat und Bezirk enthalten. Dies gilt auch für den Fall, dafs der Anmelder einen Vertreter bestellt hat.

e) Für den Fall der Vertretung ist zu beachten, dafs nach § 28 der Kaiserl. Verordnung vom 11. Juli 1891 die Vollmacht auf prozefsfähige mit ihrem bürgerlichen Namen bezeichnete Personen, nicht auf eine Firma auszustellen ist.

Eine Beglaubigung der Unterschrift des Anmelders unter der Vollmacht ist nur auf besonderes Erfordern des Patentamtes beizubringen.

f) Falls mehrere Personen ohne Bestellung eines gemeinsamen Vertreters anmelden, soll diejenige Person namhaft gemacht werden, der die amtlichen Verfügungen zugesandt werden sollen.

3. Beschreibung.

a) Für den Gegenstand der Erfindung ist der Gebrauchszweck anzugeben.

b) Die Beschreibung hat sich aller nicht streng zur Sache gehörigen Ausführungen zu enthalten. Sie beginnt zweckmäfsig mit der Darstellung der Aufgabe, welche durch die Erfindung gelöst werden soll. Hieran schliefst sich die Beschreibung der Erfindung im einzelnen.

Besteht die Erfindung in der Vereinigung von bekannten Einzelheiten zu einem neuen Ganzen, so hat die Beschreibung zum Ausdruck zu bringen, dafs die Einzelheiten weder als neu, noch für sich als schutzfähig angesehen werden, und dafs der Schutz sich nur auf die neue Gesamtheit beziehen soll.

Soweit Hinweise auf Bekanntes oder Geschütztes, insbesondere auf öffentliche Druckschriften oder Patente, zur klaren Abgrenzung der Erfindung erforderlich sind, sind sie gleichfalls in die Beschreibung aufzunehmen.

4. Zeichnung.

a) Auf den Nebenzeichnungen sind die Figuren und Bezeichnungen so zu stellen, dafs für den Beschauer die 33 cm-Kante aufrecht steht. Am linken und rechten Rande ist ein mindestens 3 cm breiter Raum frei zu lassen.

b) Für die einzelnen Teile der Figuren sind Bezugzeichen nur soweit zu verwenden. als ein Hinweis auf die Darstellung des betreffenden Teiles in der Beschreibung zum Verständnis der Erfindung erforderlich ist.

Dieselben Teile müssen in allen Figuren gleiche Bezugzeichen erhalten. Für verschiedene Teile dürfen die gleichen Bezugzeichen nicht verwendet werden, auch wenn die Figuren auf verschiedenen Blättern stehen. Bei Zusatzanmeldungen werden für Teile, die bereits in dem Hauptpatente sich vorfinden, die dort für diese Teile gewählten Bezugzeichen beizubehalten sein.

Für die Bezugzeichen sind die kleinen lateinischen Buchstaben (a, b, c) in einfacher, leicht lesbarer Schrift zu verwenden. Sind mehr als 25 Zeichen nötig, so sind arabische Ziffern zu verwenden. Zur Bezeichnung von Schnittlinien dienen die grofsen lateinischen Buchstaben. Winkel sind mit kleinen griechischen Buchstaben (α, β, γ) zu bezeichnen.

Die Beifügung von Strichen, Häkchen oder Ziffern zu den Bezugzeichen ist zu vermeiden. Nur wenn innerhalb derselben Figur ein Teil in mehreren Stellungen gezeichnet wird, ist, unter Beibehaltung desselben Buchstabens für alle Stellungen, die Unterscheidung durch oben rechts angebrachte Striche oder Ziffern herbeizuführen.

Ist unmittelbar bei den dargestellten Teilen kein genügender Raum für die Bezugzeichen vorhanden, so sind die Teile mit den möglichst nahe zu setzenden Zeichen durch geschwungene Linien zu verbinden.

Bewegungsrichtungen sind durch Pfeile anzudeuten, falls dadurch das Verständnis erleichtert wird. Projektions- und Mittellinien sind in Regel der wegzulassen.

5. Anspruch.

a) Der Anspruch geht zweckmäfsig von dem Gattungsbegriff aus, dem die Erfindung möglichst nahe untergeordnet ist. Dieser Gattungsbegriff wird auch der für die Veröffentlichung bestimmten Benennung der Erfindung zu Grunde zu legen sein. Zur Unterscheidung von anderen Gegenständen derselben Gattung sind in den Anspruch nur solche Bestimmungsmerkmale aufzunehmen, die für die Kennzeichnung des Wesens der Erfindung notwendig sind. Gehört der Zweck zu dieser Kennzeichnung, so ist auch er im Anspruche zu erwähnen.

b) Allgemeine Hinweise auf die Zeichnung oder Beschreibung, z. B. „wie gezeichnet und beschrieben“, sind zu vermeiden. Hauptanspruch und Nebenansprüche sind mit fortlaufenden arabischen Ziffern zu versehen.

c) In dem Anspruche eines Zusatzpatentes ist auf das Hauptpatent Bezug zu nehmen und zum Ausdruck zu bringen, was an der früheren Erfindung durch die neue Erfindung abgeändert oder ergänzt werden soll.

d) Längere Ansprüche werden zweckmäfsig der Beschreibung nicht unmittelbar angefügt, sondern als besondere Anlage in zwei Ausfertigungen eingereicht.

6. Modelle und Probestücke.

Bei der Einreichung von Modellen und Probestücken ist zu erklären, ob sie im Falle der Entbehrlichkeit zurückgegeben werden sollen oder vernichtet werden können.

Haben Modelle oder Probestücke einen besonderen Wert, so ist in dem Anschreiben hierauf hinzuweisen. Können sie schon durch ein unvorsichtiges Auspacken leicht beschädigt oder durch die Einwirkung von Licht, Feuchtigkeit u. dergl. verdorben werden, so ist die Umhüllung mit der deutlichen Aufschrift zu versehen: „Ungeöffnet in den Geschäftsgang“.

7. Verschiedenes.

a) In allen Schriftstücken sind entbehrliche Fremdwörter zu vermeiden.

b) Schriftsätze, die mehrere Seiten umfassen, sind mit Seitenzahlen zu versehen In allen Schriftsätzen ist an der linken Seite ein Raum von mindestens 5 cm für amtliche Vermerke frei zu lassen.

c) In allen Eingaben, zu denen Anlagen gehören, sind die Anlagen besonders aufzuzählen.

d) Die Sendungen an das Patentamt müssen kostenfrei eingehen. Bei Geld- und Paketsendungen ist die Bestellgebühr vom Absender im voraus zu entrichten.

e) Empfangsbescheinigungen werden in der Regel nur über Anmeldungen erteilt, u. zw. nur in einer Ausfertigung. Die Erteilung der Bescheinigung erfolgt nur dann, wenn ein Schriftstück mit folgendem Wortlaute eingesandt wird:

„Die Patentanmeldung von . . . .
. . . .
vom . . . .
auf . . . .
. . . .
ist am . . . .
hier eingegangen und unter dem Aktenzeichen . . . .
in den Geschäftsgang gegeben worden.“

Wird die Empfangsbescheinigung nicht auf der Rückseite einer Postkarte vorbereitet, so ist ein mit der Adresse des Empfängers versehener Briefumschlag beizufügen.

f) Ueber Gebührenbeträge, die mit der Post eingehen, wird nur auf besonderen Antrag des Einzahlers eine Quittung erteilt.

c. Reichsgesetz, betreffend den Schutz von Gebrauchsmustern.

(Vom 1. Juni 1891.)

[Auszug.]

§ 1. Modelle von Arbeitsgerätschaften oder Gebrauchsgegenständen oder von Teilen derselben werden, insoweit sie dem Arbeits- oder Gebrauchszwecke durch eine neue Gestaltung, Anordnung oder Vorrichtung dienen sollen, als **Gebrauchsmuster** nach Mafsgabe dieses Gesetzes geschützt.

Modelle gelten insofern nicht als neu, als sie zur Zeit der auf Grund dieses Gesetzes erfolgten Anmeldung bereits in öffentlichen Druckschriften beschrieben oder im Inlande offenkundig benutzt sind.

§ 2. Modelle, für welche der Schutz als Gebrauchsmuster verlangt wird, sind bei dem Patentamte schriftlich anzumelden.

Die Anmeldung mufs angeben, unter welcher Bezeichnung das Modell eingetragen werden und welche neue Gestaltung oder Vorrichtung dem Arbeits- oder Gebrauchszwecke dienen soll.

Jeder Anmeldung ist eine Nach- oder Abbildung des Modells beizufügen.

Ueber die sonstigen Erfordernisse der Anmeldung trifft das Patentamt Bestimmung. [Diese Bestimmungen s. unter **d.**, S. 957.]

Gleichzeitig mit der Anmeldung ist für jedes angemeldete Modell eine Gebühr von **fünfzehn Mark** einzuzahlen.

§ 3. Entspricht die Anmeldung den Anforderungen des § 2, so verfügt das Patentamt die Eintragung in die **Rolle der Gebrauchsmuster.**

Die Eintragung mufs den Namen und Wohnsitz des Anmelders, sowie die Zeit der Anmeldung angeben.

Die Eintragungen sind durch den Reichs-Anzeiger in bestimmten Fristen bekannt zu machen.

Aenderungen in der Person des Eingetragenen werden auf Antrag in der Rolle vermerkt. Die Einsicht der Rolle sowie der Anmeldungen, auf Grund deren die Eintragungen erfolgt sind, steht jedermann frei.

§ 4. Die Eintragung eines Gebrauchsmusters im Sinne des § 1 hat die **Wirkung,** dafs dem Eingetragenen ausschliefslich des Recht zusteht, gewerbsmäfsig das Muster nachzubilden, die durch Nachbildung hervorgebrachten Gerätschaften und Gegenstände in Verkehr zu bringen, feilzuhalten oder zu gebrauchen.

Das durch eine spätere Anmeldung begründete Recht darf, soweit es in das Recht des auf Grund früherer Anmeldung Eingetragenen eingreift, ohne Erlaubnis des letzteren nicht ausgeübt werden.

Wenn der wesentliche Inhalt der Eintragung den Beschreibungen, Zeichnungen, Modellen, Gerätschaften oder Einrichtungen eines anderen ohne Einwilligung desselben entnommen ist, so tritt für den Verletzten der Schutz des Gesetzes ein,

§ 5. Soweit ein nach § 4 begründetes Recht in ein Patent eingreift, dessen Anmeldung vor der Anmeldung des Modells erfolgt ist, darf der Eingetragene das Recht ohne Erlaubnis des Patentinhabers nicht ausüben.

Ingleichen darf, soweit in ein nach § 4 begründetes Recht durch ein später angemeldetes Patent eingegriffen wird, das Recht aus diesem Patente ohne Erlaubnis des Eingetragenen nicht ausgeübt werden.

§ 6. Liegen die Erfordernisse des § 1 nicht vor, so hat jedermann gegen den Eingetragenen Anspruch auf Löschung des Gebrauchsmusters.

Im Falle des § 4 Abs. 3 steht dem Verletzten ein Anspruch auf Löschung zu.

§ 7. Das durch die Eintragung begründete Recht geht auf die Erben über und kann beschränkt oder unbeschränkt durch Vertrag oder Verfügung von Todeswegen auf andere übertragen werden.

§ 8. **Die Dauer des Schutzes ist drei Jahre;** der Lauf dieser Zeit beginnt mit dem auf die Anmeldung folgenden Tage. Bei Zahlung einer weiteren Gebühr von sechzig Mark vor Ablauf der Zeit tritt eine Verlängerung der Schutzfrist um drei Jahre ein. Die Verlängerung wird in der Rolle vermerkt.

Wenn der Eingetragene während der Dauer der Frist auf den Schutz Verzicht leistet, so wird die Eintragung gelöscht. Die nicht infolge von Ablauf der Frist stattfindenden Löschungen von Eintragungen sind durch den Reichs-Anzeiger in bestimmten Fristen bekannt zu machen.

§ 9. Wer wissentlich oder aus grober Fahrlässigkeit den Bestimmungen der §§ 4 und 5 zuwider ein Gebrauchsmuster in Benutzung nimmt, ist dem Verletzten zur Entschädigung verpflichtet.

Die Klagen wegen Verletzung des Schutzrechtes verjähren rücksichtlich jeder einzelnen dieselbe begründenden Handlung in drei Jahren.

§ 10. (Wortlaut übereinstimmend mit dem des § 36 des Patentgesetzes, S. 951, wenn statt „Erfindung“ „Gebrauchsmuster“ gesetzt wird.)

§ 11. (Wortlaut übereinstimmend mit dem des § 37 des Patentgesetzes, S. 951.)

§ 13. Wer im Inlande einen Wohnsitz oder eine Niederlassung nicht hat, kann nur dann den Anspruch auf den Schutz dieses Gesetzes geltend machen, wenn in dem Staate, in welchem sein Wohnsitz oder seine Niederlassung sich befindet, nach einer im Reichsgesetzblatte enthaltenen Bekanntmachung deutsche Gebrauchsmuster einen Schutz genießen.

Wer auf Grund dieser Bestimmung eine Anmeldung bewirkt, muß gleichzeitig einen im Inlande wohnhaften **Vertreter** bestellen. Name und Wohnsitz des Vertreters werden in die Rolle eingetragen. Der eingetragene Vertreter ist zur Vertretung des Schutzberechtigten in den das Gebrauchsmuster betreffenden Rechtsstreitigkeiten und zur Stellung von Strafanträgen befugt. Der Ort, wo der Vertreter seinen Sitz hat, gilt im Sinne des § 24 der Reichs-Zivilprozeß-Ordnung als der Ort, wo der Vermögensgegenstand sich befindet.

d. Bestimmungen über die Anmeldung von Gebrauchsmustern.

(Bekanntmachung des Kaiserl. Patentamtes vom 22. November 1898, abgeändert durch Bekanntmachung vom 3. Februar 1904).

Auf Grund des § 2 Abs. 4 des Gesetzes, betreffend den Schutz von Gebrauchsmustern, vom 1. Juni 1891 (s. S. 956) werden die nachfolgenden Bestimmungen über Erfordernisse einer Gebrauchsmusteranmeldung erlassen.

§ 1. Die Anmeldung eines Modells behufs Eintragung in die Rolle für Gebrauchsmuster geschieht in der Form eines schriftlichen Gesuches, dem die sonst erforderlichen Stücke als Anlagen beizufügen sind. Für jedes Modell ist eine besondere Anmeldung erforderlich.

§ 2. Das Gesuch muß enthalten:

a) die Angabe des Namens und des Wohnortes oder der Hauptniederlassung des Anmelders;
b) eine für die Eintragung und Veröffentlichung geeignete Bezeichnung;
c) die Angabe, welche neue Gestaltung oder Vorrichtung dem Arbeits- oder Gebrauchszwecke dienen soll;
d) den Antrag, daß das Modell in die Rolle für Gebrauchsmuster eingetragen werde;
e) die Erklärung, daß die gesetzliche Gebühr von fünfzehn Mark an die Kasse des Kaiserl. Patentamtes gezahlt worden ist oder gleichzeitig mit der Anmeldung gezahlt werden soll;
f) die Aufführung der Anlagen unter Angabe ihrer Nummer und ihres Inhaltes;
g) falls der Anmelder einen Vertreter bestellt hat, die Angabe der Person, der Berufstellung und des Wohnortes des Vertreters; als Anlage ist eine Vollmacht beizufügen (§ 28 der Kaiserl. Verordnung vom 11. Juli 1891);
h) die Unterschrift des Anmelders oder seines Vertreters.

§ 3. Erachtet der Anmelder eine Beschreibung des Modells für erforderlich, so ist sie entweder in das Gesuch aufzunehmen oder als Anlage beizufügen.

§ 4. Dem Gesuche ist eine Abbildung oder eine Nachbildung des Modells beizufügen.

a) Die Abbildung ist in zwei Ausfertigungen einzureichen.

Für die Abbildung ist weißes, starkes und glattes Zeichenpapier, sogenanntes Kartonpapier, oder Zeichenleinwand zu verwenden. Das Blatt der

Abbildung auf Kartonpapier mufs 33 cm hoch und 21 cm breit sein. Das Blatt der Abbildung auf Zeichenleinwand mufs bei beliebiger Breite 33 cm hoch sein.

Die Figuren und Schriftzeichen sind in tiefschwarzen, kräftigen, scharf begrenzten Linien auszuführen.

b) Die Nachbildung braucht nur in einer Ausführung eingereicht zu werden; sie mufs sauber und dauerhaft sein und darf in Höhe, Breite und Tiefe 50 cm nicht überschreiten.

Nachbildungen, die leicht beschädigt werden können, sind in festen Hüllen einzureichen. Gegenstände von kleinem Umfange sind auf steifem Papier zu befestigen.

§ 5. Die Anlagen des Gesuches müssen mit einer ihre Zugehörigkeit zur Anmeldung kennzeichnenden Aufschrift versehen sein. Dasselbe gilt für die Nachbildungen.

Zu allen Schriftstücken ist dauerhaftes, nicht durchscheinendes, weifses Papier, zu Schriftstücken, die Anträge enthalten oder die Anmeldung selbst betreffen, Papier in der Seitengröfse von 33 cm zu 21 cm zu verwenden.

Alle Schriftstücke müssen leicht lesbar sein. Die Schriftzüge müssen in dunkler Farbe ausgeführt sein. Schriftstücke, die mittels der Schreibmaschine hergestellt sind, müssen deutliche Druckzeichen und zwischen den einzelnen Buchstaben, Worten und Zeilen einen angemessenen Zwischenraum aufweisen.

§ 6. Die die Anmeldung bildenden Schriftstücke müssen in doppelter Ausfertigung eingereicht werden. Auf den nachträglich eingereichten Anmeldestücken ist der Name des Anmelders und das Aktenzeichen anzugeben.

Erläuterungen zu den vorstehenden Bestimmungen.

1. Gebühr.

(Wortlaut wie unter 1. auf S. 953.)

Anmerkung. Eine Stundung oder ein Erlafs der Anmeldegebühr ist gesetzlich unzulässig. Dasselbe gilt hinsichtlich der Gebühr für die Verlängerung der Schutzfrist (§ 8 Abs. 1 des Gesetzes).

2. Gesuch.

a) Ein Antrag auf Aussetzung der Eintragung und Bekanntmachung wird entweder in einem besonderen Schriftstücke einzureichen oder, falls er mit dem Anmeldegesuche oder mit anderen Erklärungen verbunden wird, augenfällig, z. B. durch Unterstreichen oder in Rotschrift, hervorzuheben sein.

b) Der Antrag auf Aussetzung der Eintragung und Bekanntmachung ist zu begründen. Dem Antrage kann der Regel nach nur mit Rücksicht auf eine gleichzeitige Patentanmeldung im Inlande oder im Auslande entsprochen werden. Eine Aussetzung der Bekanntmachung ohne gleichzeitige Aussetzung der Eintragung ist nicht zulässig.

c) Die Aussetzung der Eintragung mit Rücksicht auf Anmeldungen im Auslande kann zunächst nur auf die Dauer von höchstens drei Monaten bewilligt werden. In besonderen Ausnahmefällen kann diese Frist auf sechs Monate erstreckt werden; in einem solchen Falle ist der Antrag nebst eingehender Begründung erst gegen Ende der ersten Frist vorzulegen.

d) Soll die Aussetzung der Eintragung mit Rücksicht auf eine gleichzeitig beim Kaiserl. Patentamte eingereichte Patentanmeldung erfolgen, so hat der Anmelder anzugeben, ob

1. die Behandlung der Anmeldung nur in dem Falle erfolgen soll, dafs die Patentanmeldung nicht zur Erteilung eines Patentes führt (Eventualanmeldung); in diesem Falle braucht die Gebühr erst nach der Erledigung der Patentanmeldung gezahlt zu werden; oder ob
2. die Eintragung bis zum Zeitpunkte der Bekanntmachung oder endgültigen Zurückweisung der Patentanmeldung vertagt werden soll.

e) [Wortlaut wie unter 2. b) auf S. 954.]

f) [Wortlaut wie unter 2. d) auf S. 954, wenn statt „Patent" „Gebrauchsmuster" gesetzt wird.]

g) und h) [Wortlaut wie unter 2. e) und f) auf S. 954.]

3. Bezeichnung.

Nach § 2 Abs. 2 des Gesetzes mufs die Anmeldung die Bezeichnung angeben, unter der das Modell eingetragen werden soll. Die eingetragene Bezeichnung wird nach § 3 Abs. 3 des Gesetzes bekannt gemacht. Die Bezeichnung hat hiernach die Aufgabe, den beteiligten Kreisen von der Eintragung des Modells Kenntnis zu geben. Angaben ohne bestimmten technischen Inhalt (Phantasiewörter, Name des Erfinders, Vorzüge des Gegenstandes u. drgl.) sind unstatthaft.

4. Angabe des Neuen.

Nach § 2 Abs. 2 des Gesetzes mufs die Anmeldung angeben, „welche neue Gestaltung oder Vorrichtung dem Arbeits- oder Gebrauchszwecke dienen soll". Da diese Angabe für den Umfang des mit der Eintragung verbundenen Rechtsschutzes von Bedeutung ist, wird es sich, obwohl das Gesetz die Aufstellung eines Schutzanspruches nicht vorschreibt, doch in vielen Fällen empfehlen, die den Rechtsschutz bestimmenden Merkmale des Modells in einem nach Art der Patentansprüche zu bildenden Schutzanspruch zusammenzufassen.

5. Nachbildung.

Die Nachbildung gehört zu den wesentlichen Bestandteilen der Anmeldung und kann, solange die Eintragung nicht gelöscht ist, nicht zurückgegeben werden. Auch nach der Löschung wird sie regelmäfsig noch während fernerer vier Jahre, d. h. bis zur mutmafslichen Erledigung etwaiger Klagen wegen Verletzung des Schutzrechtes (§ 9 Abs. 2 des Gesetzes), zurückbehalten.

Dem Antrage auf Beglaubigung der Unterlagen einer Gebrauchsmusteranmeldung ist eine Nachbildung beizufügen, falls der Anmeldung eine Nachbildung beigegeben worden ist. Die Uebereinstimmung einer Zeichnung mit der der Eintragung zugrunde liegenden Nachbildung kann nicht bescheinigt werden. War der Anmeldung aufser der Nachbildung eine Zeichnung beigefügt, so mufs zum Zwecke der Beglaubigung neben der Nachbildung auch die Zeichnung vorgelegt werden.

6. Verschiedenes.

[Wortlaut wie unter 7. a) bis f) auf S. 955 u. 956, nur ist unter e) statt „Patentanmeldung" das Wort „Gebrauchsmusteranmeldung" zu setzen.]

G. Gebührenordnung für Zeugen und Sachverständige.

(Reichsgesetz vom 30. Juni 1878.)

§ 1. In den vor die ordentlichen Gerichte gehörigen Rechtssachen, auf welche die Zivilprozefs-Ordnung, die Strafprozefs-Ordnung oder die Konkurs-Ordnung Anwendung findet, erhalten die Zeugen und Sachverständigen Gebühren nach Mafsgabe der folgenden Bestimmungen.

§ 2. Der Zeuge erhält eine Entschädigung für die erforderliche Zeitversäumnis im Betrage von zehn Pfennig bis zu einer Mark auf jede angefangene Stunde. — Die Entschädigung ist unter Berücksichtigung des von dem Zeugen versäumten Erwerbes zu bemessen und für jeden Tag auf nicht mehr als zehn Stunden zu gewähren.

§ 3. Der Sachverständige erhält für seine Leistungen eine Vergütung nach Mafsgabe der erforderlichen Zeitversäumnis im Betrage bis zu zwei Mark auf jede angefangene Stunde. — Die Vergütung ist unter Berücksichtigung der Erwerbsverhältnisse des Sachverständigen zu bemessen und für jeden Tag auf nicht mehr als zehn Stunden zu gewähren. — Aufserdem sind dem Sachverständigen die auf die Vorbereitung des Gutachtens verwendeten Kosten, sowie die für eine Untersuchung verbrauchten Stoffe und Werkzeuge zu vergüten.

§ 4. Bei schwierigen Untersuchungen und Sachprüfungen ist dem Sachverständigen auf Verlangen für die aufgetragene Leistung eine Vergütung nach dem üblichen Preise derselben und für die aufserdem stattfindende Teilnahme an Terminen die in § 3 bestimmte Vergütung zu gewähren.

§ 5. Als versäumt gilt für den Zeugen oder Sachverständigen auch die Zeit, während welcher er seine gewöhnliche Beschäftigung nicht wieder aufnehmen kann

§ 6. Mufste der Zeuge oder Sachverständige aufserhalb seines Aufenthaltsortes einen Weg bis zur Entfernung von mehr als zwei Kilometer zurücklegen, so ist ihm, aufser den Beträgen, eine Entschädigung für die Reise und für den durch die Abwesenheit von dem Aufenthaltsorte verursachten Aufwand nach Mafsgabe der folgenden Bestimmungen zu gewähren.

§ 7. Soweit nach den persönlichen Verhältnissen des Zeugen oder Sachverständigen oder nach äufseren Umständen die Benutzung von Transportmitteln für angemessen zu erachten ist, sind als Reiseentschädigung die nach billigem Ermessen in dem einzelnen Falle erforderlichen Kosten zu gewähren. — In anderen Fällen beträgt die Reiseentschädigung für jedes angefangene Kilometer des Hinweges und des Rückweges fünf Pfennig.

§ 8. Die Entschädigung für den durch Abwesenheit von dem Aufenthaltsorte verursachten Aufwand ist nach den persönlichen Verhältnissen des Zeugen oder Sachverständigen zu bemessen, soll jedoch den Betrag von fünf Mark für jeden Tag, an welchem der Zeuge oder Sachverständige abwesend gewesen ist, und von drei Mark für jedes aufserhalb genommene Nachtquartier nicht überschreiten.

§ 9. Mufste der Zeuge oder Sachverständige innerhalb seines Aufenthaltsortes einen Weg bis zu einer Entfernung von mehr als zwei Kilometer zurücklegen, so ist ihm für den ganzen zurückgelegten Weg eine Reiseentschädigung nach den Vorschriften des § 7 zu gewähren.

§ 10. Konnte der Zeuge oder Sachverständige den erforderlichen Weg ohne Benutzung von Transportmitteln nicht zurücklegen, so sind die nach billigem Ermessen erforderlichen Kosten auch aufser den in den §§ 6 und 9 bestimmten Fällen zu gewähren.

§ 11. Abgaben für die erforderliche Benutzung eines Weges sind in jedem Falle zu erstatten.

§ 12. Bedarf der Zeuge wegen jugendlichen Alters oder wegen Gebrechen eines Begleiters, so sind die bestimmten Entschädigungen für beide zu gewähren.

§ 13. Soweit für gewisse Arten von Sachverständigen besondere Taxvorschriften bestehen, welche an dem Orte des Gerichtes, vor das die Ladung erfolgt, und an dem Aufenthaltsorte des Sachverständigen gelten, kommen lediglich diese Vorschriften in Anwendung. Gelten solche Taxvorschriften nur an einem dieser Orte, oder gelten an demselben Orte verschiedene Taxvorschriften, so kann der Sachverständige die Anwendung der ihm günstigeren Bestimmungen verlangen.

§ 14. Oeffentliche Beamte erhalten Tagegelder und Erstattung von Reisekosten nach Mafsgabe der für Dienstreisen geltenden Vorschriften, falls sie zugezogen werden: 1. als Zeugen über Umstände, von denen sie in Ausübung ihres Amtes Kenntnis erhalten haben; 2. als Sachverständige, wenn sie aus Veranlassung ihres Amtes zugezogen werden und die Ausübung der Wissenschaft, der Kunst oder des Gewerbes, deren Kenntnis Voraussetzung der Begutachtung ist, zu den Pflichten des von ihnen versehenen Amtes gehört.

Werden nach den Vorschriften dieses Paragraphen Tagegelder und Reisekosten gewährt, so findet eine weitere Vergütung an den Zeugen oder Sachverständigen nicht statt.

§ 15. Ist ein Sachverständiger für die Erstattung von Gutachten im allgemeinen beeidigt, so können die Gebühren für die bei bestimmten Gerichten vorkommenden Geschäfte durch Uebereinkommen bestimmt werden.

§ 16. Die Gebühren der Zeugen und Sachverständigen werden nur auf Verlangen derselben gewährt. Der Anspruch erlischt, wenn das Verlangen binnen drei Monaten nach Beendigung der Zuziehung oder Abgabe des Gutachtens bei dem zuständigen Gerichte nicht angebracht wird.

§ 17. Die einem Zeugen oder Sachverständigen zu gewährenden Beträge werden durch das Gericht oder den Richter, vor welchem die Verhandlung stattfindet, festgesetzt.

Sofern die Beträge aus der Staatskasse bezahlt und dieser nicht erstattet sind, kann die Festsetzung von dem Gerichte oder dem Richter, durch welche sie erfolgt ist, sowie von dem Gerichte der höheren Instanz von Amts wegen berichtigt werden.

Gegen die Festsetzung findet Beschwerde nach Mafsgabe der §§ 531 bis 538 der Zivilprozefs-Ordnung und des § 4 Abs. 3 des Gerichtskosten-Gesetzes, in Strafsachen nach Mafsgabe der §§ 346 bis 352 der Strafprozefs-Ordnung statt.

SACHVERZEICHNIS

der ersten und zweiten Abteilung.

Die arabischen Ziffern bedeuten die Seitenzahlen; I = erste Abteilung; II = zweite Abteilung.

H.

L.

M.

Q.

R.

S.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.






3 0112 115467695